量子电子学

Quantum Electronics
PHYS6252P
2021-2022 学年第二学期

作业

陈稼霖
github.com/Chen-Jialin
2022 年 2 月 – 5 月

目录

Chapter 6

光束在均匀介质和类透镜介质中的传播

习题 6.1: 推导 (6.2-1) 至 (6.2-4) 各式. □

证: 对相同透镜构成的波导, (在 $n+1$ 处) 出射和 (在 n 处) 出射光线之间的关系为

$$\begin{bmatrix} r_{n+1} \\ r'_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ -1/f & (1-d/f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_n \\ r'_n \end{bmatrix}, \tag{6.1}$$

或将其写成方程形式为

$$r_{n+1} = r_n + d r'_n, \tag{6.2}$$

$$r'_{n+1} = -\frac{1}{f} r_n + \left(1 - \frac{d}{f}\right) r'_n. \tag{6.3}$$

由式 (6.2) 得

$$r'_n = \frac{1}{d}(r_{n+1} - r_n), \tag{6.4}$$

因而有

$$r'_{n+1} = \frac{1}{d}(r_{n+2} - r_{n+1}), \tag{6.5}$$

将以上两式代入式 (6.3) 中得

$$r_{n+2} - \left(2 - \frac{d}{f}\right) r_{n+1} + r_n = 0. \tag{6.6}$$

上式为微分方程

$$r'' + \frac{d}{f} r = 0 \tag{6.7}$$

的差分方程, 故令试探解为

$$r_n = r_0 e^{in\theta}, \tag{6.8}$$

将其代入式 (6.6) 中可得

$$e^{2i\theta} - \left(2 - \frac{d}{f}\right) e^{i\theta} + 1 = 0, \tag{6.9}$$

解得

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{d}{f}\right) \pm i\sqrt{\frac{d}{f} - \frac{d^2}{4f^2}}, \tag{6.10}$$

于是得到

$$r_n = r_{最大} \sin\theta(n\theta + \delta), \tag{6.11}$$

其中

$$\cos\theta = \mathrm{Re}\left[e^{i\theta}\right] = \left(1 - \frac{d}{2f}\right), \tag{6.12}$$

此即式 (6.2-2),

$$r_{最大} = \frac{r_0}{\sin\delta}. \tag{6.13}$$

利用 (6.2) 得

$$r_{最大} \sin(\theta + \delta) = r_0 + dr'_0, \tag{6.14}$$

$$\Longrightarrow \frac{r_0}{\sin\delta}(\sin\theta\cos\delta + \cos\theta\sin\delta) = r_0 + dr'_0, \tag{6.15}$$

$$\Longrightarrow \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \frac{r_0\sin\theta}{(r_0 + dr'_0) - r_0\cos\theta} = \frac{\sqrt{\frac{4f}{d} - 1}}{1 + 2f\frac{r'_0}{r_0}}, \tag{6.16}$$

此即式 (6.2-4), 从而

$$(r_{最大})^2 = \frac{r_0^2}{\sin^2\delta} = \frac{r_0^2(1 + \tan^2\delta)}{\tan^2\delta} = \frac{4f}{4f - d}(r_0^2 + dr_0r'_0 + dfr'^2_0), \tag{6.17}$$

此即式 (6.2-3). 光线稳定的条件为

$$\frac{d}{f} - \frac{d^2}{4f^2} \geq 0, \tag{6.18}$$

$$\Longrightarrow 0 \leq d \leq 4f, \tag{6.19}$$

此即式 (6.2-1). □

习题 6.2: 证明方程

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_s \\ r'_s \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} r_s \\ r'_s \end{bmatrix}$$

的本征值是 $\lambda = e^{\pm i\theta}$, 其中 $\exp(\pm i\theta)$ 由式 (6.1-13) 给出. 注意, 按照式 (6.1-5), 上述矩阵方程也可以写为

$$\begin{bmatrix} r_{s+1} \\ r'_{s+1} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} r_s \\ r'_s \end{bmatrix}. \tag{6.20}$$

□

证: 上述矩阵的特征方程为

$$\det\left(\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} A - \lambda & B \\ C & D - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (A + D)\lambda + (AD - BC) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0, \tag{6.21}$$

从而解得特征值为

$$\lambda = e^{\pm i\theta}, \tag{6.22}$$

其中 $\exp(\pm i\theta)$ 由式 (6.1-13) 给出:

$$e^{\pm i\theta} = b \pm \sqrt{1-b^2}. \tag{6.23}$$

□

习题 6.3: 对于一个平面波入射到透镜上的情况证明式 (6.4-1) 成立, 由此合理地论证式 (6.4-1) 是正确的. □

证: 设透镜的折射率为 n, (x, y) 处厚度为 $t(\sqrt{x^2+y^2})$. 当平面波入射到透镜上, 沿光轴入射透镜和平行光轴于 (x, y) 入射透镜的光线汇聚于焦点, 根据费马原理, 两者自入射到汇聚走过的光程相等:

$$nt(0) + f = nt(\sqrt{x^2+y^2}) + (t(\sqrt{x^2+y^2}) - t(0)) + \sqrt{f^2+x^2+y^2}. \tag{6.24}$$

傍轴近似下, 有

$$nt(0) + f \approx nt(\sqrt{x^2+y^2}) + [t(\sqrt{x^2+y^2}) - t(0)] + f\left(1 + \frac{x^2+y^2}{2f^2}\right), \tag{6.25}$$

$$\Longrightarrow nt(\sqrt{x^2+y^2}) + [t(\sqrt{x^2+y^2}) - t(0)] = nt(0) - \frac{x^2+y^2}{2f}. \tag{6.26}$$

透镜对平面波的作用是引起相移

$$\phi(\sqrt{x^2+y^2}) = k\{nt(\sqrt{x^2+y^2}) + [t(\sqrt{x^2+y^2}) - t(0)]\} = knt(0) - k\frac{x^2+y^2}{2f}, \tag{6.27}$$

而不影响振幅, 因此 (忽略整体相因子) 有

$$E_R(x, y) = E_L(x, y)\exp\left(-ik\frac{x^2+y^2}{2f}\right), \tag{6.28}$$

此即式 (6.4-1). □

习题 6.4: 推导方程式 (6.4-7). □

证: l 处的光线可表为

$$r(l^-) = r_0\cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right), \tag{6.29}$$

$$r'(l^-) = -\sqrt{\frac{k_2}{k}}r_0\sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right). \tag{6.30}$$

边界处出射可表为

$$r(l^+) = r(l^-) = r_0\cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right), \tag{6.31}$$

$$r'(l^+) = n_0 r'(l^-) = -n_0\sqrt{\frac{k_2}{k}}r_0\sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right). \tag{6.32}$$

公共焦点与出射面之间的距离为

$$h = \left|\frac{r_{\text{out}}}{r'_{\text{out}}}\right| = \frac{1}{n_0}\sqrt{\frac{k_2}{k}}\cot\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right). \tag{6.33}$$

□

习题 6.5: 证明占据 $0 \le z \le l$ 区域的类透镜介质把位于 $z < 0$ 的轴上点成像为单点. (若成像点位于 $z < l$ 处, 则是虚像.) □

证: 设轴上物点坐标为 $-z_0 < 0$, 则由该点发出的某条光线可表为 $(0, r_0')$, 经 $-z_0 < z < 0$ 区域的直线传播后在入射面的入射光线可表为

$$\begin{bmatrix} r(0^-) \\ r'(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ r_0' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 r' \\ r_0' \end{bmatrix}. \tag{6.34}$$

经入射面折射后, 光线可表为

$$\begin{bmatrix} r(0^+) \\ r'(0^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(0^-) \\ r'(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 r' \\ \frac{r_0'}{n_0} \end{bmatrix}. \tag{6.35}$$

经类透镜介质中传播后, 在出射面处出射前的光线可表为

$$\begin{bmatrix} r(l^-) \\ r'(l^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) & \sqrt{\frac{k}{k_2}}\sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) \\ -\sqrt{\frac{k_2}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) & \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(0^+) \\ r'(0^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 r_0' \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) + \sqrt{\frac{k}{k_2}}\frac{r_0'}{n_0}\sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) \\ -\sqrt{\frac{k_2}{k}} z_0 r_0' \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) + \frac{r_0'}{n_0}\cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) \end{bmatrix}. \tag{6.36}$$

经出射面折射后, 光线可表为

$$\begin{bmatrix} r(l^+) \\ r'(l^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(l^-) \\ r'(l^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 r_0' \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) + \sqrt{\frac{k}{k_2}}\frac{r_0'}{n_0}\sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) \\ -\sqrt{\frac{k_2}{k}} n_0 z_0 r_0' \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) + r_0'\cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) \end{bmatrix}. \tag{6.37}$$

在 $z = l + d$ 处,

$$r(l+d) = r(l^+) + dr'(l^+) = z_0 r_0' \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) + \sqrt{\frac{k}{k_2}}\frac{r_0'}{n_0}\sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) + \left[-\sqrt{\frac{k_2}{k}} n_0 z_0 r_0' \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) + r_0'\cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right)\right] d = \tag{6.38}$$

其中

$$d = \frac{n_0 z_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) + \sqrt{\frac{k}{k_2}}\sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right)}{\sqrt{\frac{k_2}{k}} n_0^2 z_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) - n_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right)}, \tag{6.39}$$

注意到 $r(l+d) = 0$ 不依赖于 r_0', 故类透镜介质把轴上物点成像为单点. □

习题 6.6: 推导表 6.1 列出的光线矩阵. □

证: (1) **长度为 d 的直线段**: 光线 (r_i, r_i') 在均匀介质中传播 d, 则其与光轴的距离变为

$$r_o = r_i + dr_i', \tag{6.40}$$

斜率不变

$$r_o' = r_i', \tag{6.41}$$

故

$$\begin{bmatrix} r_o \\ r_o' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r_i' \end{bmatrix}. \tag{6.42}$$

(2) **薄透镜 (焦距 f)**: 光线 (r_i, r_i') 经过薄透镜, 则其与光轴的距离不变

$$r_o = r_i, \tag{6.43}$$

傍轴近似下, 斜率 r_o' 满足

$$r_i' - r_o' = \frac{r_o}{f}, \tag{6.44}$$

$$\Longrightarrow r_o =' = -\frac{r_o}{f} + r_i', \tag{6.45}$$

故

$$\begin{bmatrix} r_o \\ r_o' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r_i' \end{bmatrix}. \tag{6.46}$$

(3) **电介质界面 (折射率 n_1, n_2)**: 光线 (r_i, r_i') 经过电介质界面折射, 则其与光轴的距离不变

$$r_o = r_i, \tag{6.47}$$

傍轴近似下, 斜率变为

$$r_o' = \frac{n_1}{n_2} r_i', \tag{6.48}$$

故

$$\begin{bmatrix} r_o \\ r_o' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r_i' \end{bmatrix}. \tag{6.49}$$

(4) **球面电介质界面 (半径 R)**: 光线 (r_i, r_i') 经过球面电介质界面折射, 则其与光轴的距离不变

$$r_o = r_i, \tag{6.50}$$

傍轴近似下, 斜率 r_o' 满足

$$n_1 \left(\frac{r_i}{R} - r_i' \right) = n_2 \left(\frac{r_i}{R} - r_o' \right), \tag{6.51}$$

$$\Longrightarrow r_o' = \frac{n_2 - n_1}{n_2} \frac{r_i}{R} + \frac{n_1}{n_2} r_i', \tag{6.52}$$

故

$$\begin{bmatrix} r_o \\ r_o' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_1}{n_2} \frac{1}{R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r_i' \end{bmatrix}. \tag{6.53}$$

(5) **球面反射镜 (曲率半径 R)**: 光线 (r_i, r_i') 经过球面反射镜反射, 则其与光轴的距离不变

$$r_o = r_i, \tag{6.54}$$

傍轴近似下, 斜率 r_o' 满足

$$\frac{r_i}{R} - r_i' = -r_o' - \frac{r_i'}{R}, \tag{6.55}$$

$$\Longrightarrow r_o' = -\frac{2}{R} r_i + r_i', \tag{6.56}$$

故

$$\begin{bmatrix} r_o \\ r_o' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r_i' \end{bmatrix}. \tag{6.57}$$

(6) **有二次型折射率变化曲线的介质**: 介质的折射率分布为

$$n(x,y) = n_0\left[1-\frac{k_2}{2k}(x^2+y^2)\right], \tag{6.58}$$

其中 k_2 为常数. 光线在非均匀介质中传播的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right) = \nabla, \tag{6.59}$$

其中 s 为沿光线的切向距离, $\boldsymbol{r}$ 为光线的位矢. 傍轴近似下, 可用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$ 代替 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$, 并将式 (6.58) 代入可得

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}z^2} + \left(\frac{k_2}{k}\right) r = 0, \tag{6.60}$$

对入射光线 $\begin{bmatrix} r(0) \\ r'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_i \\ r_i' \end{bmatrix}$, 解得

$$r(z) = r_i \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}z\right) + \sqrt{\frac{k}{k_2}} r_i' \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}z\right), \tag{6.61}$$

$$r'(z) = -\sqrt{\frac{k_2}{k}} r_i \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}z\right) + r_i' \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}z\right), \tag{6.62}$$

故

$$\begin{matrix} r(l) \\ r'(l) \end{matrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) & \sqrt{\frac{k}{k_2}}\sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) \\ -\sqrt{\frac{k_2}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) & \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r_i' \end{bmatrix}. \tag{6.63}$$

□

习题 6.7: 若透镜相对于入射光束置于任意位置处 (即不置于腰部), 对于这种情况求解导出式 (6.7-11) 和 (6.7-12) 的问题. □

证: 设入射高斯光束的束腰半径为 ω_{01}, 透镜位于距入射光束束腰 z_1 处, 则透镜前表面处光斑半径的平方 $\omega_1^2 = [\omega_1(z_1)]^2 = \omega_{01}^2\left[1+\left(\frac{z_1}{z_{01}}\right)^2\right]$, 等相位面曲率半径 $R_1 = R_1(z_1) = z_1\left[1+\left(\frac{z_{01}}{z_1}\right)^2\right]$, 其中 $z_{01} = \frac{\pi\omega_{01}^2 n}{\lambda}$, 因而

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{R_1} - i\frac{\lambda}{\pi n\omega_1^2} = \frac{1}{z_1+iz_{01}}. \tag{6.64}$$

光束经过透镜折射, 在透镜后表面的参量为

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f}, \tag{6.65}$$

$$\Longrightarrow q_2 = \frac{f(z_1+z_{01})}{f-(z_1+iz_{01})}. \tag{6.66}$$

光束经过距离 l 的传播, 在平面 (3) 处的参量为

$$q_3 = q_2 + l = \frac{(f-l)(z_1+iz_{01})+fl}{f-(z_1+iz_{01})}, \tag{6.67}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{q_3} = \frac{1}{R_3} - i\frac{\lambda}{\pi\omega_3^2 n} = \frac{\{(f-z_1)[(f-l)z_1+fl]-z_{01}^2(f-l)\}-if^2z_{01}}{[(f-l)z_1+fl]^2+[(f-l)z_{01}]^2}. \tag{6.68}$$

在新束腰处 $R_3 = \infty$, 由此得新束腰位置为

$$l = \frac{f}{1+\frac{f(f-z_1)}{z_{01}^2-(f-z_1)z_1}}, \tag{6.69}$$

且新束腰半径与原束腰半径之比为

$$\frac{\omega_3}{\omega_{01}} = \frac{\frac{f}{z_{01}}}{\sqrt{1+\left(\frac{f-z_1}{z_{01}}\right)^2}}. \tag{6.70}$$

□

习题 6.8: (a) 若高斯光束垂直入射到折射率为 n 的固体棱镜上, 如下图所示. 试求出射光束的远场衍射角.

(b) 若棱镜向左移动一直到它的入射面位于 $s=-l_1$ 处. 试求出新的出射光束的腰部大小及腰部位置. (假设晶体足够长, 以致光束的腰部位于晶体内.)

□

解: (a) $z=l_1$ 处入射固体棱镜前, 高斯光束光斑半径的平方为 $[\omega(l_1^-)]^2=\omega_0^2\left[1+\left(\frac{l_1}{z_0}\right)^2\right]$, 等相位面曲率半径为 $R(l_1^-)=z_1\left[1+\left(\frac{z_0}{l_1}\right)^2\right]$, 其中 $z_0=\frac{\pi\omega_0^2 n}{\lambda}$, 因而

$$\frac{1}{q(l_1^-)} = \frac{1}{R(l_1^-)} - i\frac{\lambda}{\pi n[\omega(l_1^-)]^2} = \frac{1}{l_1+iz_0}, \tag{6.71}$$

$$\Longrightarrow q(l_1^-) = l_1 + iz_0. \tag{6.72}$$

$z=l_1$ 处, 光束入射后的参量为

$$q(l_1^+) = \frac{q(l_1^-)}{\frac{1}{n}} = n(l_1+iz_0). \tag{6.73}$$

$z=l_2$ 出射前光束的参量为

$$q(l_2^-) = q(l_1^+) + (l_2-l_1) = n(l_1+iz_0) + (l_2-l_1). \tag{6.74}$$

$z=l_2$ 光束出射后的参量为

$$q(l_2^+) = \frac{q(l_2^-)}{n} = (l_1+iz_0) + \frac{l_2-l_1}{n}. \tag{6.75}$$

$z=l_3$ 处光束的参量为

$$q(l_3) = q(l_2^+) + l = (l_1+iz_0) + \frac{l_2-l_1}{n} + (l_3-l_2). \tag{6.76}$$

由

$$\frac{1}{q(l_3)} = \frac{1}{R(l_3)} - i\frac{\lambda}{\pi n[\omega(l_3)]^2}, \tag{6.77}$$

得光束等相位面曲率半径

$$\frac{1}{R_3} = \frac{l_1+\frac{l_2-l_1}{n}+(l_3-l_2)}{\left[l_1+\frac{l_2-l_1}{n}+(l_3-l_2)\right]^2+z_0^2}, \tag{6.78}$$

及束腰半径

$$\omega(l_3) = \omega_0\sqrt{1+\left[\frac{l_1+\frac{l_2-l_1}{n}+(l_3-l_2)}{z_0}\right]^2} \tag{6.79}$$

在新束腰处 $R(l_3)=\infty$, 由此得

$$l_3 = l_2 - \left(l_1 + \frac{l_2 - l_1}{n}\right), \tag{6.80}$$

及新束腰半径

$$\omega_0' = \omega_0. \tag{6.81}$$

此时出射光束的远场衍射角为

$$\theta \approx \frac{\lambda}{\pi\omega_0' n} = \frac{\lambda}{\pi\omega_0 n}. \tag{6.82}$$

(b) 当棱镜入射面位于 $z=-l_1$ 处, 则新的出射光束的腰部半径为

$$\omega_0' = \omega_0, \tag{6.83}$$

位置为

$$l_3 = (l_1 + l_2) - \frac{l_1 + l_2}{n}. \tag{6.84}$$

□

习题 6.9: 波长为 λ 的高斯光束入射到置于 $Z=l$ 的透镜上, 如下图所示. 要使出射光束的腰位于晶体样品的前表面上, 试计算透镜的焦距 f. 证明 (对给定的 l 和 L) 可能存在两个解. 对每个解画出光束的传播情况. □

证: 利用习题 6.7 的结论, 新束腰距离透镜

$$\frac{f}{1+\frac{f(f-l)}{z_0^2-(f-l)l}} = L, \tag{6.85}$$

$$\Longrightarrow (l+L)f^2 - (l^2 + 2lL + z_0^2)f + (l^2 + z_0^2)L = 0, \tag{6.86}$$

解得当 $(l^2+z_0^2)^2 - 4L^2 z_0^2 \geq 0$ 时,

$$f = \frac{l^2 + 2lL + z_0^2 \pm \sqrt{(l^2+z_0^2)^2 - 4L^2 z_0^2}}{l+L}. \tag{6.87}$$

□

习题 6.10: 补全 6.12 节推导过程中所有略去的步骤. □

证: 仿照 6.5 节, 取 $E=\psi(x,y,z)e^{-ikz}$, 将亥姆霍兹方程化为

$$\nabla_t^2\psi - 2ik\psi' - k(k_{2x}x^2 + k_{2y}y^2)\psi = 0, \tag{6.88}$$

其中 $\psi' = \frac{\partial\psi}{\partial z}$. 假设波动方程的一个解为

$$\psi = \exp\left\{-i\left[P(z) + \frac{Q(z)x^2}{2} + \frac{Q_y(z)y^2}{2}\right]\right\}, \tag{6.89}$$

将其代入式 (6.88) 得

$$Q_x^2x^2 + Q_y y^2 + iQ_x + iQ_y + 2kP' + k(Q_x'x + Q_y'y) + kk_2(x^2+y^2) = 0. \tag{6.90}$$

上式对任一 x, y 均成立, 故 x, y 的各次幂的系数均等于零, 从而导出

$$Q_x^2 + k\frac{\mathrm{d}Q_x}{\mathrm{d}z} + kk_{2x} = 0, \quad Q_y^2 + k\frac{\mathrm{d}Q_y}{\mathrm{d}z} + kk_{2y} = 0 \tag{6.91}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -i\left(\frac{Q_x + Q_y}{2k}\right). \tag{6.92}$$

假设介质均匀, 则 $k_{2x} = k_{2y} = 0$, 式 (6.91) 可化为

$$Q_x^2 + k\frac{\mathrm{d}Q_x}{\mathrm{d}z} = 0, \quad Q_y^2 + k\frac{\mathrm{d}Q_y}{\mathrm{d}z} = 0. \tag{6.93}$$

引入函数 $s_x(z)$ 和 $s_y(z)$, 满足

$$Q_x = k\frac{s_x'}{s_x}, \quad Q_y = k\frac{s_y'}{s_y}. \tag{6.94}$$

由式 (6.93) 可得

$$s_x'' = 0, \quad s_y'' = 0, \tag{6.95}$$

因而

$$s_x = a_x z + b_x, \quad s_y = a_y z + b_y, \tag{6.96}$$

或

$$Q_x(z) = k\frac{a_x}{a_x z + b_z}, \quad Q_y(z) = k\frac{a_y}{a_y z + b_y}, \tag{6.97}$$

其中 a_x, b_x, a_y, b_y 为任意常数. 定义

$$q_x(z) = \frac{k}{Q_x(z)}, \quad q_y(z) = \frac{k}{Q_y(z)}, \tag{6.98}$$

从而将式 (6.97) 改写为

$$q_x = z + C_x, \quad q_y = z + C_y, \tag{6.99}$$

其中 C_x 和 C_y 为任意积分常数. 将 C_x 和 C_y 写成如下形式:

$$C_x = -z_x + q_{0x}, \quad C_y = -z_y + q_{0y}, \tag{6.100}$$

其中 z_x 和 z_y 为实数, q_{0x} 和 q_{0y} 为虚数. 将 $q_x(z)$ 和 $q_y(z)$ 代入式 (6.92) 可得

$$P' = -\frac{i}{2}\left[\frac{1}{z + C_x} + \frac{1}{z + C_y}\right], \tag{6.101}$$

取积分常数为零得

$$P = -\frac{i}{2}\left[\ln\left(1 + \frac{z - z_x}{q_{0x}}\right) + \ln\left(1 + \frac{z - z_y}{q_{0y}}\right)\right]. \tag{6.102}$$

将上式代入 ψ 的假设解中得

$$\psi = \exp\left\{-i\left[-\frac{i}{2}\ln\left(1 + \frac{z - z_x}{q_0}\right) - \frac{i}{2}\ln\left(1 + \frac{z - z_y}{q_{0y}}\right) + \frac{kx^2}{2(q_{0x} + z - z_x)} + \frac{ky^2}{2(q_{0y} + z - z_y)}\right]\right\}. \tag{6.103}$$

取

$$q_{0x} = i\frac{\pi\omega_{ox}^2 n}{\lambda}, \quad q_{0y} = i\frac{\pi\omega_{0y}^2 n}{\lambda}, \tag{6.104}$$

则式 (6.103) 中的

$$\begin{aligned}
&\exp\left[-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{z-z_x}{q_{0x}}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{z-z_y}{q_{0y}}\right)\right] = \frac{1}{\left[1+\frac{z-z_x}{q_{0x}}\right]^{1/2}\left[1+\frac{z-z_y}{q_{0y}}\right]^{1/2}} \\
=&\frac{1}{\left[\sqrt{1+\left|\frac{z-z_x}{q_{0x}}\right|^2}\exp\left(i\arctan\frac{z-z_x}{iq_{0y}}\right)\right]^{1/2}\left[\sqrt{1+\left|\frac{z-z_y}{q_{0y}}\right|^2}\exp\left(i\arctan\frac{z-z_y}{iq_{0y}}\right)\right]^{1/2}} \\
=&\frac{\sqrt{\omega_{0x}\omega_{0y}}}{\sqrt{\omega_x(z)\omega_y(z)}}\exp[i\eta(z)],
\end{aligned} \tag{6.105}$$

其中

$$\omega_x^2(z) = \omega_{0x}^2\left[1+\left(\frac{\lambda(z-z_x)}{\pi\omega_{0x}^2 n}\right)^2\right], \quad \omega_y^2(z) = \omega_{0y}^2\left[1+\left(\frac{\lambda(z-z_y)}{\pi\omega_{0y}^2 n}\right)^2\right], \tag{6.106}$$

$$\eta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\lambda(z-z_x)}{\pi\omega_{0x}^2 n}\right)+\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\lambda(z-z_y)}{\pi\omega_{0y}^2 n}\right). \tag{6.107}$$

式 (6.103) 中的

$$\begin{aligned}
&\exp\left[\frac{-ikx^2}{2(q_{0x}+z-z_x)}+\frac{-iky^2}{2(q_0+z-z_y)}\right] = \exp\left\{\frac{-i\frac{k}{q_{0x}}x^2}{2\left(1+\frac{z-z_{0x}}{q_{0x}}\right)}+\frac{-i\frac{k}{q_{0y}}y^2}{2\left(1+\frac{z-z_{0y}}{q_{0y}}\right)}\right\} \\
=&\exp\left\{-x^2\frac{1}{\omega_{0x}^2\left(1+\frac{z-z_x}{q_{0x}}\right)}-y^2\frac{1}{\omega_{0y}^2\left(1+\frac{z-z_y}{q_{0y}}\right)}\right\} \\
=&\exp\left\{-x^2\frac{1-\frac{z-z_x}{q_{0x}}}{\omega_{0x}^2\left(1+\left|\frac{z-z_x}{q_{0x}}\right|^2\right)}-y^2\frac{1-\frac{z-z_y}{q_{0y}}}{\omega_{0y}^2\left(1+\left|\frac{z-z_y}{q_{0y}}\right|^2\right)}\right\} \\
=&\exp\left\{-x^2\left(\frac{1}{\omega_x^2(x)}+\frac{ik}{2R_x(z)}\right)-y^2\left(\frac{1}{\omega_y^2(z)}+\frac{ik}{2R_y(z)}\right)\right\},
\end{aligned} \tag{6.108}$$

其中

$$R_x(z) = (z-z_x)\left[1+\left(\frac{\pi\omega_{0x}^2 n}{\lambda(z-z_x)}\right)^2\right], \quad R_y(z) = (z-z_y)\left[1+\left(\frac{\pi\omega_{0y}^2 n}{\lambda(z-z_y)}\right)\right]. \tag{6.109}$$

综上, 在均匀介质中,

$$\begin{aligned}
E(x,y,z) =&E_0\frac{\sqrt{\omega_{0x}\omega_{0y}}}{\sqrt{\omega_x(z)\omega_y(z)}}\exp\left\{-i[kz-\eta(z)]-\frac{ikx^2}{2q_x(z)}-\frac{iky^2}{2q_y(z)}\right\} \\
=&E_0\frac{\sqrt{\omega_{0x}\omega_{0y}}}{\sqrt{\omega_x(z)\omega_y(z)}}\exp\left\{-i[kz-\eta(z)]-x^2\left(\frac{1}{\omega_x^2(z)}+\frac{ik}{2R_x(z)}\right)-y^2\left(\frac{1}{\omega_y^2(z)}+\frac{ik}{2R_y(z)}\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{6.110}$$

对比 ψ 的假设解和上式可得

$$\frac{1}{q_x(z)} =\frac{1}{R_x(z)}-i\frac{\lambda}{\pi n\omega_x^2(z)}, \tag{6.111}$$

$$\frac{1}{q_y(z)} = \frac{1}{R_y(z)} - i\frac{\lambda}{\pi n \omega_y^2(z)}. \tag{6.112}$$

在折射率分布为

$$n^2(\boldsymbol{r}) = n^2\left(1 - \frac{n_{2x}}{n}x^2 - \frac{n_{2y}}{n}y^2\right) \tag{6.113}$$

的二次型类透镜介质中, 亥姆霍兹方程可化为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + k^2\left(1 - \frac{n_{2x}}{n}x^2 - \frac{n_{2y}}{n}y^2\right). \tag{6.114}$$

假设标量场的形式为 $E(\boldsymbol{r}) = \psi(\boldsymbol{r})\exp(-i\beta z)$, 则上述方程可化为

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \left[k^2\left(1 - \frac{n_{2x}}{n}x^2 - \frac{n_{2y}}{n}y^2\right) - \beta^2\right]\psi = 0. \tag{6.115}$$

取 $\psi = f(x)g(y)$, 并将上式除以 ψ 得

$$\frac{1}{f}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + \left(\lambda_1 - k^2\frac{n_{2x}}{n}x^2\right) = -\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2} + \left[(k^2 - \beta^2 - \lambda_1) - k^2\frac{n_2}{n}y^2\right], \tag{6.116}$$

分离变量得两个微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + \left(\lambda_1 - k^2\frac{n_2}{n}x^2\right)f = 0, \tag{6.117}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2} + \left[(k - \beta^2 - \lambda_1) - k^2\frac{n_2}{n}y^2\right]g = 0. \tag{6.118}$$

做变量代换

$$\xi = \frac{\sqrt{2}x}{\omega_x}, \quad \omega_x = \left(\frac{\lambda_1}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{nn_{2x}}\right)^{1/4}, \tag{6.119}$$

从而将上面的微分方程化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\xi^2} + \left(\frac{\omega_x^2\lambda_1}{2} - \xi^2\right)f = 0. \tag{6.120}$$

假设上述方程的解具有如下形式:

$$f\left(\frac{\omega_x\xi}{\sqrt{2}}\right) = H(\xi)e^{-\xi^2/2}, \tag{6.121}$$

其中 $H(\xi)$ 是一个有限级数的多项式. 将该假设解代入微分方程得

$$\frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}\xi^2} - 2\xi\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\xi} + \left(\frac{\omega_x^2\lambda_1}{2} - 1\right)H = 0, \tag{6.122}$$

从而解得 $H(\xi)$ 为厄米多项式 $H_l(\xi)$, 且

$$\frac{\omega_x^2\lambda_1}{2} = 2l + 1. \tag{6.123}$$

对关于 y 的微分方程也可同理求解, 故

$$E_{l,m}(\boldsymbol{r}) = E_0 e^{-i\beta_{l,m}z} H_l\left(\sqrt{2}\frac{x}{\omega_x}\right) H_m\left(\sqrt{2}\frac{y}{\omega_y}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{\omega_x^2} - \frac{y^2}{\omega_y^2}\right), \tag{6.124}$$

且

$$k^2 - \beta^2 = \lambda_1^2 + (k^2 - \beta^2 - \lambda_1) = \frac{2}{\omega_x^2}[2(l+1)] + \frac{2}{\omega_y^2}[2(m+1)], \tag{6.125}$$

$$\Longrightarrow \beta_{l,m} = k\left\{1 - \frac{2}{k}\left[\sqrt{\frac{n_{2x}}{n}}\left(l + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\frac{n_{2y}}{n}}\left(m + \frac{1}{2}\right)\right]\right\}^{1/2}. \tag{6.126}$$

□

习题 6.11: 证明式 (6.10-10).
提示: 把光脉冲场看作载波和包络函数的乘积

$$E(z,t)=E_0e^{i(\omega_0t-k_0z)}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\Delta\omega)e^{i(\Delta\omega t-\Delta kz)}\,\mathrm{d}(\Delta\omega)$$

式中 $\Delta\omega\equiv\omega-\omega_0$, $\Delta k=k(\omega)-k_0$. □

证: 由傅里叶变换得光场频谱为

$$G(\Delta\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{E(z,t)}{E_0}e^{-i[(\omega_0+\Delta\omega)\tau-(k_0+\Delta k)z]}\,\mathrm{d}\tau. \tag{6.127}$$

对一个持续时间为 τ 的光脉冲, 该脉冲的谱宽满足

$$\Delta\omega\frac{\tau}{2}=\pi, \tag{6.128}$$

$$\Longrightarrow\Delta\omega=\frac{2\pi}{\tau}. \tag{6.129}$$

单频光传播距离 L 所用的时间为

$$t=\frac{L}{v_g}. \tag{6.130}$$

该脉冲传输距离 L 后, 增宽为

$$\Delta\tau\approx\left|\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right|\Delta\omega=\left|\frac{\mathrm{d}\left(\frac{L}{v_g}\right)}{\mathrm{d}\omega}\right|\Delta\omega=\frac{L}{v_g^2}\frac{\mathrm{d}v_g}{\mathrm{d}\omega}\frac{2\pi}{\tau}. \tag{6.131}$$

□

习题 6.12: 一根二次型折射率变化的玻璃纤维长 1000 米, $n=1.5$, $n_2=5\times10^2$ 厘米$^{-2}$. 波长 $\lambda=1$ 微米的光束在此纤维中传播, 试求在 (a) 单模 $l=m=0$ 激发情况下, (b) $l=m=5$ 情况下此载波的光斑尺寸及最大的脉冲重复频率. □

解: (a) 单模 $l=m=0$ 激发情况下, 光斑半径为

$$w_0=\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{nn_2}\right)^{1/4}=1.08\times10^{-5}\,\mathrm{m}=10.8\,\mu\mathrm{m}, \tag{6.132}$$

最大脉冲重复频率为

$$f_{\max}\approx\frac{1}{\Delta\tau}=\frac{1}{\frac{Lnn_2\Delta\omega}{c^2k^3}\left[1+\frac{n_2/n}{2k^2}(0+0+1)^2\right]^2(0+0+1)^2}=\frac{1.00\times10^{28}\,\mathrm{Hz}^2}{\Delta\omega}, \tag{6.133}$$

其中 $\Delta\omega$ 为载波的光谱宽度.

(b) $l=m=5$ 情况下, 光斑半径为

$$w_5=\sqrt{2*5+1}w_0=3.58\times10^{-5}\,\mathrm{m}=35.8\,\mu\mathrm{m}, \tag{6.134}$$

最大脉冲重复频率为

$$f_{\max}\approx\frac{1}{\Delta\tau}=\frac{1}{\frac{Lnn_2\Delta\omega}{c^2k^3}\left[1+\frac{n_2/n}{2k^2}(5+5+1)^2\right]^2(5+5+1)^2}=\frac{8.30\times10^{25}\,\mathrm{Hz}^2}{\Delta\omega}. \tag{6.135}$$

□

习题 6.13: 推导式 (6.10-4) 和 (6.10-5). □

证: 二次型折射率变化的介质中矢量波动方程为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + k^2 \left(1 - \frac{n_2}{n} r^2\right) \boldsymbol{E} = 0, \tag{6.136}$$

其中光束在折射率为 n 的均匀介质中的传播常数 $k = \frac{2\pi n}{\lambda}$. 设标量场的形式为 $E(\boldsymbol{r}) = \psi(\boldsymbol{r}) \exp(i\beta z)$, 从而上述方程化为

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \left[k^2 \left(1 - \frac{n_2}{n} r^2\right) - \beta^2\right] \psi = 0. \tag{6.137}$$

取 $\psi = f(x)g(y)$, 并将上式除以 ψ 得

$$\frac{1}{f}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + \left(\lambda_1 - k^2 \frac{n_2}{n} x^2\right) = -\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2} - \left[(k^2 - \beta^2 - \lambda_1) - k^2 \frac{n_2}{n} y^2\right], \tag{6.138}$$

分离变量得两个微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + \left(\lambda_1 - k^2 \frac{n_2}{n} x^2\right) f = 0, \tag{6.139}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2} + \left[(k^2 - \beta^2 - \lambda_1) - k^2 \frac{n_2}{n} y^2\right] g = 0. \tag{6.140}$$

作变量代换

$$\xi = \frac{\sqrt{2}x}{\omega}, \quad \omega = \left(\frac{\lambda_1}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{nn_2}\right)^{1/4}, \tag{6.141}$$

从而将上面的微分方程化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\xi^2} + \left(\frac{\omega^2 \lambda_1}{2} - \xi^2\right) f = 0. \tag{6.142}$$

假设上述方程的解具有如下形式:

$$f\left(\frac{\omega \xi}{\sqrt{2}}\right) = H(\xi) e^{-\xi^2/2}, \tag{6.143}$$

其中 $H(\xi)$ 是一个有限级数的多项式. 将该假设解代入微分方程得

$$\frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}\xi^2} - 2\xi \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\xi} + \left(\frac{\omega^2 \lambda_1}{2} - 1\right) H = 0, \tag{6.144}$$

从而解得 $H(\xi)$ 为厄米多项式 $H_l(\xi)$, 且

$$\frac{\omega^2 \lambda_1}{2} = 2l + 1. \tag{6.145}$$

对关于 y 的微分方程也可同理求解, 故

$$\psi_{l,m}(x, y) = f_l(x) g_m(y) = E_0 H_l\left(\sqrt{2}\frac{x}{\omega}\right) H_m\left(\sqrt{2}\frac{y}{\omega}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\omega^2}\right), \tag{6.146}$$

且

$$k^2 - \beta^2 = \lambda_1 + (k^2 - \beta^2 - \lambda_1) = \frac{2}{\omega^2}[(2l + 1) + (2m + 1)], \tag{6.147}$$

$$\Longrightarrow \beta_{l,m} = k\left[1 - \frac{2}{k}\sqrt{\frac{n_2}{n}}(l + m + 1)\right]^{1/2}. \tag{6.148}$$

□

Chapter 7

光学谐振腔

习题 7.1: 试把从光学谐振腔 ($R \sim 0.99$) 可得到的典型 Q 值与微波谐振腔的 Q 进行比较. □

证: 设激光波长 $\lambda \sim 1\,\mu$m, 腔长 $l \sim 1$ m, $R \sim 0.99$ 的光学谐振腔的 Q 值的典型值为

$$Q = 2\pi \frac{t_c}{T} = 2\pi \frac{\frac{nl}{c[\alpha l - \ln R]}}{\frac{\lambda}{c}} = 2\pi \frac{nl}{-\lambda \ln R} = 6.25 \times 10^8. \tag{7.1}$$

微波波长较激光波长大 $3 \sim 6$ 个数量级, 故微波谐振腔的 Q 值较光学谐振腔小 $3 \sim 6$ 个数量级. □

习题 7.2: 设计一个谐振腔, $R_1 = 20$ 厘米, $R_2 = -32$ 厘米, $l = 16$ 厘米, $\lambda = 10^{-4}$ 厘米.
试求

(a) 最小光斑尺寸 ω_0;

(b) 最小光斑的位置;

(c) 镜面光斑尺寸 ω_1, ω_2;

(d) ω_0, ω_1 和 ω_2 分别与共焦腔 ($R_1 = -R_2 = l$) 相应值的比.

□

解: 为保证各物理量符号的规范, 不妨重设 $R_1 = -20$ cm, $R_2 = 32$ cm.

(a) 瑞利距离的平方为

$$z_0^2 = \frac{l(R_2 - R_1 - l)(l + R_1)(l - R_2)}{(2l + R_1 - R_2)^2} = 92.16\,\mathrm{cm}^2. \tag{7.2}$$

最小光斑尺寸为

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{n\pi}} = 0.0175\,\mathrm{cm} = 175\,\mu\mathrm{m}. \tag{7.3}$$

(b) 最小光斑与 1 号镜面的距离为

$$|z_1| = \left| \frac{1}{2} \left[R_1 \pm \sqrt{R_1^2 - 4z_0^2} \right] \right| = 7.2\,\mathrm{cm} \text{ 或 } 12.8\,\mathrm{cm}. \tag{7.4}$$

(c) 镜面光斑尺寸分别为

$$\omega_1 = \omega_0\sqrt{1+\left(\frac{z_1}{z_0}\right)^2} = 0.0219\,\text{cm 或 } 0.0291\,\text{cm} = 219\,\mu\text{m 或 } 0.291\,\mu\text{m}, \tag{7.5}$$

$$\omega_2 = \omega_0\sqrt{1+\left(\frac{z_2}{z_0}\right)^2} = \omega_0\sqrt{1+\left(\frac{l-z_1}{z_0}\right)^2} = 0.0237\,\text{cm 或 } 0.0184\,\text{cm} = 237\,\mu\text{m 或 } 184\,\mu\text{m}. \tag{7.6}$$

(d) 对对称共焦腔, 瑞利距离的平方为

$$z_{0,\text{confocal}}^2 = \frac{l^2}{4} = 64\,\text{cm}^2, \tag{7.7}$$

束腰半径为

$$\omega_{0,\text{confocal}} = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi n}} = 0.0160\,\text{cm} = 160\,\mu\text{m}, \tag{7.8}$$

镜面光斑半径为

$$\omega_{1,2,\text{confocal}} = \sqrt{2}\omega_{0,\text{confocal}} = 0.0226\,\text{cm} = 226\,\mu\text{m}. \tag{7.9}$$

题设中谐振腔 ω_0、ω_1 和 ω_2 与共焦腔相应值的比分别为

$$\frac{\omega_0}{\omega_{0,\text{confocal}}} = 1.1, \tag{7.10}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_{1,\text{confocal}}} = 0.97 \text{ 或 } 1.3, \tag{7.11}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_{2,\text{confocal}}} = 1.05 \text{ 或 } 0.83. \tag{7.12}$$

□

习题 7.3: 考虑一共焦腔, $l = 16$ 厘米, $\lambda = 10^{-4}$ 厘米, 反射率 $R_1 = R_2 = 0.995$. 利用图 7.7, 选择反射镜的口径, 使第一个高阶模式 (TE_{01}) 的总损耗超过 3%. 对于选择的口径, 基模损耗有多少? 为了抑制高阶横模的振荡, 需要多大的口径? □

解: 由图 7.7, 对模式 TE_{01}, 3% 的损耗对应 $\frac{a^2 n}{\lambda l} = 0.7$, 对应反射镜的口径为 $a = 0.33$ mm, 故为使模式 TE_{01} 的总损耗超过 3%, 反射镜的口径应 ≤ 0.33 mm.

对选择的口径 $a = 0.33$ mm, 基模损耗约为 0.2%.

为了抑制高阶横模的振荡, 需要基模的损耗远低于高阶模, 故反射镜的口径在 $a = 0.33$ mm 左右, 是一个较为合理的方案. □

习题 7.4: 证明稳区图 7.4 为什么是下列条件的图解表示.

$$0 \leq \left(1-\frac{l}{R_1}\right)\left(1-\frac{l}{R_2}\right) \leq 1$$

指出图 7.1 的 8 种谐振腔在稳区图上的位置. □

解: 由上述稳定条件式, 当 $\frac{l}{R_1} \geq 1$, $\frac{l}{R_2} \geq 1$ 时,

$$\left(\frac{l}{R_1}-1\right)\left(\frac{l}{R_2}\right) \leq 1, \tag{7.13}$$

构成稳定区的右上部分, 当 $\frac{l}{R_1} \leq 1$, $\frac{l}{R_2} \leq 1$ 时,

$$\left(\frac{l}{R_1}-1\right)\left(\frac{l}{R_2}-1\right) \leq 1, \tag{7.14}$$

构成稳定区的左下部分, 故图 7.4 是该稳定条件的图解表示.

图 7.1 中

- 平面平行腔对应稳区图中的点 $(0,0)$,
- 第一行第二个腔对应 $0 \le \frac{l}{R_1} \le 1$, $0 \le \frac{l}{R_2} \le 1$ 的正方形区域,
- 第二行第一个腔对应 $\frac{l}{R_2} \ge \frac{l}{R_1} \ge 1$, $\left(\frac{l}{R_1}-1\right)\left(\frac{l}{R_2}-1\right) \le 1$ 的区域,
- 第二行第二个腔对应 $\frac{l}{R_1} \le 0$, $0 \le \frac{l}{R_2} \le 1$, $\left(\frac{l}{R_1}-1\right)\left(\frac{l}{R_2}-1\right) \le 1$ 的区域,
- 共焦腔对应点 $(1,1)$,
- 共心腔对应点 $(2,2)$,
- 第四行第一个高损耗腔对应右上的非稳区,
- 第四行第二个高损耗腔对应右上的非稳区.

□

习题 7.5: 按照图 7.4 (或者式 (7.2-2)), 在 $|R_2| = R_1$, $R_2 < 0$ 时, 也就是交替排列的同样会聚和发散的两个透镜, 可以得到稳定模式. 从物理上解释为什么这会导致净聚焦.
提示: 考虑光线通过两种透镜时离开轴线时的距离. □

解: 当 $R_1 \ge l$ 时,

$$0 \le \left(1-\frac{l}{R_1}\right)\left(1-\frac{l}{R_2}\right) = 1-\left(\frac{l}{R_1}\right)^2 \le 1, \tag{7.15}$$

此时可以得到稳定模式.

该交替排列的同样会聚和发散的二元周期透镜系统的光线矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1-\frac{2l}{R_1} & l\left(2-\frac{2l}{R_1}\right) \\ -\left[\frac{2}{-R_1}+\frac{2}{R_1}\left(1-\frac{2l}{-R_1}\right)\right] & -\left[\frac{2l}{-R_1}-\left(1-\frac{2l}{-R_1}\right)\left(1-\frac{2l}{R_1}\right)\right] \end{bmatrix} \tag{7.16}$$

高 h 的平行光轴的光线, 在透镜 1 处入射, 在透镜 2 处出射的光线为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} r \\ r' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1-\frac{2l}{R_1} & l\left(2-\frac{2l}{R_1}\right) \\ -\left[\frac{2}{-R_1}+\frac{2}{R_1}\left(1-\frac{2l}{-R_1}\right)\right] & -\left[\frac{2l}{-R_1}-\left(1-\frac{2l}{-R_1}\right)\left(1-\frac{2l}{R_1}\right)\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h\left(1-\frac{2l}{R_1}\right) \\ -\frac{4l}{R_1^2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{7.17}$$

故光线最终将在距透镜 2

$$-\frac{h\left(1-\frac{2l}{R_1}\right)}{-\frac{4l}{R_1^2}} = -\frac{h(R_1-2l)}{4l} \tag{7.18}$$

处于光轴相交, 故这有可能导致净聚焦. □

习题 7.6: 设对称谐振腔的反射镜间距为 l, 曲率半径为 R, 利用 $ABCD$ 定律推导模式的特性 (最小光斑尺寸 ω_0 和镜面光斑尺寸 $\omega_{1,2}$).
提示: 证明在反射镜面处位相波阵面的曲率半径 (也是自洽光束解) 等于反射镜的曲率半径. □

解: 自洽场条件要求腔中的光场经过往返一周后能自再现. 设反射镜面处光束的复参量为 q. 利用 ABCD 定律,

$$q = \frac{Aq+B}{Cq+D}. \tag{7.19}$$

对称谐振腔可等价为焦距为 $R/2$ 和 $R/2$ 的透镜相互间隔距离 l 交替排列而成的二元透镜系统, 故光线矩阵

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{2l}{R} & 2l\left(1-\frac{l}{R}\right) \\ \frac{4}{R}\left(\frac{l}{R}-1\right) & -\frac{2l}{R}+\left(-\frac{2l}{R}+1\right)^2 \end{bmatrix}. \tag{7.20}$$

反射镜面处光斑尺寸为

$$\omega_{1,2} = \left(\frac{\lambda}{\pi n}\right)^{1/2} \frac{|B|^{1/2}}{\left[1-\left(\frac{D+A}{2}\right)^2\right]^{1/4}} = \left(\frac{\lambda}{\pi n}\right)^{1/2} \left(\frac{lR^2}{2R-l}\right)^{1/4}, \tag{7.21}$$

波阵面曲率半径

$$\frac{2B}{D-A} = -R, \tag{7.22}$$

即在反射镜面处位相波阵面的曲率半径 (即自洽光束解) 等于反射镜的曲率半径, 故对称谐振腔中的稳定高斯光束的束腰位于腔心, 从而

$$R = \frac{l}{2}\left[1+\left(\frac{\pi\omega_0^2 n}{\lambda\frac{l}{2}}\right)^2\right], \tag{7.23}$$

最小光斑尺寸

$$\omega_0 = \frac{\lambda l}{2\pi n}\sqrt{\frac{2R}{l}-1}. \tag{7.24}$$

□

习题 7.7: 若用两个反射镜 (也就是在 z_1 和 z_2 处分别方两个曲率半径等于 $R(z_1)$ 和 $R(z_2)$ 的反射镜) “代替”高斯传播光束的任意两个位相波阵面, 证明由此构成的光学谐振腔是稳定腔. □

证: 设高斯光束的束腰半径为 ω_0, 则 z_1 和 z_2 处的波阵面曲率半径分别为

$$R(z_1) = z_1\left(1+\frac{z_0^2}{z_1^2}\right), \tag{7.25}$$

$$R(z_2) = z_2\left(1+\frac{z_0^2}{z_2^2}\right), \tag{7.26}$$

其中 $z_0 = \frac{\pi\omega_0^2 n}{\lambda}$. 该两个反射镜构成的光学谐振腔满足稳定条件:

$$0 \le \left(1-\frac{z_2-z_1}{R(z_1)}\right)\left(1-\frac{z_2-z_1}{R(z_2)}\right) = \frac{(z_0^2-z_1z_2)^2}{(z_0^2+z_1^2)(z_0^2+z_2^2)} \le 1, \tag{7.27}$$

故由此构成的光学谐振腔为稳定腔. □

习题 7.8: 设光学谐振腔由间距为 l、曲率半径为 R 的两个相同的反射镜和放在中间的一薄透镜 (焦距为 f) 所构成, 推导模式的稳定条件. □

解: 自洽场条件要求腔中的光场经过往返一周后能再自现. 该光学谐振腔等效于由焦距为 $\frac{R}{2}$ 和 f 的透镜相互间隔距离 $\frac{l}{2}$ 交替排列而成的二元透镜系统. 与 7.2 节中的推导同理, 将式 (6.8-5) 中的 f_1 替换为 f, f_2 替换为 $R/2$, l 替换为 $\frac{l}{2}$, 则得该光学谐振腔的稳定条件为

$$0 \le \left(1-\frac{l}{4f}\right)\left(1-\frac{l}{2R}\right) \le 1. \tag{7.28}$$

□

习题 7.9: 证明由自洽场光束参量 q 的表达式 (7.2-5) 可导出光束在镜面处的曲率半径, 它分别等于反射镜的曲率半径, 即 $R(z_2)=R_2$, $R(z_1)=R_1$. □

证: 式 (7.2-5)

$$\frac{1}{q}=\frac{D-A}{2B}\pm i\frac{\sqrt{1-\left(\frac{D+A}{2}\right)^2}}{B}\equiv\frac{1}{R(z_2)}-i\frac{\lambda}{\pi\omega_2^2 n},\tag{7.29}$$

其中

$$A=1-\frac{2l}{R_1},\tag{7.30}$$

$$B=l\left(2-\frac{2l}{R_1}\right),\tag{7.31}$$

$$C=-\left[\frac{2}{R_2}+\frac{2}{R_1}\left(1-\frac{2l}{R_1}\right)\right],\tag{7.32}$$

$$D=-\left[\frac{2l}{R_2}-\left(1-\frac{2l}{R_1}\right)\left(1-\frac{2l}{R_2}\right)\right].\tag{7.33}$$

故

$$\frac{1}{q}=\frac{\frac{l^2}{R_2}\left(-1+\frac{l}{R_1}\right)\pm i\sqrt{\left(1-\frac{l}{R_1}\right)\left(1-\frac{l}{R_2}\right)\left(-\frac{l^2}{R_1R_2}+\frac{l}{R_1}+\frac{l}{R_2}\right)}}{l\left(1-\frac{l}{R_1}\right)},\tag{7.34}$$

$$\Longrightarrow R(z_2)=R_2.\tag{7.35}$$

同理可证 $R(z_1)=R_1$, 故自洽场光束在镜面处的曲率半径等于反射镜的曲率半径. □

习题 7.10: 证明光束往返一次后, 复光束参量 (它的稳态值由式 (7.2-5) 决定) 的微扰 $\Delta(1/q)$ 变为 $\delta(1/q)=e^{\mp i2\theta}\Delta(1/q)$, 其中 $\cos\theta=\frac{1}{2}(A+D)\cdot\Delta(1/q)$ 与稳定性无关, $|\delta(1/q)|=|\Delta(1/q)|$ 在稳定光束中满足式 (7.2-6). □

证: 由式 (7.2-5), 稳态下光束的复参量

$$\frac{1}{q}=\frac{D-A}{2B}\pm i\frac{\sqrt{1-\left(\frac{D+A}{2}\right)^2}}{B}.\tag{7.36}$$

利用 ABCD 定律, 参量受微扰 $\Delta(1/q)$ 的光束往返一次后参量变为

$$\begin{aligned}\frac{1}{q}+\delta\left(\frac{1}{q}\right)=&\frac{D\left[\frac{1}{q}+\Delta\left(\frac{1}{q}\right)\right]+C}{B\left[\frac{1}{q}+\Delta\left(\frac{1}{q}\right)\right]+A}=\frac{D\left[\frac{1}{q}+\Delta\left(\frac{1}{q}\right)\right]+C}{B\frac{1}{q}+A}\left[1-\frac{B\Delta\left(\frac{1}{q}\right)}{B\frac{1}{q}+A}\right]\\=&\frac{D\frac{1}{q}+C}{B\frac{1}{q}+A}+\frac{D\Delta\left(\frac{1}{q}\right)}{B\frac{1}{q}+A}-\frac{D\frac{1}{q}+C}{B\frac{1}{q}+A}\frac{B\Delta\left(\frac{1}{q}\right)}{B\frac{1}{q}+A}=\frac{1}{q}+\frac{D\Delta\left(\frac{1}{q}\right)}{B\frac{1}{q}+A}-\frac{1}{q}\frac{B\Delta\left(\frac{1}{q}\right)}{B\frac{1}{q}+A},\end{aligned}\tag{7.37}$$

从而参量的微扰变为

$$\delta\left(\frac{1}{q}\right)=\frac{D-B\frac{1}{q}}{B\frac{1}{q}+A}\Delta\frac{1}{q}=\frac{\frac{D+A}{2}\mp i\sqrt{1-\left(\frac{D+A}{2}\right)^2}}{\frac{D+A}{2}\pm i\sqrt{1-\left(\frac{D+A}{2}\right)^2}}\Delta\left(\frac{1}{q}\right)=\frac{\frac{D+A}{2}\mp i\sqrt{1-\left(\frac{D+A}{2}\right)^2}}{\left(\frac{D+A}{2}\right)^2+\left[1-\left(\frac{D+A}{2}\right)^2\right]}=e^{\mp i2\theta}\Delta\left(\frac{1}{q}\right),\tag{7.38}$$

其中

$$\tan 2\theta=\frac{\sqrt{1-\left(\frac{D+A}{2}\right)^2}}{\frac{D+A}{2}},\tag{7.39}$$

即

$$\cos 2\theta = \frac{D+A}{2}. \tag{7.40}$$

当 $\left|\frac{D+A}{2}\right| \leq 1$, 即满足式 (7.2-6) 时, 2θ 为实数, 从而

$$\left|\delta\left(\frac{1}{q}\right)\right| = \left|\Delta\left(\frac{1}{q}\right)\right|. \tag{7.41}$$

□

Chapter 8

辐射场与原子系统的相互作用

习题 8.1: 证明关系式 (8.5-10)

$$\frac{A}{B_{21}}=\frac{8\pi h\nu^3n^3}{c^3}$$

与式 (8.3-4) 一致, 按照此式有

$$\frac{\text{每个模的}W_{\text{感应}}}{\text{每个模的}W_{\text{自发}}}=n,$$

式中, $n=$ 这个模式的量子数. □

证: 由式 (8.3-4), 系统由初态 $|2,n_l\rangle$ 跃迁到终态 $|1,n_{l+1}\rangle$ 的速率为

$$W_{21}'=\frac{2\pi e^2\omega_l}{V\varepsilon}\left|\langle 1,n_l+1|ya_l^{\dagger}|2,n_l\rangle\right|^2\sin^2(k_lz)\delta(E_2-E_1-\hbar\omega_l)=\frac{2\pi e^2\omega_l y_{12}^2}{V\varepsilon}(n_l+1)\sin^2(k_lz)\delta(E_2-E_1-\hbar\omega_l),\tag{8.1}$$

其中 $y_{12}^2=|\langle 1|y|2\rangle|^2$. 由该模式的真空涨落引发的自发跃迁速率为

$$W_{21,\text{spontaneous}}'=\frac{2\pi e^2\omega_l}{V\varepsilon}\left|\langle 1,1|ya^{\dagger}|2,0\rangle\right|^2\sin^2(k_lz)\delta(E_2-E_1-\hbar\omega_l)=\frac{2\pi e^2\omega_l y_{12}^2}{V\varepsilon}n_l\sin^2(k_lz)\delta(E_2-E_1-\hbar\omega_l).\tag{8.2}$$

由该模式引发的感应 (受激) 发射的跃迁速率为

$$W_{21,\text{induced}}'=W_{21}'-W_{21,\text{spontaneous}}'=\frac{2\pi e^2\omega_l y_{12}^2}{V\varepsilon}n_l\sin^2(k_lz)\delta(E_2-E_1-\hbar\omega).\tag{8.3}$$

因此

$$\frac{\text{每个模的}W_{\text{感应}}}{\text{每个模的}W_{\text{自发}}}=n,\tag{8.4}$$

其中 $n=$ 这个模式的量子数.

频率为 ω_l 的模式的真空涨落均可引发自发跃迁, 故自发发射系数为上述感应发射的跃迁速率与模式密度乘积的积分

$$\begin{aligned}A=&\int_0^{\infty}W_{21,\text{spontaneous}}'\rho(\nu_l)\,\mathrm{d}\nu_l=\int_0^{\infty}\frac{2\pi e^2\omega_l y_{12}^2}{V\varepsilon}\sin^2(k_lz)\delta(E_2-E_1-\hbar\omega_l)\frac{8\pi\nu_l^2n^3V}{c^3}\,\mathrm{d}\nu_l\\=&\frac{2\pi e^2\omega_l y_{12}^2}{V\varepsilon}\sin^2(k_lz)\frac{8\pi\nu_l^2n^3V}{hc^3}.\end{aligned}\tag{8.5}$$

其中 g_2 为频率为 ω_l 的模式中仅有激光器谐振腔限定的某一确定的传播方向和偏振的模式可引发感应跃迁, 故受激发射系数为

$$B_{21} = \frac{V \int_0^\infty W'_{12,\text{induced}}\,\mathrm{d}\nu_l}{\rho(\nu)} = \frac{\frac{2\pi e^2 \omega_l y_{12}^2}{V\varepsilon} n_l \sin^2(k_l z) \frac{V}{h}}{n_l h \nu_l}. \tag{8.6}$$

因此

$$\frac{A}{B_{21}} = \frac{8\pi h \nu^3 n^3}{c^3}, \tag{8.7}$$

与关系式 (8.5-10) 一致.
(由于自发发射和受激发射的原子初能级和末能级相同, 故此处忽略能级简并的问题.) □

习题 8.2: 确定频率为 $\nu_0 = 3 \times 10^{14}$ 赫兹跃迁的峰值吸收系数 $d(\nu_0)$, 其中 $N_2 \approxeq 0$, $N_1 = 10^{18}$ 厘米$^{-3}$, 高斯吸收曲线的全宽度为 400 厘米$^{-1}$, $t_{\text{自发}} = 10^{-4}$ 秒. 定义光学密度为

$$\log_{10} \frac{I_{\text{入}}}{I_{\text{出}}}$$

式中 I 表示强度. 对于 1 厘米程长的介质, 在频率 ν_0 处的光学密度是什么? 在什么温度时, 黑体辐射的感应跃迁速率等于自发发射速率? □

解: 假设基态能级和激发态能级的简并度相等, 介质折射率 $n \approx 1$, 峰值 (频率 ν_0 处的) 吸收系数

$$d(\nu_0) = \frac{(N_1 - N_2)\lambda^2}{8\pi n^2 t_{\text{自发}}} g(\nu_0) = \frac{(N_1 - N_2)\left(\frac{c}{\nu}\right)^2}{8\pi n^2 t_{\text{自发}} \Delta\nu} = \frac{(N_1 - N_2)\left(\frac{c}{\nu}\right)^2}{8\pi n^2 t_{\text{自发}} c \Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = 33.2\,\mathrm{m}^{-1}. \tag{8.8}$$

频率 ν_0 处的光学密度为

$$\log_{10} \frac{I_{\text{入}}}{I_{\text{出}}} = \log_{10} e^{d(\nu_0) l} = 0.144. \tag{8.9}$$

黑体辐射的感应跃迁速率为

$$(W_{21})_i = \frac{c^3 \rho(\nu)}{8\pi n^3 h \nu^3 t_{\text{自发}}} g(\nu_0) = \frac{c^3 \frac{8\pi n^3 h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} c\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{8\pi n^3 h \nu^3 t_{\text{自发}} c \Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}. \tag{8.10}$$

自发发射速率为

$$W_{\text{自发}} = \frac{1}{t_{\text{自发}}}. \tag{8.11}$$

要使黑体辐射的感应跃迁速率等于自发发射速率,

$$(W_{21})_i = W_{\text{自发}} \Longrightarrow \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = 1, \tag{8.12}$$

故对应的温度为 $T = 11413$ K. □

习题 8.3: 若 r 是电子位置坐标, 电子振荡为 $r = r_0 \cos(2\pi\nu t)$, 计算此电子振荡的经典寿命 $t_{\text{经典}} =$ 能量/(辐射功率). □

解: 此电子振荡的能量为

$$E = \frac{1}{2} m_e \dot{r}_{\max}^2 = \frac{1}{2} m_e (2\pi\nu r_0)^2. \tag{8.13}$$

平均辐射功率为

$$\bar{P} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_0^2\omega^4}{3c^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(er_0)^2(2\pi\nu)^4}{3c^2}. \tag{8.14}$$

此电子的经典寿命为

$$t_{\text{经典}} = \frac{E}{\bar{P}} = \frac{3\varepsilon_0 m_e c^2}{2\pi e^2\nu^2}. \tag{8.15}$$

□

习题 8.4: (a) 熟习跃迁的振子强度的概念.

(b) 在 8.2 节中所描述的跃迁的振子强度是什么?

(c) 证明在频率为 ν 时, 跃迁 $1 \leftrightarrow 2$ 的振子强度 f_{21} 等于 $t_{\text{经典}}/3t_{\text{自发}}$.

□

解: (a) 振子强度是指单个原子或分子在吸收辐射过程中等效的单电子振子个数.

(b) 单电子谐振子在电场 $E(t)$ 中的动力学方程为

$$m\ddot{x} = -eE(t) - \omega_0^2 x - 2\gamma x, \tag{8.16}$$

若电场 $E(t) = E_0 e^{i\omega t}$, 则解得

$$x = -\frac{eE(t)}{m}\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2 - 2i\gamma\omega}. \tag{8.17}$$

同浓度的单电子振子组成的介质的极化率应为

$$\chi_0(\omega) = \frac{N(-e)x}{E(t)} = \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m}\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2 - 2i\gamma\omega}. \tag{8.18}$$

课本中介质的极化率为

$$\chi(\omega) = \frac{\mu^2 T_2 \Delta N_0}{\varepsilon_0 \hbar}\frac{(\omega_0-\omega)T_2 - i}{1+(\omega-\omega_0)^2 T_2^2 + 4\Omega^2 T_2 \tau}. \tag{8.19}$$

故 8.2 节中描述的跃迁的振子强度即为两者之比

$$f_{21} = \frac{\chi(\omega)}{\chi_0(\omega)}. \tag{8.20}$$

(c) 自发寿命

$$t_{\text{自发}} = \frac{\varepsilon h c^3}{2n^3\mu^2\omega^3}. \tag{8.21}$$

故有

$$\frac{t_{\text{经典}}}{3t_{\text{自发}}} = \frac{8\pi^2 n^3 m_e \mu^2 \nu}{e^2 hc}. \tag{8.22}$$

□

习题 8.5: 推导式 (8.1-15). □

证: 稳态下, 式 (8.1-12) 和式 (8.1-13) 可化为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{21}}{\mathrm{d}t} = i(\omega-\omega_0)\sigma_{21} + \frac{i\mu E_0}{2\hbar}(\rho_{11}-\rho_{22}) - \frac{\sigma_{21}}{T_2} = 0, \tag{8.23}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho_{11}-\rho_{22}) = \frac{i\mu E_0}{\hbar}(\sigma_{21}-\sigma_{21}^*) - \frac{(\rho_{11}-\rho_{22})-(\rho_{11}-\rho_{22})_0}{\tau} = 0. \tag{8.24}$$

将式 (8.23) 与其复共轭相加和相减得

$$(\omega-\omega_0)\,\mathrm{Im}\,\sigma_{21} - \frac{\mathrm{Re}\,\sigma_{21}}{T_2} = 0, \tag{8.25}$$

$$i(\omega-\omega_0)\,\mathrm{Re}\,\sigma_{21} + \frac{i\mu E_0}{2\hbar}(\rho_{11}-\rho_{22}) - \frac{i\,\mathrm{Im}\,\sigma_{21}}{T_2} = 0, \tag{8.26}$$

进而解得

$$\mathrm{Im}\,\sigma_{21} = \frac{\frac{\mu E_0}{2\hbar}T_2(\rho_{11}-\rho_{22})}{(\omega-\omega_0)^2T_2^2+1}, \tag{8.27}$$

$$\mathrm{Re}\,\sigma_{21} = -\frac{\frac{\mu E_0}{2\hbar}(\omega-\omega_0)T_2^2(\rho_{11}-\rho_{22})}{(\omega-\omega_0)^2T_2^2+1}. \tag{8.28}$$

将式 (8.27) 代入式 (8.24) 中得

$$\rho_{11}-\rho_{22} = (\rho_{11}-\rho_{22})_0\frac{1+(\omega-\omega_0)^2T_2^2}{1+(\omega-\omega_0)^2T_2^2+4\Omega^2T_2\tau}, \tag{8.29}$$

其中 $\Omega = \frac{\mu E_0}{2\hbar}$. 再将上式回代入式 (8.27) 和 (8.28) 中得

$$\mathrm{Im}\,\sigma_{21} = \frac{\Omega T_2(\rho_{11}-\rho_{22})_0}{1+(\omega-\omega_0)^2T_2^2+4\Omega^2T_2\tau}, \tag{8.30}$$

$$\mathrm{Re}\,\sigma_{21} = \frac{(\omega-\omega_0)T_2^2\Omega(\rho_{11}-\rho_{22})_0}{1+(\omega-\omega_0)^2T_2^2+4\Omega^2T_2\tau}. \tag{8.31}$$

□

习题 8.6: 证明在饱和可忽略的极限情况下 $(\Omega=0)$, 式 (8.1-19) 中的 $\chi'(\omega)$ 和 $\chi''(\omega)$ 遵守 K-K 关系. □

证: 在饱和可忽略的极限情况下 $(\Omega=0)$, 式 (8.1-19) 可化为

$$\chi''(\omega) = \frac{\mu^2T_2\Delta N_0}{\varepsilon_0\hbar}\frac{1}{1+(\omega-\omega_0)^2T_2^2}, \tag{8.32}$$

$$\chi'(\omega) = \frac{\mu^2T_2\Delta N_0}{\varepsilon_0\hbar}\frac{(\omega-\omega_0)T_2}{1+(\omega-\omega_0)^2T_2^2}. \tag{8.33}$$

此时有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\chi''(\omega')}{\omega'-\omega}\,\mathrm{d}\omega' = \frac{\mu^2T_2\Delta N_0}{\pi\varepsilon_0\hbar}\lim_{\Omega\to\infty}\int_{-\Omega}^{+\Omega}\frac{1}{1+(\omega'-\omega_0)^2T_2^2}\frac{1}{\omega'-\omega}\,\mathrm{d}\omega' \\
=&\frac{\mu^2T_2\Delta N_0}{\pi\varepsilon_0\hbar}\lim_{\Omega\to\infty}\left.\frac{-2(\omega-\omega_0)T_2\{\arctan[(\omega'-\omega_0)T_2]+\arctan[(\omega'+\omega_0)T_2]\}+2\ln\frac{-\omega+\omega'}{-\omega-\omega'}+\ln\frac{1+(\omega'+\omega_0)^2T_2^2}{1+(\omega'-\omega_0)^2T_2^2}}{2[1+(\omega-\omega_0)T_2^2]}\right|_{\omega'=-\Omega}^{+\Omega} \\
=&-\frac{\mu^2T_2\Delta N_0}{\varepsilon_0\hbar}\frac{2(\omega-\omega_0)T_2^2}{1+(\omega-\omega_0)^2T_2^2} = -2\chi'(\omega),
\end{aligned} \tag{8.34}$$

及

$$-\frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\chi'(\omega')}{\omega'-\omega}\,\mathrm{d}\omega' = -\frac{\mu^2T_2\Delta N_0}{\pi\varepsilon_0\hbar}\lim_{\Omega\to\infty}\int_{-\Omega}^{\Omega}\frac{(\omega'-\omega_0)T_2^2}{1+(\omega-\omega_0)^2T_2^2}\frac{1}{\omega'-\omega}\,\mathrm{d}\omega'$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\mu^2 T_2 \Delta N_0}{\pi \varepsilon_0 \hbar} \lim_{\Omega \to \infty} \left. \frac{2\{\arctan[(\omega' - \omega_0)T_2] + \arctan[(\omega' + \omega_0)T_2]\} - (\omega - \omega_0)\left[\ln \frac{-\omega - \omega'}{-\omega + \omega'} + \ln \frac{1 + (\omega' - \omega_0)^2 T_2^2}{1 + (\omega' - \omega_0)^2 T_2^2}\right]}{2T_2[1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2]} \right|_{\omega' = -\Omega}^{+\Omega} \\
&= -\frac{\mu^2 T_2 \Delta N_0}{\varepsilon_0 \hbar} \frac{2}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2} = -2\chi''(\omega).
\end{aligned} \tag{8.35}
$$

故式 (8.1-19) 中的 $\chi'(\omega)$ 和 $\chi''(\omega)$ 遵守 K-K 关系. $\square$

Chapter 9

激光振荡

习题 9.1: 推导方程式 (9.3-22). □

证: 由式 (8.3-4),

$$\frac{\text{感应发射速率/模式}}{\text{自发辐射速率/模式}} = \frac{h\nu V_m W_i}{K} = n_m, \tag{9.1}$$

其中感应发射的跃迁速率

$$W_i = \frac{\lambda^2 I_\nu}{8\pi h\nu n^2 t_{\text{自发}}} g(\nu), \tag{9.2}$$

辐射强度

$$I_\nu = \frac{n_m h\nu}{V_m}\frac{c}{n}, \tag{9.3}$$

频谱增宽

$$\Delta\nu = \frac{1}{g(\nu_0)}. \tag{9.4}$$

故

$$K = \frac{h\nu V_m W_i}{n_m} = \frac{h\nu V_m}{n_m}\frac{\lambda^2 g(\nu_0)}{8\pi h\nu n^2 t_{\text{自发}}} I_\nu = \frac{h\nu\lambda^2 c}{8\pi n^3 t_{\text{自发}}} g(\nu_0) = \frac{h\nu c^3}{8\pi n^3 \nu^2 \Delta\nu t_{\text{自发}}}. \tag{9.5}$$

□

习题 9.2: 推导由于高斯光束模式的横向束缚, 对激光振荡器共振频率的影响. 在共焦腔的模式和 $z_0 \gg l$ 的模式之间的共振频率有什么变化 (l 为谐振腔长度)? □

证: 谐振腔的共振频率

$$\nu_m = \frac{mc}{2nl} + \frac{c}{2\pi nl}\left(\tan^{-1}\frac{z_2}{z_0} - \tan^{-1}\frac{z_1}{z_0} - \frac{\theta_{m1}+\theta_{m2}}{2}\right). \tag{9.6}$$

对共焦腔模式, $R_1 = R_2 = l$, $\tan^{-1}(z_2/z_0) = -\tan^{-1}(z_1/z_0) = \pi/4$, 共振频率

$$\nu_m = \frac{mc}{2nl} + \frac{c}{2\pi nl}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta_{m1}+\theta_{m2}}{2}\right). \tag{9.7}$$

对 $z_0 \gg l$ 的模式, $\tan^{-1}(z_2/z_0) \approx \tan^{-1}(z_1/z_0) \approx 0$, 共振频率

$$\nu_m = \frac{mc}{2nl} + \frac{c}{2\pi nl}\left(\frac{\theta_{m1}+\theta_{m2}}{2}\right). \tag{9.8}$$

两者的共振频率相差 $\frac{c}{4nl}$. □

习题 9.3: 若法布里-珀罗谐振腔内放入极化率为 $\chi(\omega)$ 的原子介质, 试证明模之间频率间隔等于

$$\omega_m - \omega_{m-1} = \frac{\pi c}{nl\left[1 + \frac{\omega}{2n^2}\frac{\partial \chi'(\omega)}{\partial \omega}\right]_{\omega=\omega_m}}.$$

□

证: 该 F-B 腔的谐振条件为

$$k'_m l = \frac{n\omega_m}{c}\left[1 + \frac{\chi'(\omega_m)}{2n^2}\right] l = m\pi, \tag{9.9}$$

$$\Longrightarrow \omega_m \left[1 + \frac{\chi'(\omega_m)}{2n^2}\right] = \frac{m\pi c}{nl}. \tag{9.10}$$

用 $m-1$ 代换 m 得

$$\omega_{m-1}\left[1 + \frac{\chi'(\omega_m)}{2n^2}\right] = \frac{(m-1)\pi c}{nl}. \tag{9.11}$$

以上两式相减得

$$\omega_m - \omega_{m-1} + \frac{\omega_m \chi'(\omega_m) - \omega_{m-1}\chi'(\omega'_{m-1})}{2n^2} = (\omega_m - \omega_{m-1})\left[1 + \frac{\chi'(\omega)}{2n^2} + \frac{\omega}{2n^2}\frac{\partial \chi(\omega)}{\partial \omega}\right]_{\omega=\omega_m} = \frac{\pi c}{nl}, \tag{9.12}$$

从而模式之间频率间隔为

$$\omega_m - \omega_{m-1} = \frac{\pi c}{nl\left[1 + \frac{\chi'(\omega)}{2n^2} + \frac{\omega}{2n^2}\frac{\partial \chi'(\omega)}{\partial \omega}\right]_{\omega=\omega_m}}. \tag{9.13}$$

□

习题 9.4: 若一个光脉冲在原子介质中传播, 脉冲的中心频率等于原子的共振频率 ω_0, 考虑原子介质的色散对脉冲的群速的影响, 分两种情况讨论: (a) 放大介质, (b) 吸收介质. 若不考虑烧孔效应并假定脉冲频谱比 $\Delta\nu$ 窄, 试将群速表示为洛伦兹谱线的峰值增益的函数. □

解: 当脉冲的中心频率等于原子的共振频率 ω_0 时, 脉冲群速度

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{\partial \omega}{\partial k'}\bigg|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial k'}{\partial \nu}\right)^{-1}_{\nu=\nu_0} = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{2\pi n\nu}{c}\left[1 + \frac{\chi'(\nu)}{2n^2}\right]\right\}^{-1}_{\nu=\nu_0} \\ &= \left\{\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{n\nu}{c}\left[1 + \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu}\frac{\chi''(\nu)}{2n^2}\right]\right\}^{-1}_{\nu=\nu_0} \\ &= \frac{c}{n\left[1 + \frac{\nu}{\Delta\nu_0}\frac{\chi''(\nu_0)}{2n^2}\right]}. \end{aligned} \tag{9.14}$$

洛伦兹谱线的峰值增益系数为

$$\gamma(\nu_0) = -k\frac{\chi''(\nu)}{n^2} = -\frac{2\pi n\nu_0}{c}\frac{\chi''(\nu_0)}{n^2}, \tag{9.15}$$

故脉冲群速度

$$v_g = \frac{c}{n\left[1 - \frac{\gamma(\nu_0)c}{2\pi n\Delta\nu}\right]}. \tag{9.16}$$

(a) 对放大介质, $\gamma(\nu_0) > 0$, 故 $v_g > \frac{c}{n}$.

(b) 对吸收介质, $\gamma(\nu_0) < 0$, 故 $v_g < \frac{c}{n}$.

□

习题 9.5: 证明式 (9.2-14) 等效于式 (9.1-10). □

证: 式 (9.2-14):

$$(\omega_l^2-\omega^2)+i\frac{\sigma\omega}{\varepsilon}=\frac{\omega^2\varepsilon_0 f}{\varepsilon}(\chi'-i\chi''), \tag{9.17}$$

其中 $\omega=2\pi\nu$ 为激光频率, $\omega_l=2\pi\nu_m$ 为空腔谐振频率 ($\nu_m=\frac{mc}{2nl}+\frac{c}{2\pi nl}\left(\tan^{-1}\frac{z_2}{z_0}-\tan^{-1}\frac{z_1}{z_0}-\frac{\theta_{m1}+\theta_{m2}}{2}\right)$), $\frac{\sigma}{\varepsilon}=\frac{n}{c}\frac{1}{t_c}=\alpha-\frac{1}{l}\ln(r_1r_2)=\gamma_t$ (t_c 为腔寿命, α 为介质非共振损耗常数, r_1,r_2 分别为两面反射镜的反射率, 这里将反射镜处的损耗也包含在 $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ 中), $\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}=\frac{1}{n^2}$. 在完全填充谐振腔且均匀翻转的情况下, $f=1$, 当 $\omega\approx\omega_l$ 时, $\omega_l^2-\omega^2\approx 2\omega(\omega_l-\omega)$, 此时

$$\nu_m-\nu+i\gamma_t=\frac{\nu}{2n^2}(\chi'-i\chi''), \tag{9.18}$$

$$\Longrightarrow \nu\left[1+\frac{\chi'}{2n^2}\right]-i\nu\frac{\chi''}{2n^2}-i\frac{\gamma_t}{2}=\nu_m, \tag{9.19}$$

此即等效于 (9.1-10)

$$e^{-i2[k'l-\tan^{-1}(z_2/z_0)+\tan^{-1}(z_1/z_0)]}r_1r_2e^{-i(\theta_{m1}+\theta_{m2})}=e^{-i2m\pi}, \tag{9.20}$$

其中 $k'=k\left[1+\frac{\chi'}{2n^2}\right]-ik\frac{\chi''}{2n^2}-i\frac{\alpha}{2}$, $k=\frac{2\pi\nu}{c}$. □

习题 9.6: 推导式 (9.3-5). □

证: 由式 (9.3-4), 平衡态下,

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t}=R_2-\frac{N_2}{t_2}-\left(N_2-\frac{g_2}{g_1}N_1\right)W_i(\nu)=0, \tag{9.21}$$

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t}=R_1-\frac{N_1}{t_1}+\frac{N_2}{t_{21}}+\left(N_2-\frac{g_2}{g_1}N_1\right)W_i(\nu)=0. \tag{9.22}$$

上面两式相加得

$$R_2-\frac{N_2}{t_2}+R_1-\frac{N_1}{t_1}+\frac{N_2}{t_{21}}=0, \tag{9.23}$$

$$\Longrightarrow N_1=\left(\frac{1}{t_{21}}-\frac{1}{t_2}\right)t_1N_2+(R_1+R_2)t_1. \tag{9.24}$$

将上式代入式 (9.21) 中得

$$N_2=\frac{R_2t_2+(R_1+R_2)t_1t_2\frac{g_2}{g_1}W_i}{1+\left[t_2+(1-\delta)t_1\frac{g_2}{g_1}\right]W_i(\nu)}. \tag{9.25}$$

利用上式和式 (9.24) 得

$$\Delta N\equiv N_2-\frac{g_2}{g_1}N_1=\frac{R_2t_2-(R_1+\delta R_2)t_1\frac{g_2}{g_1}}{1+\left[t_1+(1-\delta)t_1\frac{g_2}{g_1}\right]W_i(\nu)}. \tag{9.26}$$

□