量子信息导论
PHYS5251P
2021-2022 学年第一学期

第一次作业

截止日期：2021. 10. 13（周三）

姓名：陈　稼　霖
学号：SA21038052
成绩：__________

第 1 题 得分: __________. 计算二元对称信道的信道容量.

解: 对二元对称信道, 设信源发送信号为 $X\in\{0,1\}$, 经信道传输后信宿接收信号为 $Y\in\{0,1\}$, 信道如图 1 所示:

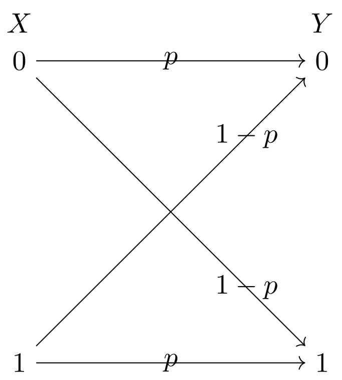

图 1: 二元对称信道

即

$$
\begin{aligned}
P(Y=0\mid X=0)=&P(Y=1\mid X=1)=p, &(1)\\
P(Y=1\mid X=0)=&P(Y=0\mid X=1)=1-p. &(2)
\end{aligned}
$$

X 与 Y 的互信息量为

$$
I(X;Y)=H(Y)-H(Y\mid X), \tag{3}
$$

其中 Y 的信息熵为

$$
\begin{aligned}
H(Y)=&-P(Y=0)\log_2 P(Y=0)-P(Y=1)\log_2 P(Y=1)\\
=&-P(Y=0)\log_2 P(Y=0)-[1-P(Y=0)]\log_2[1-P(Y=0)]\\
\leq&-\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}=1,
\end{aligned} \tag{4}
$$

而 $Y\mid X$ 的条件熵

$$
\begin{aligned}
H(Y\mid X)=&-P(X=0)[P(Y=0\mid X=0)\log_2 P(Y=0\mid X=0)+P(Y=1\mid X=0)\log_2 P(Y=1\mid X=0)]\\
&-P(X=1)[P(Y=0\mid X=1)\log_2 P(Y=0\mid X=1)+P(Y=1\mid X=1)\log_2 P(Y=1\mid X=1)]\\
=&-P(X=0)[p\log_2 p+(1-p)\log_2(1-p)]-P(X=1)[(1-p)\log_2(1-p)+p\log_2 p]\\
=&-p\log_2 p-(1-p)\log_2(1-p).
\end{aligned} \tag{5}
$$

故二元对称信道的信道容量为

$$
C=\max_{P(X=0)} I(X;Y)=1+p\log_2 p+(1-p)\log_2(1-p). \tag{6}
$$

□

第 2 题 得分: __________. 空间 H 中存在两组正交归一化态 $\{|\psi_i\rangle\}$、$\{|\tilde{\psi_i}\rangle\}$, 则存在幺正变换 U, 使得 $U|\psi_i\rangle=|\tilde{\psi_i}\rangle$, 试构造该 U 变换.

解: 构造

$$U=\sum_i|\tilde{\psi}_i\rangle\langle\psi_i|, \tag{7}$$

则 U 满足变换

$$U|\psi_i\rangle=\sum_j|\tilde{\psi}_j\rangle\langle\psi_j|\psi_i\rangle=\sum_j\delta_{ij}|\tilde{\psi}_j\rangle=|\tilde{\psi}_i\rangle,\quad\forall i, \tag{8}$$

且 U 是幺正的:

$$U^\dagger U=UU^\dagger=\left(\sum_i|\psi_i\rangle\langle\tilde{\psi}_i|\right)\left(\sum_j|\tilde{\psi}_j\rangle\langle\psi_j|\right)=\sum_{ij}\delta_{ij}|\psi_i\rangle\langle\psi_j|=\sum_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|=I. \tag{9}$$

□

第 3 题 得分: ________. 空间 H 中存在两组归一化态 $\{|\psi_i\rangle\}$、$\{|\tilde{\psi}_i\rangle\}$, 它们满足: $\forall i,j$, 有 $\langle\psi_i|\psi_j\rangle=\langle\tilde{\psi}_i|\tilde{\psi}_j\rangle$. 请证明, 则存在 U, 使得 $U|\psi_i\rangle=|\tilde{\psi}_i\rangle$, 并构造出该 U 变换.

解: 设

$$U=\sum_{jk}a_{jk}|\tilde{\psi}_j\rangle\langle\psi_k|. \tag{10}$$

要使 $U|\psi_i\rangle=|\tilde{\psi}_i\rangle$, 即需

$$U|\psi_i\rangle=\sum_{jk}a_{jk}|\tilde{\psi}_j\rangle\langle\psi_k|\psi_i\rangle=\sum_j\left(\sum_k a_{jk}\langle\psi_k|\psi_i\rangle\right)|\tilde{\psi}_j\rangle=|\tilde{\psi}_i\rangle,\quad\forall i, \tag{11}$$

$$\Longrightarrow\sum_k a_{jk}\langle\psi_k|\psi_i\rangle=\delta_{ij},\quad\forall i,j, \tag{12}$$

$$\Longrightarrow AB=I \tag{13}$$

其中矩阵

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$B=\begin{bmatrix}\langle\psi_1|\psi_1\rangle&\langle\psi_1|\psi_2\rangle&\cdots&\langle\psi_1|\psi_n\rangle\\\langle\psi_2|\psi_1\rangle&\langle\psi_2|\psi_2\rangle&\cdots&\langle\psi_2|\psi_n\rangle\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\langle\psi_n|\psi_1\rangle&\langle\psi_n|\psi_2\rangle&\cdots&\langle\psi_n|\psi_n\rangle\end{bmatrix}. \tag{15}$$

因此我们只需由上式构造矩阵 B, 再计算

$$A=B^{-1}, \tag{16}$$

然后构造

$$U=\sum_{jk}a_{jk}|\tilde{\psi}_j\rangle\langle\psi_k| \tag{17}$$

即可满足 $U|\psi_i\rangle=|\tilde{\psi}_i\rangle$. □

第 4 题 得分: ________. 对两比特态 $|\phi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_A\left(\frac{1}{2}|0\rangle_B+\frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle_B\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle_B+\frac{1}{2}|1\rangle_B\right)$,

i) 求约化密度矩阵 ρ_A, ρ_B;

ii) 求 $|\phi\rangle$ 的 Schmidt 分解形式.

解: 1) 复合系统的密度矩阵为

$$\begin{aligned}
\rho_{AB}=&|\phi\rangle\langle\phi|\\
=&\left[\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_A\left(\frac{1}{2}|0\rangle_B+\frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle_B\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle_B+\frac{1}{2}|1\rangle_B\right)\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0|_A\left(\frac{1}{2}\langle 0|_B+\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 1|_B\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1|_A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0|_B+\frac{1}{2}\langle 1|_B\right)\right]\\
=&\frac{1}{8}|0\rangle_A|0\rangle_B\langle 0|_A\langle 0|_B+\frac{\sqrt{3}}{8}|0\rangle_A|0\rangle_B\langle 0|_A\langle 1|_B+\frac{\sqrt{3}}{8}|0\rangle_A|0\rangle_B\langle 1|_A\langle 0|_B+\frac{1}{8}|0\rangle_A|0\rangle_B\langle 1|_A\langle 1|_B\\
&+\frac{\sqrt{3}}{8}|0\rangle_A|1\rangle_B\langle 0|_A\langle 0|_B+\frac{3}{8}|0\rangle_A|1\rangle_B\langle 0|_A\langle 1|_B+\frac{3}{8}|0\rangle_A|1\rangle_B\langle 1|_A\langle 0|_B+\frac{\sqrt{3}}{8}|0\rangle_A|1\rangle_B\langle 1|_A\langle 1|_B\\
&+\frac{\sqrt{3}}{8}|1\rangle_A|0\rangle_B\langle 0|_A\langle 0|_B+\frac{3}{8}|1\rangle_A|0\rangle_B\langle 0|_A\langle 1|_B+\frac{3}{8}|1\rangle_A|0\rangle_B\langle 1|_A\langle 0|_B+\frac{\sqrt{3}}{8}|1\rangle_A|0\rangle_B\langle 1|_A\langle 1|_B\\
&+\frac{1}{8}|1\rangle_A|1\rangle_B\langle 0|_A\langle 0|_B+\frac{\sqrt{3}}{8}|1\rangle_A|1\rangle_B\langle 0|_A\langle 1|_B+\frac{\sqrt{3}}{8}|1\rangle_A|1\rangle_B\langle 1|_A\langle 0|_B+\frac{1}{8}|1\rangle_A|1\rangle_B\langle 1|_A\langle 1|_B.
\end{aligned}\tag{18}$$

约化密度矩阵

$$\rho_A=\mathrm{Tr}_B[\rho_{AB}]=\sum_{i=0,1}\langle i|_B(|\phi\rangle\langle\phi|)|i\rangle_B=\frac{1}{2}|0\rangle_A\langle 0|_A+\frac{\sqrt{3}}{4}|0\rangle_A\langle 1|_A+\frac{\sqrt{3}}{4}|1\rangle_A\langle 0|_A+\frac{1}{2}|1\rangle_A\langle 1|_A,\tag{19}$$

$$\rho_B=\mathrm{Tr}_A[\rho_{AB}]=\sum_{i=0,1}\langle i|_A(|\phi\rangle\langle\phi|)|i\rangle_A=\frac{1}{2}|0\rangle_B\langle 0|_B+\frac{\sqrt{3}}{4}|0\rangle_B\langle 1|_B+\frac{\sqrt{3}}{4}|1\rangle_B\langle 0|_B+\frac{1}{2}|1\rangle_B\langle 1|_B.\tag{20}$$

(2) $|\phi\rangle$ 可表为

$$|\phi\rangle=\sum_{m,n\in\{0,1\}}a_{mn}|m\rangle_A|n\rangle_B,\tag{21}$$

其中矩阵

$$a=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4}\\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4}\end{bmatrix}.\tag{22}$$

对 a 做奇异值分解, 得

$$a=udv,\tag{23}$$

其中

$$u=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix},\tag{24}$$

$$d=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{bmatrix},\tag{25}$$

$$v=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}.\tag{26}$$

令子系统 A 和子系统 B 的正交基

$$|\psi_i\rangle_A=\sum_{j=0,1}u_{ji}|j\rangle,\tag{27}$$

$$|\psi_i\rangle_B = \sum_{k=0,1} v_{ik}|k\rangle, \tag{28}$$

以及

$$\lambda_i = d_{ii}, \tag{29}$$

即

$$|\psi_1\rangle_A = \frac{\sqrt{2}}{2}|0\rangle_A - \frac{\sqrt{2}}{2}|1\rangle_A, \qquad |\psi_2\rangle_A = \frac{\sqrt{2}}{2}|0\rangle_A + \frac{\sqrt{2}}{2}|1\rangle_A, \tag{30}$$

$$|\psi_1\rangle_B = \frac{\sqrt{2}}{2}|0\rangle_B - \frac{\sqrt{2}}{2}|1\rangle_B, \qquad |\psi_2\rangle_B = \frac{\sqrt{2}}{2}|0\rangle_B + \frac{\sqrt{2}}{2}|1\rangle_B, \tag{31}$$

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}, \qquad \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}, \tag{32}$$

从而得到 $|\phi\rangle$ 的 Schmidt 分解式为

$$\begin{aligned}|\phi\rangle =& \sum_{i=1}^{2} \lambda_i|\psi_i\rangle_A|\psi_i\rangle_B \\ =& \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}|0\rangle_A - \frac{\sqrt{2}}{2}|1\rangle_A\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}|0\rangle_B - \frac{\sqrt{2}}{2}|1\rangle_B\right) + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}|0\rangle_A + \frac{\sqrt{2}}{2}|1\rangle_A\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}|0\rangle_B + \frac{\sqrt{2}}{2}|1\rangle_B\right).\end{aligned} \tag{33}$$

□

第 5 题 得分: ________. 对三粒子系统纯态 $|\phi_{ABC}\rangle$, 在空间 $H_A \otimes H_B \otimes H_C$ 中是否存在 H_A, H_B, H_C 中的正交基, 使得 $|\phi_{ABC}\rangle = \sum_i \sqrt{p_i}|i_A\rangle \otimes |i_B\rangle \otimes |i_C\rangle$ 一定成立? 给出理由.

解: 不一定. 理由如下:

对三粒子系统纯态 $|\phi_{ABC}\rangle$, 利用 Schmidt 分解总是可以得到

$$|\phi_{ABC}\rangle = \sum_i \sqrt{p_i}|i_A\rangle \otimes |i_{BC}\rangle. \tag{34}$$

对于 $|i_{BC}\rangle$, 利用 Schmidt 分解得

$$|i_{BC}\rangle = \sum_j \sqrt{p_{ij}}|j_{i,B}\rangle \otimes |j_{i,C}\rangle, \tag{35}$$

从而

$$|\phi_{ABC}\rangle = \sum_i \sqrt{p_i}|i_A\rangle \otimes \sum_j \sqrt{p_{ij}}|j_{i,B}\rangle \otimes |j_{i,C}\rangle \tag{36}$$

因此, $|\phi_{ABC}\rangle$ 无法写成 $|\phi_{ABC}\rangle = \sum_i \sqrt{p_i}|i_A\rangle \otimes |i_B\rangle \otimes |i_C\rangle$ 的形式.

只有当对任意 i, $|i_{BC}\rangle$ 的分解式 (式 35) 中的求和都只有一项, 才能保证 $|\phi_{ABC}\rangle = \sum_i \sqrt{p_i}|i_A\rangle \otimes |i_B\rangle \otimes |i_C\rangle$ 的分解形式成立. □