量子信息导论第一章作业

（*标记者为选做题）

1：计算二元对称信道的信道容量。

2：空间H中存在两组正交归一化态$\{|\psi_i\rangle\}$、$\{|\tilde{\psi}_i\rangle\}$，则存在幺正变换U，使得$U|\psi_i\rangle=|\tilde{\psi}_i\rangle$，试构造出该U变换。

3：空间H中存在两组归一化态$\{|\psi_i\rangle\}$、$\{|\tilde{\psi}_i\rangle\}$，它们满足：$\forall$i, j，有$\langle\psi_i|\psi_j\rangle=\langle\tilde{\psi}_i|\tilde{\psi}_j\rangle$ 请证明，则存在U，使得$U|\psi_i\rangle=|\tilde{\psi}_i\rangle$，并构造出该U变换。

4：对两比特态$|\phi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_A\left(\frac{1}{2}|0\rangle_B+\frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle_B\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle_B+\frac{1}{2}|1\rangle_B\right)$

i)求约化密度矩阵ρ_A,ρ_B；ii)求$|\phi\rangle$的 Schmidt 分解形式。

5：对三粒子系统纯态$|\phi_{ABC}\rangle$，在空间$H_A\otimes H_B\otimes H_C$中是否存在$H_A,H_B,H_C$中的正交基$\{|i_A\rangle\},\{|i_B\rangle\},\{|i_C\rangle\}$，使得$|\phi_{ABC}\rangle=\sum_i\sqrt{p_i}|i_A\rangle\otimes|i_B\rangle\otimes|i_C\rangle$一定成立?给出理由。

6：设$|\psi\rangle$为量子比特态，在 Bloch 球面上均匀随机分布。

i) 随机地猜想一个态$|\phi\rangle$，求猜测态相对于$|\psi\rangle$的平均保真度$\bar{F}=<|\langle\phi|\psi\rangle|^2>$。

ii) 对此量子态做正交测量$\{P_\uparrow,P_\downarrow\},P_\uparrow+P_\downarrow=I$。测量后系统被制备到：

$\rho=p_\uparrow\langle\psi|P_\uparrow|\psi\rangle+p_\downarrow\langle\psi|P_\downarrow|\psi\rangle$，求$\rho$与原来的态$|\psi\rangle$的平均保真度。

（$\bar{F}=<\langle\psi|\rho|\psi\rangle>$）

7：$|\psi_1\rangle=|0\rangle,|\psi_2\rangle=-\frac{1}{2}|0\rangle+\frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle,|\psi_3\rangle=-\frac{1}{2}|0\rangle-\frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$。现令$F_i=\frac{2}{3}|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$，则$\{F_a\}_{a=1,2,3}$构成二维空间中的 POVM。现引入一个辅助的 qubit，试在扩展空间中实施一个正交测量，从而实现此 POVM。

8*：证明超算符仅在幺正条件下才是可逆的。

9：证明$|\psi^-\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle-|1\rangle|0\rangle)$在$U(\vartheta,\vec{n})\otimes U(\vartheta,\vec{n})$下是不变的。

10*：证明 $S(\rho_A)+S(\rho_B)\le S(\rho_{AC})+S(\rho_{BC})$。

11：考虑 2－qubit 系统$\rho_{AB}=\frac{1}{8}I\otimes I+\frac{1}{2}|\psi^-\rangle\langle\psi^-|$，分别沿$\vec{n},\vec{m}$方向测 A,B 粒子的自旋。其中$\vec{m}\bullet\vec{n}=\cos\vartheta$，则测量结果均为向上的联合概率是多少？由 Peres－Horodeski 判据，确定ρ_{AB}是否为可分量子态。