

第 1 题 得分：_____. 某一光场的密度算符 $\rho = \sum_n \frac{\langle n \rangle^n}{(1 + \langle n \rangle)^{n+1}} |n\rangle\langle n|$, 求其密度算符的 Q 表示.

解: 该光场的 Q 表示为

$$\begin{aligned} Q(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \sum_n \frac{\langle n \rangle^n}{(1 + \langle n \rangle)^{n+1}} |n\rangle\langle n| \alpha \rangle \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_n \frac{\langle n \rangle^n}{(1 + \langle n \rangle)^{n+1}} |\langle n | \alpha \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_n \frac{\langle n \rangle^n}{(1 + \langle n \rangle)^{n+1}} \left| e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \right|^2 \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_n \frac{\langle n \rangle^n}{(1 + \langle n \rangle)^{n+1}} e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \\ &= \frac{1}{\pi(1 + \langle n \rangle)} \exp \left[-\frac{1}{1 + \langle n \rangle} |\alpha|^2 \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

□

第 2 题 得分：_____. 一光场处于这样的态: $|\psi\rangle = Na^\dagger|\alpha\rangle$.

(1) 计算归一化常数 N .

(2) 若 α 为正实数, 判断其取何值时有压缩现象? (提示: 计算 $(\Delta X_1)^2$ 或 $(\Delta X_2)^2$; $X_1 = (a + a^\dagger)/2$, $X_2 = (a - a^\dagger)/2i$).

解: (1) 由归一化条件,

$$\begin{aligned} \langle \psi | \psi \rangle &= |N|^2 \langle \alpha | aa^\dagger | \alpha \rangle \\ &= |N|^2 \langle \alpha | (a^\dagger a + 1) | \alpha \rangle \\ &= |N|^2 \langle \alpha | (|\alpha|^2 + 1) | \alpha \rangle \\ &= |N|^2 (|\alpha|^2 + 1) \\ &= 1, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\implies N = (|\alpha|^2 + 1)^{-1/2} \quad (3)$$

(2) 同 2014 年第 2 题.

□

第 3 题 得分：_____. 某一光场形式为 $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|0\rangle + 2|1\rangle + |2\rangle)$, 判断其是否为亚泊松分布, 为什么?

解: 该光场的二阶相关度为

$$\begin{aligned} g^{(2)}(0) &= \frac{\langle a^\dagger a^\dagger aa \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle^2} = \frac{\langle \psi | a^\dagger a^\dagger aa | \psi \rangle}{\langle \psi | a^\dagger a | \psi \rangle^2} \\ &= 6 \frac{(\langle 0| + 2\langle 1| + \langle 2|) a^\dagger a^\dagger aa (|0\rangle + 2|1\rangle + |2\rangle)}{[(\langle 0| + 2\langle 1| + \langle 2|) a^\dagger a (|0\rangle + 2|1\rangle + |2\rangle)]^2} \\ &= 6 \frac{(\langle 0| + 2\langle 1| + \langle 2|)(0|0\rangle + 2 \cdot 0|1\rangle + 2|2\rangle)}{[(\langle 0| + 2\langle 1| + \langle 2|)(0|0\rangle + 2 \cdot 1|1\rangle + 2|2\rangle)]^2} \\ &= \frac{1}{3} < 1, \end{aligned} \quad (4)$$

故该光场为亚泊松分布.

□

第 4 题 得分: _____. 简述:

- (1) 偶极近似的适用条件;
- (2) 旋转波近似的含义;
- (3) 马尔科夫近似下的含义;
- (4) 自发辐射由何引起, 如何抑制或增强;
- (5) 举例比较光子的一阶干涉和二阶干涉.

解: (1) 同 2004 年第 3 题 (1).

(2) 同 2004 年第 3 题 (2).

(3) 同 2004 年第 3 题 (3).

(4) 自发辐射由真空中电磁场的涨落引起. 通过添加光学谐振腔或改变光学谐振腔的结构影响光场的模场结构, 进而调控自发辐射的速率.

(5) 光子的一阶干涉是光子与其自身的干涉, 体现的是光源的频谱特征 (单色性), 例如迈克耳逊干涉实验. 光子的二阶干涉是光子与光子之间的相干, 体现的是光源的光子数分布特性, 例如 HBT 实验.

□

第 5 题 得分: _____. 单个二能级原子 (上下能级分别为 $|a\rangle, |b\rangle$) 同单模光场 (频率 $\nu = \omega_{ab}$) 共振相互作用. 考虑偶极近似和旋转波近似, 假设相互作用系数为实数.

- (1) 写出半经典理论描述的原子-光场系统的总哈密顿量.
- (2) 写出全量子理论描述的原子-光场系统的总哈密顿量.
- (3) 原子初态为 $|b\rangle$, 光场初态为 $|1\rangle$, 利用全量子理论的描述求 t 时刻的原子布居反转数 $W(t) = |c_a|^2 - |c_b|^2$.

解: 同 2004 年第 4 题.

□

第 6 题 得分: _____. 二能级原子与热平衡辐射场热库相互作用, 其密度算符的运动方程为:

$$\dot{\rho} = -\frac{\Gamma}{2}[\sigma_+\sigma_-\rho + \rho\sigma_+\sigma_- - 2\sigma_-\rho\sigma_+]. \quad (5)$$

求 t 时刻原子算符 $\langle\sigma_z(t)\rangle$. 提示: $\frac{d\langle\sigma_z(t)\rangle}{dt} = \text{Tr}[\dot{\rho}\sigma_z]$.

解:

$$\langle\sigma_z(t)\rangle = \text{Tr}[\rho\sigma_z] = \rho_{aa} - \rho_{bb} = 2\rho_{aa} - 1. \quad (6)$$

一方面,

$$\implies \frac{d\langle\sigma_z(t)\rangle}{dt} = 2\frac{d\rho_{aa}}{dt} - 1. \quad (7)$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \frac{d\langle\sigma_z(t)\rangle}{dt} &= \text{Tr}[\dot{\rho}\sigma_z] \\ &= -\frac{\Gamma}{2} \text{Tr}[(\sigma_+\sigma_-\rho + \rho\sigma_+\sigma_- - 2\sigma_-\rho\sigma_+)\sigma_z] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\Gamma}{2} \text{Tr}[\rho(\sigma_z\sigma_+\sigma_- + \sigma_+\sigma_-\sigma_z - 2\sigma_+\sigma_z\sigma_-)] \\
&= -\frac{\Gamma}{2} \text{Tr}[\rho(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})] \\
&= -2\Gamma \text{Tr}[\rho \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}] \\
&= -2\Gamma \rho_{aa}.
\end{aligned} \tag{8}$$

以上两式解联立得

$$2\frac{d\rho_{aa}}{dt} - 1 = -2\Gamma\rho_{aa}, \tag{9}$$

解得

$$\rho_{aa}(t) = \left(\rho_{aa}(0) - \frac{1}{2\Gamma}\right)e^{-\Gamma t} + \frac{1}{2\Gamma}. \tag{10}$$

故 t 时刻原子算符

$$\langle\sigma_z(t)\rangle = \left(2\rho_{aa}(0) - \frac{1}{\Gamma}\right)e^{-\Gamma t} + \frac{1}{\Gamma} - 1. \tag{11}$$

□

第 7 题 得分：_____. 简述激光多普勒冷却原子方法的原理.

解：当原子在光场中运动，原子受激吸收光子跃迁到激发态后，通过自发辐射和受激辐射跃迁回基态，其中受激吸收使原子动量发生变化，自发辐射产生的光子方向随机，故造成原子动量变化平均为零，受激辐射造成的原子与部分受激吸收造成的原子动量变化，故总过程中原子的动量由 \mathbf{p}_0 变为 $\mathbf{p}_0 + n\hbar\mathbf{k} - \langle\sum_i \hbar\mathbf{p}_i\rangle$ ，等效于光场对原子有作用力

$$\mathbf{F} = \frac{n}{t}\hbar\mathbf{k} = \gamma\hbar\mathbf{k}, \tag{12}$$

其中 γ 为原子单位时间内的自发辐射次数. 光场中原子的密度矩阵元演化如下：

$$\dot{\rho}_{ab} = -\left(i\Delta + \frac{\Gamma}{2}\right)\rho_{ab} + i\Omega_R\rho_{aa} - \frac{i}{2}\Omega_R \tag{13}$$

$$\dot{\rho}_{aa} = -\Gamma\rho_{aa} + \frac{i}{2}\Omega_R(\rho_{ab} - \rho_{ba}), \tag{14}$$

$$\dot{\rho}_{ba} = \dot{\rho}_{ab}^*, \tag{15}$$

其中 Δ 为激光频率相对于原子跃迁频率的失谐, Γ 为能级 a 自发向能级 b 跃迁的速率, Ω_R 为 Rabi 频率. 稳态下,

$$\dot{\rho}_{ab} = 0, \tag{16}$$

$$\dot{\rho}_{aa} = 0, \tag{17}$$

解得

$$\rho_{aa} = \frac{\Omega_R^2}{4\Delta^2 + \Gamma^2 + 2\Omega_R^2}. \tag{18}$$

故光场对原子的等效作用力为

$$\mathbf{F} = \Gamma\rho_{aa}\hbar\mathbf{k} = \Gamma\hbar\mathbf{k}\frac{\Omega_R^2}{4\Delta^2 + \Gamma^2 + 2\Omega_R^2}. \tag{19}$$

激光多普勒冷却原子时, 激光频率 ν_0 略小于原子跃迁频率 ω . 由于多普勒效应, 与光以速率 v 相向和同向而行的原子, 感受到的激光频率为

$$\nu = \nu_0 \frac{1 \pm \frac{v}{c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \approx \nu_0 \pm k_0 v, \quad (20)$$

即与光相向而行的原子, 感受到的激光频率靠近 ω , 失谐更小, 受到的光场的等效作用力更大, 该作用力使原子减速; 与光同向而行的原子, 感受到的激光频率远离 ω , 失谐更大, 受到的光场的等效作用力更小. 当用激光从各个方向上照射原子, 就可阻碍朝各个方向运动的原子, 从而实现冷却. \square