1. (20分)

产生湮灭算符 $a^\dagger$，a 满足对易关系 $[a, a^\dagger] = 1$，且 $[a, (a^\dagger)^n] = n(a^\dagger)^{n-1}$，试证：

(i), $[a^\dagger, a^m] = -ma^{m-1}$；

(ii), $a(a^\dagger)^n a^m a^\dagger = (a^\dagger)^{n+1}a^{m+1} + (m+n+1)(a^\dagger)^n a^m + mn(a^\dagger)^{n-1}a^{m-1}$

2. (20分) 有如下几种单模辐射场，分别计算它们的光子数分布函数 $p(m)$：

① 数态的叠加态 $|\psi\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|10\rangle)$；

② $\rho = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\kappa}\kappa^n}{n!}|n\rangle\langle n|$，$\kappa \in \mathbb{R}^+$；

③ 湮灭掉一个光子的热光场 $\rho' = \dfrac{a\rho a^\dagger}{\mathrm{Tr}[a\rho a^\dagger]}$，其中 ρ 是热光场，即

$\rho = \dfrac{1}{1+\langle n\rangle}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\langle n\rangle}{1+\langle n\rangle}\right)^n |n\rangle\langle n|$，$\langle n\rangle$ 是 ρ 热光场的平均光子数。

3. (20分) 试通过计算判断，上题①中的辐射场的光子数分布为何种分布（Poisson, Sub-Poisson, Super-Poisson）？

4. (20分) 增加了一个光子的相干态(Single-photon-added coherent state(SPACS)), $|\alpha, 1\rangle = \dfrac{a^\dagger}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}|\alpha\rangle$。考虑该辐射场的两个厄米算符 $X_1 = \frac{1}{2}\left(a + a^\dagger\right)$，$X_2 = \frac{1}{2i}\left(a - a^\dagger\right)$. 它们分别对应于场的复振幅的实部和虚部。证明：

SPACS 态 $|\alpha, 1\rangle$ 当 $|\alpha| > 1$ 时是压缩态，（本题取 $\alpha \in \mathbb{R}^+$）。

5. (20分) 考虑一个理想的光学腔，腔里有单模辐射场 $|\phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|10\rangle)$。处于基态且与单模场共振的两能级原子 $|\psi_\mathrm{i}\rangle = |b\rangle$ 进入该光学腔，与辐射场发生反应，反应过程中相互作用的哈密顿量为 $\mathscr{V} = \hbar g(\sigma_+ a + a^\dagger \sigma_-)$。系统的演化方程为 $\Psi(t)_{\mathrm{A+F}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathscr{V}t}|\psi_\mathrm{i}\rangle \otimes |\phi\rangle$。反应一段时间后原子从腔中逸出。**经探测：出射原子已经从腔中吸收一个光子而被激发，且处于 $|\psi_\mathrm{f}\rangle = |a\rangle$ 激发态。**

① 计算该单模场初始时刻 $|\phi_0\rangle$ 的平均光子数 $\bar{n}$；

② 试讨论，在腔中被吸收一个光子的情况下：此时腔内的辐射场的平均光子数变为多少？此时辐射场的光子数分布为何种分布（Poisson, Sub-Poisson, Super-Poisson）？