数值试题二

1. （1）对函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+25x^2}$，在区间 $[-1,1]$ 用拉格朗日插值法进行插值，取不同的插值多项式的阶数，观察龙格现象.

（2）求 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最佳平方逼近多项式 $P_4(x)=a+bx^2+cx^4$.

（3）用复合 Simpson 公式计算 $\left(\int_{-1}^{1}\left[f(x)-P_4(x)\right]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$ ，即用 $P_4(x)$ 逼近 $f(x)$ 的均方差.

2. **世界人口数据拟合问题：**据统计，六十年代世界人口数据如下(单位：亿)

年	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
人口	29.72	30.61	31.51	32.13	32.34	32.85	33.56	34.20	34.83

根据表中数据，预测公元 2018 年（76 亿）、2019 年时的世界人口。

问题分析与数学模型

设人口总数为 $N(t)$，根据人口理论的马尔萨斯模型， 采用指数函数

$$N(t)=e^{a+bt}$$

对数据进行拟合。为了计算方便，将上式两边同取对数，得 $\ln N=a+bt$，令

$$y=\ln N \quad \text{或} \quad N=e^{y}$$

变换后的拟合函数为

$$y(t)=a+bt$$

由人口数据取对数（$y=\ln N$）计算，得下表

t	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
y	3.3918	3.4213	3.4503	3.4698	3.4763	3.4920	3.5133	3.5322	3.5505

根据表中数据及等式 $a+b\,t_k=y_k$ （$k=1$，2，……，9)可列出关于两个未知数 a 、b 的 9 个方程的超定方程组（方程数多于未知数个数的方程组）

$$a+t_j b=y_j \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$$

可用最小二乘法求解。

算法与数学模型求解

算法如下：

第一步：输入人口数据，并计算所有人口数据的对数值；

第二步：建立超定方程组的系数矩阵，并计算对应的正规方程组的系数矩阵和右端向量；

第三步：求解超定方程组并输出结果：a，b；

第四步：利用数据结果构造指数函数计算2017、2018年人口近似值，结束。

3．SARS 的传播及预防问题

非典的爆发和蔓延给我国的经济发展和人民生活带来了很大的影响，下表给出了北京市当年 4 月份到 6 月份的疫情数据，通过拟合确诊的累积病人曲线，若延后 5 天采取严格的预防措施，对疫情的传播所生成的影响做出估计.

日期	已确诊病例累积	现有疑似病例	死亡累积	治愈出院累积
4 月 20 日	297	402	18	33
4 月 30 日	1584	1408	75	90
5 月 1 日	1640	1415	82	100
5 月 10 日	1988	1397	116	175
5 月 20 日	2189	1225	150	395
5 月 30 日	2309	706	176	1006
6 月 1 日	2319	739	181	1124
6 月 10 日	2394	351	184	1747
6 月 20 日	2439	3	191	2189

取拟合曲线的拟合函数为如下非线性函数

$$\frac{1}{y} = a + \frac{b}{x}$$

试确定拟合函数中的参数：a，b，并推测五天后累积病人数量。