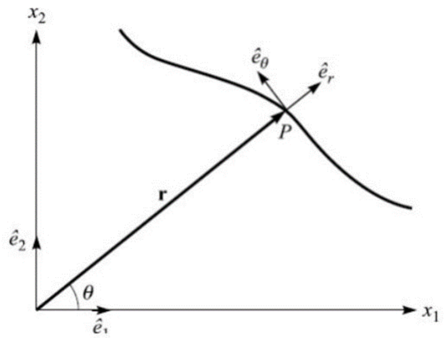
数学物理方法 II 第一次作业

Due date: 2019/03/17

1. 在极坐标坐标系中写出速度 $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ 和加速度 $\dfrac{d\vec{v}}{dt}$，结果用 $\vec{e}_r$、$\vec{e}_\theta$ 表示。



2. 设矢量 $\vec{r}$ 为某个源点 $\vec{x}'$ 指向场点 $\vec{x}$ 的矢量，而 r 则为源点到场点的距离。

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}' = \vec{e}_x(x - x') + \vec{e}_y(y - y') + \vec{e}_z(z - z')$$

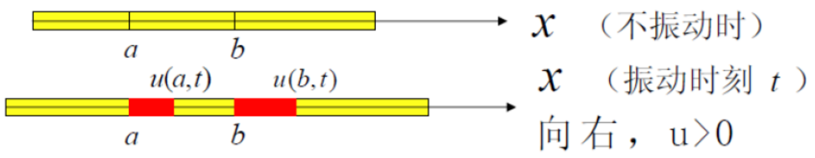
请求出：

（1） $\nabla \dfrac{1}{r}$

（2） $\nabla \times \dfrac{\vec{r}}{r^3}$

（3） $\nabla \times \vec{r}$

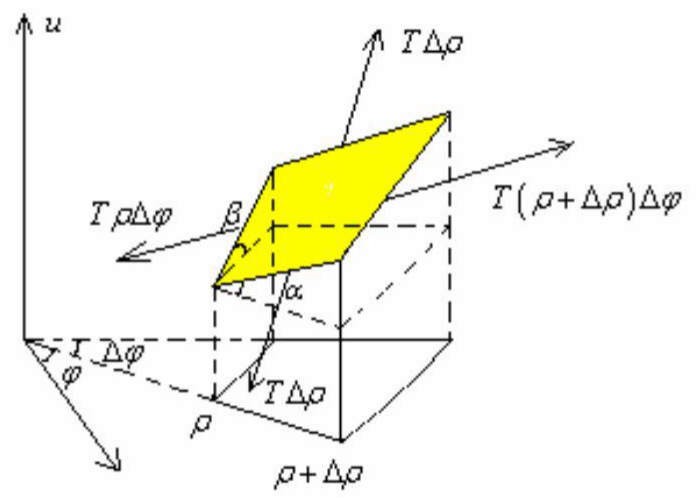
3. 从杆的纵振动问题导出波动方程，其问题设置如下：
均匀细杆在外力作用下沿杆长方向作微小振动，设杆长方向为 x 轴，u(x, t) 为 x 处的截面在 t 时刻沿杆长方向的位移，如下图：



其中理想化假设如下：
i） 振动方向与杆的方向一致。
ii） 均匀细杆：同一横界面上各点的质量密度 ρ，横截面面积 S 与杨氏模量 Y （应力与应变之比值）都是常数。
iii） 杆有弹性，服从 Hooke 定律：即应力与相对伸长成正比。

iv）外力与杆的方向一致，各点单位长度上的外力为 $f_0(x,t)$，重力不计。
并求出如下情况对应的边界条件：
(1) x=0 处固定。
(2) x=0 处受 G(t)的横向外力。

4. 二维波动方程的推出：有一均匀的各向同性的弹性圆膜，四周固定。试列出膜的横振动方程与边界条件(设ρ_m为面密度，沿任何方向单位长度张力为 T)。提示：在极坐标中进行微元分析，进而化为直角坐标下的波动方程。



5. 将下列二阶偏微分方程化为标准形式。

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0;$$

(2) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=0;$$

（3） $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-(3+\sin^2 x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y-\frac{\partial u}{\partial y}=0$$