量子光学 2005年1月13日

1月8日 8:30-10:30 1201教室

中国科技大学2004级硕士研究生期末考试试题

量子光学

姓名________ 学号________ 单位________ 成绩______

1. 单模热光场的密度算符为 $\rho=\left(1-e^{-\beta}\right)\exp\left(-\beta a^{\dagger}a\right)$，$\beta=\hbar\omega/(kT)$．求其密度算符的Q表示．$Q(\alpha)=\frac{1}{\pi}\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle$　$|\alpha\rangle=e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_n\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$

2. 一光场处于这样的叠加态：$|\psi\rangle=N\left(|\alpha\rangle+e^{i\theta}|-\alpha\rangle\right)$．

(1) 计算归一化常数 N　$\langle\alpha|-\alpha\rangle=\langle-\alpha|\alpha\rangle=e^{-2|\alpha|^2}$

(2) 若 $\theta=\pi$，判断其是否为亚泊松分布，为什么？　$\langle n^2\rangle-\langle n\rangle^2<\langle n\rangle$　$\langle n^2\rangle-\langle n\rangle<\langle n\rangle^2$　$\langle a^\dagger a^\dagger a a\rangle<\langle a^\dagger a\rangle^2$

(3) 若 $\theta=0$，α 为纯虚数，判断其是否有压缩现象，为什么？（提示：计算 $(\Delta X_1)^2$，$X_1=\left(a+a^{\dagger}\right)/2$，$X_2=\left(a-a^{\dagger}\right)/2i$．）

3. 简述：(1) 偶极近似的适用条件；(2) 旋转波近似的含义；(3) 马尔可夫近似的含义；(4) 自发辐射和受激辐射的不同点；(5) Hanbury-Brown-Twiss实验与迈克耳逊干涉实验的不同之处．

4. 单个二能级原子（上下能级分别为$|a\rangle$,$|b\rangle$）同单模光场（频率 $\nu=\omega_{ab}$）共振相互作用．考虑偶极近似和旋转波近似，假设相互作用系数为实数．

(1) 写出半经典理论描述的原子一光场系统哈密顿量．

(2) 写出全量子理论描述的原子一光场系统哈密顿量．

$H=\hbar\nu a^{\dagger}a+\frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z+\hbar g(\sigma_+a+\sigma_-a^{+})$

(3) 原子初态为$|a\rangle$，光场初态为真空态，利用全量子理论的描述求 t 时刻的原子布居反转数 $W(t)=|c_a|^2-|c_b|^2$．

$C_a=$

(4)（附加题）若原子初态为 $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|a\rangle-|b\rangle\right)$，光场初态为真空态，求 $W(t)$．

C_a C_b

（注：5，6两题选做一题即可）

5. 单模光场与热平衡辐射场热库相互作用，其密度算符的运动方程为：

13 / 14

$$\dot{\rho} = -\frac{\gamma}{2}\bar{n}\left(aa^{+}\rho - 2a^{+}\rho a + \rho a a^{+}\right) - \frac{\gamma}{2}(\bar{n}+1)\left(a^{+}a\rho - 2a\rho a^{+} + \rho a^{+}a\right).$$

求 t 时刻光场的粒子数平均值 $\langle a^{+}(t)a(t)\rangle$．［提示：$\dfrac{d\langle a^{+}a\rangle}{dt} = Tr\left(\dot{\rho}a^{+}a\right)$ ］

6．单模光场与热平衡辐射场热库相互作用的 Langevin 方程为：

$$\dot{\tilde{a}}(t) = -\frac{\gamma}{2}\tilde{a}(t) + F_{\tilde{a}}(t).$$

且已知：$\langle F_{\tilde{a}}^{+}(t)\tilde{a}(t)\rangle_R + \langle \tilde{a}^{+}F_{\tilde{a}}(t)\rangle_R = \gamma\bar{n}$．试求 $\langle \tilde{a}^{+}(t)\tilde{a}(t)\rangle_R$

7．简述激光多普勒冷却原子方法的原理．

8．(附加题) 如何理解原子谱线宽度和寿命的不确定关系 $\Delta\omega \approx 1/\Delta t$．

9．(附加题) 谈谈你对信息的理解．

10．(附加题) 简述量子光学主要是研究什么问题？在经典物理学中主要用哪一学科研究这些内容（例如可举普通物理和四大力学中的学科或工具）．

$|\alpha\rangle$

$D(\alpha)$

$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$

$\langle -\alpha|\alpha\rangle = \langle n| \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}(-\alpha)^n}{\sqrt{n!}} \cdots = \sum_n \frac{e^{-|\alpha|^2}}{n!}(-\alpha^*)^n(\alpha)^n$

$\langle u\rangle =$

一、 已知单模热光场密度算符，求Q表示.

二、 相干态的计算（判断亚泊松分布，压缩态）

三、 简答

1、 偶极近似条件；长波条件下，原子的半径远小于光场波长λ，即 $r_0 \ll \lambda = \frac{2\pi}{k}$ ⇒ $k r_0 \ll 1$

2、 简述旋波近似的含义. 对于圆偏振光可看成左旋、右旋光的叠加，从量子理论上看，旋波近似即舍去高频项，旋波近似即舍去一项，即为高频项。由于能量守恒要求舍去，其实是舍去能量不守恒项 a^+, $\sigma_- a$.

由于环境自由度很大，什么是马尔科夫近似. 系统的信息进入环境后不会被反馈回来，即忽略库对系统无记忆性。在用密度算符方法求解耗散问题时，$\rho_s(t')$ 可以用 $\rho_s(t)$ 代替，~~然后[illegible]~~

说明自发辐射和受激发射的不同；一般辐射是真空涨落诱发的辐射，其光子的位相、方向是随机的；而受激辐射是有外场诱发的辐射. ~~[illegible]~~

5、 说明 HBT 试验和迈克耳逊干涉实验的不同. HBT是二阶相干，是两个光强的相干. S、S'、D_1、D_2 ；迈克耳逊干涉是一阶相干，是光子自己与自己的相干，位相的相干

四、 单模光场与单个 2 能级原子相互作用 w=v

1、 写出半经典近似下的 Hamiltonian;

2、 写出全量子理论下的 Hamiltonian;

3、 在全量子理论下，已知原子初态为上能级，光场初态为真空态，求；

4、 （附加题）

五、 六选做一题，看看作业就行了.

解释多普勒激光冷却原子的原理。 [illegible]一方

（附加题）解释原子光谱宽度与原子寿命之间的不确定关系。

原子能级寿命越长，其对应的能级宽度越窄

（附加题）谈谈你对信息的看法. 信息熵是不确定性的对抗，体系的不确定度越大，就会有越多的信息

（附加题）量子光学主要研究什么？经典物理中那个学科或工具是研究这个的？（用普通物理和四大力学举例）. 原子物理中的原子跃迁

$c(t) \sim e^{i z_i t/\hbar} e^{-i \Gamma t/2\hbar} = f(t)$

$f(z) = \int f(t) e^{-i z t/\hbar} dt$

$|f(z)|^2 = \frac{1}{(z - z_i)^2 + \Gamma^2/4}$

~~$\Gamma = \hbar / z_i$~~ $z_i = \hbar / \Gamma$

$\Delta z \sim \frac{\Gamma}{2} = \frac{\hbar}{2 z_i}$

$\Delta z \cdot z_i \sim \frac{\hbar}{2}$

$$= N^2(\langle\alpha|\alpha\rangle + \langle-\alpha|-\alpha\rangle + e^{i\theta}\langle\alpha|-\alpha\rangle + e^{-i\theta}\langle-\alpha|\alpha\rangle)$$

$$= N^2(1+1+e^{i\theta}e^{-2|\alpha|^2} + e^{-i\theta}e^{-2|\alpha|^2})$$

$$= N^2(2+2\cos\theta e^{-2|\alpha|^2})$$

$$|\langle\alpha_1|\alpha_2\rangle|^2 = e^{-|\alpha_1-\alpha_2|^2}$$

$$\Rightarrow \langle\alpha_1|\alpha_2\rangle = e^{-\frac{|\alpha_1-\alpha_2|^2}{2}}$$

由 $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ 得 $N = \frac{1}{\sqrt{2+2e^{-2|\alpha|^2}\cos\theta}}$

(2) $\theta=\pi$ 时 $|\psi\rangle = N(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle)$ $N = \frac{1}{\sqrt{2-2e^{-2|\alpha|^2}}}$

亚泊松分布：满足 $Var(n) < \langle n\rangle$

$\langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2 < \langle n\rangle$

$a^\dagger a^\dagger a a$

$\langle(a^\dagger a)^2\rangle - \langle a^\dagger a\rangle^2 < \langle a^\dagger a\rangle$

$\langle a^\dagger \underline{a a^\dagger} a\rangle = a^\dagger(1+a^\dagger a)a$

$\Rightarrow a^\dagger a^\dagger a a < \langle a^\dagger a\rangle^2$

$\frac{\langle a^\dagger a^\dagger a a\rangle}{\langle a^\dagger a\rangle^2} < 1 \Leftrightarrow g^{(2)}(0) < 1$

$a|\psi\rangle = N(\alpha|\alpha\rangle + \alpha|-\alpha\rangle)$

$aa|\psi\rangle = N(\alpha^2|\alpha\rangle - \alpha^2|-\alpha\rangle)$

$\langle\psi| = N(\langle\alpha| - \langle-\alpha|)$

$\langle\psi|a^\dagger = N(\langle\alpha|\alpha^* + \langle-\alpha|\alpha^*)$

$\langle\psi|a^\dagger a^\dagger = N(\langle\alpha|\alpha^{*2} - \langle-\alpha|\alpha^{*2})$

$\therefore \langle\psi|a^\dagger a^\dagger a a|\psi\rangle = N^2(\langle\alpha|\alpha^{*2} - \langle-\alpha|\alpha^{*2})(\alpha^2|\alpha\rangle - \alpha^2|-\alpha\rangle)$

$= N^2(|\alpha|^4\langle\alpha|\alpha\rangle + |\alpha|^4\langle-\alpha|-\alpha\rangle - |\alpha|^4\langle-\alpha|\alpha\rangle - |\alpha|^4\langle\alpha|-\alpha\rangle)$

$= N^2(2|\alpha|^4 - 2|\alpha|^4 e^{-2|\alpha|^2})$

$= 2N^2|\alpha|^4(1-e^{-2|\alpha|^2})$

$\langle\psi|a^\dagger a|\psi\rangle = N^2(\langle\alpha|\alpha^* + \langle-\alpha|\alpha^*)(\alpha|\alpha\rangle + \alpha|-\alpha\rangle)$

$= N^2(|\alpha|^2\langle\alpha|\alpha\rangle + |\alpha|^2\langle-\alpha|-\alpha\rangle + |\alpha|^2\langle\alpha|-\alpha\rangle + |\alpha|^2\langle-\alpha|\alpha\rangle)$

$= N^2(2|\alpha|^2 + 2|\alpha|^2 e^{-2|\alpha|^2})$

$= 2N^2|\alpha|^2(1+e^{-2|\alpha|^2})$

$\therefore \frac{\langle a^\dagger a^\dagger a a\rangle}{\langle a^\dagger a\rangle^2} = \frac{2N^2|\alpha|^4(1-e^{-2|\alpha|^2})}{4N^4|\alpha|^4(1+e^{-2|\alpha|^2})^2} = \frac{1-e^{-2|\alpha|^2}}{2N^2(1+e^{-2|\alpha|^2})^2}$

$= \frac{(1-e^{-2|\alpha|^2})^2}{(1+e^{-2|\alpha|^2})^2} < 1$

即为亚泊松分布.

(3). $\theta=0$ 时 $|\psi\rangle = N(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)$ 令 $\alpha = ic$ $N = \frac{1}{\sqrt{2+2e^{-2|\alpha|^2}}}$

$(\Delta X_1)^2 = \langle X_1^2\rangle - \langle X_1\rangle^2$

$aa^\dagger + 1$

$\frac{a^2 + a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a}{4}$

$\langle X_1\rangle = \langle\frac{1}{2}(a+a^\dagger)\rangle = \frac{1}{2}\langle\psi|(a+a^\dagger)|\psi\rangle = 0$

($\because a|\psi\rangle = N(\alpha|\alpha\rangle - \alpha|-\alpha\rangle)$, $\langle\psi|a|\psi\rangle = N^2(\langle\alpha| + \langle-\alpha|)(\alpha|\alpha\rangle - \alpha|-\alpha\rangle) = N^2(\alpha - \alpha + \alpha\langle\ldots$ $-\alpha\langle\alpha|-\alpha\rangle) =$

同理 $\langle\psi|a^\dagger|\psi\rangle = 0$)

$X_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(a^2 + a^{\dagger 2} + 2a^\dagger a)$

$\langle\psi|a^2|\psi\rangle = 2N^2\alpha^2(1+e^{-2|\alpha|^2})$

$\langle\psi|a^{\dagger 2}|\psi\rangle = 2N^2\alpha^{*2}(1+e^{-2|\alpha|^2})$

$\langle\psi|a^\dagger a|\psi\rangle = 2N^2|\alpha|^2(1-e^{-2|\alpha|^2})$

$\therefore \langle X_1^2\rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\langle a^2\rangle + \frac{1}{4}\langle a^{\dagger 2}\rangle + \frac{1}{2}\langle a^\dagger a\rangle$

$= \cancel{\frac{1}{4} + \frac{c^2(1-e^{-2|\alpha|^2})}{2+2e^{-2|\alpha|^2}}}$

$= \frac{1}{4} - \frac{c^2 e^{-2c^2}}{\ldots} < \frac{1}{4}$ $\therefore$ 被压缩了.

Scanned by CamScanner

轴方向，$\phi=2\pi$ 时的结果

12. 一混合体系由75%的 $|S_z+\rangle$ 和25% $|S_x+\rangle$ 纯态非相干叠加而成，求该系统的密度矩阵表示及对 S_i 的测量期望值，冰球该系统的量子统计熵值

13. 邱坐标，动量，角动量算符 $x,p,J,x\cdot p,S\cdot x$ 及 $L\cdot S$，在空间反演下的结果

14. 记时间反演算符卫 Θ，求 $\Theta x\Theta^{-1}$，$\Theta p\Theta^{-1}$，$\Theta J\Theta^{-1}$ 及 $\Theta|jm\rangle$

15. 以 $\langle x|\tilde{0}\rangle=e^{-\beta|x|}$ 为试探波函数计算一维谐振子的基态能量

16. 对 $H=\begin{pmatrix} E_1^0 & \lambda\Delta \\ \lambda\Delta & E_2^0 \end{pmatrix}$ 求（1）严格的能量本证值和本征态（2）若 $\lambda\Delta\ll|E_1^0-E_2^0|$，用定态微扰论求能量本征函数至一阶，能量本征值至二阶的结果，并与严格解比较（3）$\lambda\Delta\gg|E_1^0-E_2^0|$，用简并微扰论求解，并与严格解比较

17. N 个 spin-1/2 无相互作用全同粒子受一谐振子势的作用，求体系的基态能量及非米能级

18. N 个 spin-1/2 无相互作用全同粒子受 $V_0\delta(x)$ 势的作用，求医平面波为基时的 Hamiltionian 算符的二次量子化形式，并指出相应产生湮灭算符满足的基本关系

19. 用交换积分的概念解释原子物理中相关的洪德规则

20. 散射理论中的 Lippmann-Schrodinger 方程为：$|\Psi^{(\pm)}\rangle=|\phi\rangle+\frac{1}{E-H_0\pm i\varepsilon}V|\Psi^{(\pm)}\rangle$，$|\phi\rangle$ 可以看作 $|\Psi^{(\pm)}\rangle$ 的一阶近似，写出态失 $|\Psi^{(\pm)}\rangle$ 的一阶和二阶修正

$$= -\frac{\gamma}{2}\mathrm{Tr}\left[\bar{n}(aa^\dagger\rho - 2a^\dagger\rho a + \rho aa^\dagger)a^\dagger a + (\bar{n}+1)(a^\dagger a\rho - 2a\rho a^\dagger + \rho a^\dagger a)\, a^\dagger a\right]$$

$$= -\frac{\gamma}{2}\mathrm{Tr}\left[\bar{n}(aa^\dagger\rho a^\dagger a - a^\dagger\rho a a^\dagger a - a^\dagger\rho a a^\dagger a + \rho aa^\dagger a^\dagger a) + (\bar{n}+1)(a^\dagger a\rho a^\dagger a - 2a\rho a^\dagger a^\dagger a + \rho a^\dagger a a^\dagger a)\right]$$

$$= -\frac{\gamma}{2}\mathrm{Tr}\left[\bar{n}(-aa^\dagger\rho) - \bar{n}(\rho aa^\dagger) + (\bar{n}+1)(a\rho a^\dagger + a\rho a^\dagger)\right]$$

$$= -\frac{\gamma}{2}\mathrm{Tr}\left[-2\bar{n}\,\rho aa^\dagger + 2(\bar{n}+1)\rho a^\dagger a\right]$$

$$= \gamma\mathrm{Tr}\left[\bar{n}\rho aa^\dagger - \bar{n}\rho a^\dagger a - \rho a^\dagger a\right]$$

$$= \gamma\mathrm{Tr}\left[\bar{n}\rho - \rho a^\dagger a\right]$$

$$= \gamma\bar{n} - \gamma\langle a^\dagger a\rangle$$

$\therefore \langle \dot{a^\dagger a}\rangle = -\gamma(\langle a^\dagger a\rangle - \bar{n})$

$(\langle a^\dagger a\rangle_\circ - \bar{n})_t = (\langle a^\dagger a\rangle - \bar{n})_{(0)} e^{-\gamma t}$

$\therefore \langle a^\dagger a\rangle_t = (\langle a^\dagger a\rangle_0 - \bar{n})e^{-\gamma t} + \bar{n}$

$\frac{dx}{dt} + \gamma x = 0$ ~~$x = e^{x}$~~ $x = Ce^{-\gamma t}$ $x_0 = C$ $x = x_0$

$x' = -\gamma(x - \bar{n}) = \frac{dx}{dt} = \frac{d(x-\bar{n})}{dt}$

$x - \bar{n} = e^{-\gamma t} * (x - \bar{n})$

$x =$

$x = \bar{n} + (x_0 - \bar{n})e^{}$

---

4. ① $H = H_0 + H_1$ $\quad H_0 = \hbar\omega_a|a\rangle\langle a| + \hbar\omega_b|b\rangle\langle b|$

$H_1 = -e\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r}_0,t) = -exE(t) = -e(|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|)x(|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|)E(z,t)$

$= -(g_{ab}|a\rangle\langle b| + g_{ba}|b\rangle\langle a|)\,\mathcal{E}\cos\nu t$

$\therefore H = \hbar\omega_a|a\rangle\langle a| + \hbar\omega_b|b\rangle\langle b| - \mathcal{E}\cos\nu t\,(g_{ab}|a\rangle\langle b| + g_{ba}|b\rangle\langle a|)$

$g_{ab} = e\langle a|x|b\rangle = g_{ba}^* = g_{ba} = g$

② $H = H_0 + H_1$

$= \hbar\nu a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z + g\hbar(\sigma_+ a + a^\dagger\sigma_-)$

$\sigma_z = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ $\quad \sigma_+ = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ $\quad \sigma_- = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$

③ $|\psi\rangle = \sum_n\left[C_{a,n}(t)|a,n\rangle + C_{b,n}(t)|b,n\rangle\right]$

共振时. $V_I(t) = \hbar g(\sigma_+ a + a^\dagger\sigma_-)$

$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle = V_I|\psi\rangle$

$\sum_n\left[\dot{C}_{a,n}(t)|a,n\rangle + \dot{C}_{b,n}(t)|b,n\rangle\right] = -ig\left(\cancel{\sum_{n=0} C_{b,n}(t)\sqrt{n}|a,n-1\rangle + \sum_{n=0} C_{a,n}(t)\sqrt{n+1}|b,n+1\rangle}\right)$

$= -ig\sum_{n=0} C_{b,n+1}(t)\sqrt{n+1}\,|a,n\rangle + C_{a,n}(t)\sqrt{n+1}\,|b,n+1\rangle$

$\therefore \dot{C}_{a,n}(t) = -ig\,C_{b,n+1}(t)\sqrt{n+1}$

$\dot{C}_{b,n+1}(t) = -ig\,C_{a,n}(t)\sqrt{n+1}$

$\Rightarrow \ddot{C}_{a,n}(t) = -ig\sqrt{n+1}\,\dot{C}_{b,n+1}(t) = -g^2(n+1)C_{a,n}(t)$

$C_{a,n}(t) = C_{a,n}(0)\cos g\sqrt{n+1}\,t - i\,\cancel{C_{b,n+1}(0)\sin g\sqrt{n+1}}\,t$

$C_{b,n+1}(t) = C_{b,n+1}(0)\cos g\sqrt{n+1}\,t - iC_{a,n}(0)\sin g\sqrt{n+1}\,t$, $C_{b,n+1}(0) = 0$

初态 $|\psi\rangle_0 = |a,0\rangle$ $\quad \therefore C_{a,0}(t) = \cos gt$ $\quad W(t) = \sum_n |C_{a,n}(t)|^2 - |C_{b,n}|^2$

$\therefore C_{a,0}(0) = 1$ $\quad C_{b,0}(0) = 0$ $\quad C_{b,0}(t) = 0$ $\quad C_{a,1}(t) = 0$ $\quad C_{b,1}(t) = -i\sin gt$ $\quad = \cos^2 gt - \sin^2 gt$

$= \cos 2gt$

$$\cdots = \frac{1}{\pi}\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n,m}\langle\alpha|n\rangle\langle n|(1-e^{-\beta})e^{-\beta n}|m\rangle\langle m|\alpha\rangle$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n}|\langle\alpha|n\rangle|^2\cdot e^{-\beta n}(1-e^{-\beta})$$

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

$$= \frac{1-e^{-\beta}}{\pi}\sum_{n}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}e^{-|\alpha|^2}\cdot e^{-\beta n}$$

$$= \frac{1-e^{-\beta}}{\pi}e^{-|\alpha|^2}\cdot e^{|\alpha|^2\cdot e^{-\beta}}$$

$$= \frac{1-e^{-\beta}}{\pi}\cdot\exp[-|\alpha|^2(1-e^{-\beta})]$$

令 $\bar{n} = \frac{1}{e^{\beta}-1}$ 则 $e^{\beta} = \frac{1}{\bar{n}}+1 = \frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}$ $e^{-\beta} = \frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}$

$$\therefore Q(\alpha,\alpha^*) = \frac{\frac{1}{\bar{n}+1}}{\pi}\cdot\exp\left[-|\alpha|^2\left(1-\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\bar{n}+1}\cdot\exp\left[-\frac{|\alpha|^2}{\bar{n}+1}\right]$$

4. ——— $|a\rangle$

$\nu = \omega_{ab}$ 共振

——— $|b\rangle$

(1) $H = \hbar\omega_a|a\rangle\langle a| + \hbar\omega_b|b\rangle\langle b| - g_{ab}E(t)|a\rangle\langle b| - g_{ba}E(t)|b\rangle\langle a|$

$g_{ab} = e\langle a|x|b\rangle$

(2). $H = \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z + \hbar\nu a^+a + \hbar g(\sigma_+ a + \sigma_- a^+)$

(3) $V = \hbar g(\sigma_+ a e^{i\Delta t} + a^+\sigma_- e^{-i\Delta t})$ ①

$= \hbar g(\sigma_+ a + a^+\sigma_-)$

$i\hbar\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = V|\psi\rangle$ ②

$|\psi(t)\rangle = C_{a,n}(t)|a,n\rangle + C_{b,n+1}(t)|b,n+1\rangle$ ③

由①.②.③解得 $C_{a,n}(t) = \left\{C_{a,n}(0)\left[\cos\frac{\Omega_n t}{2} - \frac{i\Delta}{\Omega_n}\sin\frac{\Omega_n t}{2}\right] - \frac{2ig\sqrt{n+1}}{\Omega_n}C_{b,n+1}(0)\sin\frac{\Omega_n t}{2}\right\}e^{i\Delta t/2}$

$C_{b,n+1}(t) = \left\{C_{b,n+1}(0)\left[\cos\frac{\Omega_n t}{2} + \frac{i\Delta}{\Omega_n}\sin\frac{\Omega_n t}{2}\right] - \frac{2ig\sqrt{n+1}}{\Omega_n}C_{a,n}(0)\sin\frac{\Omega_n t}{2}\right\}e^{-i\Delta t/2}$

由初始情况. $C_{a,n}(0) = 1$ $C_{b,n+1}(0) = 0$ (即电原子初态为$|a\rangle$,光场初态为数态)

$W(t) = |C_{a,n}(t)|^2 - |C_{b,n}(t)|^2$

$= \cos^2\frac{\Omega_n t}{2} - \sin^2\frac{\Omega_n t}{2} = \cos\Omega_n t$

$\Omega_n^2 = \Delta^2 + 4g^2(n+1)$

$\Delta = 0.$ $\Omega_n = 2g\sqrt{n+1}$

07-08 高量试题

1. 幺正算符在什么情况下是厄米算符？$x \cdot p$ 是否为厄米算符？利用对偶空间的概念说明厄米算符的本征值为实数。

2. 设谐振子的能量本征态波函数为 $\phi_n(x')$，n 为声子数，求 $\sum_{n=0}^{\infty}\phi^*_n(x')\phi_n(x'')=?$

3. 求对易关系 $[e^{ax}+e^{bp},x+p]$，其中 a, b 为常数。

4. 若 $|i\rangle$，$|j\rangle$ 为厄米算符 A 的不同本征矢，在什么情况下，$|i\rangle+|j\rangle$ 也是 A 的本本征矢？

5。对二能态问题，若 A 的本征态为 $|1\rangle$，$|2\rangle$，且 $H=\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$，试说明 c 必为实数，并求能量本征矢和对应的能量 E1,E2,对处于 $|E1\rangle$ 的态，测量 A 后立即测量体系的能量，问所得能量的期望值是多少？

6。若 $H=\omega S_z$ 写出含时算符 $S_x(t)$，$S_y(t)$，$S_z(t)$ 的 Heisenberg 运动方程，若 t=0 时体系处于 $|S_x+\rangle$，求 t 时刻的态矢。

7. 证明 $\psi(x'',t)=\int d^3xK(x'',t;x',t_0)\psi(x',t_0)$ 满足 Schrodinger 波动方程，其中传播子 $K(x'',t',x',t_0)=\sum_{a'}\langle x''|a'\rangle\langle a'|x'\rangle e^{-iE_{a'}(t-t_0)/\hbar}$

8. 定义一维谐振子的相干态为湮灭算符 a 的本征态 $a|\lambda\rangle=\lambda|\lambda\rangle$，证明 $|\lambda\rangle=e^{-|\lambda|^2}e^{\lambda a^*}|0\rangle$ 是归一化的相干态

9. 对自旋为 1 的粒子计算 $S_z(S_z+\hbar)(S_z-\hbar)$，$S_x(S_x+\hbar)(S_x-\hbar)$ 的矩阵元

10. 分别记角动量为 1/2 和 1 的体系的角动量为 S_i，J_i，其中 i 为 x,y,z,求 $[S_x,S_y]$ 和 $[J_x,J_y]$

11. 对自旋 1/2 的粒子，推导算符 $e^{-iS\cdot n\phi/\hbar}$ 的 2×2 矩阵，并给出 n 为 x

一、已知单模热光场密度算符（题目给出），求Q表示。

二、相干态的计算（判断亚泊松，压缩态）

三、简答

1、偶极近似的条件；
2、简述旋转波近似的含义；
3、什么是马尔可夫近似；
4、说明自发辐射和受激发射的不同；
5、说明 HBT 实验和麦克尔逊干涉实验的不同。

四、单模光场与单个二能级原子相互作用，$\omega = \nu$。

1、写出半经典近似下的 Hamiltonian。
2、写出全量子理论下的 Hamiltonian。
3、在全量子理论下，已知原子初态为上能级，光场初态为真空态，求
4、（附加题）

五、六选作一题。看看作业就行了

七、解释多普勒激光冷却原子方法的原理。

八、(附加题)解释原子光谱宽度和原子寿命之间的不确定关系：。

九、(附加题)谈谈你对信息点看法。

十、(附加题)量子光学的主要研究什么？经典物理中哪个学科或工具是研究这个的？(用普通物理和四大力学举例说明)

4. ④ $|\psi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}|a,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|b,0\rangle$

$\therefore C_{a,0}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$C_{b,0}(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore C_{a,0}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos gt$

$C_{b,0}(t) = C_{b,0}(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$C_{a,1}(t) = 0$

$C_{b,1}(t) = -i\frac{1}{\sqrt{2}}\sin gt$

$\therefore W(t) = \frac{\cos^2 gt}{2} - \frac{1}{2} + 0 - \frac{\sin^2 gt}{2}$

$= \frac{1}{2}(\cos 2gt - 1)$

7. 多普勒冷却：原子吸收一个特定方向的光子，再自发辐射，自发辐射方向随机，整个过程原子得到光子方向的动量，受到的力 $F_a = \hbar k \cdot \gamma = \Gamma \rho_{ee}$

光频比 ω 比原子能级差小，当光与原子相向运动时，原子感受到 ν 变大，易发生吸收过程 $F_a = \vec{F}_0 - \beta m\vec{v}$，同向运动时 ν 变小，过程更难（即多普勒效应 $\nu - \omega$）

$$F_a = \vec{F}_0 + \beta m\vec{v}$$

相减 $F = -2\beta m\vec{v}$，阻力，用此方法冷却

$\tau_i = \frac{\hbar}{\Gamma_i}$

8. 原子能级的寿命越长，其对应的能级宽度越窄，时间 $c(t) \sim e^{-iE_it/\hbar} e^{-\Gamma t/2\hbar}$

$f(E) = \int dt\, e^{iEt/\hbar} f(t)$ 则 $|f(E)|^2 \propto \frac{1}{(E-E_i)^2+\Gamma^2/4}$　$\Delta E \sim \frac{\Gamma}{2} \sim \frac{1}{2}\frac{\hbar}{\tau_i}$，$\Delta E\,\tau_i \sim \frac{1}{2}\hbar$

9. 信息就是不确定性的减少，体系的不确定性越大，我有越多的信息

10. 量子光学研究光场以及它与物质（体系）的相互作用，如原子、电磁学、原子物理、电动力学中也涉及到此，例如原子物理中的原子跃迁

$$tr(ABC) = tr(CAB) = tr(BCA)$$

5. 解: $\frac{d}{dt}\langle a^{+}a\rangle = Tr(\dot{\rho} a^{+}a)$

$= Tr\left(-\frac{\gamma}{2}\bar{n}\left(aa^{+}\rho a^{+}a - 2a^{+}\rho a a^{+}a + \rho a a^{+}a^{+}a\right) - \frac{\gamma}{2}(\bar{n}+1)\left(a^{+}a\rho a^{+}a - 2a\rho a^{+}a^{+}a + \rho a^{+}a a^{+}a\right)\right)$

$= Tr\left(-\frac{\gamma}{2}\bar{n}\left(\rho a^{+}a a a^{+} - 2\rho a a^{+}a a^{+} + \rho a a^{+}a^{+}a\right) - \frac{\gamma}{2}(\bar{n}+1)\left(\rho a^{+}a a^{+}a - 2\rho a^{+}a^{+}a a + \rho a^{+}a a^{+}a\right)\right)$

$\rho a a^{+}a a^{+}$ $\qquad \rho a a^{+}a a^{+}$ $\qquad \rho a^{+}a^{+}a a$ $\qquad \rho a^{+}a^{+}a a$

$-\rho a a^{+}$ $\qquad -\rho a a^{+}$ $\qquad +\rho a^{+}a$ $\qquad +\rho a^{+}a$

$= Tr\left(-\frac{\gamma}{2}\bar{n}\left(-2\rho a a^{+}\right) - \frac{\gamma}{2}(\bar{n}+1)\, 2\rho a^{+}a\right)$

$= Tr\left(\bar{n}(-2\rho a a^{+}) + \bar{n}(2\rho a^{+}a) + 2\rho a^{+}a\right)\left(-\frac{\gamma}{2}\right)$

$Tr\left(-\bar{n}\, 2\rho \cdot \left(-\frac{\gamma}{2}\right)\right) + -\frac{\gamma}{2}\cdot 2\langle a^{+}a\rangle$

$\langle \dot{a^{+}a}\rangle = \bar{n}\gamma - \gamma\langle a^{+}a\rangle$

$= -\gamma\left(\langle a^{+}a\rangle - \bar{n}\right)$

$\left(\langle a^{+}a\rangle - \bar{n}\right)(t) = \left(\langle a^{+}a\rangle - \bar{n}\right)(0)\, e^{-\gamma t}$

$\langle a^{+}a\rangle(t) = \left(\langle a^{+}a\rangle_0 - \bar{n}\right) e^{-\gamma t} + \bar{n}$

6. $\frac{d}{dt}\langle \tilde{a}^{+}(t)\tilde{a}(t)\rangle_R = \langle \dot{\tilde{a}}^{+}\tilde{a}\rangle_R + \langle \tilde{a}^{+}\dot{\tilde{a}}\rangle_R$

$= \langle (-\frac{\gamma}{2}\tilde{a}^{+} + F_{\tilde{a}}^{+})\tilde{a}\rangle_R + \langle \tilde{a}^{+}(-\frac{\gamma}{2}\tilde{a} + F_{\tilde{a}}(t))\rangle_R$

$= -\frac{\gamma}{2}\langle \tilde{a}^{+}\tilde{a}\rangle - \frac{\gamma}{2}\langle \tilde{a}^{+}\tilde{a}\rangle + \langle F_{\tilde{a}}^{+}\tilde{a}\rangle_R + \langle \tilde{a}^{+}F_{\tilde{a}}$

$= -\gamma\langle \tilde{a}^{+}\tilde{a}\rangle + \gamma\bar{n}$

因此 $\langle \tilde{a}^{+}\tilde{a}\rangle_{R t} = \left(\langle \tilde{a}^{+}\tilde{a}\rangle_R(0) - \bar{n}\right) e^{-\gamma t} + \bar{n}$

Scanned by CamScanner

3. 简述：

$r_0 \ll \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ ∴ $kr_0 \ll 1$

① 长波条件下，即原子的半径 r_0 远小于光的波长λ，由于角动量守恒

② 旋波近似舍去了反旋项，对于偶极矩在相互作用表象下，旋波近似的影响是去掉能量不守恒的项，即舍去了反旋项，从量子理论上讲，旋波近似是去掉了 σa^+，$\sigma^- a$ 项

③ 量子可逆过程是指环境足够大，~~对于系统而言~~ ~~[illegible]~~ 许多信息进入环境后不会反馈回来，即没有记忆性，~~[illegible]~~ 退化为它之前时刻无关

④ 自发辐射是真空涨落诱发的辐射，其光子位相、方向是随机的，而受激辐射是由外场诱发的辐射，辐射出的光子与诱导光子位相、方向一样。

⑤ HBT实验是二阶相干，是强度的相干。 $S_1 \times S_2$ D_1 D_2 $S_1 — D_1$ $S_2 — D_2$

~~[illegible]~~ 反聚束效应是光子自己与自己~~[illegible]~~，位相的相干，~~一阶相干~~

4. ① $H_0 = \hbar\omega_a |a\rangle\langle a| + \hbar\omega_b |b\rangle\langle b|$

$\mathcal{H}_1 = -erE(t) = -\hbar(\Omega_{ab}|a\rangle\langle b| + \Omega_{ba}|b\rangle\langle a|)E_0\cos\nu t$

$\Omega_{ab} = \langle a|er|b\rangle$

② $H_{总} = \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma^z + \hbar\nu a^+a + \hbar g(a^+\sigma^- + a\sigma^+)$ ∵ $\Delta = 0$

③ ∴ $V_I = \hbar g(a^+\sigma^- + a\sigma^+)$ 令 $|\psi(t)\rangle = \sum_n (C_{a,n}(t)|a,n\rangle + C_{b,n}(t)|b\ldots$

$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = V_I|\psi(t)\rangle \Rightarrow \begin{cases} i\hbar\dot{C}_{a,n}(t) = \hbar g\sqrt{n+1}\,C_{b,n+1}(t) \\ i\hbar\dot{C}_{b,n+1}(t) = \hbar g\sqrt{n+1}\,C_{a,n}(t) \end{cases}$

$\Omega_R^2 = 4g^2(n+1) \Rightarrow C_{a0}(t) = C_{a0}(0)\cos\frac{\Omega_R t}{2}$

$C_{b1}(t) = C_{a0}(0)\frac{\Omega_R}{2}\sin\frac{\Omega_R t}{2}\frac{-i}{g} = -iC_{a0}(0)\frac{|\Omega|}{g}\sin\frac{\Omega t}{2}$

$\boxed{C_{a0}(0) = 1}$ 有 $W(t) = \cos\Omega_R t$

④ $C_{b0}(t) = C_{b0}(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$，$C_{a0}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\Omega_R t}{2}$ $C_{b1}(t) = -i\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Omega_R}{g}\sin\frac{\Omega_R}{2}t$

$W(t) = \sum_n(|C_{a,n}|^2 - |C_{b,n}|^2) = \frac{1}{2}\cos^2\frac{\Omega_R t}{2} - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\Omega_R}{2}t - \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}(\cos\Omega_R t - 1)$

$$Q(\alpha)=\frac{1}{\pi}\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle$$

$$=\frac{1}{\pi}\langle\alpha|(1-e^{-\beta})e^{-\beta a^\dagger a}|\alpha\rangle$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{nm}\langle\alpha|n\rangle\langle n|(1-e^{-\beta})e^{-\beta n}|m\rangle\langle m|\alpha\rangle$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_n|\langle\alpha|n\rangle|^2e^{-\beta n}(1-e^{-\beta})$$

$$=(1-e^{-\beta})\frac{1}{\pi}\sum_n\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}e^{-|\alpha|^2}e^{-\beta n}$$

$$=(1-e^{-\beta})\frac{1}{\pi}\exp[|\alpha|^2e^{-\beta}-|\alpha|^2]$$

$$=(1-e^{-\beta})\frac{1}{\pi}\exp[-|\alpha|^2(1-e^{-\beta})]$$

记 $\bar n=\frac{1}{e^\beta-1}$ 则 $e^\beta=\frac{1}{\bar n}+1$, $e^{-\beta}=\frac{\bar n}{\bar n+1}$

$\therefore$ $Q(\alpha)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\bar n}\exp(-|\alpha|^2/1+\bar n)$

2\. $|\psi\rangle=N(|\alpha\rangle+e^{i\theta}|-\alpha\rangle)$

① $\langle\psi|\psi\rangle=N^2(\langle\alpha|\alpha\rangle+\langle-\alpha|-\alpha\rangle+e^{i\theta}\langle\alpha|-\alpha\rangle+e^{-i\theta}\langle-\alpha|\alpha\rangle)$

$=N^2(2+e^{i\theta}e^{-2|\alpha|^2}+e^{-i\theta}e^{-2|\alpha|^2})$

$\left(\langle\alpha|\alpha'\rangle=e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}e^{-\frac{|\alpha'|^2}{2}}e^{\alpha^*\alpha'}\right)$ $\left(\langle\alpha|-\alpha\rangle=e^{-2|\alpha|^2}=\langle-\alpha|\alpha\rangle\right)$

$=N^2(2+2e^{-2|\alpha|^2}\cos\theta)$

$N=\frac{1}{\sqrt{2+2e^{-2|\alpha|^2}\cos\theta}}$

② $|\varphi\rangle=N(|\alpha\rangle-|-\alpha\rangle)$, $N^2=\frac{1}{2-2e^{-2|\alpha|^2}}$

$a|\varphi\rangle=N(\alpha|\alpha\rangle+\alpha|-\alpha\rangle)$ 主要求 $\langle n^2\rangle-\langle n\rangle^2<\langle n\rangle$ 即 $\langle a^\dagger a^\dagger aa\rangle<\langle a^\dagger a\rangle^2$

$aa|\varphi\rangle=N(\alpha^2|\alpha\rangle-\alpha^2|-\alpha\rangle)$

$\langle a^\dagger a\rangle=N^2(|\alpha|^2+|\alpha|^2+|\alpha|^2e^{-2|\alpha|^2}+|\alpha|^2e^{-2|\alpha|^2})=2N^2|\alpha|^2(1+e^{-2|\alpha|^2})$

$\langle a^\dagger a^\dagger aa\rangle=N^4(|\alpha|^4+|\alpha|^4-|\alpha|^4e^{-2|\alpha|^2}-|\alpha|^4e^{-2|\alpha|^2})=2N^2|\alpha|^4(1-e^{-2|\alpha|^2})$

$\langle a^\dagger a\rangle^2=4N^4|\alpha|^4(1+e^{-2|\alpha|^2})^2$

$\frac{\langle a^\dagger a^\dagger aa\rangle}{\langle a^\dagger a\rangle^2}=\frac{(1-e^{-2|\alpha|^2})^2}{(1+e^{-2|\alpha|^2})^2}<1$ $\therefore$ 亚 poissin

③ $|\varphi\rangle=N(|\alpha\rangle+|-\alpha\rangle)$ 且 $\alpha=ic$, $N^2=\frac{1}{2+2e^{-2|\alpha|^2}}$, $N^2(\alpha-\alpha e^{-2|\alpha|^2}+\alpha e^{-2|\alpha|^2}-\alpha)=0$

$a|\varphi\rangle=N(\alpha|\alpha\rangle-\alpha|-\alpha\rangle)$ $\therefore\langle\varphi|a|\varphi\rangle=0$

$a^2|\varphi\rangle=N(\alpha^2|\alpha\rangle+\alpha^2|-\alpha\rangle)$ 同样 $\langle\varphi|a^\dagger|\varphi\rangle=0$

$\langle X_1\rangle=0$, $\langle X_1^2\rangle=\langle\frac{1}{4}(a^2+a^{\dagger 2}+2a^\dagger a+1)\rangle=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(\langle a^2\rangle+\langle a^{\dagger 2}\rangle+2\langle a^\dagger a\rangle)$

$\langle X_1^2\rangle=\frac{1}{4}N^2(\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2e^{-2|\alpha|^2}+\alpha^2e^{-2|\alpha|^2}+\alpha^{*2}+\alpha^{*2}+\alpha^{*2}e^{-2|\alpha|^2}+\alpha^{*2}e^{-2|\alpha|^2}+2|\alpha|^2+2|\alpha|^2+4|\alpha|^2e^{-2|\alpha|^2})+\frac{1}{4}$

$-c^2\;\; -c^2e^{-2|\alpha|^2}\;\; -c^2\;\; -c^2e^{-2|\alpha|^2}+4c^2-4c^2e^{-2c^2})+\frac{1}{4}$

$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$

平移算符：$D(\alpha) = e^{\alpha a^{+} - \alpha^{*} a}$. $\quad D^{+}(\alpha) = D(-\alpha) = [D(\alpha)]^{-1}$.