6-2 （原 6.2 题）

试证明，对于一维自由粒子，在长度 L 内，在 ε 到 $\varepsilon+\mathrm{d}\varepsilon$ 的能量范围内，量子态数为

$$D(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon=\frac{2L}{h}\left(\frac{m}{2\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\varepsilon.$$

解 根据式(6.2.14)，一维自由粒子在 μ 空间体积元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}p_x$ 内可能的量子态数为

$$\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}p_x}{h}.$$

在长度 L 内，动量大小在 p 到 $p+\mathrm{d}p$ 范围内（注意动量可以有正负两个可能的方向）的量子态数为

$$\frac{2L}{h}\mathrm{d}p. \tag{1}$$

将能量动量关系

$$\varepsilon=\frac{p^2}{2m}$$

代入，即得

$$D(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon=\frac{2L}{h}\left(\frac{m}{2\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\varepsilon. \tag{2}$$

6-4 （原 6.4 题）

在极端相对论情形下，粒子的能量动量关系为

$$\varepsilon=cp.$$

试求在体积 V 内，在 ε 到 $\varepsilon+\mathrm{d}\varepsilon$ 的能量范围内三维粒子的量子态数.

解 式(6.2.16)已给出在体积 V 内，动量大小在 p 到 $p+\mathrm{d}p$ 范围内三维自由粒子可能的状态数为

$$\frac{4\pi V}{h^3}p^2\mathrm{d}p. \tag{1}$$

将极端相对论粒子的能量动量关系

$$\varepsilon=cp$$

代入，可得在体积 V 内，在 ε 到 $\varepsilon+\mathrm{d}\varepsilon$ 的能量范围内，极端相对论粒子的量子态数为

$$D(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon=\frac{4\pi V}{(ch)^3}\varepsilon^2\mathrm{d}\varepsilon. \tag{2}$$

6-5 （原 6.5 题）

设系统含有两种粒子，其粒子数分别为 N 和 N'. 粒子间的相互作用很弱，可以看作是近独立的. 假设粒子可以分辨，处在一个个体量子态的粒子数不受限制. 试证明，在平衡状态下两种粒子的最概然分布分别为

$$a_l=\omega_l e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}$$

和

$$a_l'=\omega_l' e^{-\alpha'-\beta\varepsilon_l'},$$

其中 ε_l 和 ε_l' 是两种粒子的能级，ω_l 和 ω_l' 是能级的简并度.

解 当系统含有两种粒子，其粒子数分别为 N 和 N'，总能量为 E，体积为 V 时，两种粒子的分布 $\{a_l\}$ 和 $\{a_l'\}$ 必须满足条件

$$\begin{aligned}&\sum_l a_l=N,\ \sum_l a_l'=N',\\&\sum_l \varepsilon_l a_l+\sum_l \varepsilon_l' a_l'=E\end{aligned}\tag{1}$$

才有可能实现.

在粒子可以分辨，且处在一个个体量子态的粒子数不受限制的情形下，两种粒子分别处在分布 $\{a_l\}$ 和 $\{a_l'\}$ 时各自的微观状态数为

$$\begin{aligned}\Omega&=\frac{N!}{\prod_l a_l!}\prod_l \omega_l^{a_l},\\\Omega'&=\frac{N'!}{\prod_l a_l'!}\prod_l \omega_l'^{a_l'}.\end{aligned}\tag{2}$$

系统的微观状态数 $\Omega^{(0)}$ 为

$$\Omega^{(0)}=\Omega\cdot\Omega'.\tag{3}$$

平衡状态下系统的最概然分布是在满足式(1)的条件下使 $\Omega^{(0)}$ 或 $\ln\Omega^{(0)}$ 为极大的分布. 利用斯特林公式，由式(3)可得

$$\begin{aligned}\ln\Omega^{(0)}&=\ln(\Omega\cdot\Omega')\\&=N\ln N-\sum_l a_l\ln a_l+\sum_l a_l\ln\omega_l+\\&\quad N'\ln N'-\sum_l a_l'\ln a_l'+\sum_l a_l'\ln\omega_l',\end{aligned}$$

为求使 $\ln\Omega^{(0)}$ 为极大的分布，令 a_l 和 a_l' 各有 δa_l 和 $\delta a_l'$ 的变化，$\ln\Omega^{(0)}$ 将因而有 $\delta\ln\Omega^{(0)}$ 的变化. 使 $\ln\Omega^{(0)}$ 为极大的分布 $\{a_l\}$ 和 $\{a_l'\}$ 必使

$$\delta\ln\Omega^{(0)}=0,$$

即

$$\delta\ln\Omega^{(0)}=-\sum_l \ln\left(\frac{a_l}{\omega_l}\right)\delta a_l-\sum_l \ln\left(\frac{a_l'}{\omega_l'}\right)\delta a_l'=0.$$

但这些 δa_l 和 $\delta a'_l$ 不完全是独立的，它们必须满足条件

$$\delta N=\sum_l \delta a_l=0,$$

$$\delta N'=\sum_l \delta a'_l=0,$$

$$\delta E=\sum_l \varepsilon_l\delta a_l+\sum_l \varepsilon'_l\delta a'_l=0.$$

用拉氏乘子 α,α' 和 β 分别乘这三个式子并从 $\delta\ln \Omega^{(0)}$ 中减去，得

$$\begin{aligned}&\delta\ln \Omega^{(0)}-\alpha\delta N-\alpha'\delta N'-\beta\delta E\\ &=-\sum_l\left(\ln\frac{a_l}{\omega_l}+\alpha+\beta\,\varepsilon_l\right)\delta a_l-\\ &\quad\sum_l\left(\ln\frac{a'_l}{\omega'_l}+\alpha'+\beta\,\varepsilon'_l\right)\delta a'_l\\ &=0.\end{aligned}$$

根据拉氏乘子法原理，每个 δa_l 和 $\delta a'_l$ 的系数都等于零，所以得

$$\ln\frac{a_l}{\omega_l}+\alpha+\beta\,\varepsilon_l=0,$$

$$\ln\frac{a'_l}{\omega'_l}+\alpha'+\beta\,\varepsilon'_l=0,$$

即

$$\begin{aligned}a_l&=\omega_l e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}\\ a'_l&=\omega'_l e^{-\alpha'-\beta\varepsilon'_l}.\end{aligned}\tag{4}$$

拉氏乘子 α,α' 和 β 由条件(1)确定. 式(4)表明，两种粒子各自遵从玻耳兹曼分布. 两个分布的 α 和 α' 可以不同，但有共同的 β. 原因在于我们开始就假设两种粒子的粒子数 N,N' 和总能量 E 具有确定值，这意味着在相互作用中两种粒子可以交换能量，但不会相互转化. 从上述结果还可以看出，由两个弱相互作用的子系统构成的系统达到热平衡时，两个子系统有相同的 β.

6-6 （原 6.6 题）

同上题，如果粒子是玻色子或费米子，结果如何？

解 本题的思路与上题完全相同.我们以玻色子和费米子组成的系统为例.当系统含有 N 个玻色子，N'个费米子，总能量为 E，体积为 V 时，粒子的分布 $\{a_l\}$ 和 $\{a'_l\}$ 必须满足条件

$$\sum_l a_l = N,$$

$$\sum_l a'_l = N',$$

$$\sum_l \varepsilon_l a_l + \sum_l \varepsilon'_l a'_l = E \tag{1}$$

才有可能实现.

玻色子处在分布 $\{a_l\}$，费米子处在分布 $\{a'_l\}$ 时，其微观状态数分别为

$$\Omega = \prod_l \frac{(\omega_l + a_l - 1)!}{a_l!\ (\omega_l - 1)!},$$

$$\Omega' = \prod_l \frac{\omega'_l}{a'_l!\ (\omega'_l - a'_l)!}. \tag{2}$$

系统的微观状态数 $\Omega^{(0)}$ 为

$$\Omega^{(0)} = \Omega \cdot \Omega'. \tag{3}$$

平衡状态下系统的最概然分布是在满足式(1)条件下使 $\Omega^{(0)}$ 或 $\ln \Omega^{(0)}$ 为极大的分布.将式(2)和式(3)取对数，利用斯特林公式可得

$$\ln \Omega^{(0)} = \sum_l \left[(\omega_l + a_l)\ln(\omega_l + a_l) - a_l \ln a_l - \omega_l \ln \omega_l \right] +$$

$$\sum_l \left[\omega'_l \ln \omega'_l - a'_l \ln a'_l - (\omega'_l - a'_l)\ln(\omega'_l - a'_l) \right].$$

令各 a_l 和 a'_l 有 δa_l 和 $\delta a'_l$ 的变化，$\ln \Omega^{(0)}$ 将因而有 $\delta \ln \Omega^{(0)}$ 的变化，使 $\ln \Omega^{(0)}$ 为极大的分布 $\{a_l\}$ 和 $\{a'_l\}$ 必使

$$\delta \ln \Omega^{(0)} = 0,$$

即

$$\delta \ln \Omega^{(0)} = \sum_l \frac{\ln(\omega_l + a_l)}{a_l} \delta a_l + \sum_l \ln \frac{\omega'_l - a'_l}{a'_l} \delta a'_l$$

$$= 0.$$

但这些 δa_l 和 $\delta a'_l$ 不完全是独立的，它们必须满足条件

$$\delta N = \sum_l \delta a_l = 0,$$

$$\delta N' = \sum_l \delta a'_l = 0,$$

$$\delta E = \sum_l \varepsilon_l \delta a_l + \sum_l \varepsilon'_l \delta a'_l = 0.$$

用拉格朗日乘子 α、α' 和 β 分别乘这三个式子并从 $\delta\ln\Omega^{(0)}$ 中减去,得

$$\begin{aligned}
&\delta\ln\Omega^{(0)}-\alpha\delta N-\alpha'\delta N'-\beta\delta E\\
&=\sum_l\left(\ln\frac{\omega_l+a_l}{a_l}-\alpha-\beta\varepsilon_l\right)\delta a_l+\\
&\quad\sum_l\left(\ln\frac{\omega'_l-a'_l}{a'_l}-\alpha'-\beta\varepsilon'_l\right)\delta a'_l\\
&=0.
\end{aligned}$$

根据拉格朗日乘子法原理,每个 δa_l 和 $\delta a'_l$ 的系数都等于零,所以得

$$\ln\frac{\omega_l+a_l}{a_l}-\alpha-\beta\ \varepsilon_l=0,$$

$$\ln\frac{\omega'_l-a'_l}{a'_l}-\alpha'-\beta\ \varepsilon'_l=0,$$

即

$$a_l=\frac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l}-1},$$

$$a'_l=\frac{\omega'_l}{e^{\alpha'+\beta\epsilon'_l}+1}\qquad(4)$$

拉格朗日乘子α,α'和β由条件（1）确定，式（4）表明，两种粒子分别遵从玻色分布和费米分布，其中α和α'不同，但β相等。