数学物理方法 II 第二次作业

Due date: 2019/03/31

1.解无界弦上的振动问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos(\omega t)\cos(x), (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u|_{t=0} = e^{-2x^2}, (-\infty < x < +\infty) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sin(x), (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

2.使用分离变量法求解如下波动方程的问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, (0 < x < l, t > 0) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = e^{-x^2}, \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 2axe^{-x^2} \end{cases}$$

其中参数自己设定，使用 Matlab 等数学软件画出分离变量法的数值结果的图像（比如 n 取 100 时的解的情况），任取一些 t 显示解的演化。

3. 求解下述三维波动方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ u|_{t=0} = \begin{cases} u_0, x^2 + y^2 + z^2 < R^2 \\ 0, x^2 + y^2 + z^2 > R^2 \end{cases}, \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

4.

求解细杆的导热问题，杆长为l，两端($x=0$ 及 $x=l$)均保持 0 度，初始温度分布$u|_{t=0}=bx(l-x)/l^2$ 。

自己设定参数，使用 Matlab 等数学软件画出分离变量法的数值结果的图像（比如 n 取 100 时的解的情况），任取一些 t 显示解的演化。

5. 将以下的方程分离变量：

(1) $a_1(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b_1(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a_2(x)\frac{\partial u}{\partial x}+b_2(y)\frac{\partial u}{\partial y}=0$

(2) $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho})+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$

(3) $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})=0$

6. 求解下列本征值问题，证明本征函数的正交性，并算出归一因子。

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ \alpha_1 X(0)+\beta_1 X'(0)=0 \\ \alpha_2 X(l)+\beta_2 X'(l)=0 \end{cases}$$

7. 解环内泊松方程的定解问题：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6(x+y)^2, 0<a^2<x^2+y^2<b^2<\infty \\ u|_{x^2+y^2=a^2}=1, \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x^2+y^2=b^2}=0 \end{cases}$$

其中，n 为边界$x^2+y^2=b^2$的外法向。