数学物理方法 II 第四次作业

Due date: 2019/06/04

1. 使用傅里叶变换法求解三维无界空间 Helmholtz 方程的 Green 函数：

$$\left(\nabla^2+k^2\right)G\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\right)=-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right)$$

此解称为屏蔽库伦势。

2. 证明第二类虚宗量贝塞尔函数 $K_n(x)$与第一，二，三类贝塞尔函数之间满足如下等式：

$$\begin{aligned}K_n(x)&\equiv\frac{1}{2}\pi i^{n+1}H_n^{(1)}(ix)\\&=\frac{1}{2}\pi i^{n+1}\left[J_n(ix)+iN_n(ix)\right]\end{aligned}$$

其中 $Jn(x)$, $N_n(x)$, $H_n^{(1)}(x)$分别为贝塞尔函数，Neumann 函数，和汉克尔函数。

3. 计算下列关于贝塞尔函数的微分和积分运算。

（1） $\int x\ J_2(x)dx$

（2） $\int x^4 J_1(x)dx$

（3） $\int_0^R J_0(x)cosxdx$

（4） $3J_0'(x)+4J_0'''(x)$

4.

计算 Wronski 行列式 $W\left(J_{\nu},J_{-\nu}\right)$ 及 $W\left(J_{\nu},Y_{\nu}\right)$，其中 $W\left(y_1,y_2\right)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$。

并利用上题结果计算下述积分：

（1）$\int\frac{dx}{xJ_{\nu}^{2}\left(x\right)}$；（2）$\int\frac{dx}{xY_{\nu}^{2}\left(x\right)}$；（3）$\int\frac{dx}{xJ_{\nu}\left(x\right)Y_{\nu}\left(x\right)}$

5.

有很多方程经过适当的自变量或因变量变换可化为 Bessel 方程而得到他的解。例如，方程 $u''+\frac{1-2\alpha}{z}u'+\left[(\beta\gamma z^{\gamma-1})^2+\frac{\alpha^2-\gamma^2\nu^2}{z^2}\right]u=0$ 的通解为 $c_1z^{\alpha}J_{\nu}(\beta z^{\gamma})+c_2z^{\alpha}Y_{\nu}(\beta z^{\gamma})$，试验证此结果。并利用结果，解下列常微分方程：

1. $u''+az^bu=0$
2. $zu''-3u'+zu=0$

6.

设有一柱体半径为 a，高为 h。与外界绝热，初始温度$u_0(1-\frac{\rho^2}{a^2})$，求此柱体内温度分布与变化。又当时间足够长时该柱体温度应达到稳定，试求此稳定温度。(初始温度分布与φ,z无关，所以该定解问题为$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)=0\\ u|_{\rho=0}\text{有界，}\ \frac{\partial u}{\partial\rho}|_{\rho=a}=0)\\ u|_{t=0}=u_0(1-\frac{\rho^2}{a^2})\end{cases}$

7.

高为 h，半径为 a 的圆柱体，上下底保持温度为 0，而柱面温度为 $u_0 \sin\frac{2\pi}{h}z$，求柱体内的稳定温度分布。

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \\ u\big|_{z=0}=0, u\big|_{z=h}=0 \\ u\big|_{\rho=0}=\text{有界}, u\big|_{\rho=a}=u_0\sin\frac{2\pi}{h}z \end{cases}$$

8. 利用 Rodrigues 公式证明：

$$\int_{-1}^{1}(1+x)^k P_l(x)dx=\frac{2^{k+1}(k!)^2}{(k-l)!(k+l+1)!}, \quad k\geq l$$

如果 k<1 则积分结果是什么?

9. 求解球壳内定解问题：

$$\begin{cases} \nabla^2 u=0, a<r<b \\ u\big|_{r=a}=u_0, u\big|_{r=b}=u_0\cos^2\theta \end{cases}$$

10. 将下列函数按球谐函数$Y_l^m(\theta,\varphi)$展开：

(1) $(\sin\theta-2\cos^2\theta)\cos^2\varphi$；(2) $(1-2\sin\theta)\cos\theta\cos\varphi$

11. 求解球内定解问题：

$$\begin{cases} \nabla^2 u=A+Br^2\sin 2\theta\cos\varphi \\ u\big|_{r=a}=0 \end{cases}$$