数值试验三报告

陈稼霖　　　45875852

2019.5.23

一、体会数值方法的不稳定性对数值结果的影响

分别用显式和隐式欧拉法求解$y' = -50y, y(0) = 100.$

1. 取$h = 0.05, 0.04, 0.03, \cdots$ 用显式欧拉法求解，当步长h取到多少时，数值解开始出现不稳定？

解：此问题的解析解为

$$y = 100e^{-50x}$$

对于模型问题应用显式欧拉公式有

$$y_{n+1} = y_n + hy'_k = (1 - 50h)y_n$$

设在x_n处误差为ε_n，则有

$$\begin{aligned} y_{n+1} + \varepsilon_{n+1} &= (1 + h\lambda)(y_n + \varepsilon_n) \\ \Longrightarrow \varepsilon_{n+1} &= (1 - 50h)\varepsilon_n \end{aligned}$$

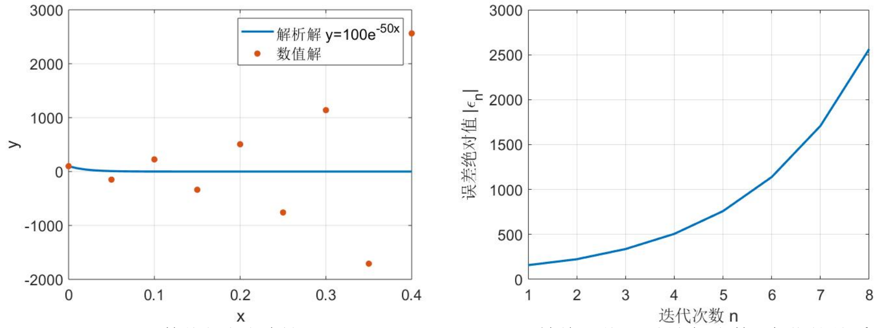
要保证稳定性，则需

$$\begin{aligned} \left|\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}\right| &= |1 - 50h| \leq 1 \\ \Longrightarrow 0 \leq h &\leq \frac{1}{25} = 0.04 \end{aligned}$$

故通过理论预测，当步长$h > 0.04$时，数值解开始出现不稳定。

下通过数值实验验证：

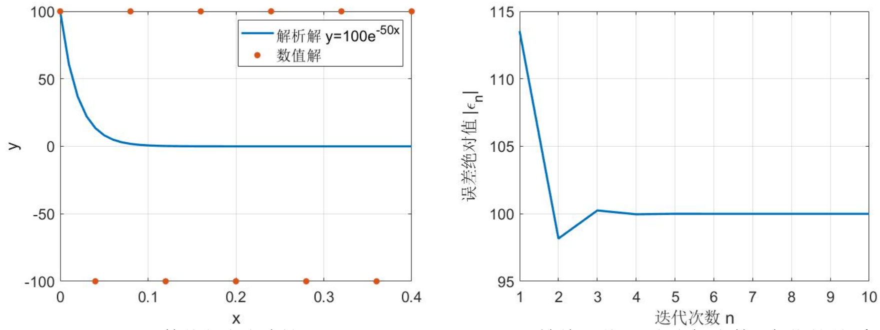
取$h = 0.05$，得数值解及其误差如图1，发现数值解不稳定。



(a) 数值解与解析解　(b) 误差绝对值ε_n随迭代次数n变化的关系

图 1: $h = 0.05$时的数值解及其误差

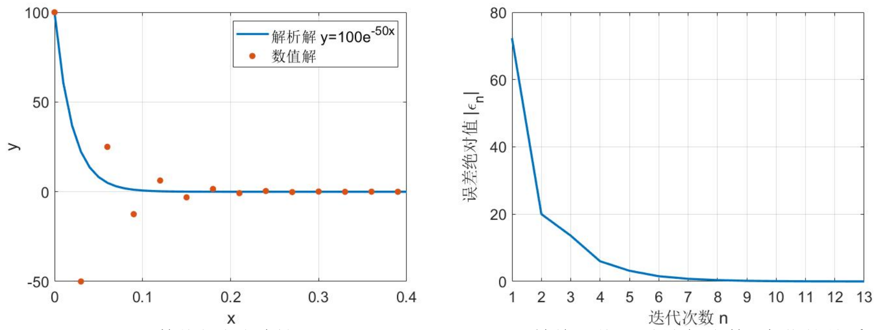
取$h = 0.04$，得数值解及其误差如图2，发现数值解稳定。



(a) 数值解与解析解　(b) 误差绝对值ε_n随迭代次数n变化的关系

图 2: $h = 0.04$时的数值解及其误差

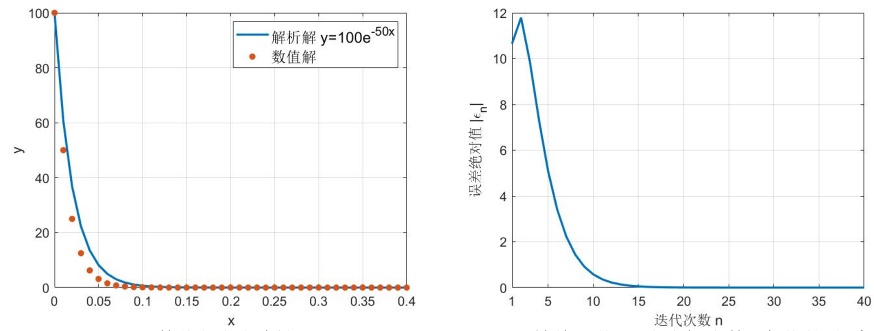
取$h=0.03$，得数值解及其误差如图3，发现数值解稳定。



(a) 数值解与解析解　(b) 误差绝对值ε_n随迭代次数n变化的关系

图 3: $h=0.03$时的数值解及其误差

取$h=0.01$，得数值解及其误差如图4，发现数值解稳定。



(a) 数值解与解析解　(b) 误差绝对值ε_n随迭代次数n变化的关系

图 4: $h=0.01$时的数值解及其误差

综上，当取到步长$h>0.04$时，数值解开始出现不稳定，理论预测与数值实验相符。

2. 用隐式欧拉法求解上述问题，数值解会出现不稳定吗？

解：不会。

对于上述模型问题应用隐式欧拉公式有

$$y_{n+1}=y_n+hy'_{n+1}=y_n-50hy_{n+1}$$
$$\Longrightarrow y_{n+1}=\frac{1}{1+50h}y_n$$

设在x_n处误差为ε_n，则有

$$y_{n+1}+\varepsilon_{n+1}=\frac{1}{1+50h}(y_n+\varepsilon_n)$$
$$\Longrightarrow \varepsilon_{n+1}=\frac{1}{1+50h}\varepsilon_n$$

对于$\forall h>0$，都有

$$|\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}|=|\frac{1}{1+50h}|<1$$

故用隐式欧拉法求解上述问题，数值解不会出现不稳定。

二、体会算法的保结构性

对一阶常微分方程组

$$\begin{cases} y'(t)=-2x(t) \\ x'(t)=\frac{9}{2}y(t) \\ x(0)=3, \qquad\qquad y(0)=2 \end{cases}$$

分别用梯形法、Eular法，四阶Runge–Kutta法求解其数值解，并观察相平面中的轨迹。哪些方法求得的结果能保持相平面中轨迹不变。

解：用梯形法求解其数值解，相平面中的轨迹如图5，发现相平面中轨迹不变。

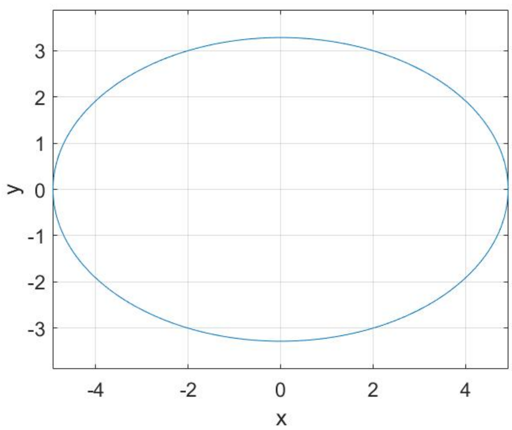


图 5: 梯形法求得的相平面中的轨迹

用显式Eular法求解其数值解，相平面中的轨迹如图6，发现相平面中轨迹偏离。

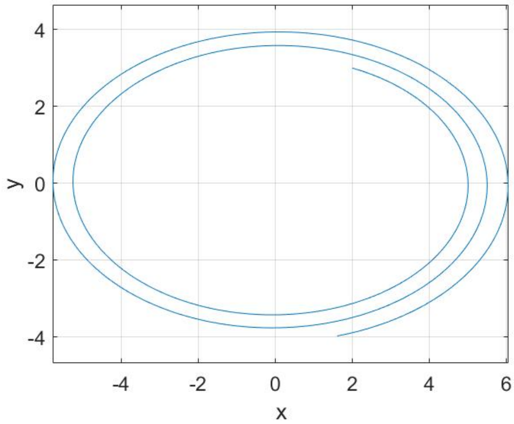


图 6: 显式Eular法求得的相平面中的轨迹

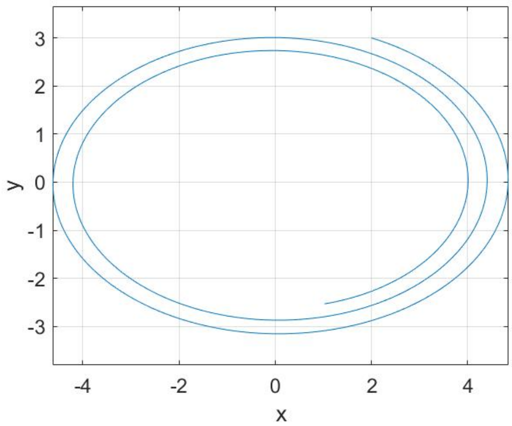


图 7: 隐式Eular法求得的相平面中的轨迹

用隐式Eular法求解其数值解，相平面中的轨迹如图7，发现相平面中轨迹偏离。

用四阶Runge–Kutta法求解其数值解，相平面中的轨迹如图8，发现相平面中轨迹轻微偏离（由于图片质量问题，图中显示不明显）。

综上，只有梯形法求得的结果能保持相平面中的轨迹不变。

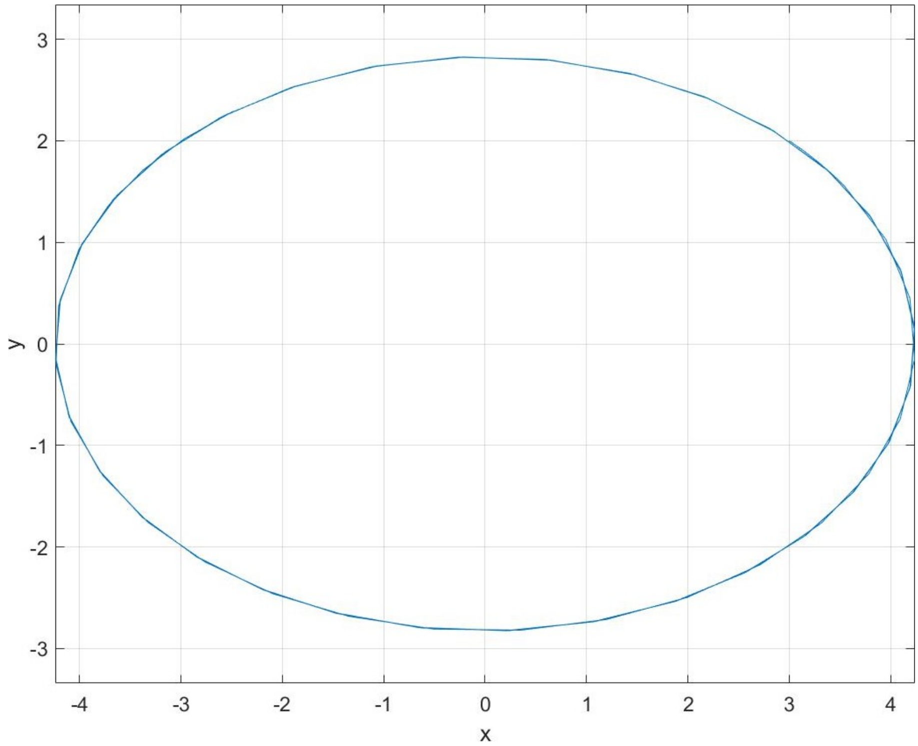


图 8: 四阶Runge–Kutta法求得的相平面中的轨迹

三、体会非线性方程的迭代求解

用隐式欧拉公式和梯形公式求下单摆问题

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \sin\theta = 0, \quad 0 < t \le 10 \\ \theta(0) = \frac{\pi}{3} \\ \frac{d\theta}{dt}|_{t=0} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

取步长$h = 0.02$. 取迭代误差$\varepsilon = 10^{-6}$. 绘出近似解的图形.

解：将问题转化为一阶常微分方程组

$$\begin{cases} y'(t) = z(t), & 0 < t \le 10 \\ z'(t) = -\sin y(t), & 0 < t \le 10 \\ y(0) = \frac{\pi}{3} \\ z(0) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

用隐式欧拉公式求解（Seidel型迭代格式），

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + h z_{n+1}^{(k)} \\ z_{n+1}^{(k+1)} = z_n - h \sin y_{n+1}^{(k+1)} \end{cases}$$

结果如图9。

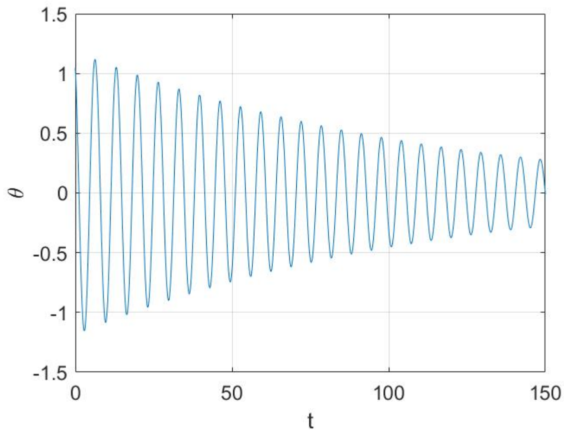


图 9: 隐式欧拉法求得的θ–t曲线

用梯形公式求解（Seidel型迭代格式），

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \frac{h}{2}(z_n + z_{n+1}^{(k)}) \\ z_{n+1}^{(k+1)} = z_n + \frac{h}{2}(\sin y_n + \sin y_{n+1}^{(k+1)}) \end{cases}$$

结果如图10。

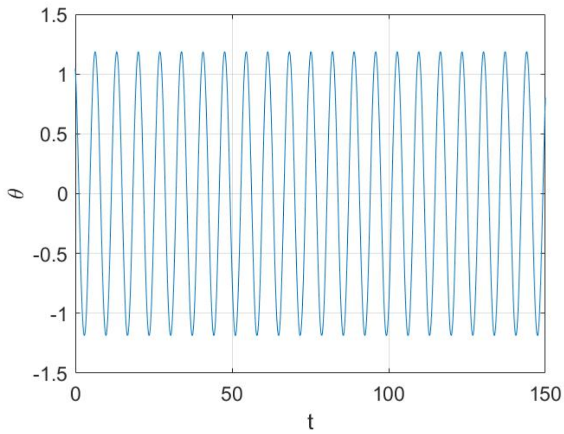


图 10: 梯形法求得的θ–t曲线

MATLAB代码

一、1.显式欧拉法

```
close all;clear;clc;
h = 0.05;
x = 0:0.01:0.4;
y = 100;
analyticalsol = y * exp(-50 .* x);
figure(1);
plot(x,analyticalsol,'-','LineWidth',2);
hold on;
x = 0:h:0.4;
analyticalsol = y * exp(-50 .* x);
for i = x(1:end - 1)
    y(end + 1) = y(end) + h * (-50 * y(end));
end
plot(x,y,'.','MarkerSize',20);
grid on;
xlabel('x');
ylabel('y');
legend('Analytical Solution y=100e^{-50x}','Numerical ...
    Solution','Interpreter','tex');
figure(2);
plot(1:size(x,2) - 1,abs(y(2:end) - ...
    analyticalsol(2:end)),'-','LineWidth',2);
grid on;
xlabel('Iteration times n');
ylabel('The absolute of the error ...
    |\epsilon_n|','Interpreter','tex');
```

二、梯形法

```
close all;clear;clc;
h = 0.01;
t = 0:h:5;
yx = [3;2];
for i = t
    yx(:,end + 1) = inv(eye(2) - h * [0 -2;9/2 0]) * (eye(2) + h ...
        * [0 -2;9/2 0]) * yx(:,end);
end
plot(yx(2,:),yx(1,:));
grid on;
axis equal;
xlabel('x');
ylabel('y');
```

显式Eular法

```
close all;clear;clc;
```

```
h = 0.01;
t = 0:h:5;
yx = [3;2];
for i = t
    yx(:,end + 1) = yx(:,end) + h * [0 -2;9/2 0] * yx(:,end);
end
plot(yx(2,:),yx(1,:));
grid on;
axis equal;
xlabel('x');
ylabel('y');
```

隐式Eular法

```
close all;clear;clc;
h = 0.01;
t = 0:h:5;
yx = [3;2];
for i = t
    yx(:,end + 1) = inv(eye(2) - h * [0 -2;9/2 0]) * yx(:,end);
end
plot(yx(2,:),yx(1,:));
grid on;
axis equal;
xlabel('x');
ylabel('y');
```

四阶Runge–Kutta法

```
close all;clear;clc;
[T,YX] = ode45('f2',[0 10],[2;3]);
plot(YX(:,2),YX(:,1));
grid on;
axis equal;
xlabel('x');
ylabel('y');
function dyx = f2(t,yx)
dyx = [-2 * yx(2);9/2 * yx(1)];
end
```

三、隐式欧拉法

```
close all;clear;clc;
h = 0.02;
epsilon = 10^(-6);
t = 0:h:20;
```

```
yz = [pi / 3;-1 / 2];
for i = t(1:end - 1)
    y0 = yz(1,end) + h * yz(2,end);
    z0 = yz(2,end) - h * sin(yz(1,end));
    y = yz(1,end) + h * z0;
    z = yz(2,end) - h * sin(y);
    while norm([y - y0;z - z0],inf) > epsilon
        y0 = y;
        z0 = z;
        y = yz(1,end) +  h * z0;
        z = yz(2,end) - h * sin(y);
    end
    yz(:,end + 1) = [y;z];
end
plot(t,yz(1,:));
grid on;
axis equal;
xlabel('t');
ylabel('\theta','Interpreter','tex');
```

梯形法

```
close all;clear;clc;
h = 0.02;
epsilon = 10^(-6);
t = 0:h:20;
yz = [pi / 3;-1 / 2];
for i = t(1:end - 1)
    y0 = yz(1,end) + h * yz(2,end);
    z0 = yz(2,end) - h * sin(yz(1,end));
    y = yz(1,end) + h / 2 * (yz(2,end) + z0);
    z = yz(2,end) - h / 2 * (sin(yz(1,end)) + sin(y));
    while norm([y - y0;z - z0],inf) > epsilon
        y0 = y;
        z0 = z;
        y = yz(1,end) + h / 2 * (yz(2,end) + z0);
        z = yz(2,end) - h / 2 * (sin(yz(1,end)) + sin(y));
    end
    yz(:,end + 1) = [y;z];
end
plot(t,yz(1,:));
grid on;
axis equal;
xlabel('t');
ylabel('\theta','Interpreter','tex');
```