

Chapter 7

光学谐振腔

习题 7.1: 试把从光学谐振腔 ($R \sim 0.99$) 可得到的典型 Q 值与微波谐振腔的 Q 进行比较. □

证: 设激光波长 $\lambda \sim 1 \mu\text{m}$, 腔长 $l \sim 1 \text{ m}$, $R \sim 0.99$ 的光学谐振腔的 Q 值的典型值为

$$Q = 2\pi \frac{t_c}{T} = 2\pi \frac{\frac{nl}{c[\alpha l - \ln R]}}{\frac{\lambda}{c}} = 2\pi \frac{nl}{-\lambda \ln R} = 6.25 \times 10^8. \quad (7.1)$$

微波波长较激光波长大 $3 \sim 6$ 个数量级, 故微波谐振腔的 Q 值较光学谐振腔小 $3 \sim 6$ 个数量级. □

习题 7.2: 设计一个谐振腔, $R_1 = 20$ 厘米, $R_2 = -32$ 厘米, $l = 16$ 厘米, $\lambda = 10^{-4}$ 厘米.

试求

- (a) 最小光斑尺寸 ω_0 ;
- (b) 最小光斑的位置;
- (c) 镜面光斑尺寸 ω_1, ω_2 ;
- (d) ω_0, ω_1 和 ω_2 分别与共焦腔 ($R_1 = -R_2 = l$) 相应值的比.

□

解: 为保证各物理量符号的规范, 不妨重设 $R_1 = -20 \text{ cm}$, $R_2 = 32 \text{ cm}$.

- (a) 瑞利距离的平方为

$$z_0^2 = \frac{l(R_2 - R_1 - l)(l + R_1)(l - R_2)}{(2l + R_1 - R_2)^2} = 92.16 \text{ cm}^2. \quad (7.2)$$

最小光斑尺寸为

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{n\pi}} = 0.0175 \text{ cm} = 175 \mu\text{m}. \quad (7.3)$$

- (b) 最小光斑与 1 号镜面的距离为

$$|z_1| = \left| \frac{1}{2} \left[R_1 \pm \sqrt{R_1^2 - 4z_0^2} \right] \right| = 7.2 \text{ cm 或 } 12.8 \text{ cm}. \quad (7.4)$$

(c) 镜面光斑尺寸分别为

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^2} = 0.0219 \text{ cm 或 } 0.0291 \text{ cm} = 219 \mu\text{m 或 } 291 \mu\text{m}, \quad (7.5)$$

$$\omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z_2}{z_0}\right)^2} = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{l - z_1}{z_0}\right)^2} = 0.0237 \text{ cm 或 } 0.0184 \text{ cm} = 237 \mu\text{m 或 } 184 \mu\text{m}. \quad (7.6)$$

(d) 对对称共焦腔, 瑞利距离的平方为

$$z_{0,\text{confocal}}^2 = \frac{l^2}{4} = 64 \text{ cm}^2, \quad (7.7)$$

束腰半径为

$$\omega_{0,\text{confocal}} = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi n}} = 0.0160 \text{ cm} = 160 \mu\text{m}, \quad (7.8)$$

镜面光斑半径为

$$\omega_{1,2,\text{confocal}} = \sqrt{2} \omega_{0,\text{confocal}} = 0.0226 \text{ cm} = 226 \mu\text{m}. \quad (7.9)$$

题设中谐振腔 ω_0 、 ω_1 和 ω_2 与共焦腔相应值的比分别为

$$\frac{\omega_0}{\omega_{0,\text{confocal}}} = 1.1, \quad (7.10)$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_{1,\text{confocal}}} = 0.97 \text{ 或 } 1.3, \quad (7.11)$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_{2,\text{confocal}}} = 1.05 \text{ 或 } 0.83. \quad (7.12)$$

□

习题 7.3: 考虑一共焦腔, $l = 16$ 厘米, $\lambda = 10^{-4}$ 厘米, 反射率 $R_1 = R_2 = 0.995$. 利用图 7.7, 选择反射镜的口径, 使第一个高阶模式 (TE_{01}) 的总损耗超过 3%. 对于选择的口径, 基模损耗有多少? 为了抑制高阶横模的振荡, 需要多大的口径? □

解: 为使第一个高阶模式 (TE_{01}) 的总损耗超过 3%, 衍射损耗应满足

$$1 - 0.995 \times (1 - \text{衍射损耗}) > 3 \implies \text{衍射损耗} > 2.5 \quad (7.13)$$

由图 7.7, 对模式 TE_{01} , 2.5% 的衍射损耗对应 $\frac{a^2 n}{\lambda l} = 0.8$, 对应反射镜的口径为 $a = 0.36 \text{ mm}$, 故为使模式 TE_{01} 的总损耗超过 3%, 反射镜的口径应 $\leq 0.36 \text{ mm}$.

对选择的口径 $a = 0.36 \text{ mm}$, 基模衍射损耗约为 0.2%, 总损耗为 $1 - 0.995 \times (1 - 0.2\%) \approx 0.7\%$.

为了抑制高阶横模的振荡, 需要基模的损耗远低于高阶模, 故反射镜的口径在 $a = 0.33 \text{ mm}$ 左右, 是一个较为合理的方案. □

习题 7.4: 证明稳区图 7.4 为什么是下列条件的图解表示.

$$0 \leq \left(1 - \frac{l}{R_1}\right) \left(1 - \frac{l}{R_2}\right) \leq 1$$

指出图 7.1 的 8 种谐振腔在稳区图上的位置. □

解: 由上述稳定条件式, 当 $\frac{l}{R_1} \geq 1, \frac{l}{R_2} \geq 1$ 时,

$$\left(\frac{l}{R_1} - 1\right) \left(\frac{l}{R_2} - 1\right) \leq 1, \quad (7.14)$$

构成稳定区的右上部分, 当 $\frac{l}{R_1} \leq 1, \frac{l}{R_2} \leq 1$ 时,

$$\left(\frac{l}{R_1} - 1\right) \left(\frac{l}{R_2} - 1\right) \leq 1, \quad (7.15)$$

构成稳定区的左下部分, 故图 7.4 是该稳定条件的图解表示.

图 7.1 中

- 平面平行腔对应稳区图中的点 $(0, 0)$,
- 第一行第二个腔对应 $0 \leq \frac{l}{R_1} \leq 1, 0 \leq \frac{l}{R_2} \leq 1$ 的正方形区域,
- 第二行第一个腔对应 $\frac{l}{R_2} \geq \frac{l}{R_1} \geq 1, \left(\frac{l}{R_1} - 1\right) \left(\frac{l}{R_2} - 1\right) \leq 1$ 的区域,
- 第二行第二个腔对应 $\frac{l}{R_1} \leq 0, 0 \leq \frac{l}{R_2} \leq 1, \left(\frac{l}{R_1} - 1\right) \left(\frac{l}{R_2} - 1\right) \leq 1$ 的区域,
- 共焦腔对应点 $(1, 1)$,
- 共心腔对应点 $(2, 2)$,
- 第四行第一个高损耗腔对应右上的非稳区,
- 第四行第二个高损耗腔对应右上的非稳区.

□

习题 7.5: 按照图 7.4 (或者式 (7.2-2)), 在 $|R_2| = R_1, R_2 < 0$ 时, 也就是交替排列的同样会聚和发散的两个透镜, 可以得到稳定模式. 从物理上解释为什么这会导致净聚焦.

提示: 考虑光线通过两种透镜时离开轴线时的距离.

□

解: 当 $R_1 \geq l$ 时,

$$0 \leq \left(1 - \frac{l}{R_1}\right) \left(1 - \frac{l}{R_2}\right) = 1 - \left(\frac{l}{R_1}\right)^2 \leq 1, \quad (7.16)$$

此时可以得到稳定模式.

该交替排列的同样会聚和发散的二元周期透镜系统的光线矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{2l}{R_1} & l \left(2 - \frac{2l}{R_1}\right) \\ -\left[\frac{2}{-R_1} + \frac{2}{R_1} \left(1 - \frac{2l}{-R_1}\right)\right] & -\left[\frac{2l}{-R_1} - \left(1 - \frac{2l}{-R_1}\right) \left(1 - \frac{2l}{R_1}\right)\right] \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

高 h 的平行光轴的光线, 在透镜 1 处入射, 在透镜 2 处出射的光线为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} r \\ r' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{2l}{R_1} & l \left(2 - \frac{2l}{R_1}\right) \\ -\left[\frac{2}{-R_1} + \frac{2}{R_1} \left(1 - \frac{2l}{-R_1}\right)\right] & -\left[\frac{2l}{-R_1} - \left(1 - \frac{2l}{-R_1}\right) \left(1 - \frac{2l}{R_1}\right)\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h \left(1 - \frac{2l}{R_1}\right) \\ -\frac{4l}{R_1^2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

故光线最终将在距透镜 2

$$-\frac{h\left(1 - \frac{2l}{R_1}\right)}{-\frac{4l}{R_1^2}} = -\frac{h(R_1 - 2l)}{4l} \quad (7.19)$$

处于光轴相交, 故这有可能导致净聚焦. \square

习题 7.6: 设对称谐振腔的反射镜间距为 l , 曲率半径为 R , 利用 $ABCD$ 定律推导模式的特性 (最小光斑尺寸 ω_0 和镜面光斑尺寸 $\omega_{1,2}$).

提示: 证明在反射镜面处位相波阵面的曲率半径 (也是自洽光束解) 等于反射镜的曲率半径. \square

解: 自洽场条件要求腔中的光场经过往返一周后能自再现. 设反射镜面处光束的复参量为 q . 利用 $ABCD$ 定律,

$$q = \frac{Aq + B}{Cq + D}. \quad (7.20)$$

对称谐振腔可等价为焦距为 $R/2$ 和 $R/2$ 的透镜相互间隔距离 l 交替排列而成的二元透镜系统, 故光线矩阵

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2l}{R} & 2l\left(1 - \frac{l}{R}\right) \\ \frac{4}{R}\left(\frac{l}{R} - 1\right) & -\frac{2l}{R} + \left(-\frac{2l}{R} + 1\right)^2 \end{bmatrix}. \quad (7.21)$$

反射镜面处光斑尺寸为

$$\omega_{1,2} = \left(\frac{\lambda}{\pi n}\right)^{1/2} \frac{|B|^{1/2}}{\left[1 - \left(\frac{D+A}{2}\right)^2\right]^{1/4}} = \left(\frac{\lambda}{\pi n}\right)^{1/2} \left(\frac{lR^2}{2R-l}\right)^{1/4}, \quad (7.22)$$

波阵面曲率半径

$$\frac{2B}{D-A} = -R, \quad (7.23)$$

即在反射镜面处位相波阵面的曲率半径 (即自洽光束解) 等于反射镜的曲率半径, 故对称谐振腔中的稳定高斯光束的束腰位于腔心, 从而

$$R = \frac{l}{2} \left[1 + \left(\frac{\pi \omega_0^2 n}{\lambda \frac{l}{2}} \right)^2 \right], \quad (7.24)$$

最小光斑尺寸

$$\omega_0 = \frac{\lambda l}{2\pi n} \sqrt{\frac{2R}{l} - 1}. \quad (7.25)$$

\square

习题 7.7: 若用两个反射镜 (也就是在 z_1 和 z_2 处分别方两个曲率半径等于 $R(z_1)$ 和 $R(z_2)$ 的反射镜) “代替” 高斯传播光束的任意两个位相波阵面, 证明由此构成的光学谐振腔是稳定腔. \square

证: 设高斯光束的束腰半径为 ω_0 , 则 z_1 和 z_2 处的波阵面曲率半径分别为

$$R(z_1) = z_1 \left(1 + \frac{z_0^2}{z_1^2} \right), \quad (7.26)$$

$$R(z_2) = z_2 \left(1 + \frac{z_0^2}{z_2^2} \right), \quad (7.27)$$

其中 $z_0 = \frac{\pi \omega_0^2 n}{\lambda}$. 该两个反射镜构成的光学谐振腔满足稳定条件:

$$0 \leq \left(1 - \frac{z_2 - z_1}{R(z_1)} \right) \left(1 - \frac{z_2 - z_1}{R(z_2)} \right) = \frac{(z_0^2 - z_1 z_2)^2}{(z_0^2 + z_1^2)(z_0^2 + z_2^2)} \leq 1, \quad (7.28)$$

故由此构成的光学谐振腔为稳定腔. \square

习题 7.8: 设光学谐振腔由间距为 l 、曲率半径为 R 的两个相同的反射镜和放在中间的一薄透镜 (焦距为 f) 所构成, 推导模式的稳定条件. \square

解: 自洽场条件要求腔中的光场经过往返一周后能再自现. 该光学谐振腔等效于由焦距为 $\frac{R}{2}$ 和 f 的透镜相互间隔距离 $\frac{l}{2}$ 交替排列而成的二元透镜系统. 与 7.2 节中的推导同理, 将式 (6.8-5) 中的 f_1 替换为 f , f_2 替换为 $R/2$, l 替换为 $\frac{l}{2}$, 则得该光学谐振腔的稳定条件为

$$0 \leq \left(1 - \frac{l}{4f}\right) \left(1 - \frac{l}{2R}\right) \leq 1. \quad (7.29)$$

 \square

习题 7.9: 证明由自洽场光束参量 q 的表达式 (7.2-5) 可导出光束在镜面处的曲率半径, 它分别等于反射镜的曲率半径, 即 $R(z_2) = R_2$, $R(z_1) = R_1$. \square

证: 式 (7.2-5)

$$\frac{1}{q} = \frac{D-A}{2B} \pm i \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{D+A}{2}\right)^2}}{B} \equiv \frac{1}{R(z_2)} - i \frac{\lambda}{\pi \omega_2^2 n}, \quad (7.30)$$

其中

$$A = 1 - \frac{2l}{R_1}, \quad (7.31)$$

$$B = l \left(2 - \frac{2l}{R_1}\right), \quad (7.32)$$

$$C = - \left[\frac{2}{R_2} + \frac{2}{R_1} \left(1 - \frac{2l}{R_1}\right) \right], \quad (7.33)$$

$$D = - \left[\frac{2l}{R_2} - \left(1 - \frac{2l}{R_1}\right) \left(1 - \frac{2l}{R_2}\right) \right]. \quad (7.34)$$

故

$$\frac{1}{q} = \frac{\frac{l^2}{R_2} \left(-1 + \frac{l}{R_1}\right) \pm i \sqrt{\left(1 - \frac{l}{R_1}\right) \left(1 - \frac{l}{R_2}\right) \left(-\frac{l^2}{R_1 R_2} + \frac{l}{R_1} + \frac{l}{R_2}\right)}}{l \left(1 - \frac{l}{R_1}\right)}, \quad (7.35)$$

$$\implies R(z_2) = R_2. \quad (7.36)$$

同理可证 $R(z_1) = R_1$, 故自洽场光束在镜面处的曲率半径等于反射镜的曲率半径. \square

习题 7.10: 证明光束往返一次后, 复光束参量 (它的稳态值由式 (7.2-5) 决定) 的微扰 $\Delta(1/q)$ 变为 $\delta(1/q) = e^{\mp i 2\theta} \Delta(1/q)$, 其中 $\cos \theta = \frac{1}{2}(A + D) \cdot \Delta(1/q)$ 与稳定性无关, $|\delta(1/q)| = |\Delta(1/q)|$ 在稳定光束中满足式 (7.2-6). \square

证: 由式 (7.2-5), 稳态下光束的复参量

$$\frac{1}{q} = \frac{D-A}{2B} \pm i \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{D+A}{2}\right)^2}}{B}. \quad (7.37)$$

利用 ABCD 定律, 参量受微扰 $\Delta(1/q)$ 的光束往返一次后参量变为

$$\frac{1}{q} + \delta \left(\frac{1}{q} \right) = \frac{D \left[\frac{1}{q} + \Delta \left(\frac{1}{q} \right) \right] + C}{B \left[\frac{1}{q} + \Delta \left(\frac{1}{q} \right) \right] + A} = \frac{D \left[\frac{1}{q} + \Delta \left(\frac{1}{q} \right) \right] + C}{B \frac{1}{q} + A} \left[1 - \frac{B \Delta \left(\frac{1}{q} \right)}{B \frac{1}{q} + A} \right]$$

$$= \frac{D\frac{1}{q} + C}{B\frac{1}{q} + A} + \frac{D\Delta\left(\frac{1}{q}\right)}{B\frac{1}{q} + A} - \frac{D\frac{1}{q} + C}{B\frac{1}{q} + A} \frac{B\Delta\left(\frac{1}{q}\right)}{B\frac{1}{q} + A} = \frac{1}{q} + \frac{D\Delta\left(\frac{1}{q}\right)}{B\frac{1}{q} + A} - \frac{1}{q} \frac{B\Delta\left(\frac{1}{q}\right)}{B\frac{1}{q} + A}, \quad (7.38)$$

从而参量的微扰变为

$$\delta\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{D - B\frac{1}{q}}{B\frac{1}{q} + A} \Delta\frac{1}{q} = \frac{\frac{D+A}{2} \mp i\sqrt{1 - \left(\frac{D+A}{2}\right)^2}}{\frac{D+A}{2} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{D+A}{2}\right)^2}} \Delta\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{\frac{D+A}{2} \mp i\sqrt{1 - \left(\frac{D+A}{2}\right)^2}}{\left(\frac{D+A}{2}\right)^2 + \left[1 - \left(\frac{D+A}{2}\right)^2\right]} = e^{\mp i2\theta} \Delta\left(\frac{1}{q}\right), \quad (7.39)$$

其中

$$\tan 2\theta = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{D+A}{2}\right)^2}}{\frac{D+A}{2}}, \quad (7.40)$$

即

$$\cos 2\theta = \frac{D + A}{2}. \quad (7.41)$$

当 $\left|\frac{D+A}{2}\right| \leq 1$, 即满足式 (7.2-6) 时, 2θ 为实数, 从而

$$\left|\delta\left(\frac{1}{q}\right)\right| = \left|\Delta\left(\frac{1}{q}\right)\right|. \quad (7.42)$$

□