# 作业三

截止时间: 2022 年 4 月 8 日 (周五)

姓名：陈 稼 霖
学号：SA21038052
成绩：__________

**第 1 题 得分: ________.** 对相干态 $|\alpha\rangle$, 探测效率 $\eta$, 求探测效率

$$P_m = \sum_n P_m^{(n)}\rho_{nn} = \sum_{n\geq m}^{\infty}\binom{n}{m}\eta^m(1-\eta)^{n-m}\rho_{nn}. \tag{1}$$

**解:** 对处于状态 $|n\rangle$ 的系统, 测得 $m$ 个光子的概率为

$$P_m^{(n)} = \binom{n}{m}\eta^m(1-\eta)^{n-m}, \tag{2}$$

故对相干态 $|\alpha\rangle$, 探测概率为

$$P_m = \sum_n P_m^{(n)}\rho_{nn} = \sum_{n\geq m}\binom{n}{m}\eta^m(1-\eta)^{n-m}\rho_{nn}. \tag{3}$$

□

**第 2 题 得分: ________.** 单模热光场 $\rho = \sum_n e^{-n\hbar\nu/kT}(1-e^{-\hbar\nu/kT})|n\rangle\langle n|$ 的 Q 表示.

**解:** 单模热光场的表示为

$$\begin{aligned}
Q(\alpha) =& \frac{1}{\pi}\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle = \frac{1}{\pi}\langle\alpha|\sum_n e^{-n\hbar\nu/kT}(1-e^{-\hbar\nu/kT})|n\rangle\langle n|\alpha\rangle\\
=&\frac{1-\exp\left(-\frac{\hbar\nu}{kT}\right)}{\pi}\sum_n\exp\left(-\frac{n\hbar\nu}{kT}\right)|\langle n|\alpha\rangle|^2\\
=&\frac{1-\exp\left(-\frac{\hbar\nu}{kT}\right)}{\pi}\sum_n\exp\left(-\frac{n\hbar\nu}{kT}\right)\left|\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\right|^2\\
=&\frac{1-\exp\left(-\frac{\hbar\nu}{kT}\right)}{\pi}\exp(-|\alpha|^2)\sum_n\frac{\left[|\alpha|^2\exp\left(-\frac{\hbar\nu}{kT}\right)\right]^n}{n!}\\
=&\frac{1-\exp\left(-\frac{\hbar\nu}{kT}\right)}{\pi}\exp\left[-|\alpha|^2\left(1-e^{-\hbar\nu/kT}\right)\right]\\
=&\frac{1}{\pi}\frac{1}{\bar{n}+1}\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{\bar{n}+1}\right),
\end{aligned} \tag{4}$$

其中单模热光场的平均光子数 $\bar{n} = \frac{1}{e^{\hbar\nu/kT}-1}$. □

**第 3 题 得分: ________.** 证明 Wigner 分布 $W(\alpha)$ 分布与 P 表示的关系:

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int P(\beta)e^{-2|\alpha-\beta|^2}\,\mathrm{d}^2\beta. \tag{5}$$

**证:** Wigner 分布是 $C_S(\beta)$ 的反 Fourier 变换:

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi^2}\int\mathrm{d}^2\lambda\, e^{\alpha\lambda^*-\alpha^*\lambda}C_S(\lambda), \tag{6}$$

其中 $C_S(\lambda)$ 与 $C_N(\lambda)$ 之间的关系为

$$C_S(\lambda) = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2}C_N(\lambda). \tag{7}$$

而 $C_N(\lambda)$ 的反 Fourier 变换为 $p(\beta)$:

$$p(\beta) = \frac{1}{\pi^2}\int\mathrm{d}^2\lambda\, e^{\beta\lambda^*-\beta^*\lambda}C_N(\lambda), \tag{8}$$

$e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2}$ 的反 Fourier 变换为

$$\frac{1}{\pi^2}\int \mathrm{d}^2\lambda\, e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} e^{\beta\lambda^*-\beta^*\lambda} = \frac{2}{\pi} e^{-2|\beta|^2}, \tag{9}$$

故由卷积定理

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int \mathrm{d}^2\beta\, p(\beta) e^{-2|\alpha-\beta|^2}. \tag{10}$$

□