数学物理方法 II 第三次作业

Due date: 2019/04/18

1.将下列特征值方程化为 Sturm-Liouville 型方程的标准形式

(1)$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(2x+\lambda)y=0$

(2)$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(a-bx)\frac{dy}{dx}-\lambda y$=0

2. 设有本征值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{dy}{dx}\right]+\left[\lambda\rho(x)-q(x)\right]y=0\\ y(b)=a_{11}y(a)+a_{12}y'(a),y'(b)=a_{21}y(a)+a_{22}y'(a)\end{cases},$$

，其中$p(a)=p(b)$，证明：当$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=1$时，对应不同本征值的本征函数正交。

3. 定义三维 δ 函数为$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0})=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$，求证：

（1）它在球坐标下的表达式为$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\frac{1}{r^2}\delta(r-r_0)\delta(\cos\theta-\cos\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)$；

（2）$\nabla^2\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$。

4. 证明下列傅里叶变换关系：

（1）$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{coswt}{w^2+a^2}dw=\frac{\pi}{a}e^{-a|t|}\qquad(a>0)$

（2）设$|r|=\sqrt{x^2+y^2+z^2},|k|=\sqrt{{k_1}^2+{k_2}^2+{k_3}^2}$，证明如下傅立叶关系：

(i) $\frac{1}{r}\leftrightarrow\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2}$

(ii) $\frac{sinak}{k}\leftrightarrow\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\delta(r-a)}{r}\qquad(a>0)$

5. 若$f(t)$为周期函数，周期为 a，即$f(t+a)=f(t), t \geq 0$. 设$f(t)$的拉普拉斯变换存在，证明：

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-ap}}\int_0^a f(t)e^{-pt}dt$$

6. 分别用下列积分变换法，求解热传导方程定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), \quad -\infty<x<+\infty \\ \quad\quad\quad\quad\quad u|_{t=0}=\varphi(x)\end{cases}$$

(1)关于 t 的拉普拉斯变换。

(2)关于 x 的傅里叶变换。

7. 使用联合变换法（拉普拉斯变换+傅里叶变换），求解无界空间波动方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x), \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$$