Chapter 11

激光器的 Q 开关和锁模

习题 11.1: (a) 在锁模实验装置示意图 11.11 中的 A, B, C, D 部分预期可以观察到什么, 试定性地描述. 读者首先要阅读第 8 章参考文献 [7] 关于光电倍增管一节就可以找到答案.

(b) 锁模对射频频谱分析仪 F 所显示的拍频信号 (在频率为 $\omega = \pi c/l$ 处) 强度有什么影响? 假设 N 是间隔为 ω 的等振幅模其位相在锁模前是随机的. (答: 锁模可使拍频信号功率增加 N 倍.)

□

解: (a) A 部分用可调光电倍增管直接探测锁模激光的信号, 可调光电倍增管对光信号具有显著的放大作用且响应速度很快, 故可得到时域上周期为 $\tau = \frac{T}{N}$ 的脉冲序列, 其中 $T = \frac{2l}{c}$, N 为锁模的模式数.

B 部分用光电倍增管探测锁模激光的信号, 并用射频频谱分析仪分析, 故可得一中心频率为 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi c}{l}$ 的峰.

C 部分先用扫描干涉仪选频, 再用光电倍增管探测透射频率的光的信号, 扫描干涉仪的本质是一 Fabry–Pérot 干涉仪, 通过扫描其腔长以改变其透射频率, 故可得锁模激光中的光谱, 即频域上介质增益曲线峰值点附近一系列间隔为 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi c}{l}$ 的峰.

D 部分用点接触二极管直接探测锁模激光的信号, 二极管对光信号的放大作用远不如光电倍增管, 故可得到时域上周期为 $T = \frac{2l}{c}$ 的脉冲序列.

(b) 锁模前信号中存在 $\omega_0 + n\omega$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 的各个频率分量, 锁模使各频率分量产生了干涉, 从而在时域上出现了明显的周期为 $T = \frac{2l}{c}$ 的拍频, 故锁模可使拍频信号功率增加 N 倍.

□

习题 11.2: 当介电常数 ε (而不是损耗 σ) 在模之间的间隔频率 $c/2l$ 处受到调制时试分析锁模的情况. 可论述非均匀加宽激光器的情况, 在某种意义上类似于 11.2 节的形式, 或者论述 11.3 节所考虑的均匀加宽激光器的情况. □

解: 谐振腔内电磁场满足麦克斯韦方程:

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \tag{11.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \tag{11.2}$$

其中谐振腔内电磁场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ 和 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t)$ 可展开为简正模的线性叠加

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\sum_a \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} p_a(t) \boldsymbol{E}_a(\boldsymbol{r}), \tag{11.3}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_a \frac{1}{\sqrt{\mu}} \omega_a q_a(t) \boldsymbol{H}_a(\boldsymbol{r}), \tag{11.4}$$

其中 $\omega_a=\frac{k_a}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$, 再利用关系式

$$
\begin{aligned}
k_a\boldsymbol{E}_a &= \nabla\times\boldsymbol{H}_a, &(11.5)\\
k_a\boldsymbol{H}_a &= \nabla\times\boldsymbol{E}_a, &(11.6)
\end{aligned}
$$

得

$$
\begin{aligned}
\sum_a \frac{1}{\sqrt{\mu}}\omega_a q_a k_a\boldsymbol{E}_a =& -\frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon(\boldsymbol{r},t)}}\sum_a p_a\boldsymbol{E}_a-\sqrt{\varepsilon(\boldsymbol{r},t)}\sum_a \dot{p}_a\boldsymbol{E}_a, &(11.7)\\
\dot{q}_b =& p_b. &(11.8)
\end{aligned}
$$

用 $\boldsymbol{E}_b$ 点乘式 (11.7) 并在腔体积范围内积分得

$$
\omega_b^2 q_b=-\sum_a S_{b,a}(t)p_a-\dot{p}_b, \tag{11.9}
$$

其中

$$
S_{b,a}(t)=\sigma\int_{\text{腔}}\frac{1}{\varepsilon(\boldsymbol{r},t)}\boldsymbol{E}_a\cdot\boldsymbol{E}_b\,\mathrm{d}v. \tag{11.10}
$$

引入简正模振幅

$$
c_a(t)=(2\omega_a)^{-1/2}[\omega_a q_a(t)+ip_a(t)]. \tag{11.11}
$$

利用式 (11.11) 及其在式 (11.8) 和 (11.9) 的复共轭

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}c_a}{\mathrm{d}t} =& -i\omega_a c_a+\sum_b x_{a,b}(t)(c_b^*-c_b), &(11.12)\\
\frac{\mathrm{d}c_a^*}{\mathrm{d}t} =& i\omega_a c_a^*-\sum_b x_{a,b}(t)(c_b^*-c_b), &(11.13)
\end{aligned}
$$

其中

$$
x_{a,b}(t)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_b}{\omega_a}}S_{a,b}(t). \tag{11.14}
$$

取介电常数为一平均项和一谐波微扰项之和

$$
\varepsilon(\boldsymbol{r},0)=\varepsilon_0+\varepsilon_1(\boldsymbol{r})\cos(\omega_m t+\phi), \tag{11.15}
$$

则利用式 11.10 和式 (11.14) 知 $x_{a,b}(t)$ 具有如下形式:

$$
x_{a,b}(t)=\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\delta_{a,b}+\frac{x_{a,b}}{2}[e^{i(\omega_m t+\phi)}+e^{-i(\omega_m t+\phi)}], \tag{11.16}
$$

其中

$$
x_{a,b}=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0^2}\sqrt{\frac{\omega_b}{\omega_a}}\int_{\text{腔}}\varepsilon_1(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}_a\cdot\boldsymbol{E}_b\,\mathrm{d}v. \tag{11.17}
$$

将式 (11.16) 回代入运动方程 (11.12) 得

$$
\frac{\mathrm{d}c_a^*}{\mathrm{d}t}=i\omega_a c_a^*+\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}(c_a^*-c_a)-\sum_b\frac{x_{a,b}}{2}[e^{i(\omega_m t+\phi)}+e^{-i(\omega_m t+\phi)}](c_b^*-c_b). \tag{11.18}
$$

定义失调参数 $\Delta\omega_m$ 为调试频率与模间距 (自由光谱范围) 的偏离值

$$\omega_{a+1} - \omega_a = \frac{\pi c}{l} = \omega_m - \Delta\omega_m, \tag{11.19}$$

定义绝热变量 $D_a^*(t)$ 为

$$c_a^* = D_a^*(t) e^{i[(\omega_a + a\Delta\omega_m)t + a\phi + a\pi/2]} e^{-(\sigma/2\varepsilon)t}, \tag{11.20}$$

代入式 (11.18) 并略去相对于 $D_a^*(t)$ 的快变项得

$$\frac{\mathrm{d}D_a^*}{\mathrm{d}t} + ia\Delta\omega D_a^* = -i\frac{x}{2}D_{a+1}^* + i\frac{x}{2}D_{a-1}^*, \tag{11.21}$$

其中 $x = x_{a,a+1} \approx x_{a,a-1}$. 稳态下 ($\frac{\mathrm{d}D_a^*}{\mathrm{d}t} = 0$), 解得绝热变量为

$$D_a^* = I_a\left(\frac{x}{\Delta\omega}\right), \tag{11.22}$$

其中 I_a 为 a 阶双曲 Bessel 函数, 从而稳态下

$$c_a^*(t) = I\left(\frac{x}{\Delta\omega}\right) e^{i[(\omega_a + a\Delta\omega_m)t + a\phi + a\pi/2]} e^{-\sigma t/2\varepsilon_0}, \tag{11.23}$$

其中 $\omega_a + a\Delta\omega_m = \omega_0 + a\frac{\pi c}{l} + a\Delta\omega_m = \omega_0 + a\omega_m$, 当 $\frac{x}{\Delta\omega_m} \gg 1$, $I_a\left(\frac{x}{\Delta\omega_m}\right)$, 从而

$$c_a^*(t) = \left(2\pi\frac{x}{\Delta\omega}\right)^{-1/2} e^{i[(\omega_0 + a\omega_m) + a\phi + a\pi/2]}, \tag{11.24}$$

其中考虑到增益与损耗平衡, 故衰减因子 $\exp(-\sigma t/2\varepsilon_0)$. 由上式可见, 各相邻振荡模式之间存在稳定的相位差 $\phi + \pi/2$, 从而可实现与调制 σ 类似的锁模效果. □