第五次作业（量子计算第一章）

姓名：陈 稼 霖
学号：SA21038052
成绩：__________

截止日期：2021. 12. 22（周三）

第 1 题 得分: _________. 按图灵机中两态转移矩阵的定义 (PPT 7、8 页), 说明 $4+5$ 的算法过程.

解: 加法的两态转移矩阵如下:

状态	扫描到的符号	
	1	0
S_1	(S_2,0;R)	(S_1,0;R)
S_2	(S_2,1;R)	(halt,1;R)
Halt	停止	停止

欲计算 $4+5$, 初始时刻在记录带上分别有 4 个连续的 1 和 5 个连续的 1, 两组 1 用 0 分隔开, 按照上述转移矩阵, 计算过程如下:

步骤序号	图灵机状态	记录带内容 (划线处代表读写头所在位置)	跃迁方式
0	S_1	0 0 $\underline{1}$ 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 0	(S_1,1)→(S_2,0;R)
1	S_2	0 0 0 $\underline{1}$ 1 1 0 1 1 1 1 1 0 0	(S_2,1)→(S_2,1;R)
2	S_2	0 0 0 1 $\underline{1}$ 1 0 1 1 1 1 1 0 0	(S_2,1)→(S_2,1;R)
3	S_2	0 0 0 1 1 $\underline{1}$ 0 1 1 1 1 1 0 0	(S_2,1)→(S_2,1;R)
4	S_2	0 0 0 1 1 1 $\underline{0}$ 1 1 1 1 1 0 0	(S_2,0)→(halt,1;R)
5	Halt	0 0 0 1 1 1 $\underline{1}$ 1 1 1 1 1 0 0	

最后得到记录带上有 9 个连续的 1, 这说明 $4+5$ 的计算结果为 9. □

第 2 题 得分: _________. 给出第 67-68 页中的 Pauli 算符与标准 Pauli 算符之间的关系.

解: 一方面, 在置零的辅助量子比特的辅助下, 显然可以利用 1 $(\sigma_k)_{mn}$ ($k=x,y,z$; $m,n=0,1,\cdots,7$) 实现标准 Pauli 算符.

另一方面, 系统的厄米算符均可用标准 Pauli 算符的直积展开, 即 $H=\sum_{i,j,k=0}^3 a_{ijk}\sigma_i^1\otimes\sigma_j^2\otimes\sigma_k^3$, 包括 $(\sigma_k)_{mn}$. 例如, 对 $(\sigma_x)_{67}$,

$$(\sigma_x)_{67}=\sum_{i,j,k=0}^{3}a_{ijk}\sigma_i^1\otimes\sigma_j^2\otimes\sigma_k^3, \tag{1}$$

其中

$$a_{ijk}=\frac{1}{8}\mathrm{Tr}[(\sigma_x)_{67})(\sigma_i^1\otimes\sigma_j^2\otimes\sigma_k^3)], \tag{2}$$

故

$$\begin{aligned}(\sigma_x)_{67}=&\frac{3}{4}I\otimes I\otimes I+\frac{1}{4}I\otimes I\otimes\sigma_x+\frac{1}{4}I\otimes\sigma_z\otimes I-\frac{1}{4}I\otimes\sigma_z\otimes\sigma_x\\&+\frac{1}{4}\sigma_z\otimes I\otimes I-\frac{1}{4}\sigma_z\otimes I\otimes\sigma_x-\frac{1}{4}\sigma_z\otimes\sigma_z\otimes I+\frac{1}{4}\sigma_z\otimes\sigma_z\otimes\sigma_x.\end{aligned} \tag{3}$$

进而可以利用基变换操作得到 $(\sigma_x)_{mn}$ 型算符, 利用 $(\sigma_x)_{mn}$ 间的对易可得 $(\sigma_y)_{mn}$ 型算符:

$$[(\sigma_x)_{mn},(\sigma_x)_{nk}]=-(\sigma_y)_{mk}, \tag{4}$$

利用 σ_x 型算符和 σ_y 型算符的对易得 σ_z 型算符:

$$[(\sigma_x)_{mn},(\sigma_y)_{mn}]=2i(\sigma_z)_{mn}. \tag{5}$$

综上, $(\sigma_k)_{mn}$ 型的算符与 Pauli 可相互转化. □

第 3 题 得分: ________. 按参数个数估计用 Deutsch 门逼近任意 n 比特幺正变换时所需的门个数.

解: 要求用 Deutsch 门逼近任意 n 比特幺正变换时所需的门个数, 等价于求对任意 n 比特量子态, 利用 Deutsch 门实现 $|\psi\rangle \to |1\rangle^{\otimes n}$ 所需的 Deutsch 门个数.

设 $|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} c_i|i\rangle$. 由于利用 Deutsch 门中的 R 算符, 可以实现普适的单比特幺正变换. 我们总可以利用 n 量子比特 Deutsch 门得到作用于基矢 $|2^n-2\rangle, |2^n-1\rangle$ 的量子门 $U_{2^n-2,2^n-1}$, 使得

$$U_{2^n-2,2^n-1}|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-3} c_i|i\rangle + \sqrt{|c_{2^n-2}|^2 + |c_{2^n-1}|^2}|2^n-1\rangle. \tag{6}$$

在适当的基置换操作下, 我们可以构造出适当的 $U_{i,2^n-1}$ 门, 并通过 $U = \prod_{i=0}^{2^n-1} U_{i,2^n-1}$ 的组合构造出所需的幺正变换 U, 使得 $U|\psi\rangle = |1\rangle^{\otimes 1}$.

在上述过程中需要用到 2^n 个 n 量子比特 Deutsch 门和 2^n 个基置换操作, 而实现每个 n 量子比特 Deutsch 门需要 $O(n)$ 个 Deutsch 门级级联以及 $O(n)$ 个置零的辅助量子比特. 综上, 用 Deutsch 门逼近 n 比特幺正变换时需要 2^{2^n} 个门. □