

第一次期中考试

1.汪家俊 2.王哲 3.王哲 4.张羽 5.张羽 6.汪家俊

2018 年 4 月 17 日

1

2

3

4 (5分)

感应电荷的电荷量大小小于（小于等于） Q 。

感应电荷必与 Q 为异性电荷。大地，金属板和无穷远处可以认为是等势体，所以金属板上感应电荷发出的电场线不能终结于无穷远或者大地，只能终结于已有电荷 Q ，而电荷 Q 发出的电场线可以终结于无穷远处和大地。所以电荷 Q 发出的电场线是多于金属板上感应电荷所发出的电场线的，根据高斯定理，感应电荷的电荷量大小是小于 Q 的大小的。当金属板无限大或电荷 Q 无限接近金属板时，感应电荷的电荷量大小是无限接近 Q 的大小的。

5 (25分)

因为大导体球 R_3 是个等势体，内部空腔外区域电场强度为0，大导体球外表面净电荷分布对净内部电荷分布无影响。由对称性得，小导体球 R_1 表面均匀分布 Q 的净电荷，大导体球内表面 R_2 均匀分布 $-Q$ 净电荷。由电荷守恒和对称性得大导体球外表面均匀分布 Q 净电荷。

(a)

设小导体球球心坐标 \mathbf{r}_1 ，大导体球球心坐标 \mathbf{r}_3 ，场点为 \mathbf{r} 。

小导体球内部:

$$\mathbf{E} = 0 \quad (1)$$

小导体球外空腔:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} \quad (2)$$

大导体球内部空腔外:

$$\mathbf{E} = 0 \quad (3)$$

大导体球外部:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_3|^3} \quad (4)$$

(b)

大导体球外部:

$$V = \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_3|}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left| \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_3|^3} \right| d(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_3|) = \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_3|}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_3|} \quad (5)$$

大导体球内部空腔外:

$$V = \int_{R_3}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left| \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_3|^3} \right| d(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_3|) = \int_{R_3}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3} \quad (6)$$

小导体球外空腔:

$$V = \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left| \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} \right| d(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \quad (7)$$

小导体球内部:

$$V = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left| \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} \right| d(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \quad (8)$$

总的电势能:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i = \frac{1}{2} \left(Q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3} - Q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3} + Q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \right) = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \quad (9)$$

(c)

大球外表面电荷可视为 Q ， Q' 两部分，其中 Q 为之前讨论过的由小导体球带电所引发的感应电荷， Q' 为大导体球外点电荷 q 所引起的感应电荷。设点电荷 q 的位置坐标为 r_2

对于 Q ，由于其是均匀分布的，所以对大导体球内部电场和的强度为0。

对于 Q' 部分，其产生的电场可视为屏蔽点电荷 q 所产生的电场，所以在
大球内部 $\mathbf{E}_{Q'} = -\mathbf{E}_q$

$$\mathbf{E}_{Q'} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} \quad (10)$$

大球内表面 R_2 的电荷分布没有改变，仍是均匀的，所以力大小：

$$F = |\mathbf{F}| = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \quad (11)$$

(d)

由(b)知，

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \quad (12)$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (13)$$

所以

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \quad (14)$$

等效电路图如图， C 电容为 C_1 和 C_2 电容的串联电容。（算出 C 或 C_1 即可的满分）

$$C_1 = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \quad (15)$$

$$C_2 = 4\pi\epsilon_0 R_3 \quad (16)$$

6

