作业二

截止时间: 2022 年 3 月 18 日 (周五)

姓名 : 陈 稼 霖
学号 : SA21038052
成绩 : ________

第 1 题 得分: ________. 求单模热光场的平均光子数.

解: 单模热光场的平均光子数为

$$\begin{aligned}\langle N\rangle =&\mathrm{Tr}(\rho a^\dagger a)\\ =&\sum_m\langle m|\left[1-\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\right]\sum_n\exp\left(-n\frac{\hbar\omega}{kT}\right)|n\rangle\langle n|a^\dagger a|m\rangle\\ =&\left[1-\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\right]\sum_{m,n}\exp\left(-n\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\langle m|n\rangle\langle n|a^\dagger a|m\rangle\\ =&\left[1-\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\right]\sum_n\exp\left(-n\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\langle n|a^\dagger a|n\rangle\\ =&\left[1-\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\right]\sum_n\exp\left(-n\frac{\hbar\omega}{kT}\right)n\\ =&\frac{\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)}{1-\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)}.\end{aligned}$$

□

第 2 题 得分: ________. 证明: $D^\dagger=D(-\alpha)=[D(\alpha)]^{-1}$, $D^{-1}(\alpha)aD(\alpha)=a+\alpha$.

证: 位移算符

$$D(\alpha)=e^{\alpha a^\dagger-\alpha^*a}=e^{\alpha a^\dagger}e^{-\alpha^*a}e^{-|\alpha|^2/2}. \tag{1}$$

先证第一个等式: 由于

$$D^\dagger(\alpha)=e^{\alpha^*a-\alpha a^\dagger}, \tag{2}$$

$$D(-\alpha)=e^{-\alpha a^\dagger+\alpha^*a}, \tag{3}$$

$$[D(\alpha)]^{-1}=e^{-\alpha a^\dagger+\alpha^*a}, \tag{4}$$

故

$$D^\dagger(\alpha)=D(-\alpha)=[D(\alpha)]^{-1}. \tag{5}$$

再证第二个等式: 由于 $[a,[a,a^\dagger]]=[a^\dagger,[a,a^\dagger]]=0$, 利用 Baker-Hansdoff 公式, 有

$$D^{-1}(\alpha)=e^{\alpha^*a-\alpha a^\dagger}=e^{\alpha^*a}e^{-\alpha a^\dagger}e^{-[\alpha^*a,\alpha a^\dagger]/2}=e^{\alpha^*a}e^{-\alpha a^\dagger}e^{|\alpha|^2/2}, \tag{6}$$

从而

$$D^{-1}(\alpha)aD(\alpha)=e^{\alpha^*a}e^{-\alpha a^\dagger}e^{|\alpha|^2/2}ae^{\alpha a^\dagger}e^{-\alpha^*a}e^{-|\alpha|^2/2}=e^{\alpha^*a}e^{-\alpha a^\dagger}ae^{\alpha a^\dagger}e^{-\alpha^*a}, \tag{7}$$

利用 $e^{-xa^\dagger}ae^{xa^\dagger}=a+x$ 得

$$D^{-1}(\alpha)aD(\alpha)=e^{\alpha^*a}(a+x)e^{-\alpha^*a}=a+x. \tag{8}$$

□