数值试验一

一、问题的提出

考虑正方形区域上的泊松问题：

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=f(x,y),\ 0<x,y<1, \\ u(0,y)=u(1,y)=u(x,0)=u(x,1). \end{cases} \tag{1}$$

取（1）中右端项为$f(x,y)=2\pi^2\sin(\pi x)\sin(\pi y)$，则（1）的精确解为：

$$u^*(x,y)=\sin(\pi x)\sin(\pi y).$$

令$h=\dfrac{1}{N}$，N为正整数. $x_i=ih, y_j=jh$，$u_{i,j}\approx u(x_i,y_j)$，$f_{i,j}\approx f(x_i,y_j)$.

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_i,y=y_j}\approx\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2},\quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{x=x_i,y=y_j}\approx\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{h^2}$$

则求解（1）的差分格式为：

$$\begin{cases} -u_{i-1,j}-u_{i,j-1}+4u_{i,j}-u_{i+1,j}-u_{i,j+1}=hf_{i,j}, \\ u_{i,0}=u_{0,j}=u_{i,N}=u_{N,j}=0,\ i,j=1,2,\cdots,N-1. \end{cases} \tag{2}$$

记

$$u_j^h=\begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{N-1,j} \end{pmatrix}, f_j^h=\begin{pmatrix} f_{1,j} \\ f_{2,j} \\ \vdots \\ f_{N-1,j} \end{pmatrix}, u^h=\begin{pmatrix} u_1^h \\ u_2^h \\ \vdots \\ u_{N-1}^h \end{pmatrix}, f^h=\begin{pmatrix} f_1^h \\ f_2^h \\ \vdots \\ f_{N-1}^h \end{pmatrix},$$

则（2）可表示为线性代数方程组

$$L_h u^h=h^2 f^h, \tag{3}$$

其中

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}_{(N-1)\times(N-1)} \qquad L_h=\begin{pmatrix} 4I-C & -I & & & \\ -I & 4I-C & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -I & 4I-C & -I \\ & & & -I & 4I-C \end{pmatrix},$$

I为$(N-1)$ 阶单位矩阵.

二、数值试验

1. 取 $h=0.1$，分析用不同迭代法求解方程组（3）的收敛性，并求出使 $\left\|u^{(k+1)}-u^{(k)}\right\|_\infty<\varepsilon$ 的近似解及相应的迭代次数，其中 $u^{(k)}$ 为求解（3）的第 k 次迭代解，$\varepsilon=10^{-6}$. 并与精确解 u^* 作比较. 考虑用（1）雅可比迭代法；（2）赛德尔迭代法；（3）超松驰迭代法（ω 取 1.2，1.3，1.9，0.9）.

2. 用雅可比迭代法，分析 h 取不同值时，求解（3）的收敛情况. 求出使 $\left\|u^{(k+1)}-u^{(k)}\right\|_\infty<\varepsilon$ 的近似解及相应的迭代次数. 已知雅可比迭代矩阵为 $T=I-\dfrac{1}{4}L_h$，其谱半径为 $\rho(T)=1-2\sin^2\dfrac{\pi h}{2}\approx 1-\dfrac{\pi^2h^2}{2}$.

3. 简单分析产生上述数值结果的理论依据或原因.