期末考试

姓名：陈　稼　霖
学号：SA21038052
成绩：__________

第 1 题　得分: ________. 某一光场的密度算符 $\rho=\sum_n \frac{\langle n\rangle^n}{(1+\langle n\rangle)^{n+1}}|n\rangle\langle n|$, 求其密度算符的 Q 表示.

解: 该光场的 Q 表示为

$$\begin{aligned}
Q(\alpha)=&\frac{1}{\pi}\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle=\frac{1}{\pi}\langle\alpha|\sum_n\frac{\langle n\rangle^n}{(1+\langle n\rangle)^{n+1}}|n\rangle\langle n|\alpha\rangle\\
=&\frac{1}{\pi}\sum_n\frac{\langle n\rangle^n}{(1+\langle n\rangle)^{n+1}}\left|\langle n|\alpha\rangle\right|^2\\
=&\frac{1}{\pi}\sum_n\frac{\langle n\rangle^n}{(1+\langle n\rangle)^{n+1}}\left|e^{-|\alpha|^2/2}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\right|^2\\
=&\frac{1}{\pi}\sum_n\frac{\langle n\rangle^n}{(1+\langle n\rangle)^{n+1}}e^{-|\alpha|^2}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\\
=&\frac{1}{\pi(1+\langle n\rangle)}\exp\left[-\frac{1}{1+\langle n\rangle}\left|\alpha\right|^2\right].
\end{aligned}\tag{1}$$

□

第 2 题　得分: ________. 一光场处于这样的态: $|\psi\rangle=Na^\dagger|\alpha\rangle$.

(1) 计算归一化常数 N.

(2) 若 α 为正实数, 判断其取何值时有压缩现象? (提示: 计算 $(\Delta X_1)^2$ 或 $(\Delta X_2)^2$; $X_1=(a+a^\dagger)/2$, $X_2=(a-a^\dagger)/2i$).

解: (1) 由归一化条件,

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\psi\rangle=&\left|N\right|^2\langle\alpha|aa^\dagger|\alpha\rangle\\
=&\left|N\right|^2\langle\alpha|(a^\dagger a+1)|\alpha\rangle\\
=&\left|N\right|^2\langle\alpha|(\left|\alpha\right|^2+1)|\alpha\rangle\\
=&\left|N\right|^2(\left|\alpha\right|^2+1)\\
=&1,
\end{aligned}\tag{2}$$

$$\Longrightarrow N=(\left|\alpha\right|^2+1)^{-1/2}\tag{3}$$

(2) 同 2014 年第 2 题.

□

第 3 题　得分: ________. 某一光场形式为 $|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{6}}(|0\rangle+2|1\rangle+|2\rangle)$, 判断其是否为亚泊松分布, 为什么?

解: 该光场的二阶相关度为

$$\begin{aligned}
g^{(2)}(0)=&\frac{\langle a^\dagger a^\dagger aa\rangle}{\langle a^\dagger a\rangle^2}=\frac{\langle\psi|a^\dagger a^\dagger aa|\psi\rangle}{\langle\psi|a^\dagger a|\psi\rangle^2}\\
=&6\frac{(\langle 0|+2\langle 1|+\langle 2|)a^\dagger a^\dagger aa(|0\rangle+2|1\rangle+|2\rangle)}{[(\langle 0|+2\langle 1|+\langle 2|)a^\dagger a(|0\rangle+2|1\rangle+|2\rangle)]^2}\\
=&6\frac{(\langle 0|+2\langle 1|+\langle 2|)(0|0\rangle+2\cdot 0|1\rangle+2|2\rangle)}{[(\langle 0|+2\langle 1|+\langle 2|)(0|0\rangle+2\cdot 1|1\rangle+2|2\rangle)]^2}\\
=&\frac{1}{3}<1,
\end{aligned}\tag{4}$$

故该光场为亚泊松分布. □

第 4 题 得分: ________. 简述:

(1) 偶极近似的适用条件;

(2) 旋转波近似的含义;

(3) 马尔科夫近似下的含义;

(4) 自发辐射由何引起, 如何抑制或增强;

(5) 举例比较光子的一阶干涉和二阶干涉.

解: (1) 同 2004 年第 3 题 (1).

(2) 同 2004 年第 3 题 (2).

(3) 同 2004 年第 3 题 (3).

(4) 自发辐射由真空中电磁场的涨落引起. 通过添加光学谐振腔或改变光学谐振腔的结构影响光场的模场结构, 进而调控自发辐射的速率.

(5) 光子的一阶干涉是光子与其自身的干涉, 体现的是光源的频谱特征 (单色性), 例如迈克耳逊干涉实验.
光子的二阶干涉是光子与光子之间的相干, 体现的是光源的光子数分布特性, 例如 HBT 实验.

□

第 5 题 得分: ________. 单个二能级原子 (上下能级分别为 $|a\rangle$, $|b\rangle$) 同单模光场 (频率 $\nu = \omega_{ab}$) 共振相互作用. 考虑偶极近似和旋转波近似, 假设相互作用系数为实数.

(1) 写出半经典理论描述的原子-光场系统的总哈密顿量.

(2) 写出全量子理论描述的原子-光场系统的总哈密顿量.

(3) 原子初态为 $|b\rangle$, 光场初态为 $|1\rangle$, 利用全量子理论的描述求 t 时刻的原子布局反转数 $W(t) = |c_a|^2 - |c_b|^2$.

解: 同 2004 年第 4 题. □

第 6 题 得分: ________. 二能级原子与热平衡辐射场热库相互作用, 其密度算符的运动方程为:

$$\dot{\rho} = -\frac{\Gamma}{2}[\sigma_+\sigma_-\rho + \rho\sigma_+\sigma_- - 2\sigma_-\rho\sigma_+]. \tag{5}$$

求 t 时刻原子算符 $\langle\sigma_z(t)\rangle$. 提示: $\frac{\mathrm{d}\langle\sigma_z(t)\rangle}{\mathrm{d}t} = \mathrm{Tr}[\dot{\rho}\sigma_z]$.

解:

$$\langle\sigma_z(t)\rangle = \mathrm{Tr}[\rho\sigma_z] = \rho_{aa} - \rho_{bb} = 2\rho_{aa} - 1. \tag{6}$$

一方面,

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\langle\sigma_z(t)\rangle}{\mathrm{d}t} = 2\frac{\mathrm{d}\rho_{aa}}{\mathrm{d}t}. \tag{7}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\langle\sigma_z(t)\rangle}{\mathrm{d}t} &= \mathrm{Tr}[\dot{\rho}\sigma_z]\\ &= -\frac{\Gamma}{2}\mathrm{Tr}[(\sigma_+\sigma_-\rho + \rho\sigma_+\sigma_- - 2\sigma_-\rho\sigma_+)\sigma_z]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=-\frac{\Gamma}{2}\operatorname{Tr}[\rho(\sigma_z\sigma_+\sigma_-+\sigma_+\sigma_-\sigma_z-2\sigma_+\sigma_z\sigma_-)]\\
&=-\frac{\Gamma}{2}\operatorname{Tr}[\rho(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-1&0\\0&0\end{bmatrix})]\\
&=-2\Gamma\operatorname{Tr}[\rho\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}]\\
&=-2\Gamma\rho_{aa}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

以上两式解联立得

$$
\frac{\mathrm{d}\rho_{aa}}{\mathrm{d}t}=-\Gamma\rho_{aa},\tag{9}
$$

解得

$$
\rho_{aa}(t)=\rho_{aa}(0)e^{-\Gamma t}.\tag{10}
$$

故 t 时刻原子算符

$$
\langle\sigma_z(t)\rangle=2\rho_{aa}(0)e^{-\Gamma t}-1.\tag{11}
$$

□

第 7 题 得分: __________. 简述激光多普勒冷却原子方法的原理.

解: 当原子在光场中运动, 原子受激吸收光子跃迁到激发态后, 通过自发辐射和受激辐射跃迁回基态, 其中受激吸收使原子动量发生变化, 自发辐射产生的光子方向随机, 故造成原子动量变化平均为零, 受激辐射造成的原子与部分受激吸收造成的原子动量变化, 故总过程中原子的动量由 $\boldsymbol{p}_0$ 变为 $\boldsymbol{p}_0+n\hbar\boldsymbol{k}-\langle\sum_i\hbar\boldsymbol{p}_i\rangle$, 等效于光场对原子有作用力

$$
\boldsymbol{F}=\frac{n}{t}\hbar\boldsymbol{k}=\gamma\hbar\boldsymbol{k},\tag{12}
$$

其中 γ 为原子单位时间内的自发辐射次数. 光场中原子的密度矩阵元演化如下:

$$
\begin{aligned}
\dot\rho_{ab}&=-\left(i\Delta+\frac{\Gamma}{2}\right)\rho_{ab}+i\Omega_R\rho_{aa}-\frac{i}{2}\Omega_R &(13)\\
\dot\rho_{aa}&=-\Gamma\rho_{aa}+\frac{i}{2}\Omega_R(\rho_{ab}-\rho_{ba}), &(14)\\
\dot\rho_{ba}&=\dot\rho_{ab}^*, &(15)
\end{aligned}
$$

其中 Δ 为激光频率相对于原子跃迁频率的失谐, Γ 为能级 a 自发向能级 b 跃迁的速率, Ω_R 为 Rabi 频率. 稳态下,

$$
\begin{aligned}
\dot\rho_{ab}&=0, &(16)\\
\dot\rho_{aa}&=0, &(17)
\end{aligned}
$$

解得

$$
\rho_{aa}=\frac{\Omega_R^2}{4\Delta^2+\Gamma^2+2\Omega_R^2}.\tag{18}
$$

故光场对原子的等效作用力为

$$
\boldsymbol{F}=\Gamma\rho_{aa}\hbar\boldsymbol{k}=\Gamma\hbar\boldsymbol{k}\frac{\Omega_R^2}{4\Delta^2+\Gamma^2+2\Omega_R^2}.\tag{19}
$$

激光多普勒冷却原子时, 激光频率 ν_0 略小于原子跃迁频率 ω. 由于多普勒效应, 与光以速率 v 相向和同向而行的原子, 感受到的激光频率为

$$\nu=\nu_0\frac{1\pm\frac{v}{c}}{\sqrt{1+\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\approx\nu_0\pm k_0v, \tag{20}$$

即与光相向而行的原子, 感受到的激光频率靠近 ω, 失谐更小, 受到的光场的等效作用力更大, 该作用力使原子减速; 与光同向而行的原子, 感受到的激光频率远离 ω, 失谐更大, 受到的光场的等效作用力更小. 当用激光从各个方向上照射原子, 就可阻碍朝各个方向运动的原子, 从而实现冷却. □