第二次期中考试

张羽

2018 年 5 月 23 日

1

1.1 （9分）

经过计算，导体球电容

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \tag{1}$$

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R \tag{2}$$

可以总结规律，一般越大的东西带电能力相对越大。

金属球是由表面带电，凹陷部分电荷密度小，相对减小了可有效带电面积，减小带电能力，电容小；凸起部分电荷密度大，相对增加有效带点面积，增加带电能力，电容大。

1.2

1.3

1.4

1.5

2 （25分）

设x长度对应部分自由面电荷密度为σ_0，中间部分对应电场强度为$\boldsymbol{E}_0$，剩余部分对应的自由面电荷密度为σ_1，极化电荷密度为σ_{pol}，中间部分对应电场强度为$\boldsymbol{E}_1$，极板电势差为$V(x)$。

（1）电荷电量为Q，

$$\sigma_0 xb + \sigma_1 (a-x) b = Q \tag{3}$$

上下极板为等势体

$$|\boldsymbol{E}_0| d = |\boldsymbol{E}_1| d = V(x) \tag{4}$$

由高斯定律

$$|\boldsymbol{E}_0| \varepsilon_0 = \sigma_0 \tag{5}$$

$$|\boldsymbol{E}_1| \varepsilon_1 = \sigma_1 \tag{6}$$

得

$$|\boldsymbol{E}_0| = |\boldsymbol{E}_1| = \frac{Q}{\varepsilon_0 xb + \varepsilon_1 (a-x) b} \tag{7}$$

设电场方向均向下

$$\sigma_0 = \frac{Q\varepsilon_0}{\varepsilon_0 xb + \varepsilon_1 (a-x) b} \tag{8}$$

$$\sigma_1 = \frac{Q\varepsilon_1}{\varepsilon_0 xb + \varepsilon_1 (a-x) b} \tag{9}$$

所以，极化电荷密度

$$\sigma_{pol} = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \sigma_1 = \frac{Q(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_0 xb + \varepsilon_1 (a-x) b} \tag{10}$$

（2）电容器内的总静电能W

$$W = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} d^3 x \tag{11}$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{\varepsilon_0 xb + \varepsilon_1 (a-x) b} \right)^2 xdb + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \left(\frac{Q}{\varepsilon_0 xb + \varepsilon_1 (a-x) b} \right)^2 (a-x) db \tag{12}$$

$$= \frac{Q^2 d}{2b \left(\varepsilon_0 x + \varepsilon_1 (a-x) \right)} \tag{13}$$

（3）电介质受到的静电拉力 $\boldsymbol{F}$

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\partial W}{\partial x} \hat{i} = -\frac{Q^2 d}{2b} \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{(\varepsilon_0 x + \varepsilon_1 (a-x))^2} \hat{i} \tag{14}$$

其中$\hat{i}$为x变大方向

（4）电解质满足的微分方程

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{|\boldsymbol{F}|}{m} = \frac{Q^2d}{2mb}\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{(\varepsilon_0 x + \varepsilon_1(a-x))^2}\hat{i} \tag{15}$$

方向向左

（5）由（4）知静电力的方向在$x = 0$之前都是向左的，而由对称性知，$x < 0$时向右，所以$x = 0$时电介质获得最大速度。

所以，电介质动能E为

$$E_{max} = \int_{\frac{a}{2}}^{0} -\frac{Q^2d}{2b^2}\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{(\varepsilon_0 x + \varepsilon_1(a-x))^2}dx = \frac{Q^2d}{2ab^2}\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)} \tag{16}$$

$$E_{max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \tag{17}$$

$$v_{max} = \left(\frac{Q^2d}{mab}\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)}\right)^{1/2} \tag{18}$$

3

4