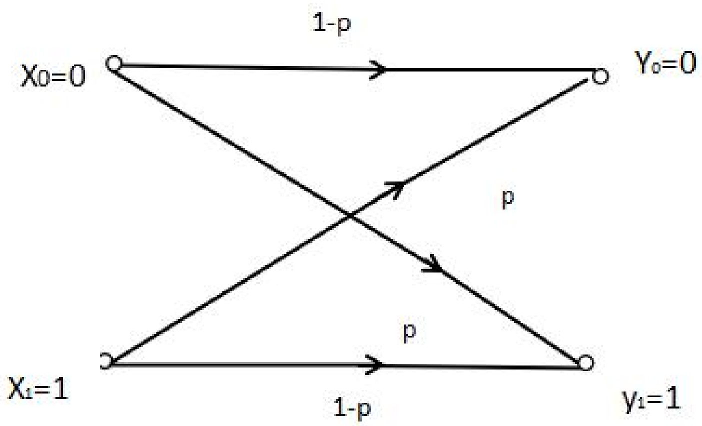
# 第一次习题课

2021 年 11 月 14 日

**1：** 计算二元对称信道的信道容量。




**信道容量 C**：最大信息传输率（r.p.t. 不同的信源分布）

**信息传输率 R**：信道中平均每个符号所能传递的信息量。

$$
\begin{aligned}
R =& I(X,Y) = H(Y) - H(Y|X) \\
=& H(Y) + \sum_{xy} p(x,y) \log p(y|x) \\
=& H(Y) + \sum_{xy} p(x)p(y|x) \log p(y|x) \\
=& H(Y) + \sum_{x} p(x) \sum_{y} p(y|x) \log p(y|x) \\
=& H(Y) - \sum_{x} p(x) H(Y|X=x)
\end{aligned}
$$

对称信道在于，对 X 的不同取值，$H(Y|X=x)$ 的值都是相同的（香农熵函数本质上把概率分布映射到实值空间)，所以第二项求和即为 $H(Y|X=x)$（$\sum_x p(x)=1$）。对于二元对称信道，对于任意的输入 0&1，正确传输或出错的概率为 $p, 1-p$（或相反)，则：

$$
H(Y|X=x) = -p\log p - (1-p)\log(1-p) \tag{1}
$$

再看 $H(Y)$，当 Y 等概率输出时熵值最大 $H_{max}(Y) = \log 2 = 1$，而这时 X 的分布为 $(q, 1-q) = (0.5, 0.5)$ 可以取到，所以

$$C = \max_{q} H(Y) - H(Y|X=x) = 1 - H(p) = 1 + p\log p + (1-p)\log(1-p) \tag{2}$$

**2：** 空间中存在两组正交归一化态 $\{|\psi_i\rangle\}, \{|\widetilde{\psi}_i\rangle\}$，则存在幺正变换 U，使得 $U|\psi_i\rangle = |\widetilde{\psi}_i\rangle$，试构造出该变换。

**解**：由题目可知两组态的个数是一致的。设态集中的态的个数为 $r$，这里为方便起见，假设态集是完备的，不完备的情况再另外讨论。

正交完备归一的态集可以作为其 Hilbert 空间的一组基，U 算子在基 $\{|\psi_i\rangle\}$ 下的表示，或者矩阵元为：

$$U_{ij} = \langle\psi_i| U |\psi_j\rangle = \langle\psi_i|\widetilde{\psi}_j\rangle \tag{3}$$

由此我们可以尝试构建 U 的表示形式为：

$$U = \sum_{ij} |\psi_i\rangle U_{ij} \langle\psi_j| = \sum_{j}\sum_{i} |\psi_i\rangle \langle\psi_i|\widetilde{\psi}_j\rangle \langle\psi_j| = \sum_{j} |\widetilde{\psi}_j\rangle \langle\psi_j| \tag{4}$$

可以验证：

$$U|\psi_i\rangle = \sum_{j} |\widetilde{\psi}_j\rangle \langle\psi_j| |\psi_i\rangle = |\widetilde{\psi}_i\rangle \tag{5}$$

以及

$$UU^\dagger = \sum_{ij} |\widetilde{\psi}_j\rangle \langle\psi_j|\psi_i\rangle \langle\widetilde{\psi}_i| = \sum_{j} |\widetilde{\psi}_j\rangle \langle\widetilde{\psi}_j| = I \quad \& \ldots U^\dagger U = I \tag{6}$$

这里验证幺正性质的时候用到了完备性条件。如果是不完备的情况，我们显然可以可以对基进行扩展，使得 $\{|\psi_i\rangle, |\psi_k\rangle\}, \{|\widetilde{\psi}_i\rangle, |\widetilde{\phi}_k\rangle\}$ 是正交完备的，进行类似构建，这时 U 对全空间和子空间是幺正的。

**3：** 空间中存在两组归一化态 $\{|\psi_i\rangle\}, \{|\widetilde{\psi}_i\rangle\}$，它们满足：$\forall i, j$, 有 $\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \langle\widetilde{\psi}_i|\widetilde{\psi}_j\rangle$, 请证明，则存在变换 U，使得 $U|\psi_i\rangle = |\widetilde{\psi}_i\rangle$，试构造出该变换。

**解法 1** ：由于两个态集未必是正交集，所以第一个思路是利用 Gram-Schmidt 正交化的方法先将其转化为正交态集，然后再利用前一问的思路进行求解。具体做法如下：

设 $|\phi_1\rangle \equiv |\psi_1\rangle / \| |\psi_1\rangle \|$。

for $1 \le k \le r-1$ define :

$$|\phi_{k+1}\rangle \equiv \frac{|\psi_{k+1}\rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle\phi_i|\psi_{k+1}\rangle |\phi_i\rangle}{\| |\psi_{k+1}\rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle\phi_i|\psi_{k+1}\rangle |\phi_i\rangle \|} \tag{7}$$

则 $\{|\phi_i\rangle\}$ 是一个正交集，并假设其是完备的，即

$$\sum_{k=1}^{r} |\phi_k\rangle \langle\phi_k| = I \tag{8}$$

类似地，我们可以由 $\{|\widetilde{\psi}_i\rangle\}$ 定义另外一个正交态集 $\{|\widetilde{\phi}_i\rangle\}$，以及

$$\sum_{k=1}^{r} |\widetilde{\phi_k}\rangle \langle\widetilde{\phi_k}| = I \tag{9}$$

定义算子

$$U = \sum_k |\widetilde{\phi}_k\rangle \langle \phi_k| \tag{10}$$

$$U|\psi_i\rangle = \sum_k |\widetilde{\phi}_k\rangle \langle \phi_k|\psi_i\rangle = \sum_k |\widetilde{\phi}_k\rangle \langle\widetilde{\phi_k}|\widetilde{\psi}_i\rangle = |\widetilde{\psi}_i\rangle \tag{11}$$

其中上式用到了代换

$$\langle \phi_k|\psi_i\rangle = \langle\widetilde{\phi_k}|\widetilde{\psi}_i\rangle \tag{12}$$

这是因为对于这两个态集的正交化过程而言，其步骤中的内积相同 $\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \langle\widetilde{\psi}_i|\widetilde{\psi}_j\rangle$，也就是其线性组合的方式相同，那么(12)中的内积也一定是相等的。

**解法 2** ：若 $\{|a_i\rangle\}$ 是题中所给态集的一组标准基，则 $\{|\psi_i\rangle\}$ 按此标准基展开，有：

$$|\psi_i\rangle = \sum_m A_{im} |a_m\rangle, i, m = 1, \ldots, r \tag{13}$$

同理可以得到 $\{|\widetilde{\psi}_i\rangle\}$ 在另一组标准基下的表示为：

$$|\widetilde{\psi}_i\rangle = \sum_m \widetilde{A}_{im} |\widetilde{a}_m\rangle, i, m = 1, \ldots, r \tag{14}$$

由 $\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \langle\widetilde{\psi}_i|\widetilde{\psi}_j\rangle$ 得到：

$$\begin{aligned}
\sum_m A^*_{im} \langle a_m| \sum_{m'} A_{jm'} |a_{m'}\rangle =& \sum_m \widetilde{A}^*_{im} \langle\widetilde{a}_m| \sum_{m'} \widetilde{A}_{jm'} |\widetilde{a}_{m'}\rangle \\
\Rightarrow \sum_m A^*_{im} A_{jm} =& \sum_m \widetilde{A}^*_{im} \widetilde{A}_{jm} \\
\Rightarrow (AA^\dagger)_{ji} =& (\widetilde{A}\widetilde{A}^\dagger)_{ji} \\
\Rightarrow AA^\dagger =& \widetilde{A}\widetilde{A}^\dagger
\end{aligned} \tag{15}$$

其中 $AA^\dagger$ 是一个厄米、正定的矩阵，由 Cholesky 定理知，存在唯一的下三角矩阵 $A$ 满足该分解，也即 $A = \widetilde{A}$。那么我们可以构造算子：

$$U = \sum_j |\widetilde{a}_j\rangle \langle a_j| \tag{16}$$

满足

$$\begin{aligned}
U|\psi_i\rangle =& \sum_j |\widetilde{a}_j\rangle \langle a_j| \sum_m A_{im} |a_m\rangle \\
=& \sum_j A_{ij} |\widetilde{a}_j\rangle = |\widetilde{\psi}_i\rangle
\end{aligned} \tag{17}$$

**4:** 对两比特态 $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_A\left(\frac{1}{2}|0\rangle_B + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle_B\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle_B + \frac{1}{2}|1\rangle_B\right)$

1) 求约化密度矩阵 $\rho_A, \rho_B$；2) 求 $|\phi\rangle$ 的 Schmidt 分解形式。

**解** ：1)

$$\begin{aligned}\rho_{AB} =& |\phi\rangle\langle\phi| &(18)\\ =&\frac{1}{8}\{|00\rangle\langle 00| + \sqrt{3}|00\rangle\langle 01| + \sqrt{3}|00\rangle\langle 10| + |00\rangle\langle 11|\\ &+\sqrt{3}|01\rangle\langle 00| + 3|01\rangle\langle 01| + 3|01\rangle\langle 10| + \sqrt{3}|01\rangle\langle 11|\\ &+\sqrt{3}|10\rangle\langle 00| + 3|10\rangle\langle 01| + 3|10\rangle\langle 10| + \sqrt{3}|10\rangle\langle 11|\\ &+|11\rangle\langle 00| + \sqrt{3}|11\rangle\langle 01| + \sqrt{3}|11\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11|\} &(19)\end{aligned}$$

其中 $|00\rangle = |0\rangle_A|0\rangle_B$，$\langle 00| = \langle 0|_A\langle 0|_B$ 等等。或者是写成矩阵形式：

$$\rho_{AB} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 1\\ \sqrt{3} & 3 & 3 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 3 & 3 & \sqrt{3}\\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 1\end{pmatrix} \tag{20}$$

求约化密度矩阵，只需要对每一部分分别求部分迹即可。例如：

$$\begin{aligned}\rho_A =& tr_B(\rho_{AB}) = tr_B\left(\frac{1}{8}|0\rangle_A|0\rangle_B\langle 0|_A\langle 0|_B + \frac{1}{8}|0\rangle_A|0\rangle_B\langle 0|_A\langle 1|_B + \cdots\right) &(21)\\ =&\left(\frac{1}{8}|0\rangle_A\langle 0|_A tr(|0\rangle_B\langle 0|_B) + \frac{1}{8}|0\rangle_A\langle 0|_A tr(|0\rangle_B\langle 1|_B) + \cdots\right) &(22)\\ =&\left(\frac{1}{8}|0\rangle_A\langle 0|_A + 0 + \cdots\right) &(23)\\ =&\frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{\sqrt{3}}{4}|0\rangle\langle 1| + \frac{\sqrt{3}}{4}|1\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| &(24)\\ =&\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} &(25)\end{aligned}$$

同理可以得到：

$$\begin{aligned}\rho_B =&\frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{\sqrt{3}}{4}|0\rangle\langle 1| + \frac{\sqrt{3}}{4}|1\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| &(26)\\ =&\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} &(27)\end{aligned}$$

2) 先计算 A B 两个约化密度矩阵的本征值和本征态（以 A 为例）：

$$|\rho_A - \lambda I| = \begin{vmatrix}\frac{1}{2}-\lambda & \frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2}-\lambda\end{vmatrix} = 0 \tag{28}$$

得到 $\lambda_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{3}}{4}$，以及 $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$, $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^T$

将本征态作为各自空间的正交基，Schmidt 分解中的系数的平方对应本征值。所以有：

$$|\phi\rangle = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}\,|+\rangle_A\,|+\rangle_B + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}\,|-\rangle_A\,|-\rangle_B \tag{29}$$

或者更简洁一些：

$$|\phi\rangle = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\,|+\rangle_A\,|+\rangle_B + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\,|-\rangle_A\,|-\rangle_B \tag{30}$$

**5：** 对三粒子系统纯态 $|\phi_{ABC}\rangle$，在空间 $H_A\otimes H_B\otimes H_C$ 中是否存在 $H_A, H_B, H_C$ 中的正交基 $\{|i_A\rangle\}, \{|i_B\rangle\}, \{|i_C\rangle\}$，使得 $|\phi_{ABC}\rangle = \sum_i \sqrt{p}\,|i_A\rangle\otimes|i_B\rangle\otimes|i_C\rangle$ 一定成立？给出理由

**解**：只需要找到一个反例并说明即可。

假设有一个三粒子纯态 $\phi_{ABC} = |\varphi\rangle_{AB}\otimes|\psi\rangle_C$。其中 $|\varphi\rangle_{AB}$ 是纠缠态，即

$$|\varphi\rangle_{AB} = \sum_{j=1}^{N}\alpha_j\,|j\rangle_A\,|j\rangle_B \quad N\geq 2 \tag{31}$$

若三粒子纯态可以写成 Schmidt 分解的形式

$$\phi_{ABC} = \sum_{i=1}^{M}\sqrt{p_i}\,|i\rangle_A\,|i\rangle_B\,|\psi\rangle_C \quad (p_i\neq 0) \tag{32}$$

则 AB 两系统的约化密度矩阵为：

$$\begin{aligned}\rho_{AB} =& tr\left(|\phi_{ABC}\rangle\langle\phi_{ABC}|\right)\\ =& \sum_{i=1}^{M}p_i\,|i\rangle_A\,|i\rangle_B\,\langle i|_A\,\langle i|_B\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}tr_{AB}\left(\rho_{AB}^2\right) =& tr_{AB}\left(\sum_{i=1}^{M}p_i^2\,|i\rangle_A\,|i\rangle_B\,\langle i|_A\,\langle i|_B\right)\\ =& \sum_{i=1}^{M}p_i^2 < \sum_{i=1}^{M}p_i = 1\end{aligned} \tag{34}$$

这说明 AB 子系统是混态，这与 AB 是纠缠态的假设相悖，所以对于三粒子系统不存在必然成立的 Schmidt 分解定理。