第二次习题课

2021 年 11 月 28 日

(补充习题 3) 1： 试证明相对熵纠缠度量在纯态情况下和 Von Neumann 熵是等价的。(求任意给定纯态 $|\psi_{AB}\rangle$ 和任意混合态 $\sum_i p_i\rho_i\otimes\sigma_i$ 中的最小相对熵 $S(|\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|\,\|\sum_i p_i\rho_i\otimes\sigma_i)$)。

解 ：Werner 定义了一种可分态的表述方式：$\sum_i p_i\rho_i\otimes\sigma_i$ 其中 ρ_i 和 σ_i 均为纯态，也就是可以写成 $\sum_i p_i|v_i\rangle\langle v_i|\otimes|w_i\rangle\langle w_i|$ 的形式（式子中的态未必正交）。

以下证明内容选自文章[1] [2].

这个命题的证明思路是这样的：设 ρ^* 为使相对熵函数最小的非纠缠态，即：

$$E(\sigma)=\min_{\rho\in\mathcal{D}}S(\sigma\|\rho) \tag{1}$$

其中 $\mathcal{D}$ 是非纠缠态构成的集合。我们先猜出 ρ^* 的形式为 ($|\phi_i\rangle$ 和 $|\psi_i\rangle$ 分别是各自空间的正交态)：

$$\rho^*=\sum\nolimits_n a_{nn}|\phi_n\psi_n\rangle\langle\phi_n\psi_n| \tag{2}$$

再去证明梯度 $\frac{d}{dx}S(\sigma||(1-x)\rho^*+x\rho)|_{x=0}$ 对于任意的 $\rho\in D$ 是非负的. 显然，若 ρ^* 表示最小值对应的态, 上述的梯度值一定是严格负的，这将会和我们的证明结果矛盾。

定义一个函数 $f(x,\rho)\equiv S(\sigma||(1-x)\rho^*+x\rho)$, 使用恒等式 $\ln A=\int_0^\infty[(At-1)/(A+t)]dt/(1+t^2)$ 得到：

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,\rho)=-\lim_{x\to0}tr\{\sigma\frac{\ln[(1-x)\rho^*+x\rho]-\ln\rho^*}{x-0}\} \tag{3}$$

$$=tr\left(\sigma\int_0^\infty\lim x^{-1}\left([(\rho^*t-1)+xt(\rho-\rho^*)][(t+\rho^*)+x(\rho-\rho^*)]^{-1}-(\rho^*t-1)(\rho^*+t)^{-1}\right)\frac{dt}{1+t^2}\right) \tag{4}$$

$$=tr\left(\sigma\int_0^\infty(\rho^*+t)^{-1}(\rho^*-\rho)(\rho^*+t)^{-1}dt\right) \tag{5}$$

$$=1-\int_0^\infty tr[\sigma(\rho^*+t)^{-1}\rho(\rho^*+t)^{-1}]dt \tag{6}$$

$$=1-\int_0^\infty tr[(\rho^*+t)^{-1}\sigma(\rho^*+t)^{-1}\rho]dt \tag{7}$$

[1] Vedral V, Plenio M B. Entanglement measures and purification procedures[J]. Physical Review A, 1998, 57(3): 1619.

[2] Wu S, Zhang Y. Calculating the relative entropy of entanglement[J]. arXiv preprint quant-ph/0004018, 2000.

因为 $\rho^* = \sum_n a_{nn} |\phi_n\psi_n\rangle \langle\phi_n\psi_n|$，不难得到

$$\begin{aligned}&(\rho^*+t)^{-1}\sigma(\rho^*+t)^{-1}\\ &=\sum\nolimits_{nn'}(a_{nn}+t)^{-1}\cdot a_{nn'}\cdot(a_{n'n'}+t)^{-1}\,|\phi_n\psi_n\rangle\,\langle\phi_{n'}\psi_{n'}|\end{aligned} \tag{8}$$

令

$$g(n,n^{'}) \equiv a_{nn'}\cdot\int_0^\infty (a_{nn}+t)^{-1}\cdot(a_{n'n'}+t)^{-1}dt \tag{9}$$

显然可以得到 $g(n,n)=1$，并且对于 $n\neq n^{'}$

$$g(n,n^{'}) = a_{nn'}\cdot\frac{\ln a_{nn}-\ln a_{n'n'}}{a_{nn}-a_{n'n'}} \tag{10}$$

下面证明 $|g(n,n^{'})|\leq 1$. Vedral V, Plenio M B 的工作证明了

$$0\leq\sqrt{a_{nn}a_{n'n'}}\cdot\frac{\ln a_{nn}-\ln a_{n'n'}}{a_{nn}-a_{n'n'}}\leq 1 \tag{11}$$

所以我们只需要说明 $|a_{nn'}|\leq\sqrt{a_{nn}a_{n'n'}}$。令 $|\Psi\rangle = a\,|\phi_n\psi_n\rangle + b\,|\phi_{n'}\psi_{n'}\rangle$, a 和 b 是任意复数。因为 σ 是量子态，正定的

$$\langle\Psi|\,\sigma\,|\Psi\rangle\geq 0 \tag{12}$$

对任意 a 和 b 都成立，这要求

$$a_{nn}a_{n'n'}-a_{nn'}a_{n'n} = a_{nn}a_{n'n'}-|a_{nn'}|^2\geq 0 \tag{13}$$

因此 $|a_{nn'}|\leq\sqrt{a_{nn}a_{n'n'}}$ 以及:

$$|g(n,n^{'})|\leq 1 \tag{14}$$

令 $\rho\equiv|\alpha\rangle\langle\alpha|\otimes|\beta\rangle\langle\beta|$ 其中 $|\alpha\rangle =_n \sum a_n\,|\phi_n\rangle$ ， $|\beta\rangle =_n \sum b_n\,|\psi_n\rangle$ 是归一化态可以计算出

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,\rho)-1 = -\sum\nolimits_{n_1n_2} g(n_1,n_2)\cdot a_{n_2}b_{n_2}a^*_{n_1}b^*_{n_1} \tag{15}$$

therefore

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial f}{\partial x}(0,\rho)-1\right|\\ \leq\ &\sum\nolimits_{n_1n_2}|g(n_1,n_2)|\cdot|a_{n_2}|\cdot|b_{n_2}|\cdot|a^*_{n_1}|\cdot|b^*_{n_1}|\\ \leq\ &\sum\nolimits_{n_1n_2}|a_{n_2}|\cdot|b_{n_2}|\cdot|a^*_{n_1}|\cdot|b^*_{n_1}|\\ =\ &(\sum\nolimits_n|a_n|\cdot|b_n|)^2\\ \leq\ &\sum\nolimits_n|a_n|^2\cdot\sum\nolimits_n|b_n|^2\\ =\ &1\end{aligned} \tag{16}$$

Then it follows that $\frac{\partial f}{\partial x}(0,|\alpha\beta\rangle\langle\alpha\beta|)\geq 0$. 对于任意纠缠态 $\rho\in D$ 均可写成以下形式 $\rho = \sum_i r_i\,|\alpha^i\beta^i\rangle\langle\alpha^i\beta^i|$，我们有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,\rho) = \sum\nolimits_i r_i\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(0,|\alpha^i\beta^i\rangle\langle\alpha^i\beta^i|)\geq 0 \tag{17}$$

现在我们证明 $S(\sigma||\rho) \geq S(\sigma||\rho^*)$ 对所有的 $\rho \in D$ 成立。设 $S(\sigma||\rho) < S(\sigma||\rho^*)$ 对某个 $\rho \in D$ 不成立，那么当 $0 < x \leq 1$，

$$\begin{aligned} f(x,\rho) &= S(\sigma||(1-x)\rho^* + x\rho) \\ &\leq (1-x)S(\sigma||\rho^*) + xS(\sigma||\rho) \\ &= (1-x)f(0,\rho) + xf(1,\rho) \end{aligned} \tag{18}$$

这表示

$$\frac{f(x,\rho) - f(0,\rho)}{x} \leq f(1,\rho) - f(0,\rho) < 0 \tag{19}$$

与给定小的 x 值时 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,\rho) \geq 0$ 矛盾。所以对于任意 $\rho \in D$，均有 $S(\sigma||\rho) \geq S(\sigma||\rho^*)$，也就是说，态 $\rho^* = \sum_n a_{nn} |\phi_n\psi_n\rangle \langle\phi_n\psi_n|$ 是使相对熵函数 $S(\sigma||\rho)$ 在 $\rho \in D$ 上最小的值。

此时

$$Er(\sigma) = tr\{\sigma(\ln\sigma - \ln\rho^*)\} = -\sum\nolimits_n a_{nn}\ln a_{nn} - S(\sigma) \tag{20}$$

相对熵函数退化为 von-Neumann 熵。纯态的 von-Neumann 熵为 0，上式可以更简单地写为：

$$Er(\sigma) == -\sum\nolimits_n a_{nn}\ln a_{nn} \tag{21}$$

证明结束。

(补充习题 3) 2： 计算混合量子态 $\rho = p|\phi^+\rangle\langle\phi^+| + \frac{1-p}{4}I_{4\times4}$ 的纠缠 concurrence，其中 $0 \leq p \leq 1$，$|\phi^+\rangle$ 是 Bell 态。

解：容易验证，$\rho^* = \rho$。已知 $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$，$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$，则 $\sigma_y \otimes \sigma_y |\phi^+\rangle = -|\phi^+\rangle$，则：

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= (\sigma_y \otimes \sigma_y)\,\rho^*\,(\sigma_y \otimes \sigma_y) \\ &= (\sigma_y \otimes \sigma_y)\,p\,|\phi^+\rangle\langle\phi^+|\,(\sigma_y \otimes \sigma_y) + (\sigma_y \otimes \sigma_y)\,\frac{1-p}{4}I_{4\times4}\,(\sigma_y \otimes \sigma_y) \\ &= p\,|\phi^+\rangle\langle\phi^+| + \frac{1-p}{4}I_{4\times4} \\ &= \rho \end{aligned} \tag{22}$$

则矩阵 R 为：

$$R = \sqrt{\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}} = \rho \tag{23}$$

求解久期方程 $|\rho - \lambda I| = 0$，得到：

$$\left(\frac{1-p}{4} - \lambda\right)^3 \left(\frac{1+3p}{4} - \lambda\right) = 0 \tag{24}$$

所以

$$\lambda_1 = \frac{1+3p}{4}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{1-p}{4} \tag{25}$$

则并发度（共生，concurrence）为

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} = \max\{0, \frac{3p-1}{2}\} \tag{26}$$

$$C(\rho) = \begin{cases} \frac{3p-1}{2} & \frac{1}{3} < p \leq 1 \\ 0 & 0 \leq p \leq \frac{1}{3} \end{cases} \tag{27}$$

(第 1 章)10： 证明 $S(\rho_A) + S(\rho_B) \leq S(\rho_{AC}) + S(\rho_{BC})$。

解法 1 ：(Nielson 的书中内容) 条件熵定义为 $S(\rho_C|\rho_A) = S(\rho_{AC}) - S(\rho_A)$，引入辅助系统 C，定义矩阵函数 $T : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$，即:

$$\begin{aligned} T(\rho_{ABC}) =& S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AC}) - S(\rho_{BC}) \\ =& - S(\rho_C|\rho_A) - S(\rho_C|\rho_B) \end{aligned} \tag{28}$$

首先我们从 Corollary11.13 知道，条件熵定义在凸集上的凹函数 (证明方法是用相对熵的凸性导出条件熵的凹性)，(鉴于中文教材和英文教材的凹凸定义不太一致，我们下面改用 convex 和 concave 来表述。)

Definition 1. *A real-valued function f on a convex set D is said to be **cancave** if, for any x and y in D and $\lambda \in [0, 1]$,*

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \tag{29}$$

Definition 2. *A real-valued function f on a convex set D is said to be **canvex** if, for any x and y in D and $\lambda \in [0, 1]$,*

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \tag{30}$$

我们已经知道条件熵函数是 concave，那么我们前面定义的 $T(\rho_{ABC})$ 一定是 convex。设密度矩阵 ρ_{ABC} 有谱分解：$\rho_{ABC} = \sum_i p_i |i\rangle \langle i|$，由于 $T(\rho_{ABC})$ convex，必有：

$$T(\rho_{ABC}) \leq \sum_i p_i T(|i\rangle \langle i|) \tag{31}$$

对于一个三系统纯态而言，有 $S(A, C) = S(B)$ 以及 $S(B, C) = S(A)$。所以对于纯态 $|i\rangle \langle i|$，有 $T(|i\rangle \langle i|) = 0$，所以 $T(\rho_{ABC}) \leq 0$，因此：

$$S(\rho_A) + S(\rho_B) \leq S(\rho_{AC}) + S(\rho_{BC}) \tag{32}$$

解法 2 ：对于 ABC 系统我们引入系统 R 使得 ABCR 为纯态。根据 von-Neumann 熵的特性，对于一个纯态系统，有：

$$S(\rho_{ABC}) = S(\rho_R), \quad S(\rho_{AC}) = S(\rho_{BR}) \tag{33}$$

我们知道 von-Neumann 熵的强次加性定理为：

$$S(\rho_{ABC}) + S(\rho_B) \leq S(\rho_{AB}) + S(\rho_{BC}) \tag{34}$$

带入等式关系：

$$S(\rho_R)+S(\rho_B)\leq S(\rho_{AB})+S(\rho_{AR}) \tag{35}$$

令 $A'=R$，$B'=B$，$C'=A$ 上式可以重写为：

$$S(\rho_{A'})+S(\rho_{B'})\leq S(\rho_{B'C'})+S(\rho_{A'C'}) \tag{36}$$

也就是我们要证的形式：

$$S(\rho_A)+S(\rho_B)\leq S(\rho_{BC})+S(\rho_{AC}) \tag{37}$$

(第 1 章) 11： 考虑 2 - qubit 系统 $\rho_{AB}=\frac{1}{8}I\otimes I+\frac{1}{2}\left|\psi^-\right\rangle\left\langle\psi^-\right|$ ，分别沿 $\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}$ 方向测 A,B 粒子的自旋。其中 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\cos\theta$，则测量结果均为向上的联合概率是多少？由 Peres-Horodeski 判据，确定 ρ_{AB} 是否为可分量子态。

解 ：沿着指定方向 $\boldsymbol{n}$ 进行测量得到 positive 结果的概率为 $Tr[\frac{1}{2}(1+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\rho]$，如果是联合测量的话，则：

$$\begin{aligned}P=&Tr[\frac{1}{2}(1+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}_A)\otimes\frac{1}{2}(1+\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}_B)\rho_{AB}]\\=&Tr[\frac{1}{2}(1+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}_A)\otimes\frac{1}{2}(1+\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}_B)\frac{1}{8}]+Tr[\frac{1}{2}(1+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}_A)\otimes\frac{1}{2}(1+\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}_B)\frac{1}{2}\left|\psi^-\right\rangle\left\langle\psi^-\right|]\end{aligned} \tag{38}$$

其中

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(1+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}_A)\otimes\frac{1}{2}(1+\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}_B)\\=&\frac{1}{4}\left(I_A\otimes I_B+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}_A)\otimes I_B+I_A\otimes(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}_B)+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}_A)\otimes(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}_B)\right)\end{aligned} \tag{39}$$

因为 Pauli 算符和的迹为 0，所以对上式取迹，只有第一项不为 0，

$$\begin{aligned}&Tr[\frac{1}{2}(1+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}_A)\otimes\frac{1}{2}(1+\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}_B)]\\=&Tr[\frac{1}{4}I_A\otimes I_B]\\=&1\end{aligned} \tag{40}$$

我们观察到：

$$\sigma_{Ax}\left|\psi^-\right\rangle=-\left|\phi^-\right\rangle=-\sigma_{Bx}\left|\psi^-\right\rangle \tag{41}$$

$$\sigma_{Ay}\left|\psi^-\right\rangle=i\left|\phi^+\right\rangle=-\sigma_{By}\left|\psi^-\right\rangle \tag{42}$$

$$\sigma_{Az}\left|\psi^-\right\rangle=\left|\psi^+\right\rangle=-\sigma_{Bz}\left|\psi^-\right\rangle \tag{43}$$

所以有以下关系式成立：

$$\begin{cases}Tr(\left|\psi^-\right\rangle\left\langle\psi^-\right|)=1\\Tr((\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}_A)\otimes I_B\left|\psi^-\right\rangle\left\langle\psi^-\right|)=Tr(I_A\otimes(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}_B)\left|\psi^-\right\rangle\left\langle\psi^-\right|)=0\\Tr[(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}_A)\otimes(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}_B)\left|\psi^-\right\rangle\left\langle\psi^-\right|]=-n_im_j\left\langle\psi^-\middle|\sigma_{Ai}\sigma_{Aj}\middle|\psi^-\right\rangle\\=-n_im_j\left\langle\psi^-\middle|i\epsilon_{ijk}\sigma_k+\delta_{ij}\middle|\psi^-\right\rangle=-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}=-\cos\theta\end{cases}$$

所以：

$$P = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{m} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\cos\theta \tag{44}$$

Peres-Horodeski 判据是指，对两系统密度矩阵取部分转置后判断是否为正定。也等价于部分转置后的矩阵是否有负的本征值。

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}, \quad \rho_{AB}^{T_B} \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \tag{45}$$

求解久期方程 $|\rho_{AB}^{T_B} - \lambda I| = 0$，得到：

$$-(\frac{3}{8} - \lambda)^3(\frac{1}{8} + \lambda) = 0 \tag{46}$$

$\lambda_{1,2,3} = \frac{3}{8}$，$\lambda_4 = -\frac{1}{8}$。有负的本征值，所以 ρ_{AB} 是不可分量子态。