光学作业#6

陈稼霖　　　45875852

2018.12.18

4-5

解：自由传播时轴上场点的振幅为$A=\frac{1}{2}A_1$，光强为$I=A^2=\frac{1}{4}A_1^2$，其中A_1是第一个半波带在轴上场点产生的振幅，将各半波带在轴上场点产生的振幅近似等于第一个半波带周围的半波带在轴上场点产生的振幅。

a屏在轴上场点产生的复振幅如振动矢量图1所示

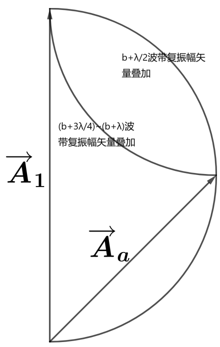

图 1: 4-5a

得到轴上场点的振幅为$A_a=\frac{\sqrt{2}}{2}A_1$，光强为$I_a=A_a^2=\frac{1}{2}A_1^2$，与自由传播时之比为$\frac{I_a}{I}=2$。

b屏在轴上场点产生的复振幅如振动矢量图2所示
得到轴上场点的振幅为$A_b=\frac{\sqrt{2}}{2}A_1$，光强为$I_b=A_b^2=\frac{1}{2}A_1^2$，与自由传播时之比为$\frac{I_b}{I}=2$。

c屏次波源面积较自由传播减半，则在轴上场点的振幅也减半，$A_c=\frac{1}{2}A=\frac{1}{4}A_1$，光强为$I_c=A_c^2=\frac{1}{16}A_1^2$，与自由传播时之比为$\frac{I_c}{I}=\frac{1}{4}$。

d屏在轴上场点产生的复振幅如振动矢量图3所示
得到轴上场点的振幅为$A_d=\frac{1}{2}A_1$，光强为$I_d=A_d^2=\frac{1}{4}A_1^2$，与自由传播时之比为$\frac{I_d}{I}=1$。

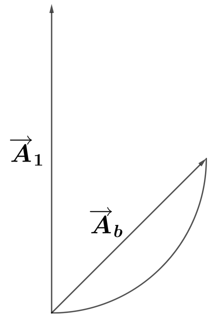

图 2: 4-5b

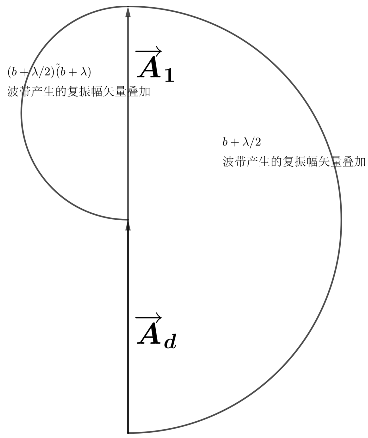

图 3: 4-5d

e屏在轴上场点产生的复振幅如振动矢量图4所示，根据巴比涅原理，e屏在轴上场点产生的复振幅矢量是自由传播时产生的复振幅矢量与$(b+\lambda/2)\sim(b+3\lambda/4)$波带产生的复振幅矢量之差
得到轴上场点的振幅为$A_e=\frac{\sqrt{5}}{2}A_1$，光强为$I_e=A_e^2=\frac{5}{4}A_1^2$，与自由传播时之比为$\frac{I_e}{I}=5$。

f屏在轴上场点产生的复振幅如振动矢量图5所示，根据巴比涅原理，e屏在轴上场点产生的复振幅矢量是$\frac{3}{4}$倍的自由传播时产生的复振幅矢量与$\frac{1}{4}$倍的$(b+\lambda)\sim(b+\lambda/2)$波带产生的复振幅矢量之和
得到轴上场点的振幅为$A_f=\frac{1}{8}A_1$，光强为$I_f=A_f^2=\frac{1}{64}A_1^2$，与自由传播时之比为$\frac{I_f}{I}=\frac{1}{16}$。

4-7

解：自由传播时衍射场中心的振幅为$A=\frac{1}{2}A_1$，强度为$I=A^2=\frac{1}{4}A_1^2$，其中A_1是第一个半波带在衍射场中心产生的振幅。

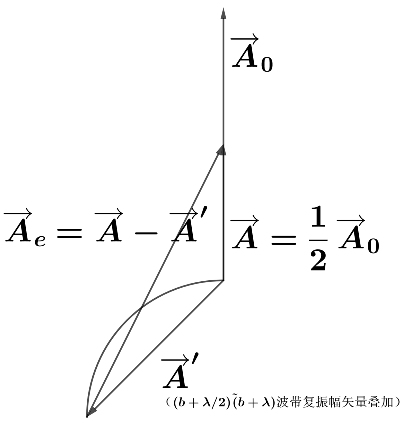

图 4: 4-5e

根据巴比涅原理，将前50个奇数半波带遮挡时衍射场中心的振幅是自由传播时衍射场中心的振幅与前50个奇数半波带在衍射场中心产生的振幅

$$A' = A - (A_1 + A_3 + ... + A_{99}) = -49.5A_1$$

强度为

$$I' = A'^2 = 2450.25A_1^2$$

衍射场中心强度与自由传播时之比为

$$\frac{I'}{I} = 9801$$

4-9

（1）

解：要求在400nm紫光照明下的主焦距为80cm，则需要第1级半波带的半径为

$$\rho_1 = \sqrt{f\lambda} = 0.57mm \tag{1}$$

第k个半波带的半径为

$$\rho_k = \sqrt{k}\rho_1 \tag{2}$$

要求主焦点光强为自由传播时的10^3倍，则需要半波带的最高级数为

$$n = \sqrt{10^3} \approx 32$$

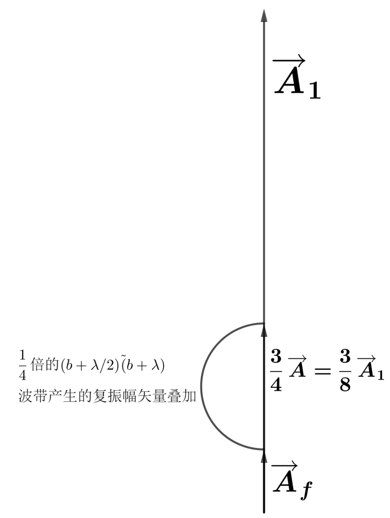

图 5: 4-5f

对应的波带片的半径为

$$\rho_{32}=\sqrt{32}\rho_1=3.2mm$$

综上，以式(1)(2)的半径划分同心圆环，即为半波带，将前32级波带中的奇数（或偶数）波带露出，其余部分遮盖，即制成所需的半波带片。

4-10

解第1级半波带的半径为

$$\rho_1=\sqrt{f\lambda}=0.52mm$$

改用$632.8nm$的氦氖激光照明，主焦距变为

$$f'=\frac{\rho_1^2}{\lambda}=43cm$$

4-11

（1）

证：如图6，经过单缝边缘两点的光路的光程差为

$$\Delta L=a(\sin\theta-\sin\theta_0)$$

对应的相位差为

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta L=\frac{2\pi}{\lambda}a(\sin\theta_0-\sin\theta_0)=2\alpha$$

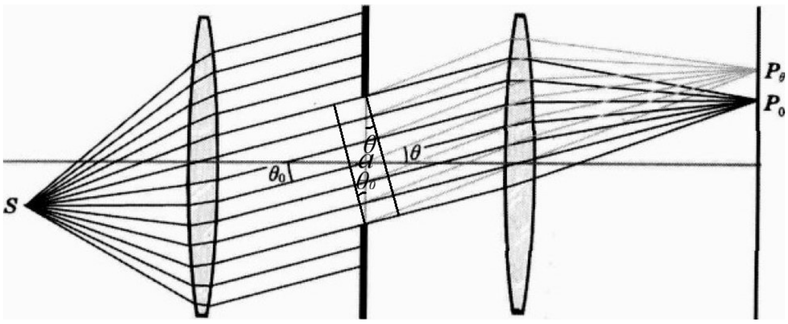

图 6: 4-11

根据振动矢量叠加得场点的振幅为

$$A = 2\frac{A_0}{\delta}\sin\frac{\delta}{2} = A_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

其中A_0为衍射图案零级中心的振幅。场点的强度公式为

$$I = A^2 = A_0^2(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2 = I_0(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2 \tag{3}$$

其中I_0为零级中心强度，$\alpha = \frac{a\pi}{\lambda}(\sin\theta - \theta_0)$。

（2）

证：根据衍射强度公式(3)，在$\alpha = 0$处，场点强度最大，为衍射图案的零级中心；此时$\theta = \theta_0$，各条光路到像屏的光程相等，根据费马原理对应的位置即为几何光学像点处。故零级中心的位置在几何光学像点处。

（3）

证：第1级暗纹对应的角宽度满足

$$\begin{aligned}
&\alpha = \pm\pi \\
\Longrightarrow &\frac{a\pi}{\lambda}(\sin\theta_{\pm1} - \sin\theta_0) = \pm\pi \\
\Longrightarrow &\sin\theta_{\pm1} - \sin\theta_0 = \pm\frac{\lambda}{a}
\end{aligned}$$

由于$\theta_{\pm1} \to \theta$，故$\sin\theta_{\pm1} - \sin\theta_0 \approx \frac{d\sin\theta}{d\theta}|_{\theta=\theta_0}(\theta_{\pm1} - \theta_0) = \cos\theta_0(\theta_{\pm1} - \theta_0)$，零级斑半角宽即为第1级暗纹对应的角宽度之半

$$\Delta\theta = |\theta_{\pm1} - \theta_0| = \frac{\lambda}{a\cos\theta_0}$$

（4）

证：若单缝两侧并非同一介质，设单缝左侧介质折射率为n_1，右侧介质折射率为n_2，则经过单缝边缘两点的光路的光程差变为

$$\Delta L' = a(n_2 \sin\theta - n_1 \sin\theta)$$

对应的相位差变为

$$\delta' = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta L = \frac{2\pi}{\lambda}a(n_2 \sin\theta - n_1 \sin\theta_0) = 2\alpha'$$

故α的定义变为$\alpha' = \frac{a\pi}{\lambda}(n_2 \sin\theta - n_1 \sin\theta_0)$，但强度公式仍为

$$I = I_0(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2$$

零级中心对应角度θ_0'满足

$$n_1 \sin\theta_0 = n_2 \sin\theta_0'$$

零级斑半角宽度变为

$$n_2 \sin\theta_{\pm1} - n_1 \sin\theta_0 = n_2(\sin\theta_{\pm1} - \sin\theta_0') = \pm\frac{\lambda}{a}$$

$$\because \sin\theta_{\pm1} - \sin\theta_0' \approx \cos\theta_0'\Delta\theta$$

$$\Longrightarrow \Delta\theta = \frac{\lambda}{n_2 a \cos\theta_0'} = \frac{\lambda}{a\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin\theta_0}}$$

4-12

解：

（1）

解：当平行光正入射时，反射光束的衍射发散角为

$$\Delta\theta_1 = \frac{\lambda}{a} = \frac{0.6 \times 10^{-6}m}{1 \times 10^{-2}m} = 6 \times 10^{-5}rad \approx 12.4''$$

折射光束的衍射发散角为

$$\Delta\theta_2 = \frac{\lambda}{n_2 a} = \frac{0.6 \times 10^{-6}m}{1.5 \times 1 \times 10^{-2}m} = 4 \times 10^{-5}rad \approx 8.2''$$

（2）

解：当入射角为$\theta_0 = 75°$，反射光束的衍射发散角为

$$\Delta\theta_1 = \frac{\lambda}{a\cos\theta_0} = \frac{0.6 \times 10^{-6}m}{1 \times 10^{-2}m \times \cos 75°} = 2.3 \times 10^{-4}rad \approx 47.4''$$

折射光束的衍射发散角为

$$\Delta\theta_2 = \frac{\lambda}{a\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin\theta_0}} = \frac{0.6\times10^{-6}m}{1\times10^{-2}m\times\sqrt{1.5^2-\sin^2 75^\circ}} = 5.2\times10^{-5}rad \approx 10.7''$$

（3）

解：当入射角为89°时，反射光束的衍射发散角为

$$\Delta\theta_1 = \frac{\lambda}{a\cos\theta_0} = \frac{0.6\times10^{-6}m}{1\times10^{-2}m\times\cos 89^\circ} = 3.4\times10^{-3}rad$$

折射光束的衍射发散角为

$$\Delta\theta_2 = \frac{\lambda}{a\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin\theta_0}} = \frac{0.6\times10^{-6}m}{1\times10^{-2}m\times\sqrt{1.5^2-\sin^2 89^\circ}} = 5.4\times10^{-5}rad \approx 11.1''$$

4-17

（1）

解：取人眼最敏感的光波长$\lambda = 0.55\mu m$，最小分辨距离为

$$\delta y_{\min} = \frac{0.61\lambda}{N.A.} = 0.25\mu m$$

（2）

解：人眼的明视距离为$s_0 = 25cm$，最小分辨角为$\delta\theta_e = 1'$，最下分辨距离为$\delta y_e = s_0\delta\theta_e = 72.7\mu m$。有效放大率为

$$M = \frac{\delta y_e}{\delta y_{\min}} = 290$$

（3）

解：当达到有效放大率时，光学筒长为

$$\Delta = \frac{f_O f_E}{s_0}M = 111mm$$

4-19

解：取光波长$\lambda = 0.55\mu m$，该天文望远镜的最小分辨角为

$$\delta\theta_{\min} = 1.22\frac{\lambda}{D} = 6.71\times10^{-7}rad$$

能分辨月球表面两点的最小距离是

$$\delta y_{\min} = r\delta\theta_{\min} = 255m$$

4-23

解：由$4-11$得单缝夫琅禾费衍射的振幅公式为

$$a_\theta = a_0\frac{\sin\alpha'}{\alpha'}$$

其中a_0是单缝在衍射零级中心产生的振幅，$\alpha' = \frac{\pi a}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_0)$。
相邻两缝之间的光程差为

$$\Delta L = d(\sin\theta - \theta_0)$$

对应的相位差为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta L = \frac{2\pi}{\lambda}d(\sin\theta - \theta_0) = 2\beta'$$

根据各缝在场点处产生的振动矢量叠加得场点的振幅

$$A_\theta = 2\frac{a_\theta}{2\sin\frac{\beta}{2}}\sin\frac{N\delta}{2} = a_\theta\frac{\sin N\sin\beta'}{\sin\beta'} = a_0\frac{\sin\alpha'}{\alpha'}\frac{\sin N\beta'}{\sin\beta'}$$

故斜入射时夫琅禾费多缝衍射强度分布公式为

$$I_\theta = A_\theta^2 = a_0^2(\frac{\sin\alpha'}{\alpha'})^2(\frac{\sin N\beta'}{\sin\beta'})^2 = I(\frac{\sin\alpha'}{\alpha'})^2(\frac{\sin N\beta'}{\sin\beta'})^2$$

其中$\alpha' = \frac{\pi a}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_0)$，$\beta' = \frac{\pi b}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_0)$。

4-25

解：单缝夫琅禾费衍射振幅公式为

$$a_\theta = a_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

d和$2d$的缝距对应的光程差分别为

$$\Delta L_1 = d\sin\theta, \Delta L_2 = 2d\sin\theta$$

对应的相位差分别为

$$\delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta L_1 = \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta = 2\beta, \delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta L_2 = \frac{2\pi}{\lambda}2d\sin\theta = 4\beta$$

如图7，根据振动矢量叠加，解得总振动矢量的x,y分量分别为

$$A_{\theta x} = a_\theta(1+\cos\delta_1+\cos(\delta_1+\delta_2)) = a_\theta(1+\cos 2\beta+\cos 6\beta)$$

$$A_{\theta y} = a_\theta(\sin\delta_1+\sin(\delta_1+\delta_2)) = a_\theta(\sin 2\beta+\sin 6\beta)$$

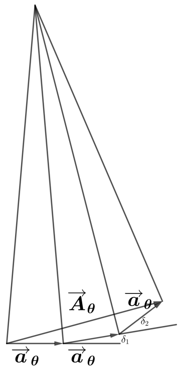

图 7: 4-25

总振幅为

$$
\begin{aligned}
A_\theta =& \sqrt{A_{\theta x}^2 + A_{\theta y}^2} = a_\theta^2[(1+\cos 2\beta + \cos 6\beta)^2 + (1+\sin 2\beta + \sin 6\beta)^2] \\
=& a_0^2(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2[3 + 2(\cos 2\beta + \cos 4\beta + \cos 6\beta)] \\
=& I_0(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2[3 + 2(\cos 2\beta + \cos 4\beta + \cos 6\beta)]
\end{aligned}
$$

4-27

（1）

解：遮住偶数缝时，相当于缝宽为a，缝间距为$6a$的多缝夫琅禾费衍射，其强度分布公式为

$$I_\theta = I_0(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta})^2$$

其中$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$，$\beta = \frac{6\pi a}{\lambda}\sin\theta$。

（2）

解：遮住奇数缝时，同样相当于相当于缝宽为a，缝间距为$6a$的多缝夫琅禾费衍射，其强度分布公式同上

$$I_\theta = I_0(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta})^2$$

其中$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$，$\beta = \frac{6\pi a}{\lambda}\sin\theta$。

（3）

解：当全开放时，相当于前两题的叠加，根据振动矢量叠加得强度分布公式为

$$I'_\theta = I_\theta(2\sin(\frac{\pi}{2} - 2\alpha))^2 = 4I_0\cos^2 2\alpha(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta})^2$$

4-32

（1）

解：该摄谱仪在第一级光谱在闪耀波长附近能分辨的谱线间隔的最小值为

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{R} = 5.1 \times 10^{-3} nm$$

（2）

解：该摄谱仪的线色散本领为$D_l = \frac{1}{0.8nm/mm} = 1.25mm/nm$，角色散本领为

$$D_\theta = \frac{D_l}{f} = 4.1'/mm$$

（3）

解：光栅常数为

$$d = \frac{1}{1200mm^{-1}} = 8.3 \times 10^2 mm$$

光栅的闪耀角为

$$\theta_b = \arcsin\frac{\lambda_1 b}{2d} = 12°39'$$

闪耀方向与光栅平面的法线方向所成角度与之相同，为$12°39'$。

3-34

（1）

解：光栅的色分辨本领为

$$R_{光栅} = kN = 1 \times 5 \times 10^{-2}m \times 600 \times 1000m^{-1} = 3 \times 10^4$$

棱镜的色分辨本领为

$$R_{棱镜} = b\frac{dn}{d\lambda} = 5 \times 10^{-2}m \times 0.6 \times 10^{-4} \times 10^9 m^{-1} = 3 \times 10^3$$

取光波长$\lambda = 0.55\mu m$，正入射，对于第1级干涉条纹，法-珀干涉仪的色分辨本领为

$$R_{F-P} = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{2\pi nh}{\lambda}\frac{\sqrt{R}}{1-R} = \frac{2\pi \times 1 \times 5 \times 10^{-2}m}{5.5 \times 10^{-7}m}\frac{\sqrt{0.99}}{1-0.99} = 6 \times 10^{7}$$

色分辨本领比较：

$$R_{F-P} > R_{光栅} > R_{棱镜}$$

（2）

解：光栅的角色散本领为

$$D_{光栅} = \frac{k}{d\cos\theta_k} = \frac{1}{1/(600mm^{-1})} = 2.2'/nm$$

棱镜的角色散本领为

$$D_{棱镜} = \frac{2\sin(\alpha/2)}{\sqrt{1-n^2\sin^2(\alpha/2)}}\frac{dn}{d\lambda} = \frac{2\sin 30°}{\sqrt{1-1.5^2\sin^2 30°}} \times 0.6 \times 10^{-4} \times 10^{9}m^{-1}$$

$$= 0.31'/nm$$

对于第1级干涉条纹，取$i_k = 10°$，法-珀干涉仪的角色散本领为

$$D_{F-P} = \frac{di_k}{d\lambda} = \frac{k}{2nh\sin i_k} = \frac{2nh\cos i_k}{2nh\lambda\sin i_k} = \frac{\cot 10°}{5.5 \times 10^{-7}m} = 35.5'/nm$$

角色散本领比较：

$$D_{F-P} > D_{光栅} > D_{棱镜}$$

（3）

解：光栅的自由光谱范围为

$$\lambda \in [\frac{d}{2}, d] = [\frac{1/(600mm^{-1})}{2}, 1/(600mm^{-1})] = [850.0nm, 1700.0nm]$$

棱镜只有一套光谱，故不存在不同级光谱之间的重叠，从而自由光谱范围不受限制。

法珀干涉仪的自由光谱范围为

$$k\lambda = (k-1)(\lambda + \delta\lambda)$$

$$\Longrightarrow \delta\lambda = \frac{\lambda}{k-1} \approx \frac{\lambda^2}{2nh} = \frac{(5.5 \times 10^{-7}m)^2}{2 \times 1 \times 5 \times 10^{-2}m} = 0.003nm$$

故棱镜的自由光谱范围大于光栅的自由光谱范围大于法-珀干涉仪的自由光谱范围。