期末考试

姓名：陈 稼 霖
学号：SA21038052
成绩：__________

第 1 题 得分: ________. V 型三能级原子与两个经典光场作用. 频率为 ω_1 的经典光场与能级 $|a\rangle$, $|b\rangle$ 耦合, 频率为 ω_2 的经典光场与能级 $|a\rangle$, $|c\rangle$ 耦合. 系统的哈密顿量为 $H=H_0+H_1$, $H_0=\hbar\omega_0|a\rangle\langle a|+\hbar\omega_b|b\rangle\langle b|+\hbar\omega_c|c\rangle\langle c|$,

$$H_1=\frac{\hbar}{2}(\Omega_{R1}e^{-i\phi_1}e^{-i\omega_1 t}|a\rangle\langle b|+\Omega_{R2}e^{-i\phi_2}e^{-i\omega_2 t}|a\rangle\langle c|)+\text{H.c.}$$

$\Omega_{R1}e^{-i\phi_1}$ 和 $\Omega_{R2}e^{-i\phi_2}$ 是复拉比频率. 原子的波函数可以写为 $|\Psi\rangle=c_a(t)e^{-i\omega_a t}|a\rangle+c_b e^{-i\omega_b t}|b\rangle+c_c(t)e^{-i\omega_c t}|c\rangle$. 原子和光场共振, 即: $\omega_a-\omega_b=\omega_1$, $\omega_a-\omega_c=\omega_2$, 通过解薛定谔方程, 可以求得波函数.

(1) 求 $c_a(t)$, $c_b(t)$, $c_c(t)$ 所满足的微分方程;

(2) 假设原子的初态为 $|\Psi(0)\rangle=\cos\frac{\theta}{2}|b\rangle+\sin\frac{\theta}{2}|c\rangle$, 求出 $c_a(t)$, $c_b(t)$, $c_c(t)$;

(3) 当 Ω_{R1}, Ω_{R2}, θ, ϕ_1, ϕ_2 满足什么条件时, 原子在演化过程中始终处于两个能级态 $|b\rangle$, $|c\rangle$ 的叠加态, 而不被激发到激发态上去. 这种现象叫做相干囚禁 (coherent trapping), 从物理上解释这种现象. (见 M. O. Scully, M. S. Zubairy 的书《quantum optics》 223-224 页, 世界图书出版公司出版, 中国, 北京)

解: □

第 2 题 得分: ________. 增加了一个光子的相干态 (Single-photon-added coherent state (SPACS)), $|\alpha,1\rangle=\frac{a^\dagger}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}|\alpha\rangle$, 考虑该辐射场的两个厄米算符 $X_1=\frac{1}{2}(a+a^\dagger)$, $X_2=\frac{1}{2i}(a-a^\dagger)$, 它们分别对应于场的复振幅的实部和虚部, 满足对易关系 $[X_1,X_2]=\frac{i}{2}$. 当 α 取何值时 (本题 α 取正实数) SPACS 态是压缩态. (提示: 压缩条件 $(\Delta X_1)^2<1/4$ 或 $(\Delta X_2)^2<1/4$).

解: ΔX_1 的涨落计算见 2011 年第 4 题, 当 $|\alpha|>1$ 时, $\Delta X_1<1$, 是压缩态.

X_2 的均值为

$$\begin{aligned}
\langle X_2\rangle=&\langle\alpha|\frac{a}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}\frac{1}{2i}(a-a^\dagger)\frac{a^\dagger}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}|\alpha\rangle\\
=&\frac{1}{2i(1+|\alpha|^2)}\langle\alpha|a(a-a^\dagger)a^\dagger|\alpha\rangle\\
=&\frac{1}{2i(1+|\alpha|^2)}\langle\alpha|(aaa^\dagger-aa^\dagger a^\dagger)|\alpha\rangle\\
=&\frac{1}{2i(1+|\alpha|^2)}\langle\alpha|[a(a^\dagger a+1)-(a^\dagger a+1)a^\dagger]|\alpha\rangle\\
=&\frac{1}{2i(1+|\alpha|^2)}\langle\alpha|(aa^\dagger a+a-a^\dagger aa^\dagger+a^\dagger)|\alpha\rangle\\
=&\frac{1}{2i(1+|\alpha|^2)}\langle\alpha|[(a^\dagger a+1)a+a-a^\dagger(a^\dagger a+1)+a^\dagger]|\alpha\rangle\\
=&\frac{1}{2i(1+|\alpha|^2)}\langle\alpha|(a^\dagger aa+2a-a^\dagger a^\dagger a+2a^\dagger)|\alpha\rangle\\
=&\frac{1}{2i(1+|\alpha|^2)}\langle\alpha|(\alpha^3+2\alpha-\alpha^3-2\alpha)|\alpha\rangle\\
=&0.
\end{aligned}\tag{1}$$

X_2^2 的均值为

$$\begin{aligned}
\langle X_2^2\rangle=&\langle\alpha|\frac{a}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}\left[\frac{1}{2i}(a-a^\dagger)\right]^2\frac{a^\dagger}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}|\alpha\rangle\\
=&-\frac{1}{4(1+|\alpha|^2)}\langle\alpha|a(aa-aa^\dagger-a^\dagger a+a^\dagger a^\dagger)a^\dagger|\alpha\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&-\frac{1}{4(1+|\alpha|^2)}\langle\alpha|a(aa-2a^\dagger a-1+a^\dagger a^\dagger)a^\dagger|\alpha\rangle\\
=&-\frac{1}{4(1+|\alpha|^2)}\langle\alpha|(aaaa^\dagger-2aa^\dagger aa^\dagger-aa^\dagger+aa^\dagger a^\dagger a^\dagger)|\alpha\rangle\\
=&-\frac{1}{4(1+|\alpha|^2)}\langle\alpha|[aa(a^\dagger a+1)-2(a^\dagger a+1)(a^\dagger a+1)-(a^\dagger a+1)+(a^\dagger a+1)a^\dagger a^\dagger]|\alpha\rangle\\
=&-\frac{1}{4(1+|\alpha|^2)}\langle\alpha|(aaa^\dagger a+aa-2a^\dagger aa^\dagger a-4a^\dagger a-2-a^\dagger a-1+a^\dagger aa^\dagger a^\dagger+a^\dagger a^\dagger)|\alpha\rangle\\
=&-\frac{1}{4(1+|\alpha|^2)}\langle\alpha|[a(a^\dagger a+1)a+aa-2a^\dagger(a^\dagger a+1)a-4a^\dagger a-2-a^\dagger a-1+a^\dagger(a^\dagger a+1)a^\dagger+a^\dagger a^\dagger]|\alpha\rangle\\
=&-\frac{1}{4(1+|\alpha|^2)}\langle\alpha|(aa^\dagger aa+2aa-2a^\dagger a^\dagger aa-2a^\dagger a-4a^\dagger a-2-a^\dagger a-1+a^\dagger a^\dagger aa^\dagger+2a^\dagger a^\dagger)|\alpha\rangle\\
=&-\frac{1}{4(1+|\alpha|^2)}\langle\alpha|[(a^\dagger a+1)aa+2aa-2a^\dagger a^\dagger aa-2a^\dagger a-4a^\dagger a-2-a^\dagger a-1+a^\dagger a^\dagger(a^\dagger a+1)+2a^\dagger a^\dagger]|\alpha\rangle\\
=&-\frac{1}{4(1+|\alpha|^2)}\langle\alpha|(a^\dagger aaa+3aa-2a^\dagger a^\dagger aa-2a^\dagger a-4a^\dagger a-2-a^\dagger a-1+a^\dagger a^\dagger a^\dagger a+3a^\dagger a^\dagger)|\alpha\rangle\\
=&-\frac{1}{4(1+|\alpha|^2)}\langle\alpha|(\alpha^4+3\alpha^2-2\alpha^4-2\alpha^2-4\alpha^2-2-\alpha^2-1+\alpha^4+3\alpha^2)|\alpha\rangle\\
=&\frac{\alpha^2+3}{4(1+\alpha^2)}>\frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

X_2 的涨落为

$$\Delta X_2=\sqrt{\langle X_2^2\rangle-\langle X_2\rangle^2}=\sqrt{\langle X_2^2\rangle}>\frac{1}{2}, \tag{2}$$

故无法由 ΔX_2 判断是否存在压缩.

综上, 当 $|\alpha|>1$ 时, SPACS 态为压缩态. □

第 3 题 得分: ________. 考虑一个理想的光学腔, 腔里有单模辐射场 $|\phi(0)\rangle_F=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-i|1\rangle)$. 处于基态与单模场共振的二能级原子 $|\varphi(0)\rangle_A=|g\rangle$ 进入该光学腔, 与场发生作用, 相互作用的哈密顿量为 $H_I=\hbar g(\sigma_+a^\dagger+\sigma_-(a^\dagger)^2)$ (在相互作用绘景中研究). 系统的演化方程为 $|\Psi\rangle_{AF}=e^{-i\frac{i}{\hbar}H_It}|\phi(0)\rangle_R|\varphi(0)\rangle_A$. 作用一段时间后原子从腔中逸出. 经探测: 出射原子处于激发态 $|e\rangle$.

(1) 计算该单模场初始时刻 $|\phi(0)\rangle_F$ 的平均光子数 $\bar{n}$;

(2) 任意时刻系统的态 $|\Psi(t)\rangle_{AF}$;

(3) 原子出射后, 腔内的辐射场的平均光子数变为多少?

解: (1)

(2)

(3)

□

第 4 题 得分: ________. 由一个赝自旋算符 $S_+=|e\rangle\langle g|$, $S_-=|g\rangle\langle e|$ 和 $S_3=(|e\rangle\langle e|-|g\rangle\langle g|)/2$ 描述的二能级原子, 可定义两个厄米算符: $S_1=(S_++S_-)/2$, $S_2=(S_+-S_-)/(2i)$, 他们的对易关系 $[S_1,S_2]=iS_3$, $S_3=1/2\sigma_z$. 相应的海森堡不确定关系为 $(\Delta S_1)^2(\Delta S_2)^2\geq 1/4\left|\langle S_3\rangle\right|^2$, 这里 $(\Delta S_i)^2=\langle S_i^2\rangle-\langle S_i\rangle^2$ 是原子算符 S_i 的量子涨落. 如果量子涨落满足 $(\Delta S_i)^2<1/2\left|\langle S_3\rangle\right|$ ($i=1$ 或 2), 我们说原子算符的涨落被压缩, 原子出现压缩效应. 当原子处于 $|\Psi\rangle=\cos(\frac{\theta}{2})|e\rangle+\sin(\frac{\theta}{2})|g\rangle$ 时 S_1 的平均值 $\langle S_1\rangle$, 求出分量 S_1 压缩的条件.

解: □

第 5 题 得分: ________. 设原子初态 $|\varphi(0)\rangle_A = \cos\alpha|e\rangle + \sin\alpha|g\rangle$, 光场初态是粒子数态 $|\varphi(0)\rangle_F = |6\rangle$. 该原子与光场之间的相互作用可用双光子 J-C 模型描述, 在共振条件和相互作用绘景中其哈密顿量表示为 $H_1 = \hbar g(\sigma_+ a^2 + \sigma_-(a^\dagger)^2)$, 求任意时刻 t,

(1) 该复合系统态矢.

(2) 原子处于激发态的概率, 画出概率图形 ($\alpha = \pi/4$, 横坐标表示时间, 纵坐标表示概率). (要求给出程序)

解: (1)

(2)

□

第 6 题 得分: ________. 一个二能级原子 A 与热库 E (环境) 相互作用如下: $U_{AE}|g\rangle_A|0\rangle_E = |e\rangle_A|0\rangle_E$, $U_{AE}|e\rangle_A|0\rangle_E = \sqrt{1-p}|e\rangle_A|0\rangle_E + \sqrt{p}|g\rangle_A|1\rangle_E$, 其中 p 与时间有关, $|0\rangle_E$ 是环境的真空态. 原子的演化可用 Kraus 算符和表示: $\rho_A(t) = \sum_i M_i\rho_A(0)M_i^\dagger$. Kraus 算符的定义是: $M_i = {}_E\langle i|U_{AE}|0\rangle_E$.

(1) 试求出 M_0 和 M_1.

(2) 设原子初态为 $\rho_A(0) = \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}$, 求出 $\rho_A(t)$.

解: (1)

(2)

□

第 7 题 得分: ________. 二能级原子与单模光场发生双光子共振相互作用, 系统的哈密顿量为 $H = \hbar\lambda[\sigma_-(a^\dagger)^2 + \sigma_+ a^2]$. 假设原子初态 ($t = 0$ 时刻的量子态) 为激发态 $|e\rangle$, 光场初态 $|n\rangle$.

(1) 求系统任意时刻的平均光子数;

(2) 画出平均光子数与时间的关系. (要求给出程序)

解: (1)

(2)

□

第 8 题 得分: ________. 二能级原子与单模光场发生共振作用, 系统的哈密顿量为 $H = \hbar\lambda(\sigma_- a^\dagger + \sigma_+ a)$. 如果原子 $t = 0$ 时刻处于激发态 $|e\rangle$, 而光场处于相干态 $|\alpha\rangle$, 计算任意时刻 t 原子处于基态 $|g\rangle$ 的概率 $P_g(t)$, 并作出图形 (横坐标表示时间, 纵坐标为概率. 为方便, $\alpha = 1$).

解: □

第 9 题 得分: ________. 二能级原子与单模光场发生双光子共振相互作用, 系统的哈密顿量为 $H = \hbar\lambda[\sigma_-(a^\dagger)^2 + \sigma_+ a^2]$. 假设原子初态 ($t = 0$ 时刻的量子态) 为激发态 $|e\rangle$, 光场初态为相干态 $|\alpha\rangle$. 求系统任意时刻的量子态.

解: □

第 10 题 得分: ________. 二能级原子与单模光场发生共振相互作用, 系统的哈密顿量为 $H = \hbar\lambda(\sigma_- a^\dagger + \sigma_+ a)$, 如果原子 $t = 0$ 时刻处于 $\cos\theta|e\rangle + \sin\theta|g\rangle$, 而光场处于相干态 $|\alpha\rangle$, 定义原子算符 $S_1 = 1/2(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|)$, 求任意时刻 t, S_1 的平均值.

解: □

第 11 题 得分: ________. 压缩态的另一种定义: $|\alpha\rangle_g = D(\alpha)S(\xi)|0\rangle$. 我们学过的压缩态为 $|\beta\rangle = S(\xi(\beta))|0\rangle$. 若 $|\alpha\rangle_g = |\beta\rangle_g$, 利用它们关于 $X_1 = 1/2(a + a^\dagger)$ 和 $X_2 = -i/2(a - a^\dagger)$ 的涨落图, 求出 α 和 β 的关系。

解: □

第 12 题 得分: ________. 下图椭圆表示某压缩相干态光场的两正交分量 $X_1 = 1/2(a + a^\dagger)$ 和 $X_2 = -i/2(a - a^\dagger)$ 的涨落范围. 已知椭圆长轴长为 $\Delta X_2 = 5$, 椭圆中心坐标为 $(0, 5)$

(1) 若该压缩相干态 $|\beta\rangle_g = S(\xi)D(\beta)|0\rangle$, 求 β, ξ;

(2) 若压缩相干态 $|\beta\rangle_g = D(\beta)S(\xi)|0\rangle$, 则 β, ξ 又是多少?

解: (1)

(2)

□

第 13 题 得分: ________. 薛定谔猫态 $|\psi\rangle = x[|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle]$,

(1) 求归一化系数 x,

(2) 定义光场的两个相位正交的振幅分量 $X_1 = 1/2(a + a^\dagger)$ 和 $X_2 = -i/2(a - a^\dagger)$, 讨论 X_2 的压缩条件.

解: (1)

(2)

□