作业二

截止时间: 2022 年 3 月 18 日 (周五)

姓名 : 陈　稼　霖
学号 : SA21038052
成绩 : __________

第 1 题 得分: ________. 求单模热光场的平均光子数.

解: 单模热光场的平均光子数为

$$\begin{aligned}
\langle N\rangle =&\mathrm{Tr}(\rho a^\dagger a)\\
=&\sum_m\langle m|\left[1-\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\right]\sum_n\exp\left(-n\frac{\hbar\omega}{kT}\right)|n\rangle\langle n|a^\dagger a|m\rangle\\
=&\left[1-\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\right]\sum_{m,n}\exp\left(-n\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\langle m|n\rangle\langle n|a^\dagger a|m\rangle\\
=&\left[1-\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\right]\sum_n\exp\left(-n\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\langle n|a^\dagger a|n\rangle\\
=&\left[1-\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\right]\sum_n\exp\left(-n\frac{\hbar\omega}{kT}\right)n\\
=&\frac{\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)}{1-\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)}.
\end{aligned}$$

□

第 2 题 得分: ________. 证明: $D^\dagger=D(-\alpha)=[D(\alpha)]^{-1}$, $D^{-1}(\alpha)aD(\alpha)=a+\alpha$.

证: 位移算符

$$D(\alpha)=e^{\alpha a^\dagger-\alpha^* a}=e^{\alpha a^\dagger}e^{-\alpha^* a}e^{-|\alpha|^2/2}. \tag{1}$$

先证第一个等式: 由于

$$\begin{aligned}
D^\dagger(\alpha)=&e^{\alpha^* a-\alpha a^\dagger}, &(2)\\
D(-\alpha)=&e^{-\alpha a^\dagger+\alpha^* a}, &(3)\\
[D(\alpha)]^{-1}=&e^{-\alpha a^\dagger+\alpha^* a}, &(4)
\end{aligned}$$

故

$$D^\dagger(\alpha)=D(-\alpha)=[D(\alpha)]^{-1}. \tag{5}$$

再证第二个等式: 由于 $[a,[a,a^\dagger]]=[a^\dagger,[a,a^\dagger]]=0$, 利用 Baker-Hansdoff 公式, 有

$$D^{-1}(\alpha)=e^{\alpha^* a-\alpha a^\dagger}=e^{\alpha^* a}e^{-\alpha a^\dagger}e^{-[\alpha^* a,\alpha a^\dagger]/2}=e^{\alpha^* a}e^{-\alpha a^\dagger}e^{|\alpha|^2/2}, \tag{6}$$

从而

$$D^{-1}(\alpha)aD(\alpha)=e^{\alpha^*}e^{-\alpha a^\dagger}e^{|\alpha|^2/2}ae^{\alpha a^\dagger}e^{-\alpha a^\dagger}e^{-|\alpha|^2/2}=e^{\alpha^*}e^{-\alpha a^\dagger}ae^{\alpha a^\dagger}e^{-\alpha a^\dagger}, \tag{7}$$

利用 $e^{-xa^\dagger}ae^{xa^\dagger}=a+x$ 得

$$D^{-1}(\alpha)aD(\alpha)=e^{\alpha^*}(a+x)e^{-\alpha a^\dagger}=a+x. \tag{8}$$

□