Chapter 7

光学谐振腔

习题 7.1: 试把从光学谐振腔 ($R \sim 0.99$) 可得到的典型 Q 值与微波谐振腔的 Q 进行比较. □

证: 设激光波长 $\lambda \sim 1\,\mu$m, 腔长 $l \sim 1$ m, $R \sim 0.99$ 的光学谐振腔的 Q 值的典型值为

$$Q = 2\pi \frac{t_c}{T} = 2\pi \frac{\frac{nl}{c[\alpha l - \ln R]}}{\frac{\lambda}{c}} = 2\pi \frac{nl}{-\lambda \ln R} = 6.25 \times 10^8. \tag{7.1}$$

微波波长较激光波长大 $3 \sim 6$ 个数量级, 故微波谐振腔的 Q 值较光学谐振腔小 $3 \sim 6$ 个数量级. □

习题 7.2: 设计一个谐振腔, $R_1 = 20$ 厘米, $R_2 = -32$ 厘米, $l = 16$ 厘米, $\lambda = 10^{-4}$ 厘米.
试求

(a) 最小光斑尺寸 ω_0;

(b) 最小光斑的位置;

(c) 镜面光斑尺寸 ω_1, ω_2;

(d) ω_0, ω_1 和 ω_2 分别与共焦腔 ($R_1 = -R_2 = l$) 相应值的比.

□

解: 为保证各物理量符号的规范, 不妨重设 $R_1 = -20$ cm, $R_2 = 32$ cm.

(a) 瑞利距离的平方为

$$z_0^2 = \frac{l(R_2 - R_1 - l)(l + R_1)(l - R_2)}{(2l + R_1 - R_2)^2} = 92.16\,\text{cm}^2. \tag{7.2}$$

最小光斑尺寸为

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{n\pi}} = 0.0175\,\text{cm} = 175\,\mu\text{m}. \tag{7.3}$$

(b) 最小光斑与 1 号镜面的距离为

$$|z_1| = \left| \frac{1}{2} \left[R_1 \pm \sqrt{R_1^2 - 4z_0^2} \right] \right| = 7.2\,\text{cm 或 } 12.8\,\text{cm}. \tag{7.4}$$

(c) 镜面光斑尺寸分别为

$$\omega_1 =\omega_0\sqrt{1+\left(\frac{z_1}{z_0}\right)^2} = 0.0219\,\mathrm{cm} \text{ 或 } 0.0291\,\mathrm{cm} = 219\,\mu\mathrm{m} \text{ 或 } 0.291\,\mu\mathrm{m}, \tag{7.5}$$

$$\omega_2 =\omega_0\sqrt{1+\left(\frac{z_2}{z_0}\right)^2} = \omega_0\sqrt{1+\left(\frac{l-z_1}{z_0}\right)^2} = 0.0237\,\mathrm{cm} \text{ 或 } 0.0184\,\mathrm{cm} = 237\,\mu\mathrm{m} \text{ 或 } 184\,\mu\mathrm{m}. \tag{7.6}$$

(d) 对对称共焦腔, 瑞利距离的平方为

$$z_{0,\mathrm{confocal}}^2 = \frac{l^2}{4} = 64\,\mathrm{cm}^2, \tag{7.7}$$

束腰半径为

$$\omega_{0,\mathrm{confocal}} = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi n}} = 0.0160\,\mathrm{cm} = 160\,\mu\mathrm{m}, \tag{7.8}$$

镜面光斑半径为

$$\omega_{1,2,\mathrm{confocal}} = \sqrt{2}\omega_{0,\mathrm{confocal}} = 0.0226\,\mathrm{cm} = 226\,\mu\mathrm{m}. \tag{7.9}$$

题设中谐振腔 ω_0、ω_1 和 ω_2 与共焦腔相应值的比分别为

$$\frac{\omega_0}{\omega_{0,\mathrm{confocal}}} =1.1, \tag{7.10}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_{1,\mathrm{confocal}}} =0.97 \text{ 或 } 1.3, \tag{7.11}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_{2,\mathrm{confocal}}} =1.05 \text{ 或 } 0.83. \tag{7.12}$$

□

习题 7.3: 考虑一共焦腔, $l = 16$ 厘米, $\lambda = 10^{-4}$ 厘米, 反射率 $R_1 = R_2 = 0.995$. 利用图 7.7, 选择反射镜的口径, 使第一个高阶模式 (TE_{01}) 的总损耗超过 3%. 对于选择的口径, 基模损耗有多少? 为了抑制高阶横模的振荡, 需要多大的口径? □

解: 由图 7.7, 对模式 TE_{01}, 3% 的损耗对应 $\frac{a^2 n}{\lambda l} = 0.7$, 对应反射镜的口径为 $a = 0.33$ mm, 故为使模式 TE_{01} 的总损耗超过 3%, 反射镜的口径应 ≤ 0.33 mm.

对选择的口径 $a = 0.33$ mm, 基模损耗约为 0.2%.

为了抑制高阶横模的振荡, 需要基模的损耗远低于高阶模, 故反射镜的口径在 $a = 0.33$ mm 左右, 是一个较为合理的方案. □

习题 7.4: 证明稳区图 7.4 为什么是下列条件的图解表示.

$$0 \leq \left(1-\frac{l}{R_1}\right)\left(1-\frac{l}{R_2}\right) \leq 1$$

指出图 7.1 的 8 种谐振腔在稳区图上的位置. □

解: 由上述稳定条件式, 当 $\frac{l}{R_1} \geq 1$, $\frac{l}{R_2} \geq 1$ 时,

$$\left(\frac{l}{R_1}-1\right)\left(\frac{l}{R_2}\right) \leq 1, \tag{7.13}$$

构成稳定区的右上部分, 当 $\frac{l}{R_1} \leq 1$, $\frac{l}{R_2} \leq 1$ 时,

$$\left(\frac{l}{R_1}-1\right)\left(\frac{l}{R_2}-1\right) \leq 1, \tag{7.14}$$

构成稳定区的左下部分, 故图 7.4 是该稳定条件的图解表示.

图 7.1 中

- 平面平行腔对应稳区图中的点 $(0,0)$,
- 第一行第二个腔对应 $0 \leq \frac{l}{R_1} \leq 1$, $0 \leq \frac{l}{R_2} \leq 1$ 的正方形区域,
- 第二行第一个腔对应 $\frac{l}{R_2} \geq \frac{l}{R_1} \geq 1$, $\left(\frac{l}{R_1}-1\right)\left(\frac{l}{R_2}-1\right) \leq 1$ 的区域,
- 第二行第二个腔对应 $\frac{l}{R_1} \leq 0$, $0 \leq \frac{l}{R_2} \leq 1$, $\left(\frac{l}{R_1}-1\right)\left(\frac{l}{R_2}-1\right) \leq 1$ 的区域,
- 共焦腔对应点 $(1,1)$,
- 共心腔对应点 $(2,2)$,
- 第四行第一个高损耗腔对应右上的非稳区,
- 第四行第二个高损耗腔对应右上的非稳区.

□

习题 7.5: 按照图 7.4 (或者式 (7.2-2)), 在 $|R_2| = R_1$, $R_2 < 0$ 时, 也就是交替排列的同样会聚和发散的两个透镜, 可以得到稳定模式. 从物理上解释为什么这会导致净聚焦.
提示: 考虑光线通过两种透镜时离开轴线时的距离. □

解: 当 $R_1 \geq l$ 时,

$$0 \leq \left(1-\frac{l}{R_1}\right)\left(1-\frac{l}{R_2}\right) = 1-\left(\frac{l}{R_1}\right)^2 \leq 1, \tag{7.15}$$

此时可以得到稳定模式.

该交替排列的同样会聚和发散的二元周期透镜系统的光线矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1-\frac{2l}{R_1} & l\left(2-\frac{2l}{R_1}\right) \\ -\left[\frac{2}{-R_1}+\frac{2}{R_1}\left(1-\frac{2l}{-R_1}\right)\right] & -\left[\frac{2l}{-R_1}-\left(1-\frac{2l}{-R_1}\right)\left(1-\frac{2l}{R_1}\right)\right] \end{bmatrix} \tag{7.16}$$

高 h 的平行光轴的光线, 在透镜 1 处入射, 在透镜 2 处出射的光线为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} r \\ r' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1-\frac{2l}{R_1} & l\left(2-\frac{2l}{R_1}\right) \\ -\left[\frac{2}{-R_1}+\frac{2}{R_1}\left(1-\frac{2l}{-R_1}\right)\right] & -\left[\frac{2l}{-R_1}-\left(1-\frac{2l}{-R_1}\right)\left(1-\frac{2l}{R_1}\right)\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h\left(1-\frac{2l}{R_1}\right) \\ -\frac{4l}{R_1^2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{7.17}$$

故光线最终将在距透镜 2

$$-\frac{h\left(1-\frac{2l}{R_1}\right)}{-\frac{4l}{R_1^2}} = -\frac{h(R_1-2l)}{4l} \tag{7.18}$$

处于光轴相交, 故这有可能导致净聚焦. □

习题 7.6: 设对称谐振腔的反射镜间距为 l, 曲率半径为 R, 利用 $ABCD$ 定律推导模式的特性 (最小光斑尺寸 ω_0 和镜面光斑尺寸 $\omega_{1,2}$).
提示: 证明在反射镜面处位相波阵面的曲率半径 (也是自洽光束解) 等于反射镜的曲率半径. □

解: 自洽场条件要求腔中的光场经过往返一周后能自再现. 设反射镜面处光束的复参量为 q. 利用 ABCD 定律,

$$q = \frac{Aq+B}{Cq+D}. \tag{7.19}$$

对称谐振腔可等价为焦距为 $R/2$ 和 $R/2$ 的透镜相互间隔距离 l 交替排列而成的二元透镜系统, 故光线矩阵

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{2l}{R} & 2l\left(1-\frac{l}{R}\right) \\ \frac{4}{R}\left(\frac{l}{R}-1\right) & -\frac{2l}{R}+\left(-\frac{2l}{R}+1\right)^2 \end{bmatrix}. \tag{7.20}$$

反射镜面处光斑尺寸为

$$\omega_{1,2} = \left(\frac{\lambda}{\pi n}\right)^{1/2} \frac{|B|^{1/2}}{\left[1-\left(\frac{D+A}{2}\right)^2\right]^{1/4}} = \left(\frac{\lambda}{\pi n}\right)^{1/2} \left(\frac{lR^2}{2R-l}\right)^{1/4}, \tag{7.21}$$

波阵面曲率半径

$$\frac{2B}{D-A} = -R, \tag{7.22}$$

即在反射镜面处位相波阵面的曲率半径 (即自洽光束解) 等于反射镜的曲率半径, 故对称谐振腔中的稳定高斯光束的束腰位于腔心, 从而

$$R = \frac{l}{2}\left[1+\left(\frac{\pi\omega_0^2 n}{\lambda\frac{l}{2}}\right)^2\right], \tag{7.23}$$

最小光斑尺寸

$$\omega_0 = \frac{\lambda l}{2\pi n}\sqrt{\frac{2R}{l}-1}. \tag{7.24}$$

□

习题 7.7: 若用两个反射镜 (也就是在 z_1 和 z_2 处分别方两个曲率半径等于 $R(z_1)$ 和 $R(z_2)$ 的反射镜) “代替”高斯传播光束的任意两个位相波阵面, 证明由此构成的光学谐振腔是稳定腔. □

证: 设高斯光束的束腰半径为 ω_0, 则 z_1 和 z_2 处的波阵面曲率半径分别为

$$R(z_1) = z_1\left(1+\frac{z_0^2}{z_1^2}\right), \tag{7.25}$$

$$R(z_2) = z_2\left(1+\frac{z_0^2}{z_2^2}\right), \tag{7.26}$$

其中 $z_0 = \frac{\pi\omega_0^2 n}{\lambda}$. 该两个反射镜构成的光学谐振腔满足稳定条件:

$$0 \le \left(1-\frac{z_2-z_1}{R(z_1)}\right)\left(1-\frac{z_2-z_1}{R(z_2)}\right) = \frac{(z_0^2-z_1z_2)^2}{(z_0^2+z_1^2)(z_0^2+z_2^2)} \le 1, \tag{7.27}$$

故由此构成的光学谐振腔为稳定腔. □

习题 7.8: 设光学谐振腔由间距为 l、曲率半径为 R 的两个相同的反射镜和放在中间的一薄透镜 (焦距为 f) 所构成, 推导模式的稳定条件. □

解: 自洽场条件要求腔中的光场经过往返一周后能再自现. 该光学谐振腔等效于由焦距为 $\frac{R}{2}$ 和 f 的透镜相互间隔距离 $\frac{l}{2}$ 交替排列而成的二元透镜系统. 与 7.2 节中的推导同理, 将式 (6.8-5) 中的 f_1 替换为 f, f_2 替换为 $R/2$, l 替换为 $\frac{l}{2}$, 则得该光学谐振腔的稳定条件为

$$0 \le \left(1-\frac{l}{4f}\right)\left(1-\frac{l}{2R}\right) \le 1. \tag{7.28}$$

□

习题 7.9: 证明由自洽场光束参量 q 的表达式 (7.2-5) 可导出光束在镜面处的曲率半径, 它分别等于反射镜的曲率半径, 即 $R(z_2)=R_2$, $R(z_1)=R_1$. □

证: 式 (7.2-5)

$$\frac{1}{q}=\frac{D-A}{2B}\pm i\frac{\sqrt{1-\left(\frac{D+A}{2}\right)^2}}{B}\equiv\frac{1}{R(z_2)}-i\frac{\lambda}{\pi\omega_2^2 n},\tag{7.29}$$

其中

$$A=1-\frac{2l}{R_1},\tag{7.30}$$

$$B=l\left(2-\frac{2l}{R_1}\right),\tag{7.31}$$

$$C=-\left[\frac{2}{R_2}+\frac{2}{R_1}\left(1-\frac{2l}{R_1}\right)\right],\tag{7.32}$$

$$D=-\left[\frac{2l}{R_2}-\left(1-\frac{2l}{R_1}\right)\left(1-\frac{2l}{R_2}\right)\right].\tag{7.33}$$

故

$$\frac{1}{q}=\frac{\frac{l^2}{R_2}\left(-1+\frac{l}{R_1}\right)\pm i\sqrt{\left(1-\frac{l}{R_1}\right)\left(1-\frac{l}{R_2}\right)\left(-\frac{l^2}{R_1R_2}+\frac{l}{R_1}+\frac{l}{R_2}\right)}}{l\left(1-\frac{l}{R_1}\right)},\tag{7.34}$$

$$\Longrightarrow R(z_2)=R_2.\tag{7.35}$$

同理可证 $R(z_1)=R_1$, 故自洽场光束在镜面处的曲率半径等于反射镜的曲率半径. □

习题 7.10: 证明光束往返一次后, 复光束参量 (它的稳态值由式 (7.2-5) 决定) 的微扰 $\Delta(1/q)$ 变为 $\delta(1/q)=e^{\mp i2\theta}\Delta(1/q)$, 其中 $\cos\theta=\frac{1}{2}(A+D)\cdot\Delta(1/q)$ 与稳定性无关, $|\delta(1/q)|=|\Delta(1/q)|$ 在稳定光束中满足式 (7.2-6). □

证: 由式 (7.2-5), 稳态下光束的复参量

$$\frac{1}{q}=\frac{D-A}{2B}\pm i\frac{\sqrt{1-\left(\frac{D+A}{2}\right)^2}}{B}.\tag{7.36}$$

利用 ABCD 定律, 参量受微扰 $\Delta(1/q)$ 的光束往返一次后参量变为

$$\begin{aligned}\frac{1}{q}+\delta\left(\frac{1}{q}\right)=&\frac{D\left[\frac{1}{q}+\Delta\left(\frac{1}{q}\right)\right]+C}{B\left[\frac{1}{q}+\Delta\left(\frac{1}{q}\right)\right]+A}=\frac{D\left[\frac{1}{q}+\Delta\left(\frac{1}{q}\right)\right]+C}{B\frac{1}{q}+A}\left[1-\frac{B\Delta\left(\frac{1}{q}\right)}{B\frac{1}{q}+A}\right]\\=&\frac{D\frac{1}{q}+C}{B\frac{1}{q}+A}+\frac{D\Delta\left(\frac{1}{q}\right)}{B\frac{1}{q}+A}-\frac{D\frac{1}{q}+C}{B\frac{1}{q}+A}\frac{B\Delta\left(\frac{1}{q}\right)}{B\frac{1}{q}+A}=\frac{1}{q}+\frac{D\Delta\left(\frac{1}{q}\right)}{B\frac{1}{q}+A}-\frac{1}{q}\frac{B\Delta\left(\frac{1}{q}\right)}{B\frac{1}{q}+A},\end{aligned}\tag{7.37}$$

从而参量的微扰变为

$$\delta\left(\frac{1}{q}\right)=\frac{D-B\frac{1}{q}}{B\frac{1}{q}+A}\Delta\frac{1}{q}=\frac{\frac{D+A}{2}\mp i\sqrt{1-\left(\frac{D+A}{2}\right)^2}}{\frac{D+A}{2}\pm i\sqrt{1-\left(\frac{D+A}{2}\right)^2}}\Delta\left(\frac{1}{q}\right)=\frac{\frac{D+A}{2}\mp i\sqrt{1-\left(\frac{D+A}{2}\right)^2}}{\left(\frac{D+A}{2}\right)^2+\left[1-\left(\frac{D+A}{2}\right)^2\right]}=e^{\mp i2\theta}\Delta\left(\frac{1}{q}\right),\tag{7.38}$$

其中

$$\tan 2\theta=\frac{\sqrt{1-\left(\frac{D+A}{2}\right)^2}}{\frac{D+A}{2}},\tag{7.39}$$

即

$$\cos 2\theta = \frac{D+A}{2}. \tag{7.40}$$

当 $\left|\frac{D+A}{2}\right| \leq 1$, 即满足式 (7.2-6) 时, 2θ 为实数, 从而

$$\left|\delta\left(\frac{1}{q}\right)\right| = \left|\Delta\left(\frac{1}{q}\right)\right|. \tag{7.41}$$

□