**1.解：**由于假设每个球仅受外电场的影响，故首先讨论一个黄铜球在均匀外电场中的情况，利用像电荷模型和电偶极子模型来近似替代黄铜球上的感应电荷。

设置于过球心的直线上并关于球心对称的两个点电荷和，到球心的距离均为，其中，利用这两个点电荷在黄铜球心附近区域产生的电场近似等效原来的匀强电场，由点电荷场强公式和叠加原理，要使两个点电荷在球心处产生的电场近似等于匀强电场，则

对于球外的每个点电荷而言，电中性的黄铜球上的感应电荷可由像电荷与均匀分布于球面的电荷来代替，而均匀分布于球面的电荷等效于集中在球心的点电荷，由于球外两个点电荷等量异号，关于球心对称，则其分别对应的两个球心等效点电荷等量异号，相互中和，只剩像电荷。由导体球的像电荷模型可知，黄铜球外点电荷在球面的感应电荷只用像电荷代替，像电荷量为

像电荷到球心的距离为

所以等量异号点电荷和分别在球面产生的感应电荷所对应的像电荷分别为和，到球心的距离都为。

故匀强电场在黄铜球上感应出的电荷，可以近似等效为一对电偶极子，其电偶极矩大小为

对于用直径为，相距为的黄铜球排列而成的（立方）点阵，单位体积中黄铜球的个数为

因此在均匀外电场下，由该点阵组成的“电介质”材料的极化强度矢量为

故这种材料的电极化率为

故其介电常数为

其中为真空介电常数。

[参考文献：郑金.推导匀强电场中导体球的电荷面密度的简单方法[J].物理通报,2015(11):53-56.]

**2.证明：**分析电偶极子在电场中形成过程中的能量变化即可得到电偶极子在电场中的静电能。设电偶极子由相距为的两异号点电荷和，根据电偶极矩的定义

当电偶极子中的两异号点电荷之间的距离，即两异号点电荷尚未分离时，其放在电场中的静电能为。

将电偶极子中的两异号点电荷分离至间距为，可以视为将其中的正电荷移动的位移，并将负电荷移动的位移，此过程需要电场力对正负电荷做功

静电力做功与静电能的变化成相反数，故电偶极子放在电场中的静电能

**解：**会。

因为水的分子形状为折线形，由于电子云的偏移，其上的氢原子带正电，而氧原子带负电，故一个水分子的正负电荷中心并不重合，一个水分子可以视为一个电偶极子，水分子的键角，键长，假设每个氢原子带正电荷，则每个氧原子带负电荷，在无电场的条件下，一个水分子的偶极矩约为，故

在电场作用下水分子电子云的形状发生改变，正负电荷中心偏差距离增大，为计算方便，假定在水分子中原子所带电荷不变，键长不变，但键角缩小，故电偶极矩增大，因为电偶极矩增大而使电偶极子所减小的静电能与其氢原子正电荷之间相互靠近而增大的静电能在数值上相等，有

一个水分子的电偶极矩关于电场的函数为

阿伏伽德罗常数，水的体积，水的摩尔质量，单位体积内水分子的个数为

水的极化强度矢量为

由

得

**极化强度矢量的变化：**随电场强度的增大而增大，但方向始终与电场方向相同。具体分析如下：

在电场为的情况下，水分子电偶极矩的方向无规则均匀分布，从宏观上来看，整体的极化强度矢量为。当有电场施加在水分子上，由上面的证明可知，电偶极矩方向不同的水分子所具有的的静电能不同，设水分子的电偶极矩的方向与电场方向之间的角度为，水分子所具有的静电能

电偶极矩方向与电场方向的夹角越小，水分子所具有的的静电能越小，故水分子处于各个方向的几率满足Boltzman分布，从宏观上来看，整体出现极化强度矢量，且方向与电场方向相同。

根据Boltzman分布，单个水分子偶极矩处于与电场方向角度为概率（假设水分子偶极矩方向的分布可以是连续的，非量子化的）

设单位体积内水分子总数为，电偶极矩方向与电场方向夹角为的水分子个数用来表示，则电偶极矩与与电场同方向的水分子个数为，电偶极矩方向与电场方向夹角为的水分子个数为

在电场强度较小的情况下，可对上式展开并取其近似得

对所有角度积分必得到水分子总数，即

极化强度矢量即为单位体积内上述电偶极矩以该概率分布的平均，即

故当施加在水分子上的电场强度较小时，水的极化强度矢量与电场强度（近似）成正比。

而当施加在水分子上的电场足够强，水分子的电子云形状也会因受到静电力而发生明显变化，故此时水分子极化强度矢量的大小虽仍随电场强度的增大而增大，但两者不再成正比。

综上，随着电场增加，极化强度矢量方向不变，但大小增大。

**3.**设铁钉、软管、易拉罐三者高度相等，为，足够大，故可以忽略边缘效应，铁钉各处粗细均匀，横截面为半径为的圆，软管内径为，外径为，且软管厚度较小（即），制作软管的橡皮的介电常数为，易拉罐的半径为。

**（1）解：**先不考虑软管极化，根据高斯定理，易拉罐内部距离铁钉为的任意某点的电场强度满足

再来考虑软管在该电场下的极化情况，极化强度矢量与当地电场方向相同，故在软管外感应出与同种电荷，在软管内壁感应出与异种电荷。内壁处极化电荷面密度为

（这里假定铁钉所带电荷较少，故产生电场较小，使得橡皮软管的极化强度仍与当地的电场成正比）

内壁处极化电荷量为

又根据材料介电常数和电极化率之间的关系

内壁处极化电荷量又可以写成

同理可得外壁处极化电荷量为

故软管受到的力为

其中的负号代表软管受力方向为水平垂直于铁钉向内，即软管受到是一种“向里挤压”的力。

**（2）解：**当铁钉不带点，而易拉罐带电荷为时，易拉罐作为一个导体，由于静电屏蔽效应，其净电荷全部集中于外表面，而罐内不存在电场，故软管不受力。

**（3）解：**电势是电场对距离的积分

其中的积分区间可以分为软管所填充的区间和除软管之外的其余区间，即

先来看铁钉与易拉罐之间除软管以外的空间，极化的橡皮软管所带总电量仍为，故铁钉与易拉罐之间没有净电荷，故根据高斯定理，对于铁钉与导体之间（除橡皮软管所填充区域以外）轴与铁钉所在直线重合的任意柱面的电通量相等，即

再来考虑极化的软管，极化强度矢量方向与当地电场方向相同，故在软管外壁感应出正电荷，在内壁处感应出负电荷。软管内壁处极化电荷面密度为

（假设铁钉与易拉罐之间的电压较小，故铁钉与易拉罐之间的电场较小，使得橡皮软管的极化强度矢量仍与当地的电场成正比）

软管内壁极化电荷量为

又根据材料电极化率和介电常数之间的关系

软管内壁极化电荷量又可以写成

同理可得软管外壁极化电荷量为

根据高斯定理，软管所填充的空间中与铁钉距离为的任意某点的电场强度满足

故铁钉与易拉罐之间的空间电场强度的表达式为

将的解析式代入式

根据高斯定理，铁钉所带电荷在易拉罐内部距离铁钉为的任意某点的电场强度为

故软管受到的力为

其中的负号代表软管受力方向为水平垂直于铁钉向内，即软管受到是一种“向里挤压”的力。