

第二次习题课

2021 年 11 月 26 日

(补充习题 3) 1: 试证明相对熵纠缠度量在纯态情况下和 Von Neumann 熵是等价的。(求任意给定纯态 $|\psi_{AB}\rangle$ 和任意混合态 $\sum_i p_i \rho_i \otimes \sigma_i$ 中的最小相对熵 $S(|\psi_{AB}\rangle \langle \psi_{AB}| \| \sum_i p_i \rho_i \otimes \sigma_i)$ 。)

解 : Werner 定义了一种可分态的表述方式: $\sum_i p_i \rho_i \otimes \sigma_i$ 其中 ρ_i 和 σ_i 均为纯态, 也就是可以写成 $\sum_i p_i |v_i\rangle \langle v_i| \otimes |w_i\rangle \langle w_i|$ 的形式 (式子中的态未必正交)。

以下证明内容选自文章^{1 2}。

这个命题的证明思路是这样的: 设 ρ^* 为使相对熵函数最小的非纠缠态, 即:

$$E(\sigma) = \min_{\rho \in \mathcal{D}} S(\sigma \| \rho) \quad (1)$$

其中 \mathcal{D} 是非纠缠态构成的集合。我们先猜出 ρ^* 的形式为 $(|\phi_i\rangle$ 和 $|\psi_i\rangle$ 分别是各自空间的正交态):

$$\rho^* = \sum_n a_{nn} |\phi_n \psi_n\rangle \langle \phi_n \psi_n| \quad (2)$$

再去证明梯度 $\frac{d}{dx} S(\sigma \| (1-x)\rho^* + x\rho)|_{x=0}$ 对于任意的 $\rho \in D$ 是非负的. 显然, 若 ρ^* 表示最小值对应的态, 上述的梯度值一定是严格负的, 这将会和我们的证明结果矛盾。

定义一个函数 $f(x, \rho) \equiv S(\sigma \| (1-x)\rho^* + x\rho)$, 使用恒等式 $\ln A = \int_0^\infty [(At-1)/(A+t)] dt / (1+t^2)$ 得到:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, \rho) = - \lim_{x \rightarrow 0} \text{tr} \left\{ \sigma \frac{\ln[(1-x)\rho^* + x\rho] - \ln \rho^*}{x-0} \right\} \quad (3)$$

$$= \text{tr} \left(\sigma \int_0^\infty \lim_{x \rightarrow 0} x^{-1} [((\rho^* t - 1) + xt(\rho - \rho^*))[(t + \rho^*) + x(\rho - \rho^*)]^{-1} - (\rho^* t - 1)(\rho^* + t)^{-1}] \frac{dt}{1+t^2} \right) \quad (4)$$

$$= \text{tr} \left(\sigma \int_0^\infty (\rho^* + t)^{-1} (\rho^* - \rho) (\rho^* + t)^{-1} dt \right) \quad (5)$$

$$= 1 - \int_0^\infty \text{tr} [\sigma (\rho^* + t)^{-1} \rho (\rho^* + t)^{-1}] dt \quad (6)$$

$$= 1 - \int_0^\infty \text{tr} [(\rho^* + t)^{-1} \sigma (\rho^* + t)^{-1} \rho] dt \quad (7)$$

¹Vedral V, Plenio M B. Entanglement measures and purification procedures[J]. Physical Review A, 1998, 57(3): 1619.

²Wu S, Zhang Y. Calculating the relative entropy of entanglement[J]. arXiv preprint quant-ph/0004018, 2000.

因为 $\rho^* = \sum_n a_{nn} |\phi_n \psi_n\rangle \langle \phi_n \psi_n|$, 不难得到

$$\begin{aligned} & (\rho^* + t)^{-1} \sigma (\rho^* + t)^{-1} \\ &= \sum_{nn'} (a_{nn} + t)^{-1} \cdot a_{nn'} \cdot (a_{n'n'} + t)^{-1} |\phi_n \psi_n\rangle \langle \phi_{n'} \psi_{n'}| \end{aligned} \quad (8)$$

令

$$g(n, n') \equiv a_{nn'} \cdot \int_0^\infty (a_{nn} + t)^{-1} \cdot (a_{n'n'} + t)^{-1} dt \quad (9)$$

显然可以得到 $g(n, n) = 1$, 并且对于 $n \neq n'$

$$g(n, n') = a_{nn'} \cdot \frac{\ln a_{nn} - \ln a_{n'n'}}{a_{nn} - a_{n'n'}} \quad (10)$$

下面证明 $|g(n, n')| \leq 1$. Vedral V, Plenio M B 的工作证明了

$$0 \leq \sqrt{a_{nn} a_{n'n'}} \cdot \frac{\ln a_{nn} - \ln a_{n'n'}}{a_{nn} - a_{n'n'}} \leq 1 \quad (11)$$

所以我们只需要说明 $|a_{nn'}| \leq \sqrt{a_{nn} a_{n'n'}}$. 令 $|\Psi\rangle = a |\phi_n \psi_n\rangle + b |\phi_{n'} \psi_{n'}\rangle$, a 和 b 是任意复数. 因为 σ 是量子态, 正定的

$$\langle \Psi | \sigma | \Psi \rangle \geq 0 \quad (12)$$

对任意 a 和 b 都成立, 这要求

$$a_{nn} a_{n'n'} - a_{nn'} a_{n'n} = a_{nn} a_{n'n'} - |a_{nn'}|^2 \geq 0 \quad (13)$$

因此 $|a_{nn'}| \leq \sqrt{a_{nn} a_{n'n'}}$ 以及:

$$|g(n, n')| \leq 1 \quad (14)$$

令 $\rho \equiv |\alpha\rangle \langle \alpha| \otimes |\beta\rangle \langle \beta|$ 其中 $|\alpha\rangle = \sum_n a_n |\phi_n\rangle$, $|\beta\rangle = \sum_n b_n |\psi_n\rangle$ 是归一化态可以计算出

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, \rho) - 1 = - \sum_{n_1 n_2} g(n_1, n_2) \cdot a_{n_2} b_{n_2} a_{n_1}^* b_{n_1}^* \quad (15)$$

therefore

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial f}{\partial x}(0, \rho) - 1 \right| \\ & \leq \sum_{n_1 n_2} |g(n_1, n_2)| \cdot |a_{n_2}| \cdot |b_{n_2}| \cdot |a_{n_1}^*| \cdot |b_{n_1}^*| \\ & \leq \sum_{n_1 n_2} |a_{n_2}| \cdot |b_{n_2}| \cdot |a_{n_1}^*| \cdot |b_{n_1}^*| \\ & = \left(\sum_n |a_n| \cdot |b_n| \right)^2 \\ & \leq \sum_n |a_n|^2 \cdot \sum_n |b_n|^2 \\ & = 1 \end{aligned} \quad (16)$$

Then it follows that $\frac{\partial f}{\partial x}(0, |\alpha\beta\rangle \langle \alpha\beta|) \geq 0$. 对于任意纠缠态 $\rho \in D$ 均可写成以下形式 $\rho = \sum_i r_i |\alpha^i \beta^i\rangle \langle \alpha^i \beta^i|$, 我们有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, \rho) = \sum_i r_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(0, |\alpha^i \beta^i\rangle \langle \alpha^i \beta^i|) \geq 0 \quad (17)$$

现在我们证明 $S(\sigma||\rho) \geq S(\sigma||\rho^*)$ 对所有的 $\rho \in D$ 成立。设 $S(\sigma||\rho) < S(\sigma||\rho^*)$ 对某个 $\rho \in D$ 不成立，那么当 $0 < x \leq 1$,

$$\begin{aligned} f(x, \rho) &= S(\sigma||(1-x)\rho^* + x\rho) \\ &\leq (1-x)S(\sigma||\rho^*) + xS(\sigma||\rho) \\ &= (1-x)f(0, \rho) + xf(1, \rho) \end{aligned} \quad (18)$$

这表示

$$\frac{f(x, \rho) - f(0, \rho)}{x} \leq f(1, \rho) - f(0, \rho) < 0 \quad (19)$$

与给定小的 x 值时 $\frac{\partial f}{\partial x}(0, \rho) \geq 0$ 矛盾。所以对于任意 $\rho \in D$ ，均有 $S(\sigma||\rho) \geq S(\sigma||\rho^*)$ ，也就是说，态 $\rho^* = \sum_n a_{nn} |\phi_n \psi_n\rangle \langle \phi_n \psi_n|$ 是使相对熵函数 $S(\sigma||\rho)$ 在 $\rho \in D$ 上最小的值。

此时

$$Er(\sigma) = \text{tr}\{\sigma(\ln \sigma - \ln \rho^*)\} = -\sum_n a_{nn} \ln a_{nn} - S(\sigma) \quad (20)$$

相对熵函数退化为 von-Neumann 熵。纯态的 von-Neumann 熵为 0，上式可以更简单地写为：

$$Er(\sigma) = -\sum_n a_{nn} \ln a_{nn} \quad (21)$$

证明结束。

(补充习题 3) 2: 计算混合量子态 $\rho = p|\phi^+\rangle \langle \phi^+| + \frac{1-p}{4}I_{4 \times 4}$ 的纠缠 concurrence，其中 $0 \leq p \leq 1$ ， $|\phi^+\rangle$ 是 Bell 态。

解: 容易验证， $\rho^* = \rho$ 。已知 $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ ，则 $\sigma_y \otimes \sigma_y |\phi^+\rangle = -|\phi^+\rangle$ ，则：

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y) \\ &= (\sigma_y \otimes \sigma_y) p |\phi^+\rangle \langle \phi^+| (\sigma_y \otimes \sigma_y) + (\sigma_y \otimes \sigma_y) \frac{1-p}{4} I_{4 \times 4} (\sigma_y \otimes \sigma_y) \\ &= p |\phi^+\rangle \langle \phi^+| + \frac{1-p}{4} I_{4 \times 4} \\ &= \rho \end{aligned} \quad (22)$$

则矩阵 R 为：

$$R = \sqrt{\sqrt{\rho} \tilde{\rho} \sqrt{\rho}} = \rho \quad (23)$$

求解久期方程 $|\rho - \lambda I| = 0$ ，得到：

$$\left(\frac{1-p}{4} - \lambda\right)^3 \left(\frac{1+3p}{4} - \lambda\right) = 0 \quad (24)$$

所以

$$\lambda_1 = \frac{1+3p}{4}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{1-p}{4} \quad (25)$$

则并发度（共生，concurrence）为

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} = \max\{0, \frac{3p-1}{2}\} \quad (26)$$

$$C(\rho) = \begin{cases} \frac{3p-1}{2} & \frac{1}{3} < p \leq 1 \\ 0 & 0 \leq p \leq \frac{1}{3} \end{cases} \quad (27)$$

(第 1 章)10: 证明 $S(\rho_A) + S(\rho_B) \leq S(\rho_{AC}) + S(\rho_{BC})$ 。

解法 1 : (Nielson 的书中内容) 条件熵定义为 $S(\rho_C|\rho_A) = S(\rho_{AC}) - S(\rho_A)$, 引入辅助系统 C, 定义矩阵函数 $T: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$, 即:

$$\begin{aligned} T(\rho_{ABC}) &= S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AC}) - S(\rho_{BC}) \\ &= -S(\rho_C|\rho_A) - S(\rho_C|\rho_B) \end{aligned} \quad (28)$$

首先我们从 Corollary 11.13 知道, 条件熵定义在凸集上的凹函数 (证明方法是用相对熵的凸性导出条件熵的凹性), (鉴于中文教材和英文教材的凹凸定义不太一致, 我们下面改用 convex 和 concave 来表述。)

Definition 1. A real-valued function f on a convex set D is said to be **concave** if, for any x and y in D and $\lambda \in [0, 1]$,

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \quad (29)$$

Definition 2. A real-valued function f on a convex set D is said to be **convex** if, for any x and y in D and $\lambda \in [0, 1]$,

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \quad (30)$$

我们已经知道条件熵函数是 concave, 那么我们前面定义的 $T(\rho_{ABC})$ 一定是 convex。设密度矩阵 ρ_{ABC} 有谱分解: $\rho_{ABC} = \sum_i p_i |i\rangle \langle i|$, 由于 $T(\rho_{ABC})$ convex, 必有:

$$T(\rho_{ABC}) \leq \sum_i p_i T(|i\rangle \langle i|) \quad (31)$$

对于一个三系统纯态而言, 有 $S(A, C) = S(B)$ 以及 $S(B, C) = S(A)$ 。所以对于纯态 $|i\rangle \langle i|$, 有 $T(|i\rangle \langle i|) = 0$, 所以 $T(\rho_{ABC}) \leq 0$, 因此:

$$S(\rho_A) + S(\rho_B) \leq S(\rho_{AC}) + S(\rho_{BC}) \quad (32)$$

解法 2 : 对于 ABC 系统我们引入系统 R 使得 ABCR 为纯态。根据 von-Neumann 熵的特性, 对于一个纯态系统, 有:

$$S(\rho_{ABC}) = S(\rho_R), \quad S(\rho_{AC}) = S(\rho_{BR}) \quad (33)$$

我们知道 von-Neumann 熵的强次加性定理为:

$$S(\rho_{ABC}) + S(\rho_B) \leq S(\rho_{AC}) + S(\rho_{BC}) \quad (34)$$

带入式33中的等式关系：

$$S(\rho_R) + S(\rho_B) \leq S(\rho_{BR}) + S(\rho_{AR}) \quad (35)$$

上式可以重写为：

$$S(\rho_A) + S(\rho_B) \leq S(\rho_{AC}) + S(\rho_{BC}) \quad (36)$$

(第 1 章) 11: 考虑 2 - qubit 系统 $\rho_{AB} = \frac{1}{8}I \otimes I + \frac{1}{2}|\psi^-\rangle\langle\psi^-|$ ，分别沿 \mathbf{n}, \mathbf{m} 方向测 A,B 粒子的自旋。其中 $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = \cos \theta$ ，则测量结果均为向上的联合概率是多少？由 Peres-Horodeski 判据，确定 ρ_{AB} 是否为可分量子态。

解：沿着指定方向 \mathbf{n} 进行测量得到 positive 结果的概率为 $Tr[\frac{1}{2}(1 + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma})\rho]$ ，如果是联合测量的话，则：

$$\begin{aligned} P &= Tr[\frac{1}{2}(1 + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_A) \otimes \frac{1}{2}(1 + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}_B)\rho_{AB}] \\ &= Tr[\frac{1}{2}(1 + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_A) \otimes \frac{1}{2}(1 + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}_B)\frac{1}{8}] + Tr[\frac{1}{2}(1 + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_A) \otimes \frac{1}{2}(1 + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}_B)\frac{1}{2}|\psi^-\rangle\langle\psi^-|] \end{aligned} \quad (37)$$

其中

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(1 + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_A) \otimes \frac{1}{2}(1 + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}_B) \\ &= \frac{1}{4}(I_A \otimes I_B + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_A) \otimes I_B + I_A \otimes (\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}_B) + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_A) \otimes (\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}_B)) \end{aligned} \quad (38)$$

因为 Pauli 算符和的迹为 0，所以对式取迹，只有第一项不为 0，

$$\begin{aligned} &Tr[\frac{1}{2}(1 + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_A) \otimes \frac{1}{2}(1 + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}_B)] \\ &= Tr[\frac{1}{4}I_A \otimes I_B] \\ &= 1 \end{aligned} \quad (39)$$

我们观察到：

$$\sigma_{Ax}|\psi^-\rangle = -|\phi^-\rangle = -\sigma_{Bx}|\psi^-\rangle \quad (40)$$

$$\sigma_{Ay}|\psi^-\rangle = i|\phi^+\rangle = -\sigma_{By}|\psi^-\rangle \quad (41)$$

$$\sigma_{Az}|\psi^-\rangle = |\psi^+\rangle = -\sigma_{Bz}|\psi^-\rangle \quad (42)$$

所以有以下关系式成立：

$$\left\{ \begin{array}{l} Tr(|\psi^-\rangle\langle\psi^-|) = 1 \\ Tr((\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_A) \otimes I_B |\psi^-\rangle\langle\psi^-|) = Tr(I_A \otimes (\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}_B) |\psi^-\rangle\langle\psi^-|) = 0 \\ Tr[(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_A) \otimes (\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}_B) |\psi^-\rangle\langle\psi^-|] = -n_i m_j \langle\psi^-|\sigma_{Ai}\sigma_{Aj}|\psi^-\rangle \\ = -n_i m_j \langle\psi^-|i\epsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}|\psi^-\rangle = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = -\cos \theta \end{array} \right.$$

所以：

$$P = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \cos \theta \quad (43)$$

Peres-Horodeski 判据是指，对两系统密度矩阵取部分转置后判断是否为正定。也等价于部分转置后的矩阵是否有负的本征值。

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}, \quad \rho_{AB}^{T_B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \quad (44)$$

求解久期方程 $|\rho_{AB}^{T_B} - \lambda I| = 0$ ，得到：

$$-\left(\frac{3}{8} - \lambda\right)^3 \left(\frac{1}{8} + \lambda\right) = 0 \quad (45)$$

$\lambda_{1,2,3} = \frac{3}{8}$ ， $\lambda_4 = -\frac{1}{8}$ 。有负的本征值，所以 ρ_{AB} 是不可分量子态。