Chapter 15

辐射场与原子系统的相干相互作用

习题 15.1: 证明若原子初始处于低能态 $|b\rangle$, 即 $\boldsymbol{r}_3(0) = -1$, 则描述原子初始处于高能态 $|a\rangle$ 的运动的 $\boldsymbol{r}(t)$ 为负值. □

证: 对于初始处于低能态 $|b\rangle$ 的原子, 初始态矢量为

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \tag{15.1}$$

且态矢量运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{r}, \tag{15.2}$$

从而解得 $\boldsymbol{r}$ 绕 $\boldsymbol{\omega}$ 逆时针转动 (逆着 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向看).

对于初始处于高能态 $|a\rangle$ 的原子, 初始态矢量为

$$\boldsymbol{r}'(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\boldsymbol{r}(0), \tag{15.3}$$

同理解得 $\boldsymbol{r}'$ 同样绕 $\boldsymbol{\omega}$ 逆时针转动. 故从两种初始状态开始演化的态矢量始终相反, $\boldsymbol{r}(t) = -\boldsymbol{r}'(t)$. □

习题 15.2: 推导式 (15.1-29) 和 (15.1-30). □

证: 矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 与 III 轴的夹角 θ 满足

$$\sin\theta = \frac{\frac{2\mu E}{\hbar}}{\omega_e}, \tag{15.4}$$

$$\cos\theta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_e}, \tag{15.5}$$

$$\tan\theta = \frac{\frac{2\mu E}{\hbar}}{\omega - \omega_0}, \tag{15.6}$$

其中

$$\omega_e = \sqrt{\left(\frac{2\mu E}{\hbar}\right)^2 + (\omega_0 - \omega)^2}. \tag{15.7}$$

由基本的三角关系得

$$r_I = -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta\cos\omega_e t = -\frac{\frac{2\mu E}{\hbar}(\omega-\omega_0)}{\omega_e}(1-\cos\omega_e t) = \frac{\omega_I(\omega-\omega_0)}{\omega_e^2}(1-\cos\omega_e t), \tag{15.8}$$

$$r_{II} = \sin\theta\sin\omega_e t = \frac{\frac{2\mu E}{\hbar}}{\omega_e}\sin\omega_e t = -\frac{\omega_I}{\omega_e}\sin\omega_e t, \tag{15.9}$$

$$r_{III} = \cos^2\theta + \sin^2\theta\cos\omega_e t = 1-\sin^2\theta(1-\cos\omega_e t) = 1-2\left(\frac{\frac{2\mu E}{\hbar}}{\omega_e}\right)^2\sin^2\left(\frac{\omega_e t}{2}\right) = 1-2\left(\frac{\omega_I}{\omega_e}\right)^2\sin^2\left(\frac{\omega_e t}{2}\right), \tag{15.10}$$

此即课本式 (15.1-29), 其中 $\omega_I = -\frac{2\mu E}{\hbar}$.

利用关系式 $r_{III} = |a|^2 - |b|^2$ 和归一化条件 $|a|^2 + |b|^2 = 1$ 得

$$|a|^2 = \frac{1+r_{III}}{2} = 1-\left(\frac{\omega_I}{\omega_e}\right)^2\sin^2\left(\frac{\omega_e t}{2}\right), \tag{15.11}$$

$$|b|^2 = \frac{1-r_{III}}{2} = \left(\frac{\omega_I}{\omega_e}\right)^2\sin^2\left(\frac{\omega_e t}{2}\right). \tag{15.12}$$

□

习题 15.3: 试求原子系综的感应偶极矩. 原子在场 $E_x = E_0\cos(\omega_0 t - \boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}) + E_1\cos[(\omega_0+\Delta)t - \boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}]$ 作用下, 其中 $E_1 \ll E_0$, 原子有共振跃迁 $E_a - E_b = \hbar\omega_0$, 并初始处于基态 $|b\rangle$. 假设样品的尺寸比 λ_0 大, 证明原子沿 $2\boldsymbol{k}_0 - \boldsymbol{k}_1$ 方向辐射频率为 $\omega_0 - \Delta$ 的波. □

解: 原子系综的态矢量遵循运动方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}, \tag{15.13}$$

其中

$$\begin{aligned}\omega_1 =& -\frac{2\mu E_x(t)}{\hbar} = -\frac{2\mu}{\hbar}\{E_0\cos(\omega_0 t - \boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}) + E_1\cos[(\omega_0+\Delta)t - \boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}]\}\\ =& -\frac{\mu}{\hbar}\{E_0\cos(\omega_0 t - \boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}) + E_0\cos(\omega_0 t - \boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}) + E_1\cos[(\omega_0+\Delta)t - \boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}] + E_1\cos[(\omega_0+\Delta)t - \boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}]\},\end{aligned} \tag{15.14}$$

$$\begin{aligned}\omega_2 =& -\frac{2\mu E_y(t)}{\hbar} = 0\\ =& -\frac{\mu}{\hbar}\{E_0\sin(\omega_0 t - \boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}) - E_0\sin(\omega_0 t - \boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}) + E_1\sin[(\omega_0+\Delta)t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}] - E_1\sin[(\omega_0+\Delta)t - \boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}]\},\end{aligned} \tag{15.15}$$

$$\omega_3 = \omega_0, \tag{15.16}$$

即将 $\boldsymbol{\omega}$ 中的两个线偏振矢量各分别化为两个圆偏振矢量的叠加. 变换到绕 3 轴以角速度 ω_0 旋转的坐标系中, 则该旋转坐标系中的态矢量 $\boldsymbol{r}_R$ 遵循运动方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_R}{\mathrm{d}t} = (\boldsymbol{\omega}_R - \boldsymbol{\omega}_0)\times\boldsymbol{r}_R, \tag{15.17}$$

其中

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \begin{bmatrix}0\\0\\\omega_0\end{bmatrix} \tag{15.18}$$

在旋波近似下, $\boldsymbol{\omega}$ 旋转坐标系中的坐标为

$$\boldsymbol{\omega}_R \approx \begin{bmatrix} -\frac{\mu}{\hbar}[E_0\cos(-\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}) + E_1\cos(\Delta t - \boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r})] \\ -\frac{\mu}{\hbar}[E_0\sin(-\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}) + E_1\sin(\Delta t - \boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r})] \\ \omega_0 \end{bmatrix}, \tag{15.19}$$

故运动方程变为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_R}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu}{\hbar}\begin{bmatrix} E_0\cos(-\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}) + E_1\cos(\Delta t - \boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}) \\ E_0\sin(-\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}) + E_1\sin(\Delta t - \boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}) \\ 0 \end{bmatrix} \times \boldsymbol{r}_R. \tag{15.20}$$

... □

习题 15.4: 用任意矢量 $\boldsymbol{A}(A_1, A_2, A_3)$ 代替 $\boldsymbol{r}(t)$, 试证式 (15.1-21) 成立.
提示: 取

$$\boldsymbol{A}_R(t) = \begin{bmatrix} \cos\Omega t & \sin\Omega t & 0 \\ -\sin\Omega t & \cos\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix},$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}_R(t)}{\mathrm{d}t} = \overline{\overline{T}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\overline{\overline{T}}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A},$$

式中 $\overline{\overline{T}}$ 是上式中的变换矩阵. □

证: 旋转坐标系中矢量可表为

$$\boldsymbol{A}_R(t) = \begin{bmatrix} A_1\cos\Omega t + A_2\sin\Omega t \\ -A_2\sin\Omega t + A_2\cos\Omega t \\ A_3 \end{bmatrix}. \tag{15.21}$$

旋转坐标系中矢量的变化量可表为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_R}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} \dot{A}_1\cos\Omega t - A_1\sin\Omega t + \dot{A}_2\sin\Omega t + A_2\cos\Omega t \\ -\dot{A}_1\sin\Omega t - A_1\cos\Omega t + \dot{A}_2\cos\Omega t - A_2\sin\Omega t \\ \dot{A}_3 \end{bmatrix}. \tag{15.22}$$

而又因

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right)_R - \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{A}_R &= \begin{bmatrix} \dot{A}_1\cos\Omega t + \dot{A}_2\sin\Omega t \\ -\dot{A}_2\sin\Omega t + \dot{A}_2\cos\Omega t \\ \dot{A}_3 \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_I & \boldsymbol{a}_{II} & \boldsymbol{a}_{III} \\ 0 & 0 & \Omega \\ A_1\cos\Omega t + A_2\sin\Omega t & -A_1\sin\Omega + A_2\cos\Omega t & A_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{A}_1\cos\Omega t + \dot{A}_2\sin\Omega t \\ -\dot{A}_2\sin\Omega t + \dot{A}_2\cos\Omega t \\ \dot{A}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_1\Omega\sin\Omega - A_2\Omega\cos\Omega t \\ A_1\Omega\cos\Omega t + A_2\Omega\sin\Omega t \\ 0 \end{bmatrix},\end{aligned} \tag{15.23}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right)_R - \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{A}_R, \tag{15.24}$$

此即课本式 (15.1-21). □