

## 目录

6 光束在均匀介质和类透镜介质中的传播	3
7 光学谐振腔	17
8 辐射场与原子系统的相互作用	23
9 激光振荡	29
11 激光器的 Q 开关和锁模	33
14 光辐射的调制	37
15 辐射场与原子系统的相干相互作用	45
19 光学电介质波导中的传播、调制和振荡	49



## Chapter 6

# 光束在均匀介质和类透镜介质中的传播

习题 6.1: 推导 (6.2-1) 至 (6.2-4) 各式. □

证: 对相同透镜构成的波导, (在  $n+1$  处) 出射和 (在  $n$  处) 出射光线之间的关系为

$$\begin{bmatrix} r_{n+1} \\ r'_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ -1/f & (1 - d/f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_n \\ r'_n \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

或将其写成方程形式为

$$r_{n+1} = r_n + dr'_n, \quad (6.2)$$

$$r'_{n+1} = -\frac{1}{f}r_n + \left(1 - \frac{d}{f}\right)r'_n. \quad (6.3)$$

由式 (6.2) 得

$$r'_n = \frac{1}{d}(r_{n+1} - r_n), \quad (6.4)$$

因而有

$$r'_{n+1} = \frac{1}{d}(r_{n+2} - r_{n+1}), \quad (6.5)$$

将以上两式代入式 (6.3) 中得

$$r_{n+2} - \left(2 - \frac{d}{f}\right)r_{n+1} + r_n = 0. \quad (6.6)$$

上式为微分方程

$$r'' + \frac{d}{f}r = 0 \quad (6.7)$$

的差分方程, 故令试探解为

$$r_n = r_0 e^{in\theta}, \quad (6.8)$$

将其代入式 (6.6) 中可得

$$e^{2i\theta} - \left(2 - \frac{d}{f}\right)e^{i\theta} + 1 = 0, \quad (6.9)$$

解得

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{d}{f}\right) \pm i\sqrt{\frac{d}{f} - \frac{d^2}{4f^2}}, \quad (6.10)$$

于是得到

$$r_n = r_{\text{最大}} \sin \theta (n\theta + \delta), \quad (6.11)$$

其中

$$\cos \theta = \operatorname{Re} [e^{i\theta}] = \left(1 - \frac{d}{2f}\right), \quad (6.12)$$

此即式 (6.2-2),

$$r_{\text{最大}} = \frac{r_0}{\sin \delta}. \quad (6.13)$$

利用 (6.2) 得

$$r_{\text{最大}} \sin(\theta + \delta) = r_0 + dr'_0, \quad (6.14)$$

$$\implies \frac{r_0}{\sin \delta} (\sin \theta \cos \delta + \cos \theta \sin \delta) = r_0 + dr'_0, \quad (6.15)$$

$$\implies \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \frac{r_0 \sin \theta}{(r_0 + dr'_0) - r_0 \cos \theta} = \frac{\sqrt{\frac{4f}{d} - 1}}{1 + 2f \frac{r'_0}{r_0}}, \quad (6.16)$$

此即式 (6.2-4), 从而

$$(r_{\text{最大}})^2 = \frac{r_0^2}{\sin^2 \delta} = \frac{r_0^2(1 + \tan^2 \delta)}{\tan^2 \delta} = \frac{4f}{4f - d} (r_0^2 + dr_0 r'_0 + df r_0'^2), \quad (6.17)$$

此即式 (6.2-3). 光线稳定的条件为

$$\frac{d}{f} - \frac{d^2}{4f^2} \geq 0, \quad (6.18)$$

$$\implies 0 \leq d \leq 4f, \quad (6.19)$$

此即式 (6.2-1). □

**习题 6.2:** 证明方程

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_s \\ r'_s \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} r_s \\ r'_s \end{bmatrix}$$

的本征值是  $\lambda = e^{\pm i\theta}$ , 其中  $\exp(\pm i\theta)$  由式 (6.1-13) 给出. 注意, 按照式 (6.1-5), 上述矩阵方程也可以写为

$$\begin{bmatrix} r_{s+1} \\ r'_{s+1} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} r_s \\ r'_s \end{bmatrix}. \quad (6.20)$$

□

**证:** 上述矩阵的特征方程为

$$\det \left( \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} - \lambda I \right) = \begin{vmatrix} A - \lambda & B \\ C & D - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (A + D)\lambda + (AD - BC) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0, \quad (6.21)$$

从而解得特征值为

$$\lambda = e^{\pm i\theta}, \quad (6.22)$$

其中  $\exp(\pm i\theta)$  由式 (6.1-13) 给出:

$$e^{\pm i\theta} = b \pm \sqrt{1 - b^2}. \quad (6.23)$$

□

**习题 6.3:** 对于一个平面波入射到透镜上的情况证明式 (6.4-1) 成立, 由此合理地论证式 (6.4-1) 是正确的. □

**证:** 设透镜的折射率为  $n$ ,  $(x, y)$  处厚度为  $t(\sqrt{x^2 + y^2})$ . 当平面波入射到透镜上, 沿光轴入射透镜和平行光轴于  $(x, y)$  入射透镜的光线汇聚于焦点, 根据费马原理, 两者自入射到汇聚走过的光程相等:

$$nt(0) + f = nt(\sqrt{x^2 + y^2}) + (t(\sqrt{x^2 + y^2}) - t(0)) + \sqrt{f^2 + x^2 + y^2}. \quad (6.24)$$

傍轴近似下, 有

$$nt(0) + f \approx nt(\sqrt{x^2 + y^2}) + [t(\sqrt{x^2 + y^2}) - t(0)] + f \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2f^2}\right), \quad (6.25)$$

$$\Rightarrow nt(\sqrt{x^2 + y^2}) + [t(\sqrt{x^2 + y^2}) - t(0)] = nt(0) - \frac{x^2 + y^2}{2f}. \quad (6.26)$$

透镜对平面波的作用是引起相移

$$\phi(\sqrt{x^2 + y^2}) = k\{nt(\sqrt{x^2 + y^2}) + [t(\sqrt{x^2 + y^2}) - t(0)]\} = knt(0) - k\frac{x^2 + y^2}{2f}, \quad (6.27)$$

而不影响振幅, 因此 (忽略整体相因子) 有

$$E_R(x, y) = E_L(x, y) \exp\left(-ik\frac{x^2 + y^2}{2f}\right), \quad (6.28)$$

此即式 (6.4-1). □

**习题 6.4:** 推导方程式 (6.4-7). □

**证:**  $l$  处的光线可表为

$$r(l^-) = r_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right), \quad (6.29)$$

$$r'(l^-) = -\sqrt{\frac{k_2}{k}}r_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right). \quad (6.30)$$

边界处出射可表为

$$r(l^+) = r(l^-) = r_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right), \quad (6.31)$$

$$r'(l^+) = n_0 r'(l^-) = -n_0 \sqrt{\frac{k_2}{k}}r_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right). \quad (6.32)$$

公共焦点与出射面之间的距离为

$$h = \left|\frac{r_{\text{out}}}{r'_{\text{out}}}\right| = \frac{1}{n_0} \sqrt{\frac{k_2}{k}} \cot\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right). \quad (6.33)$$

□

**习题 6.5:** 证明占据  $0 \leq z \leq l$  区域的类透镜介质把位于  $z < 0$  的轴上点成像为单点. (若成像点位于  $z < l$  处, 则是虚像.)  $\square$

**证:** 设轴上物点坐标为  $-z_0 < 0$ , 则由该点发出的某条光线可表为  $(0, r'_0)$ , 经  $-z_0 < z < 0$  区域的直线传播后在入射面的入射光线可表为

$$\begin{bmatrix} r(0^-) \\ r'(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ r'_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 r'_0 \\ r'_0 \end{bmatrix}. \quad (6.34)$$

经入射面折射后, 光线可表为

$$\begin{bmatrix} r(0^+) \\ r'(0^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(0^-) \\ r'(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 r'_0 \\ \frac{r'_0}{n_0} \end{bmatrix}. \quad (6.35)$$

经类透镜介质中传播后, 在出射面处出射前的光线可表为

$$\begin{bmatrix} r(l^-) \\ r'(l^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) & \sqrt{\frac{k}{k_2}}\sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) \\ -\sqrt{\frac{k_2}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) & \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(0^+) \\ r'(0^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 r'_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) + \sqrt{\frac{k}{k_2}} \frac{r'_0}{n_0} \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) \\ -\sqrt{\frac{k_2}{k}} z_0 r'_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) + \frac{r'_0}{n_0} \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) \end{bmatrix}. \quad (6.36)$$

经出射面折射后, 光线可表为

$$\begin{bmatrix} r(l^+) \\ r'(l^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(l^-) \\ r'(l^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 r'_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) + \sqrt{\frac{k}{k_2}} \frac{r'_0}{n_0} \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) \\ -\sqrt{\frac{k_2}{k}} n_0 z_0 r'_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) + r'_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) \end{bmatrix}. \quad (6.37)$$

在  $z = l + d$  处,

$$r(l+d) = r(l^+) + dr'(l^+) = z_0 r'_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) + \sqrt{\frac{k}{k_2}} \frac{r'_0}{n_0} \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) + \left[-\sqrt{\frac{k_2}{k}} n_0 z_0 r'_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) + r'_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right)\right] d = 0. \quad (6.38)$$

其中

$$d = \frac{n_0 z_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) + \sqrt{\frac{k}{k_2}} \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right)}{\sqrt{\frac{k_2}{k}} n_0^2 z_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right) - n_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right)}, \quad (6.39)$$

注意到  $r(l+d) = 0$  不依赖于  $r'_0$ , 故类透镜介质把轴上物点成像为单点.  $\square$

**习题 6.6:** 推导表 6.1 列出的光线矩阵.  $\square$

**证:** (1) 长度为  $d$  的直线段: 光线  $(r_i, r'_i)$  在均匀介质中传播  $d$ , 则其与光轴的距离变为

$$r_o = r_i + dr'_i, \quad (6.40)$$

斜率不变

$$r'_o = r'_i, \quad (6.41)$$

故

$$\begin{bmatrix} r_o \\ r'_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix}. \quad (6.42)$$

(2) 薄透镜 (焦距  $f$ ): 光线  $(r_i, r'_i)$  经过薄透镜, 则其与光轴的距离不变

$$r_o = r_i, \quad (6.43)$$

傍轴近似下, 斜率  $r'_o$  满足

$$r'_i - r'_o = \frac{r_o}{f}, \quad (6.44)$$

$$\Rightarrow r'_o = -\frac{r_o}{f} + r'_i, \quad (6.45)$$

故

$$\begin{bmatrix} r_o \\ r'_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix}. \quad (6.46)$$

(3) 电介质界面 (折射率  $n_1, n_2$ ): 光线  $(r_i, r'_i)$  经过电介质界面折射, 则其与光轴的距离不变

$$r_o = r_i, \quad (6.47)$$

傍轴近似下, 斜率变为

$$r'_o = \frac{n_1}{n_2} r'_i, \quad (6.48)$$

故

$$\begin{bmatrix} r_o \\ r'_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix}. \quad (6.49)$$

(4) 球面电介质界面 (半径  $R$ ): 光线  $(r_i, r'_i)$  经过球面电介质界面折射, 则其与光轴的距离不变

$$r_o = r_i, \quad (6.50)$$

傍轴近似下, 斜率  $r'_o$  满足

$$n_1 \left( \frac{r_i}{R} - r'_i \right) = n_2 \left( \frac{r_i}{R} - r'_o \right), \quad (6.51)$$

$$\Rightarrow r'_o = \frac{n_2 - n_1}{n_2} \frac{r_i}{R} + \frac{n_1}{n_2} r'_i, \quad (6.52)$$

故

$$\begin{bmatrix} r_o \\ r'_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_1}{n_2} \frac{1}{R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix}. \quad (6.53)$$

(5) 球面反射镜 (曲率半径  $R$ ): 光线  $(r_i, r'_i)$  经过球面反射镜反射, 则其与光轴的距离不变

$$r_o = r_i, \quad (6.54)$$

傍轴近似下, 斜率  $r'_o$  满足

$$\frac{r_i}{R} - r'_i = -r'_o - \frac{r'_i}{R}, \quad (6.55)$$

$$\Rightarrow r'_o = -\frac{2}{R} r_i + r'_i, \quad (6.56)$$

故

$$\begin{bmatrix} r_o \\ r'_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix}. \quad (6.57)$$

(6) 有二次型折射率变化曲线的介质: 介质的折射率分布为

$$n(x, y) = n_0 \left[ 1 - \frac{k_2}{2k} (x^2 + y^2) \right], \quad (6.58)$$

其中  $k_2$  为常数. 光线在非均匀介质中传播的微分方程为

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla, \quad (6.59)$$

其中  $s$  为沿光线的切向距离,  $\mathbf{r}$  为光线的位矢. 傍轴近似下, 可用  $\frac{d}{dz}$  代替  $\frac{d}{ds}$ , 并将式 (6.58) 代入可得

$$\frac{d^2 r}{dz^2} + \left( \frac{k_2}{k} \right) r = 0, \quad (6.60)$$

对入射光线  $\begin{bmatrix} r(0) \\ r'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix}$ , 解得

$$r(z) = r_i \cos \left( \sqrt{\frac{k_2}{k}} z \right) + \sqrt{\frac{k}{k_2}} r'_i \sin \left( \sqrt{\frac{k_2}{k}} z \right), \quad (6.61)$$

$$r'(z) = -\sqrt{\frac{k_2}{k}} r_i \sin \left( \sqrt{\frac{k_2}{k}} z \right) + r'_i \cos \left( \sqrt{\frac{k_2}{k}} z \right), \quad (6.62)$$

故

$$\begin{bmatrix} r(l) \\ r'(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \left( \sqrt{\frac{k_2}{k}} l \right) & \sqrt{\frac{k}{k_2}} \sin \left( \sqrt{\frac{k_2}{k}} l \right) \\ -\sqrt{\frac{k_2}{k}} \sin \left( \sqrt{\frac{k_2}{k}} l \right) & \cos \left( \sqrt{\frac{k_2}{k}} l \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix}. \quad (6.63)$$

□

**习题 6.7:** 若透镜相对于入射光束置于任意位置处 (即不置于腰部), 对于这种情况求解导出式 (6.7-11) 和 (6.7-12) 的问题. □

**证:** 设入射高斯光束的束腰半径为  $\omega_{01}$ , 透镜位于距入射光束束腰  $z_1$  处, 则透镜前表面处光斑半径的平方  $\omega_1^2 = [\omega_1(z_1)]^2 = \omega_{01}^2 \left[ 1 + \left( \frac{z_1}{z_{01}} \right)^2 \right]$ , 等相位面曲率半径  $R_1 = R_1(z_1) = z_1 \left[ 1 + \left( \frac{z_{01}}{z_1} \right)^2 \right]$ , 其中  $z_{01} = \frac{\pi \omega_{01}^2 n}{\lambda}$ , 因而

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{R_1} - i \frac{\lambda}{\pi n \omega_1^2} = \frac{1}{z_1 + i z_{01}}. \quad (6.64)$$

光束经过透镜折射, 在透镜后表面的参量为

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f}, \quad (6.65)$$

$$\Rightarrow q_2 = \frac{f(z_1 + z_{01})}{f - (z_1 + i z_{01})}. \quad (6.66)$$

光束经过距离  $l$  的传播, 在平面 (3) 处的参量为

$$q_3 = q_2 + l = \frac{(f - l)(z_1 + i z_{01}) + f l}{f - (z_1 + i z_{01})}, \quad (6.67)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{q_3} = \frac{1}{R_3} - i \frac{\lambda}{\pi \omega_3^2 n} = \frac{\{(f - z_1)[(f - l)z_1 + f l] - z_{01}^2(f - l)\} - i f^2 z_{01}}{[(f - l)z_1 + f l]^2 + [(f - l)z_{01}]^2}. \quad (6.68)$$

在新束腰处  $R_3 = \infty$ , 由此得新束腰位置为

$$l = \frac{f}{1 + \frac{f(f - z_1)}{z_{01}^2 - (f - z_1)z_1}}, \quad (6.69)$$



且新束腰半径与原束腰半径之比为

$$\frac{\omega_3}{\omega_{01}} = \frac{\frac{f}{z_{01}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f-z_1}{z_{01}}\right)^2}}. \quad (6.70)$$

□

**习题 6.8:** (a) 若高斯光束垂直入射到折射率为  $n$  的固体棱镜上, 如下图所示. 试求出射光束的远场衍射角.

(b) 若棱镜向左移动一直到它的入射面位于  $s = -l_1$  处. 试求出新的出射光束的腰部大小及腰部位置. (假设晶体足够长, 以致光束的腰部位于晶体内.)

□

**解:** (a)  $z = l_1$  处入射固体棱镜前, 高斯光束光斑半径的平方为  $[\omega(l_1^-)]^2 = \omega_0^2 \left[1 + \left(\frac{l_1}{z_0}\right)^2\right]$ , 等相位面曲率半径为  $R(l_1^-) = z_1 \left[1 + \left(\frac{z_0}{l_1}\right)^2\right]$ , 其中  $z_0 = \frac{\pi \omega_0^2 n}{\lambda}$ , 因而

$$\frac{1}{q(l_1^-)} = \frac{1}{R(l_1^-)} - i \frac{\lambda}{\pi n [\omega(l_1^-)]^2} = \frac{1}{l_1 + iz_0}, \quad (6.71)$$

$$\Rightarrow q(l_1^-) = l_1 + iz_0. \quad (6.72)$$

$z = l_1$  处, 光束入射后的参量为

$$q(l_1^+) = \frac{q(l_1^-)}{\frac{1}{n}} = n(l_1 + iz_0). \quad (6.73)$$

$z = l_2$  出射前光束的参量为

$$q(l_2^-) = q(l_1^+) + (l_2 - l_1) = n(l_1 + iz_0) + (l_2 - l_1). \quad (6.74)$$

$z = l_2$  光束出射后的参量为

$$q(l_2^+) = \frac{q(l_2^-)}{n} = (l_1 + iz_0) + \frac{l_2 - l_1}{n}. \quad (6.75)$$

$z = l_3$  处光束的参量为

$$q(l_3) = q(l_2^+) + l = (l_1 + iz_0) + \frac{l_2 - l_1}{n} + (l_3 - l_2). \quad (6.76)$$

由

$$\frac{1}{q(l_3)} = \frac{1}{R(l_3)} - i \frac{\lambda}{\pi n [\omega(l_3)]^2}, \quad (6.77)$$

得光束等相位面曲率半径

$$\frac{1}{R_3} = \frac{l_1 + \frac{l_2 - l_1}{n} + (l_3 - l_2)}{\left[l_1 + \frac{l_2 - l_1}{n} + (l_3 - l_2)\right]^2 + z_0^2}, \quad (6.78)$$

及束腰半径

$$\omega(l_3) = \omega_0 \sqrt{1 + \left[\frac{l_1 + \frac{l_2 - l_1}{n} + (l_3 - l_2)}{z_0}\right]^2} \quad (6.79)$$

在新束腰处  $R(l_3) = \infty$ , 由此得

$$l_3 = l_2 - \left( l_1 + \frac{l_2 - l_1}{n} \right), \quad (6.80)$$

及新束腰半径

$$\omega'_0 = \omega_0. \quad (6.81)$$

此时出射光束的远场衍射角为

$$\theta \approx \frac{\lambda}{\pi \omega'_0 n} = \frac{\lambda}{\pi \omega_0 n}. \quad (6.82)$$

(b) 当棱镜入射面位于  $z = -l_1$  处, 则新的出射光束的腰部半径为

$$\omega'_0 = \omega_0, \quad (6.83)$$

位置为

$$l_3 = (l_1 + l_2) - \frac{l_1 + l_2}{n}. \quad (6.84)$$

□

**习题 6.9:** 波长为  $\lambda$  的高斯光束入射到置于  $Z = l$  的透镜上, 如下图所示. 要使出射光束的腰位于晶体样品的前表面上, 试计算透镜的焦距  $f$ . 证明 (对给定的  $l$  和  $L$ ) 可能存在两个解. 对每个解画出光束的传播情况. □

**证:** 利用习题 6.7 的结论, 新束腰距离透镜

$$\frac{f}{1 + \frac{f(f-l)}{z_0^2 - (f-l)l}} = L, \quad (6.85)$$

$$\implies (l+L)f^2 - (l^2 + 2lL + z_0^2)f + (l^2 + z_0^2)L = 0, \quad (6.86)$$

解得当  $(l^2 + z_0^2)^2 - 4L^2 z_0^2 \geq 0$  时,

$$f = \frac{l^2 + 2lL + z_0^2 \pm \sqrt{(l^2 + z_0^2)^2 - 4L^2 z_0^2}}{l + L}. \quad (6.87)$$

□

**习题 6.10:** 补全 6.12 节推导过程中所有略去的步骤. □

**证:** 仿照 6.5 节, 取  $E = \psi(x, y, z)e^{-ikz}$ , 将亥姆霍兹方程化为

$$\nabla_t^2 \psi - 2ik\psi' - k(k_{2x}x^2 + k_{2y}y^2)\psi = 0, \quad (6.88)$$

其中  $\psi' = \frac{\partial \psi}{\partial z}$ . 假设波动方程的一个解为

$$\psi = \exp \left\{ -i \left[ P(z) + \frac{Q(z)x^2}{2} + \frac{Q_y(z)y^2}{2} \right] \right\}, \quad (6.89)$$

将其代入式 (6.88) 得

$$Q_x^2 x^2 + Q_y y^2 + iQ_x + iQ_y + 2kP' + k(Q'_x x + Q'_y y) + k k_2 (x^2 + y^2) = 0. \quad (6.90)$$

上式对任一  $x, y$  均成立, 故  $x, y$  的各次幂的系数均等于零, 从而导出

$$Q_x^2 + k \frac{dQ_x}{dz} + k k_{2x} = 0, \quad Q_y^2 + k \frac{dQ_y}{dz} + k k_{2y} = 0 \quad (6.91)$$

和

$$\frac{dP}{dz} = -i \left( \frac{Q_x + Q_y}{2k} \right). \quad (6.92)$$

假设介质均匀, 则  $k_{2x} = k_{2y} = 0$ , 式 (6.91) 可化为

$$Q_x^2 + k \frac{dQ_x}{dz} = 0, \quad Q_y^2 + k \frac{dQ_y}{dz} = 0. \quad (6.93)$$

引入函数  $s_x(z)$  和  $s_y(z)$ , 满足

$$Q_x = k \frac{s'_x}{s_x}, \quad Q_y = k \frac{s'_y}{s_y}. \quad (6.94)$$

由式 (6.93) 可得

$$s''_x = 0, \quad s''_y = 0, \quad (6.95)$$

因而

$$s_x = a_x z + b_x, \quad s_y = a_y z + b_y, \quad (6.96)$$

或

$$Q_x(z) = k \frac{a_x}{a_x z + b_x}, \quad Q_y(z) = k \frac{a_y}{a_y z + b_y}, \quad (6.97)$$

其中  $a_x, b_x, a_y, b_y$  为任意常数. 定义

$$q_x(z) = \frac{k}{Q_x(z)}, \quad q_y(z) = \frac{k}{Q_y(z)}, \quad (6.98)$$

从而将式 (6.97) 改写为

$$q_x = z + C_x, \quad q_y = z + C_y, \quad (6.99)$$

其中  $C_x$  和  $C_y$  为任意积分常数. 将  $C_x$  和  $C_y$  写成如下形式:

$$C_x = -z_x + q_{0x}, \quad C_y = -z_y + q_{0y}, \quad (6.100)$$

其中  $z_x$  和  $z_y$  为实数,  $q_{0x}$  和  $q_{0y}$  为虚数. 将  $q_x(z)$  和  $q_y(z)$  代入式 (6.92) 可得

$$P' = -\frac{i}{2} \left[ \frac{1}{z + C_x} + \frac{1}{z + C_y} \right], \quad (6.101)$$

取积分常数为零得

$$P = -\frac{i}{2} \left[ \ln \left( 1 + \frac{z - z_x}{q_{0x}} \right) + \ln \left( 1 + \frac{z - z_y}{q_{0y}} \right) \right]. \quad (6.102)$$

将上式代入  $\psi$  的假设解中得

$$\psi = \exp \left\{ -i \left[ -\frac{i}{2} \ln \left( 1 + \frac{z - z_x}{q_0} \right) - \frac{i}{2} \ln \left( 1 + \frac{z - z_y}{q_{0y}} \right) + \frac{kx^2}{2(q_{0x} + z - z_x)} + \frac{ky^2}{2(q_{0y} + z - z_y)} \right] \right\}. \quad (6.103)$$

取

$$q_{0x} = i \frac{\pi \omega_{0x}^2 n}{\lambda}, \quad q_{0y} = i \frac{\pi \omega_{0y}^2 n}{\lambda}, \quad (6.104)$$

则式 (6.103) 中的

$$\begin{aligned} & \exp \left[ -\frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{z - z_x}{q_{0x}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{z - z_y}{q_{0y}} \right) \right] = \frac{1}{\left[ 1 + \frac{z - z_x}{q_{0x}} \right]^{1/2} \left[ 1 + \frac{z - z_y}{q_{0y}} \right]^{1/2}} \\ &= \frac{1}{\left[ \sqrt{1 + \left| \frac{z - z_x}{q_{0x}} \right|^2} \exp \left( i \arctan \frac{z - z_x}{i q_{0x}} \right) \right]^{1/2} \left[ \sqrt{1 + \left| \frac{z - z_y}{q_{0y}} \right|^2} \exp \left( i \arctan \frac{z - z_y}{i q_{0y}} \right) \right]^{1/2}} \\ &= \frac{\sqrt{\omega_{0x} \omega_{0y}}}{\sqrt{\omega_x(z) \omega_y(z)}} \exp[i\eta(z)], \end{aligned} \quad (6.105)$$

其中

$$\omega_x^2(z) = \omega_{0x}^2 \left[ 1 + \left( \frac{\lambda(z - z_x)}{\pi \omega_{0x}^2 n} \right)^2 \right], \quad \omega_y^2(z) = \omega_{0y}^2 \left[ 1 + \left( \frac{\lambda(z - z_y)}{\pi \omega_{0y}^2 n} \right)^2 \right], \quad (6.106)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{\lambda(z - z_x)}{\pi \omega_{0x}^2 n} \right) + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{\lambda(z - z_y)}{\pi \omega_{0y}^2 n} \right). \quad (6.107)$$

式 (6.103) 中的

$$\begin{aligned} & \exp \left[ \frac{-ikx^2}{2(q_{0x} + z - z_x)} + \frac{-iky^2}{2(q_{0y} + z - z_y)} \right] = \exp \left\{ \frac{-i \frac{k}{q_{0x}} x^2}{2 \left( 1 + \frac{z - z_x}{q_{0x}} \right)} + \frac{-i \frac{k}{q_{0y}} y^2}{2 \left( 1 + \frac{z - z_y}{q_{0y}} \right)} \right\} \\ &= \exp \left\{ -x^2 \frac{1}{\omega_{0x}^2 \left( 1 + \frac{z - z_x}{q_{0x}} \right)} - y^2 \frac{1}{\omega_{0y}^2 \left( 1 + \frac{z - z_y}{q_{0y}} \right)} \right\} \\ &= \exp \left\{ -x^2 \frac{1 - \frac{z - z_x}{q_{0x}}}{\omega_{0x}^2 \left( 1 + \left| \frac{z - z_x}{q_{0x}} \right|^2 \right)} - y^2 \frac{1 - \frac{z - z_y}{q_{0y}}}{\omega_{0y}^2 \left( 1 + \left| \frac{z - z_y}{q_{0y}} \right|^2 \right)} \right\} \\ &= \exp \left\{ -x^2 \left( \frac{1}{\omega_x^2(z)} + \frac{ik}{2R_x(z)} \right) - y^2 \left( \frac{1}{\omega_y^2(z)} + \frac{ik}{2R_y(z)} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (6.108)$$

其中

$$R_x(z) = (z - z_x) \left[ 1 + \left( \frac{\pi \omega_{0x}^2 n}{\lambda(z - z_x)} \right)^2 \right], \quad R_y(z) = (z - z_y) \left[ 1 + \left( \frac{\pi \omega_{0y}^2 n}{\lambda(z - z_y)} \right)^2 \right]. \quad (6.109)$$

综上, 在均匀介质中,

$$\begin{aligned} E(x, y, z) &= E_0 \frac{\sqrt{\omega_{0x} \omega_{0y}}}{\sqrt{\omega_x(z) \omega_y(z)}} \exp \left\{ -i[kz - \eta(z)] - \frac{ikx^2}{2q_x(z)} - \frac{iky^2}{2q_y(z)} \right\} \\ &= E_0 \frac{\sqrt{\omega_{0x} \omega_{0y}}}{\sqrt{\omega_x(z) \omega_y(z)}} \exp \left\{ -i[kz - \eta(z)] - x^2 \left( \frac{1}{\omega_x^2(z)} + \frac{ik}{2R_x(z)} \right) - y^2 \left( \frac{1}{\omega_y^2(z)} + \frac{ik}{2R_y(z)} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.110)$$

对比  $\psi$  的假设解和上式可得

$$\frac{1}{q_x(z)} = \frac{1}{R_x(z)} - i \frac{\lambda}{\pi n \omega_x^2(z)}, \quad (6.111)$$

$$\frac{1}{q_y(z)} = \frac{1}{R_y(z)} - i \frac{\lambda}{\pi n \omega_y^2(z)}. \quad (6.112)$$

在折射率分布为

$$n^2(\mathbf{r}) = n^2 \left( 1 - \frac{n_{2x}}{n} x^2 - \frac{n_{2y}}{n} y^2 \right) \quad (6.113)$$

的二次型类透镜介质中, 亥姆霍兹方程可化为

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \left( 1 - \frac{n_{2x}}{n} x^2 - \frac{n_{2y}}{n} y^2 \right) \mathbf{E} = 0. \quad (6.114)$$

假设标量场的形式为  $E(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) \exp(-i\beta z)$ , 则上述方程可化为

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \left[ k^2 \left( 1 - \frac{n_{2x}}{n} x^2 - \frac{n_{2y}}{n} y^2 \right) - \beta^2 \right] \psi = 0. \quad (6.115)$$

取  $\psi = f(x)g(y)$ , 并将上式除以  $\psi$  得

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} + \left( \lambda_1 - k^2 \frac{n_{2x}}{n} x^2 \right) = -\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} + \left[ (k^2 - \beta^2 - \lambda_1) - k^2 \frac{n_{2y}}{n} y^2 \right], \quad (6.116)$$

分离变量得两个微分方程:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \left( \lambda_1 - k^2 \frac{n_{2x}}{n} x^2 \right) f = 0, \quad (6.117)$$

$$\frac{d^2 g}{dy^2} + \left[ (k^2 - \beta^2 - \lambda_1) - k^2 \frac{n_{2y}}{n} y^2 \right] g = 0. \quad (6.118)$$

做变量代换

$$\xi = \frac{\sqrt{2}x}{\omega_x}, \quad \omega_x = \left( \frac{\lambda_1}{\pi} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{n n_{2x}} \right)^{1/4}, \quad (6.119)$$

从而将上面的微分方程化为

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \left( \frac{\omega_x^2 \lambda_1}{2} - \xi^2 \right) f = 0. \quad (6.120)$$

假设上述方程的解具有如下形式:

$$f \left( \frac{\omega_x \xi}{\sqrt{2}} \right) = H(\xi) e^{-\xi^2/2}, \quad (6.121)$$

其中  $H(\xi)$  是一个有限级数的多项式. 将该假设解代入微分方程得

$$\frac{d^2 H}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dH}{d\xi} + \left( \frac{\omega_x^2 \lambda_1}{2} - 1 \right) H = 0, \quad (6.122)$$

从而解得  $H(\xi)$  为厄米多项式  $H_l(\xi)$ , 且

$$\frac{\omega_x^2 \lambda_1}{2} = 2l + 1. \quad (6.123)$$

对于关于  $y$  的微分方程也可同理求解, 故

$$E_{l,m}(\mathbf{r}) = E_0 e^{-i\beta_{l,m} z} H_l \left( \sqrt{2} \frac{x}{\omega_x} \right) H_m \left( \sqrt{2} \frac{y}{\omega_y} \right) \exp \left( -\frac{x^2}{\omega_x^2} - \frac{y^2}{\omega_y^2} \right), \quad (6.124)$$

且

$$k^2 - \beta^2 = \lambda_1^2 + (k^2 - \beta^2 - \lambda_1) = \frac{2}{\omega_x^2} [2(l+1)] + \frac{2}{\omega_y^2} [2(m+1)], \quad (6.125)$$

$$\Rightarrow \beta_{l,m} = k \left\{ 1 - \frac{2}{k} \left[ \sqrt{\frac{n_{2x}}{n}} \left( l + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\frac{n_{2y}}{n}} \left( m + \frac{1}{2} \right) \right] \right\}^{1/2}. \quad (6.126)$$

□

**习题 6.11:** 证明式 (6.10-10).

提示: 把光脉冲场看作载波和包络函数的乘积

$$E(z, t) = E_0 e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\Delta\omega) e^{i(\Delta\omega t - \Delta k z)} d(\Delta\omega)$$

式中  $\Delta\omega \equiv \omega - \omega_0$ ,  $\Delta k = k(\omega) - k_0$ . □

**证:** 由傅里叶变换得光场频谱为

$$G(\Delta\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E(z, t)}{E_0} e^{-i[(\omega_0 + \Delta\omega)\tau - (k_0 + \Delta k)z]} d\tau. \quad (6.127)$$

对一个持续时间为  $\tau$  的光脉冲, 该脉冲的谱宽满足

$$\Delta\omega \frac{\tau}{2} = \pi, \quad (6.128)$$

$$\implies \Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau}. \quad (6.129)$$

单频光传播距离  $L$  所用的时间为

$$t = \frac{L}{v_g}. \quad (6.130)$$

该脉冲传输距离  $L$  后, 增宽为

$$\Delta\tau \approx \left| \frac{d\tau}{d\omega} \right| \Delta\omega = \left| \frac{d\left(\frac{L}{v_g}\right)}{d\omega} \right| \Delta\omega = \frac{L}{v_g^2} \frac{dv_g}{d\omega} \frac{2\pi}{\tau}. \quad (6.131)$$

□

**习题 6.12:** 一根二次型折射率变化的玻璃纤维长 1000 米,  $n = 1.5$ ,  $n_2 = 5 \times 10^2$  厘米<sup>-2</sup>. 波长  $\lambda = 1$  微米的光束在此纤维中传播, 试求在 (a) 单模  $l = m = 0$  激发情况下, (b)  $l = m = 5$  情况下此载波的光斑尺寸及最大的脉冲重复频率. □

**解:** (a) 单模  $l = m = 0$  激发情况下, 光斑半径为

$$w_0 = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{nn_2}\right)^{1/4} = 1.08 \times 10^{-5} \text{ m} = 10.8 \mu\text{m}, \quad (6.132)$$

最大脉冲重复频率为

$$f_{\max} \approx \frac{1}{\Delta\tau} = \frac{1}{\frac{Lnn_2\Delta\omega}{c^2k^3} \left[1 + \frac{n_2/n}{2k^2}(0+0+1)^2\right]^2 (0+0+1)^2} = \frac{1.00 \times 10^{28} \text{ Hz}^2}{\Delta\omega}, \quad (6.133)$$

其中  $\Delta\omega$  为载波的光谱宽度.

(b)  $l = m = 5$  情况下, 光斑半径为

$$w_5 = \sqrt{2 \times 5 + 1} w_0 = 3.58 \times 10^{-5} \text{ m} = 35.8 \mu\text{m}, \quad (6.134)$$

最大脉冲重复频率为

$$f_{\max} \approx \frac{1}{\Delta\tau} = \frac{1}{\frac{Lnn_2\Delta\omega}{c^2k^3} \left[1 + \frac{n_2/n}{2k^2}(5+5+1)^2\right]^2 (5+5+1)^2} = \frac{8.30 \times 10^{25} \text{ Hz}^2}{\Delta\omega}. \quad (6.135)$$

□

习题 6.13: 推导式 (6.10-4) 和 (6.10-5). □

证: 二次型折射率变化的介质中矢量波动方程为

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \left(1 - \frac{n_2}{n} r^2\right) \mathbf{E} = 0, \quad (6.136)$$

其中光束在折射率为  $n$  的均匀介质中的传播常数  $k = \frac{2\pi n}{\lambda}$ . 设标量场的形式为  $E(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) \exp(i\beta z)$ , 从而上述方程化为

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \left[k^2 \left(1 - \frac{n_2}{n} r^2\right) - \beta^2\right] \psi = 0. \quad (6.137)$$

取  $\psi = f(x)g(y)$ , 并将上式除以  $\psi$  得

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} + \left(\lambda_1 - k^2 \frac{n_2}{n} x^2\right) = -\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} - \left[(k^2 - \beta^2 - \lambda_1) - k^2 \frac{n_2}{n} y^2\right], \quad (6.138)$$

分离变量得两个微分方程:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \left(\lambda_1 - k^2 \frac{n_2}{n} x^2\right) f = 0, \quad (6.139)$$

$$\frac{d^2 g}{dy^2} + \left[(k^2 - \beta^2 - \lambda_1) - k^2 \frac{n_2}{n} y^2\right] g = 0. \quad (6.140)$$

作变量代换

$$\xi = \frac{\sqrt{2}x}{\omega}, \quad \omega = \left(\frac{\lambda_1}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{nn_2}\right)^{1/4}, \quad (6.141)$$

从而将上面的微分方程化为

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \left(\frac{\omega^2 \lambda_1}{2} - \xi^2\right) f = 0. \quad (6.142)$$

假设上述方程的解具有如下形式:

$$f\left(\frac{\omega \xi}{\sqrt{2}}\right) = H(\xi) e^{-\xi^2/2}, \quad (6.143)$$

其中  $H(\xi)$  是一个有限级数的多项式. 将该假设解代入微分方程得

$$\frac{d^2 H}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dH}{d\xi} + \left(\frac{\omega^2 \lambda_1}{2} - 1\right) H = 0, \quad (6.144)$$

从而解得  $H(\xi)$  为厄米多项式  $H_l(\xi)$ , 且

$$\frac{\omega^2 \lambda_1}{2} = 2l + 1. \quad (6.145)$$

对关于  $y$  的微分方程也可同理求解, 故

$$\psi_{l,m}(x, y) = f_l(x)g_m(y) = E_0 H_l\left(\sqrt{2}\frac{x}{\omega}\right) H_m\left(\sqrt{2}\frac{y}{\omega}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\omega^2}\right), \quad (6.146)$$

且

$$k^2 - \beta^2 = \lambda_1 + (k^2 - \beta^2 - \lambda_1) = \frac{2}{\omega^2} [(2l + 1) + (2m + 1)], \quad (6.147)$$

$$\Rightarrow \beta_{l,m} = k \left[1 - \frac{2}{k} \sqrt{\frac{n_2}{n}} (l + m + 1)\right]^{1/2}. \quad (6.148)$$

□





# Chapter 7

## 光学谐振腔

习题 7.1: 试把从光学谐振腔 ( $R \sim 0.99$ ) 可得到的典型  $Q$  值与微波谐振腔的  $Q$  进行比较. □

证: 设激光波长  $\lambda \sim 1 \mu\text{m}$ , 腔长  $l \sim 1 \text{ m}$ ,  $R \sim 0.99$  的光学谐振腔的  $Q$  值的典型值为

$$Q = 2\pi \frac{t_c}{T} = 2\pi \frac{\frac{nl}{c[\alpha l - \ln R]}}{\frac{\lambda}{c}} = 2\pi \frac{nl}{-\lambda \ln R} = 6.25 \times 10^8. \quad (7.1)$$

微波波长较激光波长大  $3 \sim 6$  个数量级, 故微波谐振腔的  $Q$  值较光学谐振腔小  $3 \sim 6$  个数量级. □

习题 7.2: 设计一个谐振腔,  $R_1 = 20$  厘米,  $R_2 = -32$  厘米,  $l = 16$  厘米,  $\lambda = 10^{-4}$  厘米.

试求

- (a) 最小光斑尺寸  $\omega_0$ ;
- (b) 最小光斑的位置;
- (c) 镜面光斑尺寸  $\omega_1, \omega_2$ ;
- (d)  $\omega_0, \omega_1$  和  $\omega_2$  分别与共焦腔 ( $R_1 = -R_2 = l$ ) 相应值的比.

□

解: 为保证各物理量符号的规范, 不妨重设  $R_1 = -20 \text{ cm}$ ,  $R_2 = 32 \text{ cm}$ .

- (a) 瑞利距离的平方为

$$z_0^2 = \frac{l(R_2 - R_1 - l)(l + R_1)(l - R_2)}{(2l + R_1 - R_2)^2} = 92.16 \text{ cm}^2. \quad (7.2)$$

最小光斑尺寸为

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{n\pi}} = 0.0175 \text{ cm} = 175 \mu\text{m}. \quad (7.3)$$

- (b) 最小光斑与 1 号镜面的距离为

$$|z_1| = \left| \frac{1}{2} \left[ R_1 \pm \sqrt{R_1^2 - 4z_0^2} \right] \right| = 7.2 \text{ cm 或 } 12.8 \text{ cm}. \quad (7.4)$$

(c) 镜面光斑尺寸分别为

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^2} = 0.0219 \text{ cm 或 } 0.0291 \text{ cm} = 219 \mu\text{m 或 } 291 \mu\text{m}, \quad (7.5)$$

$$\omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z_2}{z_0}\right)^2} = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{l - z_1}{z_0}\right)^2} = 0.0237 \text{ cm 或 } 0.0184 \text{ cm} = 237 \mu\text{m 或 } 184 \mu\text{m}. \quad (7.6)$$

(d) 对对称共焦腔, 瑞利距离的平方为

$$z_{0,\text{confocal}}^2 = \frac{l^2}{4} = 64 \text{ cm}^2, \quad (7.7)$$

束腰半径为

$$\omega_{0,\text{confocal}} = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi n}} = 0.0160 \text{ cm} = 160 \mu\text{m}, \quad (7.8)$$

镜面光斑半径为

$$\omega_{1,2,\text{confocal}} = \sqrt{2} \omega_{0,\text{confocal}} = 0.0226 \text{ cm} = 226 \mu\text{m}. \quad (7.9)$$

题设中谐振腔  $\omega_0$ 、 $\omega_1$  和  $\omega_2$  与共焦腔相应值的比分别为

$$\frac{\omega_0}{\omega_{0,\text{confocal}}} = 1.1, \quad (7.10)$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_{1,\text{confocal}}} = 0.97 \text{ 或 } 1.3, \quad (7.11)$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_{2,\text{confocal}}} = 1.05 \text{ 或 } 0.83. \quad (7.12)$$

□

**习题 7.3:** 考虑一共焦腔,  $l = 16$  厘米,  $\lambda = 10^{-4}$  厘米, 反射率  $R_1 = R_2 = 0.995$ . 利用图 7.7, 选择反射镜的口径, 使第一个高阶模式 ( $\text{TE}_{01}$ ) 的总损耗超过 3%. 对于选择的口径, 基模损耗有多少? 为了抑制高阶横模的振荡, 需要多大的口径? □

**解:** 为使第一个高阶模式 ( $\text{TE}_{01}$ ) 的总损耗超过 3%, 衍射损耗应满足

$$1 - 0.995 \times (1 - \text{衍射损耗}) > 3 \implies \text{衍射损耗} > 2.5 \quad (7.13)$$

由图 7.7, 对模式  $\text{TE}_{01}$ , 2.5% 的衍射损耗对应  $\frac{a^2 n}{\lambda l} = 0.8$ , 对应反射镜的口径为  $a = 0.36 \text{ mm}$ , 故为使模式  $\text{TE}_{01}$  的总损耗超过 3%, 反射镜的口径应  $\leq 0.36 \text{ mm}$ .

对选择的口径  $a = 0.36 \text{ mm}$ , 基模衍射损耗约为 0.2%, 总损耗为  $1 - 0.995 \times (1 - 0.2\%) \approx 0.7\%$ .

为了抑制高阶横模的振荡, 需要基模的损耗远低于高阶模, 故反射镜的口径在  $a = 0.33 \text{ mm}$  左右, 是一个较为合理的方案. □

**习题 7.4:** 证明稳区图 7.4 为什么是下列条件的图解表示.

$$0 \leq \left(1 - \frac{l}{R_1}\right) \left(1 - \frac{l}{R_2}\right) \leq 1$$

指出图 7.1 的 8 种谐振腔在稳区图上的位置. □

解: 由上述稳定条件式, 当  $\frac{l}{R_1} \geq 1, \frac{l}{R_2} \geq 1$  时,

$$\left(\frac{l}{R_1} - 1\right) \left(\frac{l}{R_2} - 1\right) \leq 1, \quad (7.14)$$

构成稳定区的右上部分, 当  $\frac{l}{R_1} \leq 1, \frac{l}{R_2} \leq 1$  时,

$$\left(\frac{l}{R_1} - 1\right) \left(\frac{l}{R_2} - 1\right) \leq 1, \quad (7.15)$$

构成稳定区的左下部分, 故图 7.4 是该稳定条件的图解表示.

图 7.1 中

- 平面平行腔对应稳区图中的点  $(0, 0)$ ,
- 第一行第二个腔对应  $0 \leq \frac{l}{R_1} \leq 1, 0 \leq \frac{l}{R_2} \leq 1$  的正方形区域,
- 第二行第一个腔对应  $\frac{l}{R_2} \geq \frac{l}{R_1} \geq 1, \left(\frac{l}{R_1} - 1\right) \left(\frac{l}{R_2} - 1\right) \leq 1$  的区域,
- 第二行第二个腔对应  $\frac{l}{R_1} \leq 0, 0 \leq \frac{l}{R_2} \leq 1, \left(\frac{l}{R_1} - 1\right) \left(\frac{l}{R_2} - 1\right) \leq 1$  的区域,
- 共焦腔对应点  $(1, 1)$ ,
- 共心腔对应点  $(2, 2)$ ,
- 第四行第一个高损耗腔对应右上的非稳区,
- 第四行第二个高损耗腔对应右上的非稳区.

□

**习题 7.5:** 按照图 7.4 (或者式 (7.2-2)), 在  $|R_2| = R_1, R_2 < 0$  时, 也就是交替排列的同样会聚和发散的两个透镜, 可以得到稳定模式. 从物理上解释为什么这会导致净聚焦.

提示: 考虑光线通过两种透镜时离开轴线时的距离.

□

解: 当  $R_1 \geq l$  时,

$$0 \leq \left(1 - \frac{l}{R_1}\right) \left(1 - \frac{l}{R_2}\right) = 1 - \left(\frac{l}{R_1}\right)^2 \leq 1, \quad (7.16)$$

此时可以得到稳定模式.

该交替排列的同样会聚和发散的二元周期透镜系统的光线矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{2l}{R_1} & l \left(2 - \frac{2l}{R_1}\right) \\ -\left[\frac{2}{-R_1} + \frac{2}{R_1} \left(1 - \frac{2l}{-R_1}\right)\right] & -\left[\frac{2l}{-R_1} - \left(1 - \frac{2l}{-R_1}\right) \left(1 - \frac{2l}{R_1}\right)\right] \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

高  $h$  的平行光轴的光线, 在透镜 1 处入射, 在透镜 2 处出射的光线为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} r \\ r' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{2l}{R_1} & l \left(2 - \frac{2l}{R_1}\right) \\ -\left[\frac{2}{-R_1} + \frac{2}{R_1} \left(1 - \frac{2l}{-R_1}\right)\right] & -\left[\frac{2l}{-R_1} - \left(1 - \frac{2l}{-R_1}\right) \left(1 - \frac{2l}{R_1}\right)\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h \left(1 - \frac{2l}{R_1}\right) \\ -\frac{4l}{R_1^2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

故光线最终将在距透镜 2

$$-\frac{h\left(1 - \frac{2l}{R_1}\right)}{-\frac{4l}{R_1^2}} = -\frac{h(R_1 - 2l)}{4l} \quad (7.19)$$

处于光轴相交, 故这有可能导致净聚焦.  $\square$

**习题 7.6:** 设对称谐振腔的反射镜间距为  $l$ , 曲率半径为  $R$ , 利用  $ABCD$  定律推导模式的特性 (最小光斑尺寸  $\omega_0$  和镜面光斑尺寸  $\omega_{1,2}$ ).

提示: 证明在反射镜面处位相波阵面的曲率半径 (也是自洽光束解) 等于反射镜的曲率半径.  $\square$

**解:** 自洽场条件要求腔中的光场经过往返一周后能自再现. 设反射镜面处光束的复参量为  $q$ . 利用  $ABCD$  定律,

$$q = \frac{Aq + B}{Cq + D}. \quad (7.20)$$

对称谐振腔可等价为焦距为  $R/2$  和  $R/2$  的透镜相互间隔距离  $l$  交替排列而成的二元透镜系统, 故光线矩阵

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2l}{R} & 2l\left(1 - \frac{l}{R}\right) \\ \frac{4}{R}\left(\frac{l}{R} - 1\right) & -\frac{2l}{R} + \left(-\frac{2l}{R} + 1\right)^2 \end{bmatrix}. \quad (7.21)$$

反射镜面处光斑尺寸为

$$\omega_{1,2} = \left(\frac{\lambda}{\pi n}\right)^{1/2} \frac{|B|^{1/2}}{\left[1 - \left(\frac{D+A}{2}\right)^2\right]^{1/4}} = \left(\frac{\lambda}{\pi n}\right)^{1/2} \left(\frac{lR^2}{2R-l}\right)^{1/4}, \quad (7.22)$$

波阵面曲率半径

$$\frac{2B}{D-A} = -R, \quad (7.23)$$

即在反射镜面处位相波阵面的曲率半径 (即自洽光束解) 等于反射镜的曲率半径, 故对称谐振腔中的稳定高斯光束的束腰位于腔心, 从而

$$R = \frac{l}{2} \left[ 1 + \left( \frac{\pi \omega_0^2 n}{\lambda \frac{l}{2}} \right)^2 \right], \quad (7.24)$$

最小光斑尺寸

$$\omega_0 = \frac{\lambda l}{2\pi n} \sqrt{\frac{2R}{l} - 1}. \quad (7.25)$$

$\square$

**习题 7.7:** 若用两个反射镜 (也就是在  $z_1$  和  $z_2$  处分别方两个曲率半径等于  $R(z_1)$  和  $R(z_2)$  的反射镜) “代替” 高斯传播光束的任意两个位相波阵面, 证明由此构成的光学谐振腔是稳定腔.  $\square$

**证:** 设高斯光束的束腰半径为  $\omega_0$ , 则  $z_1$  和  $z_2$  处的波阵面曲率半径分别为

$$R(z_1) = z_1 \left( 1 + \frac{z_0^2}{z_1^2} \right), \quad (7.26)$$

$$R(z_2) = z_2 \left( 1 + \frac{z_0^2}{z_2^2} \right), \quad (7.27)$$

其中  $z_0 = \frac{\pi \omega_0^2 n}{\lambda}$ . 该两个反射镜构成的光学谐振腔满足稳定条件:

$$0 \leq \left( 1 - \frac{z_2 - z_1}{R(z_1)} \right) \left( 1 - \frac{z_2 - z_1}{R(z_2)} \right) = \frac{(z_0^2 - z_1 z_2)^2}{(z_0^2 + z_1^2)(z_0^2 + z_2^2)} \leq 1, \quad (7.28)$$

故由此构成的光学谐振腔为稳定腔.  $\square$

**习题 7.8:** 设光学谐振腔由间距为  $l$ 、曲率半径为  $R$  的两个相同的反射镜和放在中间的一薄透镜 (焦距为  $f$ ) 所构成, 推导模式的稳定条件.  $\square$

**解:** 自洽场条件要求腔中的光场经过往返一周后能再自现. 该光学谐振腔等效于由焦距为  $\frac{R}{2}$  和  $f$  的透镜相互间隔距离  $\frac{l}{2}$  交替排列而成的二元透镜系统. 与 7.2 节中的推导同理, 将式 (6.8-5) 中的  $f_1$  替换为  $f$ ,  $f_2$  替换为  $R/2$ ,  $l$  替换为  $\frac{l}{2}$ , 则得该光学谐振腔的稳定条件为

$$0 \leq \left(1 - \frac{l}{4f}\right) \left(1 - \frac{l}{2R}\right) \leq 1. \quad (7.29)$$

 $\square$ 

**习题 7.9:** 证明由自洽场光束参量  $q$  的表达式 (7.2-5) 可导出光束在镜面处的曲率半径, 它分别等于反射镜的曲率半径, 即  $R(z_2) = R_2$ ,  $R(z_1) = R_1$ .  $\square$

**证:** 式 (7.2-5)

$$\frac{1}{q} = \frac{D-A}{2B} \pm i \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{D+A}{2}\right)^2}}{B} \equiv \frac{1}{R(z_2)} - i \frac{\lambda}{\pi \omega_2^2 n}, \quad (7.30)$$

其中

$$A = 1 - \frac{2l}{R_1}, \quad (7.31)$$

$$B = l \left(2 - \frac{2l}{R_1}\right), \quad (7.32)$$

$$C = - \left[ \frac{2}{R_2} + \frac{2}{R_1} \left(1 - \frac{2l}{R_1}\right) \right], \quad (7.33)$$

$$D = - \left[ \frac{2l}{R_2} - \left(1 - \frac{2l}{R_1}\right) \left(1 - \frac{2l}{R_2}\right) \right]. \quad (7.34)$$

故

$$\frac{1}{q} = \frac{\frac{l^2}{R_2} \left(-1 + \frac{l}{R_1}\right) \pm i \sqrt{\left(1 - \frac{l}{R_1}\right) \left(1 - \frac{l}{R_2}\right) \left(-\frac{l^2}{R_1 R_2} + \frac{l}{R_1} + \frac{l}{R_2}\right)}}{l \left(1 - \frac{l}{R_1}\right)}, \quad (7.35)$$

$$\implies R(z_2) = R_2. \quad (7.36)$$

同理可证  $R(z_1) = R_1$ , 故自洽场光束在镜面处的曲率半径等于反射镜的曲率半径.  $\square$

**习题 7.10:** 证明光束往返一次后, 复光束参量 (它的稳态值由式 (7.2-5) 决定) 的微扰  $\Delta(1/q)$  变为  $\delta(1/q) = e^{\mp i 2\theta} \Delta(1/q)$ , 其中  $\cos \theta = \frac{1}{2}(A + D) \cdot \Delta(1/q)$  与稳定性无关,  $|\delta(1/q)| = |\Delta(1/q)|$  在稳定光束中满足式 (7.2-6).  $\square$

**证:** 由式 (7.2-5), 稳态下光束的复参量

$$\frac{1}{q} = \frac{D-A}{2B} \pm i \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{D+A}{2}\right)^2}}{B}. \quad (7.37)$$

利用 ABCD 定律, 参量受微扰  $\Delta(1/q)$  的光束往返一次后参量变为

$$\frac{1}{q} + \delta \left( \frac{1}{q} \right) = \frac{D \left[ \frac{1}{q} + \Delta \left( \frac{1}{q} \right) \right] + C}{B \left[ \frac{1}{q} + \Delta \left( \frac{1}{q} \right) \right] + A} = \frac{D \left[ \frac{1}{q} + \Delta \left( \frac{1}{q} \right) \right] + C}{B \frac{1}{q} + A} \left[ 1 - \frac{B \Delta \left( \frac{1}{q} \right)}{B \frac{1}{q} + A} \right]$$

$$= \frac{D\frac{1}{q} + C}{B\frac{1}{q} + A} + \frac{D\Delta\left(\frac{1}{q}\right)}{B\frac{1}{q} + A} - \frac{D\frac{1}{q} + C}{B\frac{1}{q} + A} \frac{B\Delta\left(\frac{1}{q}\right)}{B\frac{1}{q} + A} = \frac{1}{q} + \frac{D\Delta\left(\frac{1}{q}\right)}{B\frac{1}{q} + A} - \frac{1}{q} \frac{B\Delta\left(\frac{1}{q}\right)}{B\frac{1}{q} + A}, \quad (7.38)$$

从而参量的微扰变为

$$\delta\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{D - B\frac{1}{q}}{B\frac{1}{q} + A} \Delta\frac{1}{q} = \frac{\frac{D+A}{2} \mp i\sqrt{1 - \left(\frac{D+A}{2}\right)^2}}{\frac{D+A}{2} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{D+A}{2}\right)^2}} \Delta\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{\frac{D+A}{2} \mp i\sqrt{1 - \left(\frac{D+A}{2}\right)^2}}{\left(\frac{D+A}{2}\right)^2 + \left[1 - \left(\frac{D+A}{2}\right)^2\right]} = e^{\mp i2\theta} \Delta\left(\frac{1}{q}\right), \quad (7.39)$$

其中

$$\tan 2\theta = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{D+A}{2}\right)^2}}{\frac{D+A}{2}}, \quad (7.40)$$

即

$$\cos 2\theta = \frac{D + A}{2}. \quad (7.41)$$

当  $\left|\frac{D+A}{2}\right| \leq 1$ , 即满足式 (7.2-6) 时,  $2\theta$  为实数, 从而

$$\left|\delta\left(\frac{1}{q}\right)\right| = \left|\Delta\left(\frac{1}{q}\right)\right|. \quad (7.42)$$

□

## Chapter 8

# 辐射场与原子系统的相互作用

习题 8.1: 证明关系式 (8.5-10)

$$\frac{A}{B_{21}} = \frac{8\pi h \nu^3 n^3}{c^3}$$

与式 (8.3-4) 一致, 按照此式有

$$\frac{\text{每个模的 } W_{\text{感应}}}{\text{每个模的 } W_{\text{自发}}} = n,$$

式中,  $n =$  这个模式的量子数. □

证: 由式 (8.3-4), 系统由初态  $|2, n_l\rangle$  跃迁到终态  $|1, n_{l+1}\rangle$  的速率为

$$W'_{21} = \frac{2\pi e^2 \omega_l}{V\varepsilon} \left| \langle 1, n_l + 1 | y a_l^\dagger | 2, n_l \rangle \right|^2 \sin^2(k_l z) \delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega_l) = \frac{2\pi e^2 \omega_l y_{12}^2}{V\varepsilon} (n_l + 1) \sin^2(k_l z) \delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega_l), \quad (8.1)$$

其中  $y_{12}^2 = |\langle 1 | y | 2 \rangle|^2$ . 由该模式的真空涨落引发的自发跃迁速率为

$$W'_{21, \text{spontaneous}} = \frac{2\pi e^2 \omega_l}{V\varepsilon} \left| \langle 1, 1 | y a_l^\dagger | 2, 0 \rangle \right|^2 \sin^2(k_l z) \delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega_l) = \frac{2\pi e^2 \omega_l y_{12}^2}{V\varepsilon} n_l \sin^2(k_l z) \delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega_l). \quad (8.2)$$

由该模式引发的感应 (受激) 发射的跃迁速率为

$$W'_{21, \text{induced}} = W'_{21} - W'_{21, \text{spontaneous}} = \frac{2\pi e^2 \omega_l y_{12}^2}{V\varepsilon} n_l \sin^2(k_l z) \delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega_l). \quad (8.3)$$

因此

$$\frac{\text{每个模的 } W_{\text{感应}}}{\text{每个模的 } W_{\text{自发}}} = n, \quad (8.4)$$

其中  $n =$  这个模式的量子数.

频率为  $\omega_l$  的模式的真空涨落均可引发自发跃迁, 故自发发射系数为上述感应发射的跃迁速率与模式密度乘积的积分

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\infty W'_{21, \text{spontaneous}} \rho(\nu_l) d\nu_l = \int_0^\infty \frac{2\pi e^2 \omega_l y_{12}^2}{V\varepsilon} \sin^2(k_l z) \delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega_l) \frac{8\pi \nu_l^2 n^3 V}{c^3} d\nu_l \\ &= \frac{2\pi e^2 \omega_l y_{12}^2}{V\varepsilon} \sin^2(k_l z) \frac{8\pi \nu_l^2 n^3 V}{hc^3}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

其中  $g_2$  为频率为  $\omega_l$  的模式中仅有激光器谐振腔限定的某一确定的传播方向和偏振的模式可引发感应跃迁, 故受激发射系数为

$$B_{21} = \frac{V \int_0^\infty W'_{12, \text{induced}} d\nu_l}{\rho(\nu)} = \frac{\frac{2\pi e^2 \omega_l y_{12}^2}{V \varepsilon} n_l \sin^2(k_l z) \frac{V}{h}}{n_l h \nu_l}. \quad (8.6)$$

因此

$$\frac{A}{B_{21}} = \frac{8\pi h \nu^3 n^3}{c^3}, \quad (8.7)$$

与关系式 (8.5-10) 一致.

(由于自发发射和受激发射的原子初能级和末能级相同, 故此处忽略能级简并的问题.)  $\square$

**习题 8.2:** 确定频率为  $\nu_0 = 3 \times 10^{14}$  赫兹跃迁的峰值吸收系数  $d(\nu_0)$ , 其中  $N_2 \approx 0$ ,  $N_1 = 10^{18}$  厘米 $^{-3}$ , 高斯吸收曲线的全宽度为 400 厘米 $^{-1}$ ,  $t_{\text{自发}} = 10^{-4}$  秒. 定义光学密度为

$$\log_{10} \frac{I_\lambda}{I_{\text{出}}}$$

式中  $I$  表示强度. 对于 1 厘米程长的介质, 在频率  $\nu_0$  处的光学密度是什么? 在什么温度时, 黑体辐射的感应跃迁速率等于自发发射速率?  $\square$

**解:** 假设基态能级和激发态能级的简并度相等, 介质折射率  $n \approx 1$ , 峰值 (频率  $\nu_0$  处的) 吸收系数

$$d(\nu_0) = \frac{(N_1 - N_2)\lambda^2}{8\pi n^2 t_{\text{自发}}} g(\nu_0) = \frac{(N_1 - N_2) \left(\frac{c}{\nu}\right)^2}{8\pi n^2 t_{\text{自发}} \Delta\nu} = \frac{(N_1 - N_2) \left(\frac{c}{\nu}\right)^2}{8\pi n^2 t_{\text{自发}} c \Delta \left(\frac{1}{\lambda}\right)} = 33.2 \text{ m}^{-1}. \quad (8.8)$$

频率  $\nu_0$  处的光学密度为

$$\log_{10} \frac{I_\lambda}{I_{\text{出}}} = \log_{10} e^{d(\nu_0)l} = 0.144. \quad (8.9)$$

黑体辐射的感应跃迁速率为

$$(W_{21})_i = \frac{c^3 \rho(\nu)}{8\pi n^3 h \nu^3 t_{\text{自发}}} g(\nu_0) = \frac{c^3 \frac{8\pi n^3 h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} c \Delta \left(\frac{1}{\lambda}\right)}{8\pi n^3 h \nu^3 t_{\text{自发}} c \Delta \left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (8.10)$$

自发发射速率为

$$W_{\text{自发}} = \frac{1}{t_{\text{自发}}}. \quad (8.11)$$

要使黑体辐射的感应跃迁速率等于自发发射速率,

$$(W_{21})_i = W_{\text{自发}} \implies \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = 1, \quad (8.12)$$

故对应的温度为  $T = 11413 \text{ K}$ .  $\square$

**习题 8.3:** 若  $r$  是电子位置坐标, 电子振荡为  $r = r_0 \cos(2\pi\nu t)$ , 计算此电子振荡的经典寿命  $t_{\text{经典}} = \text{能量}/(\text{辐射功率})$ .  $\square$

**解:** 此电子振荡的能量为

$$E = \frac{1}{2} m_e \dot{r}_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} m_e (2\pi\nu r_0)^2. \quad (8.13)$$



平均辐射功率为

$$\bar{P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0^2 \omega^4}{3c^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(er_0)^2 (2\pi\nu)^4}{3c^2}. \quad (8.14)$$

此电子的经典寿命为

$$t_{\text{经典}} = \frac{E}{\bar{P}} = \frac{3\epsilon_0 m_e c^2}{2\pi e^2 \nu^2}. \quad (8.15)$$

□

**习题 8.4:** (a) 熟习跃迁的振子强度的概念.

(b) 在 8.2 节中所描述的跃迁的振子强度是什么?

(c) 证明在频率为  $\nu$  时, 跃迁  $1 \leftrightarrow 2$  的振子强度  $f_{21}$  等于  $t_{\text{经典}}/3t_{\text{自发}}$ .

□

**解:** (a) 振子强度是指单个原子或分子在吸收辐射过程中等效的单电子振子个数.

(b) 单电子谐振子在电场  $E(t)$  中的动力学方程为

$$m\ddot{x} = -eE(t) - \omega_0^2 x - 2\gamma x, \quad (8.16)$$

若电场  $E(t) = E_0 e^{i\omega t}$ , 则解得

$$x = -\frac{eE(t)}{m} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 - 2i\gamma\omega}. \quad (8.17)$$

同浓度的单电子振子组成的介质的极化率应为

$$\chi_0(\omega) = \frac{N(-e)x}{E(t)} = \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 - 2i\gamma\omega}. \quad (8.18)$$

课本中介质的极化率为

$$\chi(\omega) = \frac{\mu^2 T_2 \Delta N_0}{\epsilon_0 \hbar} \frac{(\omega_0 - \omega)T_2 - i}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2 + 4\Omega^2 T_2 \tau}. \quad (8.19)$$

故 8.2 节中描述的跃迁的振子强度即为两者之比

$$f_{21} = \frac{\chi(\omega)}{\chi_0(\omega)}. \quad (8.20)$$

(c) 自发寿命

$$t_{\text{自发}} = \frac{\epsilon \hbar c^3}{2n^3 \mu^2 \omega^3}. \quad (8.21)$$

故有

$$\frac{t_{\text{经典}}}{3t_{\text{自发}}} = \frac{8\pi^2 n^3 m_e \mu^2 \nu}{e^2 \hbar c}. \quad (8.22)$$

□

**习题 8.5:** 推导式 (8.1-15).

□

证: 稳态下, 式 (8.1-12) 和式 (8.1-13) 可化为

$$\frac{d\sigma_{21}}{dt} = i(\omega - \omega_0)\sigma_{21} + \frac{i\mu E_0}{2\hbar}(\rho_{11} - \rho_{22}) - \frac{\sigma_{21}}{T_2} = 0, \quad (8.23)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho_{11} - \rho_{22}) = \frac{i\mu E_0}{\hbar}(\sigma_{21} - \sigma_{21}^*) - \frac{(\rho_{11} - \rho_{22}) - (\rho_{11} - \rho_{22})_0}{\tau} = 0. \quad (8.24)$$

将式 (8.23) 与其复共轭相加和相减得

$$(\omega - \omega_0) \operatorname{Im} \sigma_{21} - \frac{\operatorname{Re} \sigma_{21}}{T_2} = 0, \quad (8.25)$$

$$i(\omega - \omega_0) \operatorname{Re} \sigma_{21} + \frac{i\mu E_0}{2\hbar}(\rho_{11} - \rho_{22}) - \frac{i \operatorname{Im} \sigma_{21}}{T_2} = 0, \quad (8.26)$$

进而解得

$$\operatorname{Im} \sigma_{21} = \frac{\frac{\mu E_0}{2\hbar} T_2 (\rho_{11} - \rho_{22})}{(\omega - \omega_0)^2 T_2^2 + 1}, \quad (8.27)$$

$$\operatorname{Re} \sigma_{21} = -\frac{\frac{\mu E_0}{2\hbar} (\omega - \omega_0) T_2^2 (\rho_{11} - \rho_{22})}{(\omega - \omega_0)^2 T_2^2 + 1}. \quad (8.28)$$

将式 (8.27) 代入式 (8.24) 中得

$$\rho_{11} - \rho_{22} = (\rho_{11} - \rho_{22})_0 \frac{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2 + 4\Omega^2 T_2^2 \tau}, \quad (8.29)$$

其中  $\Omega = \frac{\mu E_0}{2\hbar}$ . 再将上式回代入式 (8.27) 和 (8.28) 中得

$$\operatorname{Im} \sigma_{21} = \frac{\Omega T_2 (\rho_{11} - \rho_{22})_0}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2 + 4\Omega^2 T_2^2 \tau}, \quad (8.30)$$

$$\operatorname{Re} \sigma_{21} = \frac{(\omega - \omega_0) T_2^2 \Omega (\rho_{11} - \rho_{22})_0}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2 + 4\Omega^2 T_2^2 \tau}. \quad (8.31)$$

□

习题 8.6: 证明在饱和可忽略的极限情况下 ( $\Omega = 0$ ), 式 (8.1-19) 中的  $\chi'(\omega)$  和  $\chi''(\omega)$  遵守 K-K 关系. □

证: 在饱和可忽略的极限情况下 ( $\Omega = 0$ ), 式 (8.1-19) 可化为

$$\chi''(\omega) = \frac{\mu^2 T_2 \Delta N_0}{\varepsilon_0 \hbar} \frac{1}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2}, \quad (8.32)$$

$$\chi'(\omega) = \frac{\mu^2 T_2 \Delta N_0}{\varepsilon_0 \hbar} \frac{(\omega - \omega_0) T_2}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2}. \quad (8.33)$$

此时有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' &= \frac{\mu^2 T_2 \Delta N_0}{\pi \varepsilon_0 \hbar} \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\Omega}^{+\Omega} \frac{1}{1 + (\omega' - \omega_0)^2 T_2^2} \frac{1}{\omega' - \omega} d\omega' \\ &= \frac{\mu^2 T_2 \Delta N_0}{\pi \varepsilon_0 \hbar} \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{-2(\omega - \omega_0) T_2 \{ \arctan[(\omega' - \omega_0) T_2] + \arctan[(\omega' + \omega_0) T_2] \} + 2 \ln \frac{-\omega + \omega'}{-\omega - \omega'} + \ln \frac{1 + (\omega' + \omega_0)^2 T_2^2}{1 + (\omega' - \omega_0)^2 T_2^2}}{2[1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2]} \Big|_{\omega' = -\Omega}^{+\Omega} \\ &= -\frac{\mu^2 T_2 \Delta N_0}{\varepsilon_0 \hbar} \frac{2(\omega - \omega_0) T_2^2}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2} = -2\chi'(\omega), \end{aligned} \quad (8.34)$$

及

$$-\frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = -\frac{\mu^2 T_2 \Delta N_0}{\pi \varepsilon_0 \hbar} \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{(\omega' - \omega_0) T_2^2}{1 + (\omega' - \omega_0)^2 T_2^2} \frac{1}{\omega' - \omega} d\omega'$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\mu^2 T_2 \Delta N_0}{\pi \varepsilon_0 \hbar} \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{2\{\arctan[(\omega' - \omega_0)T_2] + \arctan[(\omega' + \omega_0)T_2]\} - (\omega - \omega_0) \left[ \ln \frac{-\omega - \omega'}{-\omega + \omega'} + \ln \frac{1 + (\omega' - \omega_0)^2 T_2^2}{1 + (\omega' + \omega_0)^2 T_2^2} \right]}{2T_2[1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2]} \Bigg|_{\omega' = -\Omega}^{+\Omega} \\
&= -\frac{\mu^2 T_2 \Delta N_0}{\varepsilon_0 \hbar} \frac{2}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2} = -2\chi''(\omega). \tag{8.35}
\end{aligned}$$

故式 (8.1-19) 中的  $\chi'(\omega)$  和  $\chi''(\omega)$  遵守 K-K 关系. □



# Chapter 9

## 激光振荡

习题 9.1: 推导方程式 (9.3-22). □

证: 由式 (8.3-4),

$$\frac{\text{感应发射速率/模式}}{\text{自发辐射速率/模式}} = \frac{h\nu V_m W_i}{K} = n_m, \quad (9.1)$$

其中感应发射的跃迁速率

$$W_i = \frac{\lambda^2 I_\nu}{8\pi h\nu n^2 t_{\text{自发}}} g(\nu), \quad (9.2)$$

辐射强度

$$I_\nu = \frac{n_m h\nu}{V_m} \frac{c}{n}, \quad (9.3)$$

频谱增宽

$$\Delta\nu = \frac{1}{g(\nu_0)}. \quad (9.4)$$

故

$$K = \frac{h\nu V_m W_i}{n_m} = \frac{h\nu V_m}{n_m} \frac{\lambda^2 g(\nu_0)}{8\pi h\nu n^2 t_{\text{自发}}} I_\nu = \frac{h\nu \lambda^2 c}{8\pi n^3 t_{\text{自发}}} g(\nu_0) = \frac{h\nu c^3}{8\pi n^3 \nu^2 \Delta\nu t_{\text{自发}}}. \quad (9.5)$$

□

习题 9.2: 推导由于高斯光束模式的横向束缚, 对激光振荡器共振频率的影响. 在共焦腔的模式和  $z_0 \gg l$  的模式之间的共振频率有什么变化 ( $l$  为谐振腔长度)? □

证: 谐振腔的共振频率

$$\nu_m = \frac{mc}{2nl} + \frac{c}{2\pi nl} \left( \tan^{-1} \frac{z_2}{z_0} - \tan^{-1} \frac{z_1}{z_0} - \frac{\theta_{m1} + \theta_{m2}}{2} \right). \quad (9.6)$$

对共焦腔模式,  $R_1 = R_2 = l$ ,  $\tan^{-1}(z_2/z_0) = -\tan^{-1}(z_1/z_0) = \pi/4$ , 共振频率

$$\nu_m = \frac{mc}{2nl} + \frac{c}{2\pi nl} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\theta_{m1} + \theta_{m2}}{2} \right). \quad (9.7)$$

对  $z_0 \gg l$  的模式,  $\tan^{-1}(z_2/z_0) \approx \tan^{-1}(z_1/z_0) \approx 0$ , 共振频率

$$\nu_m = \frac{mc}{2nl} + \frac{c}{2\pi nl} \left( \frac{\theta_{m1} + \theta_{m2}}{2} \right). \quad (9.8)$$

两者的共振频率相差  $\frac{c}{4nl}$ . □

**习题 9.3:** 若法布里-珀罗谐振腔内放入极化率为  $\chi(\omega)$  的原子介质, 试证明模之间频率间隔等于

$$\omega_m - \omega_{m-1} = \frac{\pi c}{nl \left[ 1 + \frac{\omega}{2n^2} \frac{\partial \chi'(\omega)}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_m}}.$$

□

**证:** 该 F-B 腔的谐振条件为

$$k'_m l = \frac{n\omega_m}{c} \left[ 1 + \frac{\chi'(\omega_m)}{2n^2} \right] l = m\pi, \quad (9.9)$$

$$\Rightarrow \omega_m \left[ 1 + \frac{\chi'(\omega_m)}{2n^2} \right] = \frac{m\pi c}{nl}. \quad (9.10)$$

用  $m-1$  代换  $m$  得

$$\omega_{m-1} \left[ 1 + \frac{\chi'(\omega_{m-1})}{2n^2} \right] = \frac{(m-1)\pi c}{nl}. \quad (9.11)$$

以上两式相减得

$$\omega_m - \omega_{m-1} + \frac{\omega_m \chi'(\omega_m) - \omega_{m-1} \chi'(\omega_{m-1})}{2n^2} = (\omega_m - \omega_{m-1}) \left[ 1 + \frac{\chi'(\omega)}{2n^2} + \frac{\omega}{2n^2} \frac{\partial \chi'(\omega)}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_m} = \frac{\pi c}{nl}, \quad (9.12)$$

从而模式之间频率间隔为

$$\omega_m - \omega_{m-1} = \frac{\pi c}{nl \left[ 1 + \frac{\chi'(\omega)}{2n^2} + \frac{\omega}{2n^2} \frac{\partial \chi'(\omega)}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_m}}. \quad (9.13)$$

□

**习题 9.4:** 若一个光脉冲在原子介质中传播, 脉冲的中心频率等于原子的共振频率  $\omega_0$ , 考虑原子介质的色散对脉冲的群速的影响, 分两种情况讨论: (a) 放大介质, (b) 吸收介质. 若不考虑烧孔效应并假定脉冲频谱比  $\Delta\nu$  窄, 试将群速表示为洛伦兹谱线的峰值增益的函数. □

**解:** 当脉冲的中心频率等于原子的共振频率  $\omega_0$  时, 脉冲群速度

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{\partial \omega}{\partial k'} \bigg|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\partial k'}{\partial \nu} \right)^{-1}_{\nu=\nu_0} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{2\pi n \nu}{c} \left[ 1 + \frac{\chi'(\nu)}{2n^2} \right] \right\}^{-1}_{\nu=\nu_0} \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{n \nu}{c} \left[ 1 + \frac{\nu - \nu_0}{\Delta \nu} \frac{\chi''(\nu)}{2n^2} \right] \right\}^{-1}_{\nu=\nu_0} \\ &= \frac{c}{n \left[ 1 + \frac{\nu}{\Delta \nu_0} \frac{\chi''(\nu_0)}{2n^2} \right]}. \end{aligned} \quad (9.14)$$

洛伦兹谱线的峰值增益系数为

$$\gamma(\nu_0) = -k \frac{\chi''(\nu)}{n^2} = -\frac{2\pi n \nu_0}{c} \frac{\chi''(\nu_0)}{n^2}, \quad (9.15)$$

故脉冲群速度

$$v_g = \frac{c}{n \left[ 1 - \frac{\gamma(\nu_0)c}{2\pi n \Delta \nu} \right]}. \quad (9.16)$$

(a) 对放大介质,  $\gamma(\nu_0) > 0$ , 故  $v_g > \frac{c}{n}$ .

(b) 对吸收介质,  $\gamma(\nu_0) < 0$ , 故  $v_g < \frac{c}{n}$ .

□

习题 9.5: 证明式 (9.2-14) 等效于式 (9.1-10).

□

证: 式 (9.2-14):

$$(\omega_l^2 - \omega^2) + i \frac{\sigma \omega}{\varepsilon} = \frac{\omega^2 \varepsilon_0 f}{\varepsilon} (\chi' - i \chi''), \quad (9.17)$$

其中  $\omega = 2\pi\nu$  为激光频率,  $\omega_l = 2\pi\nu_m$  为空腔谐振频率 ( $\nu_m = \frac{mc}{2nl} + \frac{c}{2\pi nl} \left( \tan^{-1} \frac{z_2}{z_0} - \tan^{-1} \frac{z_1}{z_0} - \frac{\theta_{m1} + \theta_{m2}}{2} \right)$ ),  $\frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{n}{c} \frac{1}{t_c} = \alpha - \frac{1}{l} \ln(r_1 r_2) = \gamma_t$  ( $t_c$  为腔寿命,  $\alpha$  为介质非共振损耗常数,  $r_1, r_2$  分别为两面反射镜的反射率, 这里将反射镜处的损耗也包含在  $\frac{\sigma}{\varepsilon}$  中),  $\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} = \frac{1}{n^2}$ . 在完全填充谐振腔且均匀翻转的情况下,  $f = 1$ , 当  $\omega \approx \omega_l$  时,  $\omega_l^2 - \omega^2 \approx 2\omega(\omega_l - \omega)$ , 此时

$$\nu_m - \nu + i\gamma_t = \frac{\nu}{2n^2} (\chi' - i\chi''), \quad (9.18)$$

$$\Rightarrow \nu \left[ 1 + \frac{\chi'}{2n^2} \right] - i\nu \frac{\chi''}{2n^2} - i \frac{\gamma_t}{2} = \nu_m, \quad (9.19)$$

此即等效于 (9.1-10)

$$e^{-i2[k'l - \tan^{-1}(z_2/z_0) + \tan^{-1}(z_1/z_0)]} r_1 r_2 e^{-i(\theta_{m1} + \theta_{m2})} = e^{-i2m\pi}, \quad (9.20)$$

其中  $k' = k \left[ 1 + \frac{\chi'}{2n^2} \right] - ik \frac{\chi''}{2n^2} - i \frac{\alpha}{2}$ ,  $k = \frac{2\pi\nu}{c}$ .

□

习题 9.6: 推导式 (9.3-5).

□

证: 由式 (9.3-4), 平衡态下,

$$\frac{dN_2}{dt} = R_2 - \frac{N_2}{t_2} - \left( N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 \right) W_i(\nu) = 0, \quad (9.21)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = R_1 - \frac{N_1}{t_1} + \frac{N_2}{t_{21}} + \left( N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 \right) W_i(\nu) = 0. \quad (9.22)$$

上面两式相加得

$$R_2 - \frac{N_2}{t_2} + R_1 - \frac{N_1}{t_1} + \frac{N_2}{t_{21}} = 0, \quad (9.23)$$

$$\Rightarrow N_1 = \left( \frac{1}{t_{21}} - \frac{1}{t_2} \right) t_1 N_2 + (R_1 + R_2) t_1. \quad (9.24)$$

将上式代入式 (9.21) 中得

$$N_2 = \frac{R_2 t_2 + (R_1 + R_2) t_1 t_2 \frac{g_2}{g_1} W_i}{1 + \left[ t_2 + (1 - \delta) t_1 \frac{g_2}{g_1} \right] W_i(\nu)}. \quad (9.25)$$

利用上式和式 (9.24) 得

$$\Delta N \equiv N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 = \frac{R_2 t_2 - (R_1 + \delta R_2) t_1 \frac{g_2}{g_1}}{1 + \left[ t_1 + (1 - \delta) t_1 \frac{g_2}{g_1} \right] W_i(\nu)}. \quad (9.26)$$

□





# Chapter 11

## 激光器的 Q 开关和锁模

**习题 11.1:** (a) 在锁模实验装置示意图 11.11 中的 A, B, C, D 部分预期可以观察到什么, 试定性地描述. 读者首先要阅读第 8 章参考文献 [7] 关于光电倍增管一节就可以找到答案.

(b) 锁模对射频频谱分析仪  $F$  所显示的拍频信号 (在频率为  $\omega = \pi c/l$  处) 强度有什么影响? 假设  $N$  是间隔为  $\omega$  的等振幅模其位相在锁模前是随机的. (答: 锁模可使拍频信号功率增加  $N$  倍.)

□

**解:** (a) A 部分用可调光电倍增管直接探测锁模激光的信号, 可调光电倍增管对光信号具有显著的放大作用且响应速度很快, 故可得到时域上周期为  $\tau = \frac{T}{N}$  的脉冲序列, 其中  $T = \frac{2l}{c}$ ,  $N$  为锁模的模式数.

B 部分用光电倍增管探测锁模激光的信号, 并用射频频谱分析仪分析, 故可得一中心频率为  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi c}{l}$  的峰.

C 部分先用扫描干涉仪选频, 再用光电倍增管探测透射频率的光的信号, 扫描干涉仪的本质是一 Fabry-Pérot 干涉仪, 通过扫描其腔长以改变其透射频率, 故可得锁模激光中的光谱, 即频域上介质增益曲线峰值点附近一系列间隔为  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi c}{l}$  的峰.

D 部分用点接触二极管直接探测锁模激光的信号, 二极管对光信号的放大作用远不如光电倍增管, 故可得到时域上周期为  $T = \frac{2l}{c}$  的脉冲序列.

(b) 锁模前信号中存在  $\omega_0 + n\omega$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 的各个频率分量, 锁模使各频率分量产生了干涉, 从而在时域上出现了明显的周期为  $T = \frac{2l}{c}$  的拍频, 故锁模可使拍频信号功率增加  $N$  倍.

□

**习题 11.2:** 当介电常数  $\varepsilon$  (而不是损耗  $\sigma$ ) 在模之间的间隔频率  $c/2l$  处受到调制时试分析锁模的情况. 可论述非均匀加宽激光器的情况, 在某种意义上类似于 11.2 节的形式, 或者论述 11.3 节所考虑的均匀加宽激光器的情况. □

**解:** 谐振腔内电磁场满足麦克斯韦方程:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (11.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (11.2)$$

其中谐振腔内电磁场  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  和  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  可展开为简正模的线性叠加

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\sum_a \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} p_a(t) \mathbf{E}_a(\mathbf{r}), \quad (11.3)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sum_a \frac{1}{\sqrt{\mu}} \omega_a q_a(t) \mathbf{H}_a(\mathbf{r}), \quad (11.4)$$

其中  $\omega_a = \frac{k_a}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ , 再利用关系式

$$k_a \mathbf{E}_a = \nabla \times \mathbf{H}_a, \quad (11.5)$$

$$k_a \mathbf{H}_a = \nabla \times \mathbf{E}_a, \quad (11.6)$$

得

$$\sum_a \frac{1}{\sqrt{\mu}} \omega_a q_a k_a \mathbf{E}_a = - \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}, t)}} \sum_a p_a \mathbf{E}_a - \sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}, t)} \sum_a \dot{p}_a \mathbf{E}_a, \quad (11.7)$$

$$\dot{q}_b = p_b. \quad (11.8)$$

用  $\mathbf{E}_b$  点乘式 (11.7) 并在腔体体积范围内积分得

$$\omega_b^2 q_b = - \sum_a S_{b,a}(t) p_a - \dot{p}_b, \quad (11.9)$$

其中

$$S_{b,a}(t) = \sigma \int_{\text{腔}} \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r}, t)} \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_b \, dv. \quad (11.10)$$

引入简正模振幅

$$c_a(t) = (2\omega_a)^{-1/2} [\omega_a q_a(t) + i p_a(t)]. \quad (11.11)$$

利用式 (11.11) 及其在式 (11.8) 和 (11.9) 的复共轭

$$\frac{dc_a}{dt} = -i\omega_a c_a + \sum_b \kappa_{a,b}(t)(c_b^* - c_b), \quad (11.12)$$

$$\frac{dc_a^*}{dt} = i\omega_a c_a^* - \sum_b \kappa_{a,b}(t)(c_b^* - c_b), \quad (11.13)$$

其中

$$\kappa_{a,b}(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_b}{\omega_a}} S_{a,b}(t). \quad (11.14)$$

取介电常数为平均项和一谐波微扰项之和

$$\varepsilon(\mathbf{r}, 0) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(\mathbf{r}) \cos(\omega_m t + \phi), \quad (11.15)$$

则利用式 11.10 和式 (11.14) 知  $\kappa_{a,b}(t)$  具有如下形式:

$$\kappa_{a,b}(t) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \delta_{a,b} + \frac{\kappa_{a,b}}{2} [e^{i(\omega_m t + \phi)} + e^{-i(\omega_m t + \phi)}], \quad (11.16)$$

其中

$$\kappa_{a,b} = - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0^2} \sqrt{\frac{\omega_b}{\omega_a}} \int_{\text{腔}} \varepsilon_1(\mathbf{r}) \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_b \, dv. \quad (11.17)$$

将式 (11.16) 回代入运动方程 (11.12) 得

$$\frac{dc_a^*}{dt} = i\omega_a c_a^* + \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} (c_a^* - c_a) - \sum_b \frac{\kappa_{a,b}}{2} [e^{i(\omega_m t + \phi)} + e^{-i(\omega_m t + \phi)}] (c_b^* - c_b). \quad (11.18)$$

定义失调参数  $\Delta\omega_m$  为调试频率与模间距 (自由光谱范围) 的偏离值

$$\omega_{a+1} - \omega_a = \frac{\pi c}{l} = \omega_m - \Delta\omega_m, \quad (11.19)$$

定义绝热变量  $D_a^*(t)$  为

$$c_a^* = D_a^*(t) e^{i[(\omega_a + a\Delta\omega_m)t + a\phi + a\pi/2]} e^{-(\sigma/2\varepsilon)t}, \quad (11.20)$$

代入式 (11.18) 并略去相对于  $D_a^*(t)$  的快变项得

$$\frac{dD_a^*}{dt} + ia\Delta\omega D_a^* = -i\frac{\varkappa}{2}D_{a+1}^* + i\frac{\varkappa}{2}D_{a-1}^*, \quad (11.21)$$

其中  $\varkappa = \varkappa_{a,a+1} \approx \varkappa_{a,a-1}$ . 稳态下 ( $\frac{dD_a^*}{dt} = 0$ ), 解得绝热变量为

$$D_a^* = I_a \left( \frac{\varkappa}{\Delta\omega} \right), \quad (11.22)$$

其中  $I_a$  为  $a$  阶双曲 Bessel 函数, 从而稳态下

$$c_a^*(t) = I \left( \frac{\varkappa}{\Delta\omega} \right) e^{i[(\omega_a + a\Delta\omega_m)t + a\phi + a\pi/2]} e^{-\sigma t/2\varepsilon_0}, \quad (11.23)$$

其中  $\omega_a + a\Delta\omega_m = \omega_0 + a\frac{\pi c}{l} + a\Delta\omega_m = \omega_0 + a\omega_m$ , 当  $\frac{\varkappa}{\Delta\omega_m} \gg 1$ ,  $I_a \left( \frac{\varkappa}{\Delta\omega_m} \right)$ , 从而

$$c_a^*(t) = \left( 2\pi \frac{\varkappa}{\Delta\omega} \right)^{-1/2} e^{i[(\omega_0 + a\omega_m)t + a\phi + a\pi/2]}, \quad (11.24)$$

其中考虑到增益与损耗平衡, 故衰减因子  $\exp(-\sigma t/2\varepsilon_0)$ . 由上式可见, 各相邻振荡模式之间存在稳定的相位差  $\phi + \pi/2$ , 从而可实现与调制  $\sigma$  类似的锁模效果.  $\square$



## Chapter 14

# 光辐射的调制

**习题 14.1:** 推导九个椭圆的方程式, 这些椭圆是由如图 14.3c 所示的光场矢量 (作为位相延迟  $\Gamma$  的函数) 描绘出来的.  $\square$

**证:**  $x'$  和  $y'$  方向的光场矢量分别为

$$E_{x'} = A \cos \left[ \omega t - \left( \frac{\omega}{c} \right) \left( n_o - \frac{n_o^3}{2} r_{63} E_z \right) z \right], \quad (14.1)$$

$$E_{y'} = A \cos \left[ \omega t - \left( \frac{\omega}{c} \right) \left( n_o + \frac{n_o^3}{2} r_{63} E_z \right) z \right]. \quad (14.2)$$

这两个矢量的相位差为

$$\Gamma = \frac{\omega n_o^3 r_{63}}{c} E_z z. \quad (14.3)$$

将这两个矢量分别重写为

$$E_{x'} = A \cos(\omega t - kz + \Gamma/2) = A[\cos(\omega t - kz) \cos(\Gamma/2) - \sin(\omega t - kz) \sin(\Gamma/2)], \quad (14.4)$$

$$E_{y'} = A \sin(\omega t - kz - \Gamma/2) = A[\cos(\omega t - kz) \cos(\Gamma/2) + \sin(\omega t - kz) \sin(\Gamma/2)], \quad (14.5)$$

其中  $k = \frac{n_o \omega}{c}$ , 从而

$$\sin(\omega t - kz) = \frac{E_{y'} - E_{x'}}{2A \sin(\Gamma/2)}, \quad (14.6)$$

$$\cos(\omega t - kz) = \frac{E_{y'} + E_{x'}}{2A \cos(\Gamma/2)}. \quad (14.7)$$

利用

$$\sin^2(\omega t - kz) + \cos^2(\omega t - kz) = 1 \quad (14.8)$$

得

$$E_{x'}^2 + E_{y'}^2 - 2E_{x'}E_{y'} \cos \Gamma = A^2 \sin^2 \Gamma. \quad (14.9)$$

$\square$

**习题 14.2:** 讨论式 (14.5-1) 中与场无关的延迟  $(\omega l/c)(n_o - n_e)$  对振幅调制器 (如图 14.4 所示) 的影响.  $\square$

**解:** 横向调制时  $z$  方向和  $x'$  方向的相位延迟为式 (14.5-1):

$$\Gamma = \phi_z - \phi'_x = \frac{\omega l}{c} \left[ (n_o - n_e) - \frac{n_o^3}{2} r_{63} \left( \frac{V}{d} \right) \right]. \quad (14.10)$$

设入射光的  $x'$  方向和  $z$  方向的电场矢量分别为

$$E'_x(0) = A, \quad (14.11)$$

$$E_z(0) = A, \quad (14.12)$$

则入射光强度

$$I_i \propto |E'_x(0)|^2 + |E_z(0)|^2 = 2A^2, \quad (14.13)$$

从电光晶体出射的光的  $x'$  方向和  $z$  方向电场矢量可分别写为

$$E'_x(l) = A, \quad (14.14)$$

$$E_z(l) = Ae^{-i\Gamma}, \quad (14.15)$$

从检偏振器出射的光的电场矢量为

$$E_o = \frac{1}{\sqrt{2}} [E'_x(l) - E_z(l)] = \frac{A}{\sqrt{2}} (e^{-i\Gamma} - 1) \quad (14.16)$$

从检偏振器出射的光强

$$I_o \propto |E_o|^2 = \frac{A^2}{2} (e^{-i\Gamma} - 1)(e^{i\Gamma} - 1) = 2A^2 \sin^2 \frac{\Gamma}{2}. \quad (14.17)$$

出射光和入射光强度之比为

$$\frac{I_o}{I_i} = \sin^2 \frac{\Gamma}{2}. \quad (14.18)$$

由于式 (14.5-1) 中与场无关的延迟  $(\omega l/c)(n_o - n_e)$  依赖温度, 故振幅调制器的透射率可能随环境温度发生漂移.  $\square$

**习题 14.3:** 用  $\sin(a \sin x)$  的贝塞尔函数展开式并根据调制频率  $\omega_m$  的谐振函数来表示式 (14.3-7). 划出出射强度的三次谐波 ( $3\omega_m$ ) 与基波的比值随  $\Gamma_m$  的变化曲线. 若比值不超过  $10^{-2}$ , 问最大允许的  $\Gamma_m$  是多少?

答案:  $\Gamma_m < 0.5$ .  $\square$

**解:** 由式 (14.3-7), 交变电压调制下出射光强与入射光强之比为

$$\frac{I_o}{I_i} = \frac{1}{2} [1 + \sin(\Gamma_m \sin \omega_m t)]. \quad (14.19)$$

利用

$$\sin(z \sin \phi) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(z) \sin[(2n+1)\phi], \quad (14.20)$$

可将上式展开为

$$\frac{I_o}{I_i} = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(\Gamma_m) \sin[(2n+1)\omega_m t]. \quad (14.21)$$

其中三次谐波 ( $3\omega_m$ ) 与基波的比值随  $\Gamma_m$  的变化曲线如图 14.1 所示.

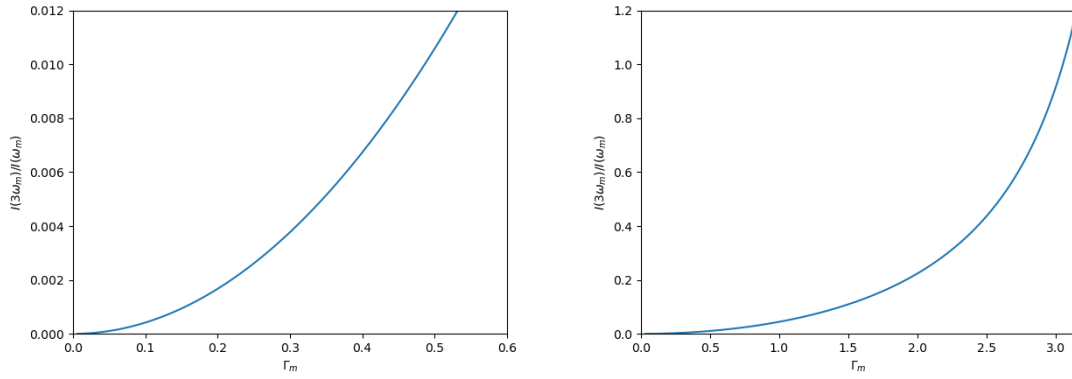


图 14.1: 出射强度的三次谐波 ( $3\omega_m$ ) 与基波的比值随  $\Gamma_m$  的变化曲线.

由上图知, 若要求该比值不超过  $10^{-2}$ , 则最大允许的  $\Gamma_m$  为 0.5. □

**习题 14.4:** 试证明, 如一位相调制光波入射在一平方律探测器上, 则输出中只有直流成分. □

**证:** 相位调制光波的电场矢量可表为如下形式:

$$E(t) = Ae^{i\phi(t)}, \quad (14.22)$$

故平方率探测器的输出仅有直流成分:

$$I \propto |E(t)|^2 = A^2. \quad (14.23)$$

□

**习题 14.5:** 利用参考文献 [8] 和 [9], 设计一个在频率  $\nu_m = 10^9$  赫时运转的部分负载 KDP 位相调制器并得到  $\delta = \pi/3$  峰值位相偏移. 问调制功率是多少? □

**解:** 如图 14.2 所示, 类似文献<sup>1</sup>中提出的行波调制结构, 光沿 KDP 晶体的  $z$  轴传播, 偏振平行晶体的  $x$  轴, 在晶体的  $z$  方向上下安装两片平行于  $xy$  平面的行波电极, 光波长为  $1\mu\text{m}$ , 晶体宽  $a = 1\text{ mm}$ , 长度  $l = 50\text{ cm}$ , 为了实现外加电场和光场的相位匹配, 电极宽度

$$w = \frac{a(\epsilon_1 - 1)}{n_o^2 - 1} = \frac{1\text{ mm} \times (20.2 - 1)}{1.5^2 - 1} = 15.6\text{ mm}. \quad (14.24)$$

为实现电极传输线阻抗与电源阻抗 (通常为  $50\ \Omega$ ) 的匹配, 晶体高度

$$\begin{aligned} b &= Z_0 \left[ \frac{w\epsilon_0(w - a + \epsilon_1 a)}{\mu_0} \right]^{1/2} \\ &= 50\ \Omega \left[ \frac{15.6 \times 10^{-3}\text{ m} \times 8.85 \times 10^{-12}\text{ F/m} \times (15.6 \times 10^{-3}\text{ m} - 1 \times 10^{-3}\text{ m} + 20.2 \times 1 \times 10^{-3}\text{ m})}{4\pi \times 10^{-7}\text{ F/m}} \right]^{1/2} \\ &= 3.10\text{ mm}. \end{aligned} \quad (14.25)$$

由课本表 14.3, 调制器的相位延迟与调制电压之间的关系为

$$\Gamma_m = \frac{\pi l}{\lambda b} n_o^3 r_{41} V_m, \quad (14.26)$$

<sup>1</sup>Peters, C. J. "Gigacycle bandwidth coherent light traveling-wave phase modulator." *Proceedings of the IEEE* 51.1 (1963): 147-153.

在相位匹配的条件下, 在频率  $\nu_m = 10^9$  Hz 下得到  $\Gamma_m = \delta = \pi/3$  的峰值相位偏移, 调制电压为

$$V_m = \frac{\Gamma_m \lambda b}{\pi l n_o^3 r_{41}} = \frac{\frac{\pi}{3} \times 1 \times 10^{-6} \text{ m} \times 3.10 \times 10^{-3} \text{ m}}{\pi \times 0.5 \text{ m} \times 1.5^3 \times 8.47 \times 10^{-12} \text{ m/V}} = 72.3 \text{ V}. \quad (14.27)$$

调制功率为

$$P_m = \frac{V_m^2}{2Z_0^2} = \frac{(72.3 \text{ V})^2}{2 \times 50 \Omega} = 52.3 \text{ W}. \quad (14.28)$$

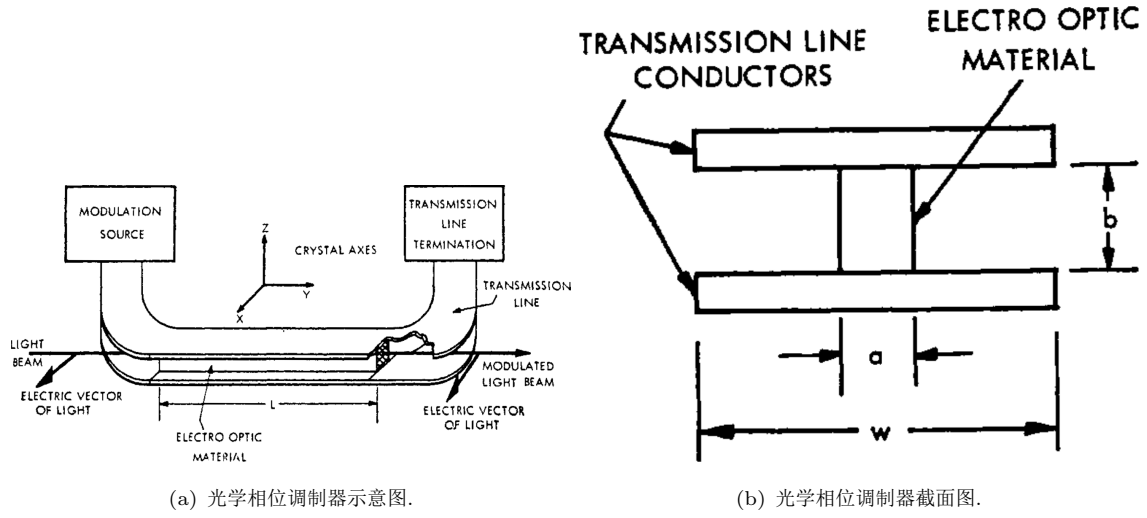


图 14.2:

**习题 14.6:** 推导型号如 14.5 节举例中所描述的横向  $\bar{4}3m$  晶体光电调制器的调制功率的表达式 (类似式 (14.6-2)).

**证:** 由课本式 (14.5-9), 横向  $\bar{4}3m$  晶体相位调制器的相位延迟与调制电压之间的关系为

$$\Gamma_m = \frac{\sqrt{3}\pi n_o^3 r_{41}}{\lambda} \frac{V_m l}{d}, \quad (14.29)$$

$$\Rightarrow V_m = \frac{\Gamma_m \lambda d}{\sqrt{3}\pi n_o^3 r_{41} l}. \quad (14.30)$$

由课本式 (14.6-1), 极大调制带宽为

$$\Delta\nu = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \approx \frac{1}{2\pi R_L C}, \quad (14.31)$$

$$\Rightarrow R_L = \frac{1}{2\pi C \Delta\nu}, \quad (14.32)$$

其中调制器电极的电容可用平行板电容的决定式得到:

$$C = \frac{\varepsilon l w}{d}, \quad (14.33)$$

$l$ ,  $w$  和  $d$  分别为晶体的长、宽和高. 调制器的调制功率为

$$P = \frac{V_m^2}{2R_L} = \frac{\Gamma_m^2 \lambda^2 d^2}{6\pi^2 n_o^2 r_{41}^2 l^2 R_L} = \frac{\Gamma_m^2 \lambda^2 A \varepsilon \Delta\nu}{3\pi n_o^6 r_{41}^2 l}, \quad (14.34)$$

其中晶体截面积  $A = wd$ .



**习题 14.7:** (a) 试证明, 在如图 14.4 装置中光线与  $z$  轴成  $\theta (\ll 1)$  的角度传播, 它使双折射对位相延迟的影响为

$$\Delta\Gamma_{\text{双折射}} = \frac{\omega l}{2c} n_o \left( \frac{n_o^2}{n_e^2} - 1 \right) \theta^2.$$

相应的折射率变化为

$$n_o - n_e(\theta) = \frac{n_o \theta^2}{2} \left( \frac{n_o^2}{n_e^2} - 1 \right).$$

(b) 导出最大允许束散角的近似表达式, 在此束散角下  $\Delta\Gamma_{\text{双折射}}$  并不妨碍调制器的运转.

答案:

$$\theta < \left[ \frac{\lambda}{4n_o l \left( \frac{n_o^2}{n_e^2} - 1 \right)} \right]^{1/2}.$$

□

**解:** (a) 当光线与  $z$  轴成  $\theta (\ll 1)$  的角度传播时, o 光的折射率仍为  $n_o$ , e 光的折射率为

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2}, \quad (14.35)$$

$$\Rightarrow n_e(\theta) = \left( \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} \right)^{-1/2} = \left( \frac{1}{n_o^2} + \frac{n_o^2 - n_e^2}{n_o^2 n_e^2} \sin^2 \theta \right)^{-1/2} = n_o \left( 1 + \frac{n_o^2 - n_e^2}{n_e^2} \sin^2 \theta \right)^{-1/2} \quad (14.36)$$

$$\approx n_o \left( 1 + \frac{n_o^2 - n_e^2}{2n_e^2} \sin^2 \theta \right) \approx n_o \left( 1 + \frac{n_o^2 - n_e^2}{n_e^2} \theta^2 \right). \quad (14.37)$$

o 光与 e 光的折射率差为

$$n_o - n_e(\theta) = \frac{n_o \theta^2}{2} \left( \frac{n_o^2}{n_e^2} - 1 \right). \quad (14.38)$$

该折射率差产生的双折射相对相位延迟为

$$\Delta\Gamma_{\text{双折射}} = kl[n_o - n_e(\theta)] = \frac{\omega l}{2c} n_o \left( \frac{n_o^2}{n_e^2} - 1 \right) \theta^2. \quad (14.39)$$

(b) 要使  $\Delta\Gamma$  不妨碍调制器的运转, 即

$$\Delta\Gamma_{\text{双折射}} = \frac{\omega l}{2c} n_o \left( \frac{n_o^2}{n_e^2} - 1 \right) \theta^2 < \frac{\pi}{4}, \quad (14.40)$$

则最大允许散射角

$$\theta < \left[ \frac{\lambda}{4n_o l \left( \frac{n_o^2}{n_e^2} - 1 \right)} \right]^{1/2}. \quad (14.41)$$

□

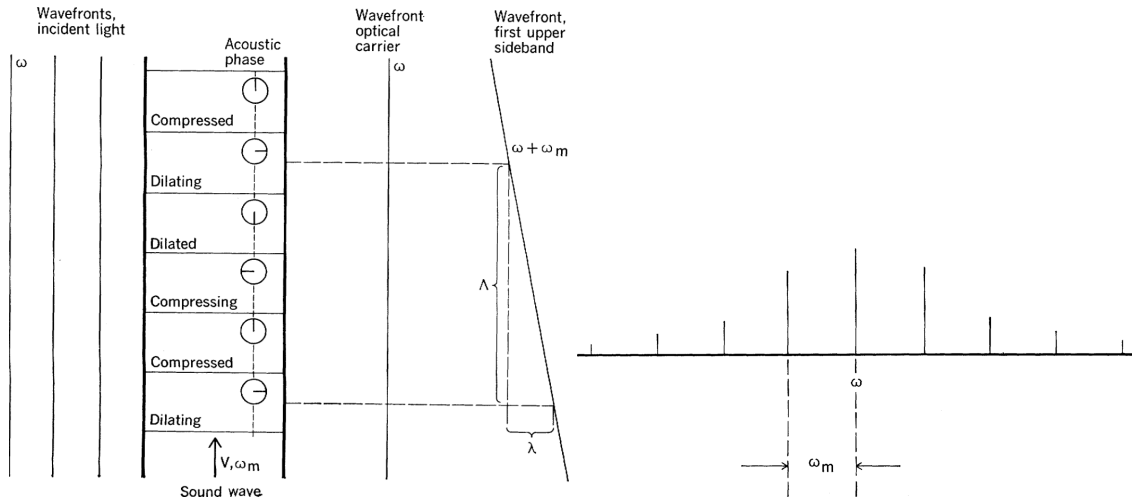
**习题 14.8:** 查阅文献 (例如可阅读文献 [17] 和 [18]) 并阐述布拉格衍射和德拜-西尔斯 (Debye-Sears) 衍射之间的差别. 在什么条件下可观察到每种衍射? □

**解:** 德拜-西尔斯衍射: 如图 14.3(a)(b) 所示, 入射光 (频率为  $\omega$ , 波长为  $\lambda$ , 波矢为  $\beta$ ) 传播方向与声波 (频率为  $\omega_m$ , 波长为  $\Lambda$ , 波矢为  $\mathbf{k}_s$ ) 传播方向垂直, 产生频率分别为  $\omega \pm \omega_m, \omega \pm 2\omega_m, \omega \pm 3\omega_m, \dots$  等一系列边带的衍射光, 分别与原入射方向成夹角  $\pm \arcsin \frac{\lambda}{\Lambda}, \pm \arcsin \frac{2\lambda}{\Lambda}, \pm \arcsin \frac{3\lambda}{\Lambda}, \dots$  出射. 如图 14.3(c) 所示, 各级次的衍射光的振幅与声波调制引起的相位变化幅度  $\Delta\phi = 2\pi \frac{l}{\lambda} \Delta n$  有关.

布拉格衍射的条件: 除了要求出射光频率  $\omega' = \omega \pm \omega_m, \omega \pm 2\omega_m, \omega$ , 波矢  $\beta' = \beta \pm k_s, \beta \pm 2k_s, \beta \pm 3k_s, \dots$ , 还需材料厚度  $l$  满足  $2\pi\lambda l \ll \Lambda^2$ .

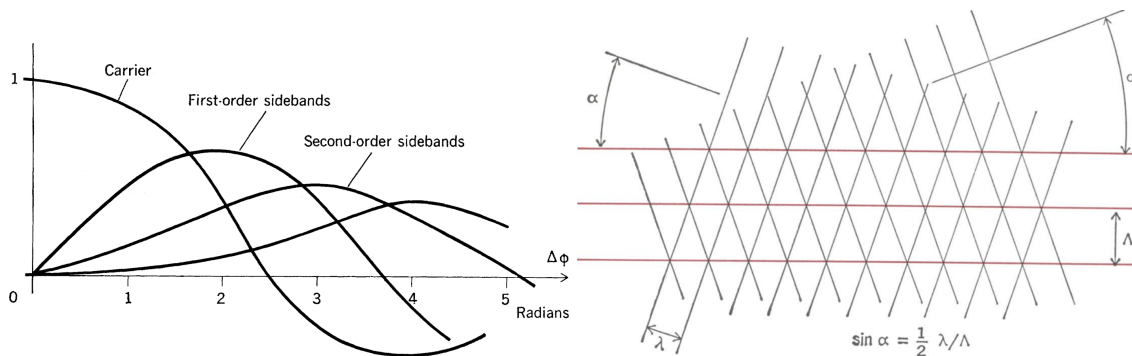
布拉格衍射: 如图 14.3(d) 所示, 入射光传播方向与声波波前平面成夹角  $\frac{\lambda}{2\Lambda}$ , 产生频率为  $\omega + \omega_m$ , 传播方向与声波波前成夹角  $-\frac{\lambda}{2\Lambda}$  的衍射光. 布拉格衍射对衍射级次的选择性很强, 其余边带由于相干相消的效应被抑制, 因而只有一个频率分量的衍射光出射.

布拉格衍射的条件为: 出射光频率  $\omega' = \omega \pm \omega_m$ , 波矢  $\beta' = \beta \pm k_s$  ( $\pm$  取决于声波的方向), 对材料厚度无要求.



(a) 德拜-西尔斯衍射, 入射光正入射介质, 声波传播方向与入射光传播方向垂直, 声波在介质中形成周期性压缩和拉伸的密度分布, 载波频率 (入射光频率) 的出射光沿原有传播方向出射, 一阶上边带 (频率为载波频率与一倍声波频率的和) 的衍射光与原有传播方向成夹角  $\frac{\lambda}{\Lambda}$  出射, 其余频率和出射方向的衍射光未画出.

(b) 德拜-西尔斯衍射载频和边带频谱.



(c) 德拜-西尔斯衍射载频及各边带出射光归一化振幅与声致相位差幅值的关系, 这些曲线即为各阶 Bessel 函数.

(d) 布拉格衍射.

图 14.3:

习题 14.9: 晶体中 X 射线衍射的布拉格定律为

$$2d \sin \theta = m \frac{\lambda}{n}, \quad m = 1, 2, 3$$

式中  $n$  为折射率,  $d$  为等价原子平面间的距离,  $\theta$  为入射角, 而  $\lambda$  为衍射辐射在真空中的波长. 当  $2\lambda_s \sin \theta = \frac{\lambda}{n}$  时光与声波作用而产生布拉格衍射 (参见图 14.15). 与 X 射线衍射结果相比较并取  $\lambda_s = d$ , 则只有  $m = 1$  的情况是允许

<sup>2</sup>参考文献: Adler, Robert. "Interaction between light and sound." *IEEE spectrum* 4.5 (1967): 42-54.

的. 解释其差别. 对于受声波散射的情况, 为什么不能得到对应于  $m = 2, 3, \dots$  的衍射角  $\theta$  呢?

提示: X 射线衍射发生在分立的原子平面上, 它可被理想化为无限薄的薄片, 而声波的扰动则是正弦曲线的.  $\square$

**解:** 当 X 射线受声波散射时, 由于声波

$$S_{kl}(\mathbf{r}, t) = \frac{S_{kl}}{2} e^{i(\omega_s t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} + \text{c.c.} \quad (14.42)$$

仅有一个频率为  $\pm\omega_s$  的分量, 故其引起的电极化强度扰动

$$\Delta P_i(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4} \varepsilon_0 \varepsilon'_i \varepsilon'_d p_{idkl} E_d(r_d) [e^{i(\omega_d t - \mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r})} + \text{c.c.}] \times S_{kl} [e^{i(\omega_s t - \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r})} + \text{c.c.}], \quad (14.43)$$

仅有频率为  $\pm(\omega_d + \omega_s)$  和  $\pm(\omega_d - \omega_s)$  的分量, 故仅在

$$\omega_i = \omega_d \pm \omega_s, \quad (14.44)$$

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_d \pm \mathbf{k}_s \quad (14.45)$$

下能满足能量守恒和动量守恒.

而当 X 受晶格散射时, 由于周期性排布的原子平面引起的扰动包含等频率间隔的多个分量:

$$A_{kl}(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{kl}(m\omega_a) e^{im(\omega_a - \mathbf{k}_a t)} + \text{c.c.} \quad (14.46)$$

故其引起的电极化强度扰动

$$\Delta P_i \propto E_d(\mathbf{r}, t) A_{kl}(\mathbf{r}, t) = E_d(r_d) [e^{i(\omega_d t - \mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r})} + \text{c.c.}] \times \left[ \sum_{m=0}^{\infty} A_{kl}(m\omega_a) e^{im(\omega_a - \mathbf{k}_a t)} + \text{c.c.} \right] \quad (14.47)$$

有频率为  $\pm(\omega_d \pm m\omega_a)$  的多个分量, 故在

$$\omega_i = \omega_d \pm m\omega_a, \quad (14.48)$$

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_d \pm m\mathbf{k}_a, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (14.49)$$

下均能满足能量守恒和动量守恒.  $\square$

**习题 14.10:** 对  $\Delta k = |\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_d| \neq 0$  和小输入信号  $E_i(0)$  的情况, 解耦合模方程 (14.9-8). 假设有共线相互作用, 则  $r_i = r_d = r_s = z$ . 试证明入射功率转化为衍射光束的最大比率为

$$\frac{\eta^2}{\eta^2 + \left(\frac{\Delta k}{2}\right)^2}.$$

可见, 可允许的失配量  $\Delta k$  同  $\eta$  有关. 你能对违反动量守恒作出直观的解释吗?  $\square$

**证:** 对  $\Delta k = |\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s| - \mathbf{k}_d| \neq 0$ 、小输入信号  $E_i(0)$  且共线情况下, 耦合模方程 (14.9-8) 可写为

$$\frac{dE_i}{dz} = i\eta E_d e^{i\Delta k z}, \quad (14.50)$$

$$\frac{dE_d}{dz} = i\eta E_i e^{-i\Delta k z}, \quad (14.51)$$

其中  $\eta \equiv \eta_{di} = \eta_{id} \cong \frac{\pi n^3}{2\pi} p_{idkl} S_{kl}$ . 对式 (14.50) 关于  $z$  求偏导并利用式 (14.51) 和 (14.51) 消去  $E_d$  得

$$\frac{d^2 E_i}{dz^2} - i\Delta k \frac{dE_i}{dz} + \eta^2 E_i = 0, \quad (14.52)$$

结合初始条件  $E_i(0)$  和  $\frac{dE_i}{dz}(0) = i\eta E_d(0)$  解得

$$E_i(z) = \left[ E_i(0) \cos\left(\frac{\sqrt{\Delta k^2 + 4\eta^2}}{2} z\right) + i \frac{-\Delta k E_i(0) + 2\eta E_d(0)}{\sqrt{\Delta k^2 + 4\eta^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{\Delta k^2 + 4\eta^2}}{2} z\right) \right] e^{i\Delta k z/2}. \quad (14.53)$$

在小输入信号情况下,  $E_i(0) \ll E_d(0)$ , 故入射功率转化为衍射光束的最大比率为

$$\frac{|E_i(z)|^2}{|E_d(0)|^2} = \frac{|E_i(0)|^2 + \left| \frac{-\Delta k E_i(0) + 2\eta E_d(0)}{\sqrt{\Delta k^2 + 4\eta^2}} \right|^2}{|E_d(0)|^2} \approx \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + \left(\frac{\Delta k^2}{2}\right)^2}}. \quad (14.54)$$

在非线性过程中, 动量不是必须守恒的, 满足动量守恒时功率转化效率最高, 不满足动量守恒时功率转化效率较低. □

**习题 14.11:** 从多普勒理论和式 (14.9-12) 推导出式 (14.9-11). □

**证:** 将声波视为以声速传播的周期性晶格. 以声波为参考系, 由相对论多普勒效应, 入射光的频率为

$$\omega'_i = \frac{\omega_i}{\left(1 - \frac{nv}{c} \sin \theta\right) \sqrt{1 - \frac{n^2 v^2}{c^2}}}, \quad (14.55)$$

在声波参考系中, 声波静止, 故散射光的频率等于入射光的频率

$$\omega'_s = \omega'_i. \quad (14.56)$$

在实验室参考系中, 散射光的频率为

$$\omega_s = \frac{\omega'_s}{\left(1 - \frac{nv}{c} \sin \theta\right) \sqrt{1 - \frac{n^2 v^2}{c^2}}} = \frac{\omega_i}{\left(1 - \frac{nv}{c} \sin \theta\right)^2 \left(1 - \frac{n^2 v^2}{c^2}\right)}, \quad (14.57)$$

由于声速  $v \ll$  光速  $c$ , 故有近似

$$\omega_d \approx \omega_i \left(1 + \frac{2nv}{c} \sin \theta\right). \quad (14.58)$$

式 (14.9-12) 描述了光波长和声波长之间的关系:

$$2\lambda_s \sin \theta = \frac{\lambda}{n}, \quad (14.59)$$

其中声波长  $\lambda_s = \frac{2\pi v}{\omega_s}$ , 光波长  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega_i}$ , 故由上式得

$$\sin \theta = \frac{\omega_s c}{2n\omega_i v}. \quad (14.60)$$

将上式代入式 (14.58) 中得

$$\omega_d = \omega_i + \omega_s. \quad (14.61)$$

□

## Chapter 15

# 辐射场与原子系统的相干相互作用

**习题 15.1:** 证明若原子初始处于低能态  $|b\rangle$ , 即  $\mathbf{r}_3(0) = -1$ , 则描述原子初始处于高能态  $|a\rangle$  的运动的  $\mathbf{r}(t)$  为负值.  $\square$

**证:** 对于初始处于低能态  $|b\rangle$  的原子, 初始态矢量为

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (15.1)$$

且态矢量运动方程为

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}, \quad (15.2)$$

从而解得  $\mathbf{r}$  绕  $\boldsymbol{\omega}$  逆时针转动 (逆着  $\boldsymbol{\omega}$  的方向看).

对于初始处于高能态  $|a\rangle$  的原子, 初始态矢量为

$$\mathbf{r}'(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\mathbf{r}(0), \quad (15.3)$$

同理解得  $\mathbf{r}'$  同样绕  $\boldsymbol{\omega}$  逆时针转动. 故从两种初始状态开始演化的态矢量始终相反,  $\mathbf{r}(t) = -\mathbf{r}'(t)$ .  $\square$

**习题 15.2:** 推导式 (15.1-29) 和 (15.1-30).  $\square$

**证:** 矢量  $\boldsymbol{\omega}$  与 III 轴的夹角  $\theta$  满足

$$\sin \theta = \frac{\frac{2\mu E}{\hbar}}{\omega_e}, \quad (15.4)$$

$$\cos \theta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_e}, \quad (15.5)$$

$$\tan \theta = \frac{\frac{2\mu E}{\hbar}}{\omega - \omega_0}, \quad (15.6)$$

其中

$$\omega_e = \sqrt{\left(\frac{2\mu E}{\hbar}\right)^2 + (\omega_0 - \omega)^2}. \quad (15.7)$$

由基本的三角关系得

$$r_I = -\cos\theta \sin\theta + \sin\theta \cos\theta \cos\omega_e t = -\frac{\frac{2\mu E}{\hbar}(\omega - \omega_0)}{\omega_e}(1 - \cos\omega_e t) = \frac{\omega_I(\omega - \omega_0)}{\omega_e^2}(1 - \cos\omega_e t), \quad (15.8)$$

$$r_{II} = \sin\theta \sin\omega_e t = \frac{\frac{2\mu E}{\hbar}}{\omega_e} \sin\omega_e t = -\frac{\omega_I}{\omega_e} \sin\omega_e t, \quad (15.9)$$

$$r_{III} = \cos^2\theta + \sin^2\theta \cos\omega_e t = 1 - \sin^2\theta(1 - \cos\omega_e t) = 1 - 2\left(\frac{\frac{2\mu E}{\hbar}}{\omega_e}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\omega_e t}{2}\right) = 1 - 2\left(\frac{\omega_I}{\omega_e}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\omega_e t}{2}\right), \quad (15.10)$$

此即课本式 (15.1-29), 其中  $\omega_I = -\frac{2\mu E}{\hbar}$ .

利用关系式  $r_{III} = |a|^2 - |b|^2$  和归一化条件  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  得

$$|a|^2 = \frac{1 + r_{III}}{2} = 1 - \left(\frac{\omega_I}{\omega_e}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\omega_e t}{2}\right), \quad (15.11)$$

$$|b|^2 = \frac{1 - r_{III}}{2} = \left(\frac{\omega_I}{\omega_e}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\omega_e t}{2}\right). \quad (15.12)$$

□

**习题 15.3:** 试求原子系综的感应偶极矩. 原子在场  $E_x = E_0 \cos(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) + E_1 \cos[(\omega_0 + \Delta)t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}]$  作用下, 其中  $E_1 \ll E_0$ , 原子有共振跃迁  $E_a - E_b = \hbar\omega_0$ , 并初始处于基态  $|b\rangle$ . 假设样品的尺寸比  $\lambda_0$  大, 证明原子沿  $2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1$  方向辐射频率为  $\omega_0 - \Delta$  的波. □

**解:** 原子系综的态矢量遵循运动方程

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (15.13)$$

其中

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{2\mu E_x(t)}{\hbar} = -\frac{2\mu}{\hbar} \{E_0 \cos(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) + E_1 \cos[(\omega_0 + \Delta)t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}]\} \\ &= -\frac{\mu}{\hbar} \{E_0 \cos(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) + E_0 \cos(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) + E_1 \cos[(\omega_0 + \Delta)t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}] + E_1 \cos[(\omega_0 + \Delta)t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}]\}, \end{aligned} \quad (15.14)$$

$$\begin{aligned} \omega_2 &= -\frac{2\mu E_y(t)}{\hbar} = 0 \\ &= -\frac{\mu}{\hbar} \{E_0 \sin(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) - E_0 \sin(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) + E_1 \sin[(\omega_0 + \Delta)t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}] - E_1 \sin[(\omega_0 + \Delta)t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}]\}, \end{aligned} \quad (15.15)$$

$$\omega_3 = \omega_0, \quad (15.16)$$

即将  $\boldsymbol{\omega}$  中的两个线偏振矢量各分别化为两个圆偏振矢量的叠加. 变换到绕 3 轴以角速度  $\omega_0$  旋转的坐标系中, 则该旋转坐标系中的态矢量  $\mathbf{r}_R$  遵循运动方程

$$\frac{d\mathbf{r}_R}{dt} = (\boldsymbol{\omega}_R - \boldsymbol{\omega}_0) \times \mathbf{r}_R, \quad (15.17)$$

其中

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 \end{bmatrix} \quad (15.18)$$

在旋波近似下,  $\omega$  旋转坐标系中的坐标为

$$\omega_R \approx \begin{bmatrix} -\frac{\mu}{\hbar}[E_0 \cos(-\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) + E_1 \cos(\Delta t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})] \\ -\frac{\mu}{\hbar}[E_0 \sin(-\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) + E_1 \sin(\Delta t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})] \\ \omega_0 \end{bmatrix}, \quad (15.19)$$

故运动方程变为

$$\frac{d\mathbf{r}_R}{dt} = -\frac{\mu}{\hbar} \begin{bmatrix} E_0 \cos(-\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) + E_1 \cos(\Delta t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}) \\ E_0 \sin(-\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) + E_1 \sin(\Delta t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}) \\ 0 \end{bmatrix} \times \mathbf{r}_R. \quad (15.20)$$

...

□

**习题 15.4:** 用任意矢量  $\mathbf{A}(A_1, A_2, A_3)$  代替  $\mathbf{r}(t)$ , 试证式 (15.1-21) 成立.

提示: 取

$$\mathbf{A}_R(t) = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t & 0 \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix},$$

因此

$$\frac{d\mathbf{A}_R(t)}{dt} = \bar{\bar{T}} \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\bar{\bar{T}}}{dt} \mathbf{A},$$

式中  $\bar{\bar{T}}$  是上式中的变换矩阵.

□

**证:** 旋转坐标系中矢量可表为

$$\mathbf{A}_R(t) = \begin{bmatrix} A_1 \cos \Omega t + A_2 \sin \Omega t \\ -A_2 \sin \Omega t + A_1 \cos \Omega t \\ A_3 \end{bmatrix}. \quad (15.21)$$

旋转坐标系中矢量的变化量可表为

$$\frac{d\mathbf{r}_R}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{A}_1 \cos \Omega t - A_1 \sin \Omega t + \dot{A}_2 \sin \Omega t + A_2 \cos \Omega t \\ -\dot{A}_1 \sin \Omega t - A_1 \cos \Omega t + \dot{A}_2 \cos \Omega t - A_2 \sin \Omega t \\ \dot{A}_3 \end{bmatrix}. \quad (15.22)$$

而又因

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_R - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}_R &= \begin{bmatrix} \dot{A}_1 \cos \Omega t + \dot{A}_2 \sin \Omega t \\ -\dot{A}_2 \sin \Omega t + \dot{A}_1 \cos \Omega t \\ \dot{A}_3 \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{a}_I & \mathbf{a}_{II} & \mathbf{a}_{III} \\ 0 & 0 & \Omega \\ A_1 \cos \Omega t + A_2 \sin \Omega t & -A_1 \sin \Omega t + A_2 \cos \Omega t & A_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{A}_1 \cos \Omega t + \dot{A}_2 \sin \Omega t \\ -\dot{A}_2 \sin \Omega t + \dot{A}_1 \cos \Omega t \\ \dot{A}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_1 \Omega \sin \Omega t - A_2 \Omega \cos \Omega t \\ A_1 \Omega \cos \Omega t + A_2 \Omega \sin \Omega t \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (15.23)$$

故

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left( \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_R - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}_R, \quad (15.24)$$

此即课本式 (15.1-21).

□





## Chapter 19

# 光学电介质波导中的传播、调制和振荡

习题 19.1: 推导方程式 (19.2-7). □

证: 将课本式 (19.2-3)

$$\mathcal{E}_y = \begin{cases} C \exp(-qx), & 0 \leq x < \infty \\ C[\cos(hx) - (q/h) \sin(hx)], & -t \leq x \leq 0, \\ C[\cos(ht) + (q/h) \sin(ht)] \exp[p(x+t)], & -\infty < x \leq -t \end{cases} \quad (19.1)$$

代入式 (19.2-6)

$$-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E_y H_x^* dx = \frac{\beta_m}{2\omega\mu} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{E}_y^{(m)}(x)]^2 dx = 1 \quad (19.2)$$

中得

$$\begin{aligned} & \frac{\beta_m}{2\omega\mu} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{E}_y^{(m)}(x)]^2 dx \\ &= C_m^2 \frac{\beta_m}{2\omega\mu} \left\{ \int_{-\infty}^{-t} \{[\cos(h_m t) + (q_m/h_m) \sin(h_m t)] \exp[p_m(x+t)]\}^2 dx + \int_{-t}^0 [\cos(h_m x) - (q_m/h_m) \sin(h_m x)]^2 dx \right. \\ & \quad \left. + \int_0^{\infty} [\exp(-q_m x)]^2 dx \right\} \\ &= C_m^2 \frac{\beta_m}{2\omega\mu} \frac{1}{2h_m^2} \left( t + \frac{1}{q_m} + \frac{1}{p_m} \right) (h_m^2 + q_m^2) = 1, \end{aligned}$$

故

$$C_m = 2h_m \left[ \frac{\omega\mu}{|\beta_m| \left( t + \frac{1}{q_m} + \frac{1}{p_m} \right) (h_m^2 + q_m^2)} \right]^{1/2}, \quad (19.3)$$

此即课本式 (19.2-7). □

习题 19.2: 证明公式 (19.7-10) 的形式与模式功率守恒一致. □

证: 总模式功率

$$P \propto |A_m|^2 + |B_m|^2 = A_m^* A_m + B_m^* B_m. \quad (19.4)$$

由课本式 (19.7-10)

$$\frac{dA_m}{dz} = -i\kappa B_m e^{-i(\beta_m^{\text{TM}} - \beta_m^{\text{TE}})z}, \quad (19.5)$$

$$\frac{dB_m}{dz} = -i\kappa A_m e^{i(\beta_m^{\text{TM}} - \beta_m^{\text{TE}})z}. \quad (19.6)$$

故

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dz} &\propto \frac{dA_m^*}{dz} A_m + A_m^* \frac{dA_m}{dz} + \frac{dB_m^*}{dz} B_m + B_m^* \frac{dB_m}{dz} \\ &= i\kappa B_m^* e^{i(\beta_m^{\text{TM}} - \beta_m^{\text{TE}})z} A_m + A_m^* \left[ -i\kappa B_m e^{-i(\beta_m^{\text{TM}} - \beta_m^{\text{TE}})z} \right] + i\kappa A_m^* e^{-i(\beta_m^{\text{TM}} - \beta_m^{\text{TE}})z} B_m + B_m^* \left[ -i\kappa A_m e^{i(\beta_m^{\text{TM}} - \beta_m^{\text{TE}})z} \right] \\ &= 0, h \end{aligned} \quad (19.7)$$

即模式总功率守恒. □

**习题 19.3:** 推导式 (19.7-12) 中的两个方程. □

**证:** 由课本式 (19.7-10)

$$\frac{dA_m}{dz} = -i\kappa B_m e^{-i(\beta_m^{\text{TM}} - \beta_m^{\text{TE}})z}, \quad (19.8)$$

$$\frac{dB_m}{dz} = -i\kappa A_m e^{i(\beta_m^{\text{TM}} - \beta_m^{\text{TE}})z}, \quad (19.9)$$

出发, 取式 (19.8) 关于  $z$  的微分并利用式 (19.8) 和式 (19.9) 消去  $B_m$  和  $\frac{dB_m}{dz}$  得

$$\frac{d^2 A_m}{dz^2} + i(\beta_m^{\text{TM}} - \beta_m^{\text{TE}}) \frac{dA_m}{dz} + \kappa^2 A_m = 0, \quad (19.10)$$

考虑到边界条件  $A_m(0) = 0$  和  $\frac{dA_m}{dz}(0) = -i\kappa B_0$ , 解得

$$A_m(z) = -iB_0 e^{-i\delta z} \frac{\kappa}{(\kappa^2 + \delta^2)^{1/2}} \sin[(\kappa^2 + \delta^2)^{1/2} z], \quad (19.11)$$

其中  $2\delta \equiv \beta_m^{\text{TM}} - \beta_m^{\text{TE}}$ . 将上式代入式 (19.8) 中可得

$$B_m(z) = \frac{i}{\kappa} \frac{dA_m}{dz} e^{i(\beta_m^{\text{TM}} - \beta_m^{\text{TE}})z} = B_0 e^{i\delta z} \left\{ \cos[(\kappa^2 + \delta^2)^{1/2} z] - i \frac{\delta}{(\kappa^2 + \delta^2)^{1/2}} \sin[(\kappa^2 + \delta^2)^{1/2} z] \right\}, \quad (19.12)$$

此即课本式 (19.7-12). □

**习题 19.4:** 考虑 19.8 节中讨论的能够将 TE 模转换到 TM 模, 磁光波导调制器的设计问题. 在模式的失配参量  $\delta$  很大 (即  $\delta \gg \kappa$ ) 的情况下, 需要考虑位相匹配的几种方法. 参照式 (19.8-16), 式 (19.8-17) 和式 (19.8-18), 是否能利用磁场  $H_z$  的周期 (在  $z$  方向) 性调制达到位相匹配? 需要的周期是多少? 将结果与参考文献 [20] 描述的解法进行比较. □

**解:** □

**习题 19.5:** 横向电光波调制器长度为  $L$  和横截面为  $2\lambda \times 2\lambda$  ( $\lambda$  为真空中光的波长), 推导该调制器的调制功率表达式. 与体调制器的结果 (参考文献 [9], 第 325 页) 进行比较. 估算铌酸锂 ( $\text{LiNbO}_3$ ) 调制器在  $\lambda = 1$  微米,  $L = 5$  毫米时所需要的功率. □

**解:** □

**习题 19.6:** 存在增益扰动的情况下, 即  $\gamma_1 \neq 0$ ,  $n_1 = 0$  的情况下, 推导分布反馈激光器的振荡条件. 与参考文献 [17] 的结果进行比较. □

**解:** 存在增益扰动 (即  $\gamma_1 \neq 0$ ,  $n_1 = 0$ ) 的情况下,

$$\kappa = i \frac{\gamma}{2}, \quad (19.13)$$

$$S^2 = \kappa^2 + (\gamma - i\Delta\beta)^2 = -\frac{\gamma^2}{4} + (\gamma - i\Delta\beta)^2. \quad (19.14)$$

振荡条件为

$$\frac{S - (\gamma - i\Delta\beta)}{S + (\gamma - i\Delta\beta)} e^{2SL} = -1. \quad (19.15)$$

□

**习题 19.7:** 在  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 3.5$ ,  $n_3 = 3.4$ ,  $t = 3$  微米,  $a = 500$  埃,  $\lambda = 0.85$  微米,  $L = 100, 300, 500$  微米的情况下, 计算无损耗的砷化镓 (GaAs) 分布反馈激光器的阈值增益常数. 画出增益与  $L$  的关系曲线. □

**解:** 假设方波纹状周期性波导的折射率改变量空间周期  $\Lambda = 0.11 \mu\text{m}$ , 激光模式为基模, 且处于完全束缚状态 (模式频率远远超过传播截止值) 下. 此时激光模式的传输常数  $\beta_s = \beta_1 \approx \frac{2\pi n_2}{\lambda}$ , 周期性波导的空间频率为  $\frac{2l\pi}{\Lambda} = \frac{2\pi}{\Lambda}$  与之耦合, 从而满足相位匹配条件

$$\frac{2l\pi}{\Lambda} - \beta_s \approx \beta_s, \quad (19.16)$$

此时相位适配因子 (的一半) 为

$$\Delta\beta = \beta_s - \frac{l\pi}{\Lambda} = -2.688 \times 10^6 \text{ m}^{-1}. \quad (19.17)$$

耦合常数为

$$\kappa \approx \frac{2\pi^2 s^2}{3l\lambda} \frac{n_2^2 - n_1^2}{n_2} \left(\frac{a}{t}\right)^3 \left[1 + \frac{3}{2\pi} \frac{\lambda/a}{(n_2^2 - n_1^2)^{1/2}} + \frac{3}{4\pi^2} \frac{(\lambda/a)^2}{(n_2^2 - n_1^2)}\right] = 618.8 \text{ m}^{-1}. \quad (19.18)$$

由

$$\frac{e^{2\gamma L}}{\gamma^2} = \frac{4}{\kappa^2} \quad (19.19)$$

得阈值增益  $\gamma$  与长度  $L$  的关系曲线如图 19.1 所示, 在  $L = 100, 300, 500 \mu\text{m}$  的情况下, 阈值增益  $\gamma$  分别为  $900 \text{ cm}^{-1}$ ,  $300 \text{ cm}^{-1}$ ,  $180 \text{ cm}^{-1}$ .

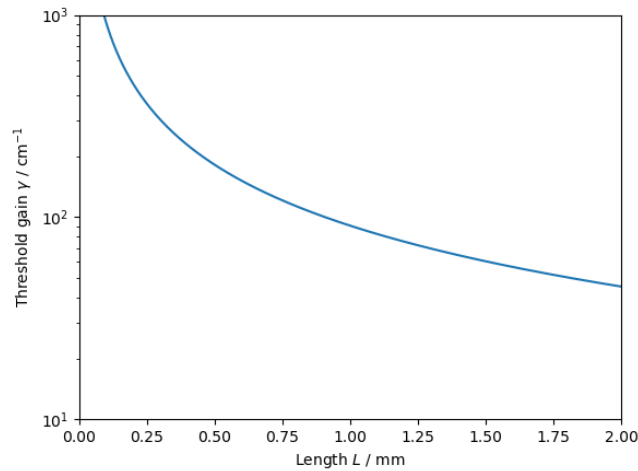


图 19.1: 阈值增益  $\gamma$  与长度  $L$  之间的关系曲线.

□

习题 19.8: 对于如图 19.15 所示的漏泄型波导, 推导 TM 模的传播常数  $\gamma$ . □

解: □

习题 19.9: 写出利用棱镜耦合器和光栅耦合器发射波导模的理论和实践的简短报告. 基础材料参见补充参考文献 [1] 和 [2]. □

解: □

习题 19.10: 利用一维薛定谔方程和波动方程 (19.1-3) 之间形式上的相似性, 证明在无损耗波导中存在类似式 (1.2-5) 的方程

在  $l \neq 0$  时,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_y^{(l)}(x) \mathcal{E}_y^{(m)}(x) dx = 0$$

提示: 为了在两个微分方程之间建立相似关系, 假定解具有式 (19.2-2) 的形式. □

证: 将课本中波动方程 (19.1-3)

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \mathbf{E}(x, y) + [k^2 n^2(\mathbf{r}) - \beta^2] \mathbf{E}(x, y) = 0 \quad (19.20)$$

中的  $\mathbf{E}(x, y)$  换成  $\mathcal{E}^{(l)}(x)$  和  $\mathcal{E}_y^{(m)}(x)$  得

$$\nabla^2 \mathcal{E}_y^{(l)}(x) + [k^2 n^2 - (\beta^{(l)})^2] \mathcal{E}_y^{(l)}(x) = 0, \quad (19.21)$$

$$\nabla^2 \mathcal{E}_y^{(m)}(x) + [k^2 n^2 - (\beta^{(m)})^2] \mathcal{E}_y^{(m)}(x) = 0. \quad (19.22)$$

将式 (19.21) 乘  $\mathcal{E}_y^{(m)}(x)$ , 将式 (19.22) 乘  $\mathcal{E}_y^{(l)}(x)$ , 再将两者相减得

$$\mathcal{E}_y^{(m)} \nabla^2 \mathcal{E}_y^{(l)} + \mathcal{E}_y^{(l)} \nabla^2 \mathcal{E}_y^{(m)} = [(\beta^{(l)})^2 - (\beta^{(m)})^2] \mathcal{E}_y^{(l)} \mathcal{E}_y^{(m)}. \quad (19.23)$$

上式关于全空间积分得

$$\iiint_{\text{全空间}} [\mathcal{E}_y^{(m)} \nabla^2 \mathcal{E}_y^{(l)} + \mathcal{E}_y^{(l)} \nabla^2 \mathcal{E}_y^{(m)}] dv = [(\beta^{(l)})^2 - (\beta^{(m)})^2] \iiint_{\text{全空间}} \mathcal{E}_y^{(l)} \mathcal{E}_y^{(m)} dv. \quad (19.24)$$

再利用格林定理得

$$\iint_{\text{包围全空间的二维闭合曲面}} [\mathcal{E}_y^{(m)} \nabla \mathcal{E}_y^{(l)} + \mathcal{E}_y^{(l)} \nabla \mathcal{E}_y^{(m)}] \cdot \mathbf{n} da = [(\beta^{(l)})^2 - (\beta^{(m)})^2] \iiint_{\text{全空间}} \mathcal{E}_y^{(l)} \mathcal{E}_y^{(m)} dv. \quad (19.25)$$

由于无穷远处  $\mathcal{E}_y^{(l/m)}$  和  $\mathcal{E}_y^{(l/m)}$  均  $\rightarrow 0$ , 故

$$[(\beta^{(l)})^2 - (\beta^{(m)})^2] \iiint_{\text{全空间}} \mathcal{E}_y^{(l)} \mathcal{E}_y^{(m)} dv = 0. \quad (19.26)$$

又因为对  $l \neq m$ , 通常  $(\beta^{(l)})^2 \neq (\beta^{(m)})^2$ , 故

$$\iiint_{\text{全空间}} \mathcal{E}_y^{(l)}(x) \mathcal{E}_y^{(m)}(x) dv = 0, \quad (19.27)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_y^{(l)}(x) \mathcal{E}_y^{(m)}(x) dx = 0. \quad (19.28)$$

□