Name: 陈稼霖
StudentID: 45875852

Problem 7.4. 试证明，对于遵从玻尔兹曼分布的定域系统，熵函数可以表示为

$$S = -Nk \sum_s P_s \ln P_s$$

式中P_s是粒子处在量子态s的概率，$P_s = \frac{e^{-\alpha-\beta\varepsilon_s}}{N} = \frac{e^{-\beta\varepsilon_s}}{Z_1}$，$\sum_s$对粒子的所有量子态求和。
对于满足经典极限条件的非定域系统，熵的表达式有何不同？

Solution: 满足玻尔兹曼分布的定域系统的熵为

$$\begin{aligned} S =& Nk \left(\ln Z_1 - \beta \frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z_1 \right) \\ =& Nk(\ln Z_1 + \beta \frac{U}{N}) \\ =& Nk(\ln Z_1 + \beta\bar{\varepsilon}) \end{aligned} \tag{1}$$

其中配分函数可表为

$$Z_1 = \frac{e^{-\beta\varepsilon_s}}{P_s} \tag{2}$$

粒子平均能量可表为

$$\bar{\varepsilon} = \sum_s P_s \varepsilon_s \tag{3}$$

将以上两式代入熵表达式可得

$$\begin{aligned} S =& Nk \sum_s P_s (\ln \frac{e^{-\beta\varepsilon_s}}{P_s} - \beta\varepsilon_s) \\ =& Nk \sum_s P_s(-\beta\varepsilon_s - \ln P_s + \beta\varepsilon_s) \\ =& -Nk \sum_s P_s \ln P_s \end{aligned} \tag{4}$$

对于满足经典极限条件的非定域系统，其熵为

$$\begin{aligned} S =& Nk \left(\ln Z_1 - \beta \frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z_1 \right) - k \ln N! \\ =& -Nk \sum_s P_s \ln P_s - k \ln N! \\ =& -Nk \sum_s P_s \ln P_s - Nk(\ln N - 1) \end{aligned} \tag{5}$$

□

Problem 7.6. 晶体含有N个原子。原子在晶体中的正常位置如图7.7中的○所示。当原子离开正常位置而占据图中的×位置时，晶体中就出现空位和间隙原子。晶体的这种

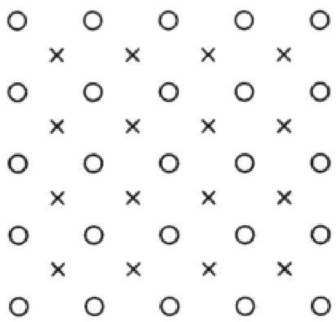

图 7.7

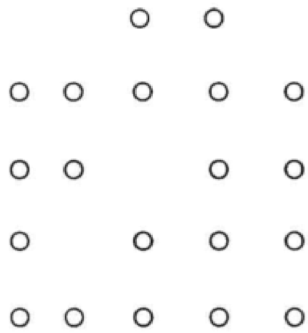

图 7.8

缺陷称为福仑克尔（Frenkel）缺陷。（a）假设正常位置和间隙位置数都是N，试证明由于在晶体中形成n个空位和间隙原子而具有的熵等于

$$S = 2k\ln\frac{N!}{n!(N-n)!}$$

（b）设原子在间隙位置和正常位置的能量差为u。试由自由能$F = nu - TS$为极小，证明温度为T时，空位和间隙原子数为

$$n \approx Ne^{-\frac{u}{2kT}}, \quad (\text{设}n \ll N)$$

Solution:

（a） 当晶体中形成n个空位和间隙原子时，系统可能的微观状态数为

$$\Omega = \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} = \frac{N!}{n!(N-n)!}\frac{N!}{n!(N-n)!} \tag{6}$$

故此时系统的熵为

$$S = k\ln\Omega = 2k\ln\frac{N!}{n!(N-n)!} \tag{7}$$

（b） 当形成空位和间隙原子时，系统的内能为

$$U = nu + U_0 \tag{8}$$

其中U_0为相同温度下，无缺陷时系统的内能。
由于晶体中总粒子数$N \gg 1$，利用斯特林公式，系统的自由能为

$$\begin{aligned} F =& U - TS \\ =& nu + U_0 - 2kT\ln\frac{N!}{n!(N-n)!} \\ =& nu + U_0 - 2kT[N\ln N - n\ln n - (N-n)\ln(N-n)] \end{aligned} \tag{9}$$

由自由能极小

$$\frac{\partial F}{\partial n} = u - 2kT\ln\frac{N-n}{n} = 0 \tag{10}$$

$$\Longrightarrow \ln\frac{N-n}{n} = \frac{u}{2kT} \tag{11}$$

由于缺陷数量远小于晶体中总粒子数$n \ll N$，从而上式可近似化为

$$n \approx Ne^{-\frac{u}{2kT}} \tag{12}$$

□

Problem 7.7. 如果原子脱离晶体内部的正常位置而占据表面上的正常位置，构成新的一层，如图7.8所示，晶体将出现缺陷。晶体的这种缺陷成为肖脱基（Shottky）缺陷。以N表示晶体中的原子数，n表示晶体中的空位数。如果忽略晶体体积的变化，试由自由能为极小的条件证明，温度为T时，

$$n \approx Ne^{-\frac{W}{kT}}, \quad (设n \ll N)$$

其中W为原子在表面位置与正常位置的能量差。

Solution: 当出现肖脱基缺陷时，原子脱离晶体内部的正常位置而占据表面的正常位置，系统可能的微观状态数为

$$\Omega = \begin{pmatrix} N+n \\ n \end{pmatrix} = \frac{(N+n)!}{n!N!} \tag{13}$$

故此时系统的熵为

$$S = k\ln\Omega = k\ln\frac{(N+n)!}{n!N!} \tag{14}$$

系统的内能为

$$U = nW + U_0 \tag{15}$$

其中U_0为相同温度下，无缺陷时系统的内能。
由于晶体中总粒子数$N \gg 1$，利用斯特林公式，系统的自由能为

$$\begin{aligned} F =& U - TS \\ =& nW + U_0 - kT\ln\frac{(N+n)!}{n!N!} \\ =& nW + U_0 - kT[(N+n)\ln(N+n) - n\ln n - N\ln N] \end{aligned} \tag{16}$$

由自由能极小

$$\frac{\partial F}{\partial n} = W - kT\ln\frac{N+n}{n} = 0 \tag{17}$$

$$\Longrightarrow \ln\frac{N+n}{n} = \frac{W}{kT} \tag{18}$$

由于缺陷数量远小于晶体中总粒子数$n \ll N$，从而上式可近似化为

$$n \approx Ne^{-\frac{W}{kT}} \tag{19}$$

$\square$

Problem 7.8. 稀薄气体由某种原子构成。原子两个能级能量之差为

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \hbar\omega_0$$

当原子从高能级ε_2跃迁到低能级ε_1到低能级ε_1时将伴随着光的发射。由于气体中原子的速度分布和多普勒效应，光谱仪观察到的不是单一频率ω_0的谱线，而是频率的一个分布，称为谱线的多普勒增宽。试求温度为T时多普勒增宽的表达式。

Solution: 假设原子质量为m，初态处于能级ε_2，速度为$\boldsymbol{v}_2$，当向z轴方向发射能量为$\hbar\omega$，动量为$\hbar\boldsymbol{k}$的光子后，跃迁到能级ε_1，速度变为$\boldsymbol{v}_1$。
动量守恒和能量守恒要求

$$m\boldsymbol{v}_1 + \hbar\boldsymbol{k} = m\boldsymbol{v}_2 \tag{20}$$

$$\varepsilon_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 + \hbar\omega = \varepsilon_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \tag{21}$$

取动量守恒式平方并除以$2m$得

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{\hbar^2k^2}{2m} + \hbar\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{k} = \frac{1}{2}mv_2^2 \tag{22}$$

将上式代入能量守恒式，并利用$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \hbar\omega$得

$$\hbar\omega_0 = \hbar\omega - \hbar\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{k} - \frac{\hbar^2k^2}{2m} \tag{23}$$

$$\Longrightarrow \omega_0 = \omega - \frac{v_{1z}\omega}{c} - \frac{\hbar\omega^2}{2mc^2} \tag{24}$$

由于$m \sim 10^{-26}\text{kg}$，$v_{1z} \sim 3\times 10^2\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，$\omega \sim 10^{15}\text{s}^{-1}$，$\frac{v_{1z}}{c} \sim 10^{-6} \gg \frac{\hbar\omega}{2mc^2} \sim 10^{-9}$，故上式右边第三项可略去，得

$$\omega = \frac{\omega_0}{1-\frac{v_{1z}}{c}} \approx \omega_0\left(1+\frac{v_{1z}}{c}\right) \tag{25}$$

v_{1z}在速率范围v_z至v_z+dv_z内的概率

$$f(v_z)dv_z \propto e^{-\frac{m}{2kT}v_z^2}dv_z \tag{26}$$

利用$v_z = c\left(\frac{\omega}{\omega_0}-1\right)$将上面的速率分布转换为频率分布

$$F(\omega)d\omega = \frac{e^{-\frac{m}{2kT}\frac{c^2(\omega-\omega_0)^2}{\omega_0^2}}\frac{c}{\omega_0}d\omega}{\int_0^{+\infty}e^{-\frac{m}{2kT}\frac{c^2(\omega-\omega_0)^2}{\omega_0^2}}\frac{c}{\omega_0}d\omega} = \frac{\omega_0\left(\frac{mc^2}{kT}\right)}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{m}{2kT}\frac{c^2(\omega-\omega_0)^2}{\omega_0^2}}d\omega \tag{27}$$

从而谱线多普勒增宽的表达式为

$$F(\omega) = \frac{\omega_0 \left(\frac{mc^2}{kT}\right)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m}{2kT}\frac{c^2(\omega-\omega_0)^2}{\omega_0^2}} \tag{28}$$

□

Problem 7.11. 表面活性物质的分子在液面上做二维自由运动，可以看做二维气体。试写出在二维气体中分子的速度分布和速率分布，并求平均速率$\bar{v}$、最概然速率v_m和均方均根速率v_s。

Solution: 二维气体中分子的速度分布为

$$\frac{m}{2\pi kT} e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2+v_y^2)} dv_x dv_y \tag{29}$$

速率分布为

$$\frac{m}{2\pi kT} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v dv \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{m}{kT} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v dv \tag{30}$$

平均速率为

$$\bar{v} = \int_0^{+\infty} \frac{m}{kT} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv = \sqrt{\frac{\pi kT}{2m}} \tag{31}$$

最概然速率满足

$$\frac{d}{dv}\left(e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v\right) = e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \left(-\frac{mv^2}{kT} + 1\right) = 0 \tag{32}$$

$$\frac{d}{dv}\left[e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \left(-\frac{mv^2}{kT} + 1\right)\right] = e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \left[\left(-\frac{mv}{kT}\right)\left(-\frac{mv^2}{kT} + 1\right) - \frac{2mv}{kT}\right] < 0 \tag{33}$$

解得最概然速率为

$$v_m = \sqrt{\frac{kT}{m}} \tag{34}$$

速率平方的平均值为

$$\overline{v^2} = \int_0^{+\infty} \frac{m}{kT} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^3 dv = \frac{2kT}{m} \tag{35}$$

故方均根速率为

$$v_s = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \tag{36}$$

□

Problem 7.12. 试根据麦氏速度分布律导出两分子的相对速度$\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$和相对速率$v_r = |\boldsymbol{v}_r|$的概率分布，并求相对速率的平均值$\bar{v}_t$。

Solution: 根据麦氏速度分布律，分子1和分子2分别处在速度范围$d\boldsymbol{v}_1$和$d\boldsymbol{v}_2$内的概率为

$$dP = dP_1 \cdot dP_2 = \left(\frac{m_1}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_1 v_1^2}{2}} d\boldsymbol{v}_1 \cdot \left(\frac{m_2}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_2 v_2^2}{2kT}} d\boldsymbol{v}_2 \tag{37}$$

上述两个分子的质心速率和相对速度分别为

$$\boldsymbol{v}_c = \frac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{38}$$

$$\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 \tag{39}$$

由这两个粒子构成的系统动能既可表为

$$E_k = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \tag{40}$$

又可表为

$$E_k = \frac{1}{2}m_cv_c^2 + \frac{1}{2}\mu v_r^2 \tag{41}$$

其中

$$m_c = m_1 + m_2 \tag{42}$$

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \tag{43}$$

因此上面的概率可同理表为

$$dP = \left(\frac{m_c}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_cv_c^2}{2kT}}d\boldsymbol{v}_c \cdot \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{\mu}{2kT}}d\boldsymbol{v}_r \tag{44}$$

其中相对速度的分布为

$$dP_r = \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{\mu v_r^2}{2kT}}d\boldsymbol{v}_r \tag{45}$$

相对速率的分布为

$$\left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{\mu v_r^2}{2kT}}v_r^2dv_rd\theta\int_0^\pi \sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi = 4\pi\left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{\mu v_r^2}{2kT}}v_r^2dv_r \tag{46}$$

相对速率的平均值为

$$\bar{v}_r = \int_0^{+\infty}4\pi\left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{\mu v_r^2}{2kT}}v_r^3dv_3 = \frac{8kT}{\pi\mu} \tag{47}$$

□

Problem 7.14. 分子从器壁的小孔射出，求在射出的分子束中，分子的平均速率、方均根速率和平均能量。

Solution: 设器壁法线方向沿z轴，在单位时间内碰到单位面积器壁上，速度范围dv_x, dv_y, dv_z内的粒子数为

$$d\Gamma(v_x, v_y, v_z) = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}v_xdv_xdv_ydv_z \tag{48}$$

速率范围dv内的粒子数为

$$\begin{aligned}
d\Gamma(v)=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\pi}d\phi d\Gamma(v_x,v_y,v_z)v^2\sin\theta dv\\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\pi}d\phi n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}v_xv^2\sin\theta dv\\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\pi}d\phi n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}v^3\sin\theta\cos\theta dv\\
=&\pi n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-\frac{m}{2kT}v^2}v^3dv
\end{aligned}\tag{49}$$

射出的分子束中，分子的平均速率为

$$\begin{aligned}
\bar{v}=&\frac{\int_0^{+\infty}vd\Gamma}{\int_0^{+\infty}d\Gamma}\\
=&\frac{\int_0^{+\infty}e^{-\frac{m}{2kT}v^2}v^4dv}{\int_0^{+\infty}e^{-\frac{m}{2kT}v^2}v^3dv}\\
=&\sqrt{\frac{9\pi kT}{8m}}
\end{aligned}\tag{50}$$

速率平方的平均值为

$$\begin{aligned}
\overline{v^2}=&\frac{\int_0^{+\infty}v^2d\Gamma}{\int_0^{+\infty}d\Gamma}\\
=&\frac{\int_0^{+\infty}e^{-\frac{m}{2kT}v^2}v^5dv}{\int_0^{+\infty}e^{-\frac{m}{2kT}v^2}v^3dv}\\
=&\frac{4kT}{m}
\end{aligned}\tag{51}$$

故方均根速率为

$$v_s=\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{4kT}{m}}\tag{52}$$

平均能量为

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2}m\overline{v^2}=2kT\tag{53}$$

□

Problem 7.16. 已知粒子遵从经典玻尔兹曼分布，其能量表达式为

$$\varepsilon=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+ax^2+bx$$

其中a、b是常数，求粒子的平均能量。

Solution: 粒子能量可表为

$$\varepsilon=\frac{1}{2}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a}\tag{54}$$

根据能量均分定理，粒子的平均能量为

$$\bar{\varepsilon} = 2kT - \frac{b^2}{4a} \tag{55}$$

□

Problem 7.19. 对于双原子分子，常温下kT远大于转动的能级间距。试求双原子分子理想气体的转动熵。

Solution: 双原子分子理想气体分子的配分函数为

$$Z_1^r = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)e^{-\frac{l(l+1)}{T}\theta_r} \tag{56}$$

当kT远大于转动的能级间距，满足经典极限条件，令$x = l(l+1)\frac{\theta_r}{T}$，配分函数可近似为

$$\begin{aligned} Z_1^r =& \int_0^{\infty}(2l+1)e^{-x}\frac{dx}{(2l+1)(\theta_r/T)} \\ =& \frac{T}{\theta_r}\int_0^{\infty}e^{-x}dx \\ =& \frac{T}{\theta_r} = T\frac{2Ik}{\hbar^2} = \frac{2I}{\beta\hbar^2} \end{aligned} \tag{57}$$

其中转动特征温度$\theta_r = \frac{\hbar^2}{2kI}$。
转动熵为

$$\begin{aligned} S =& Nk\left(\ln Z_1^r - \beta\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_1^r\right) \\ =& Nk\left[\ln\left(\frac{2I}{\beta\hbar^2}\right)+1\right] \\ =& Nk\left(\ln\frac{T}{\theta_r}+1\right) \end{aligned} \tag{58}$$

□

Problem 7.22. 以n表示晶体中原子的密度。设原子的总角动量量子数为1，磁矩为μ。在外磁场B下，原子磁矩可以有三个不同的取向，即平行、垂直、反平行于外磁场。假设磁矩之间的相互作用可以忽略。试求在温度为T时晶体的磁化强度M及其在弱场高温极限和强场低温极限下的近似值。

Solution: 系统中磁矩的配分函数为

$$\begin{aligned} Z_1 =& \sum_l \overline{\omega_l}e^{-\beta\varepsilon_l} = \sum_l \overline{\omega_l}e^{-\beta\mu_{zl}\mathcal{B}} \\ =& e^{\beta\mu\mathcal{B}} + 1 + e^{-\beta\mu\mathcal{B}} = 1 + 2\cosh(\beta\mu\mathcal{B}) \end{aligned} \tag{59}$$

晶体的磁化强度为

$$\begin{aligned}\mathcal{M} =& n\bar{\mu}\\ =&\frac{1}{V}\sum_l \mu_{zl}a_l\\ =&\frac{1}{V}\sum_l \frac{\partial\varepsilon_l}{-\partial\mathcal{B}}a_l\\ =&\frac{1}{V}\frac{N}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mathcal{B}}\ln Z_1\\ =&\frac{n}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mathcal{B}}\ln(1+2\cosh(\beta\mu\mathcal{B}))\\ =&n\mu\frac{2\sinh(\beta\mu\mathcal{B})}{1+2\cosh(\beta\mu\mathcal{B})}\end{aligned} \tag{60}$$

在弱场高温极限下有$\beta\mu\mathcal{B}\ll 1 \Longrightarrow \sinh(\beta\mu\mathcal{B})\approx\beta\mu\mathcal{B}, \cosh(\beta\mu\mathcal{B})\approx 1$，故

$$\mathcal{M} = \frac{2}{3}n\beta\mu^2\mathcal{B} \tag{61}$$

在强场高温极限下有$\beta\mu\mathcal{B}\gg 1 \Longrightarrow \sinh(\beta\mu\mathcal{B})\approx\cosh(\beta\mu\mathcal{B})\approx\frac{1}{2}e^{\beta\mu\mathcal{B}}$，故

$$\mathcal{M} = n\mu \tag{62}$$

□

Problem 8.2. 试证明，理想玻色和费米系统的熵可分别表示为

$$S_{B.E.} = -k\sum_s[f_s\ln f_s - (1+f_s)\ln(1+f_s)]$$
$$S_{F.D.} = -k\sum_s[f_s\ln f_s + (1-f_s)\ln(1-f_s)]$$

其中f_s为量子态s上的平均粒子数，$\sum_s$对粒子的所有量子态求和，并证明当$f_s\ll 1$，有

$$S_{B.E.}\approx S_{F.D.}\approx S_{M.B.} = -k\sum_s(f_s\ln f_s - f_s)$$

Solution: 理想波色系统可能的微观状态数为

$$\Omega_{B.E.} = \prod_l\frac{(\omega_l+a_l-1)!}{a_l!(\omega_l-1)!} \tag{63}$$

熵为

$$
\begin{aligned}
S_{B.E.} =& k\ln\Omega_{B.E.}\\
=& k\sum_l[(\omega_l+a_l)\ln(\omega_l+a_l)-a_l\ln a_l-\omega_l\ln\omega_l]\\
=& -k\sum_l[-(\omega_l+a_l)\ln(\omega_l+a_l)+a_l\ln a_l+(\omega_l+a_l)\ln\omega_l-a_l\ln\omega_l]\\
=& -k\sum_l\omega_l[-\frac{\omega_l+a_l}{\omega_l}\ln\frac{\omega+a_l}{\omega_l}+\frac{a_l}{\omega_l}\ln\frac{a_l}{\omega_l}]\\
=& -k\sum_l\omega_l[-(1+\frac{a_l}{\omega_l})\ln(1+\frac{+a_l}{\omega_l})+\frac{a_l}{\omega_l}\ln\frac{a_l}{\omega_l}]
\end{aligned}
\tag{64}
$$

由于平均粒子数

$$f_s=\frac{a_l}{\omega_l} \tag{65}$$

故熵可表为

$$
\begin{aligned}
S_{B.E.} =& -k\sum_l\omega_l[f_s\ln f_s-(1+f_s)\ln(1+f_s)]\\
=& -k\sum_s[f_s\ln f_s-(1+f_s)\ln(1+f_s)]
\end{aligned}
\tag{66}
$$

同理，理想费米系统可能的微观状态数为

$$\Omega_{F.D.}=\prod_l\frac{\omega_l!}{a_l!(\omega_l-a_l)!} \tag{67}$$

熵为

$$
\begin{aligned}
S_{F.D.} =& -k\ln\Omega_{F.D.}\\
=& k\sum_l[\omega_l\ln\omega_l-a_l\ln a_l-(\omega_l-a_l)\ln(\omega_l-a_l)]\\
=& -k\sum_l[-(\omega_l-a_l)\ln\omega_l-a_l\ln\omega_l+a_l\ln a_l+(\omega_l-a_l)\ln(\omega_l-a_l)]\\
=& -k\sum_l\omega[\frac{\omega_l-a_l}{\omega_l}\ln\frac{\omega_l-a_l}{\omega_l}+\frac{a_l}{\omega_l}\ln\frac{a_l}{\omega_l}]\\
=& -k\sum_l\omega[\frac{a_l}{\omega_l}\ln\frac{a_l}{\omega_l}+(1-\frac{a_l}{\omega_l})\ln(1-\frac{a_l}{\omega_l})]\\
=& -k\sum_l\omega_l[f_s\ln f_s+(1-f_s)\ln(1-f_s)]\\
=& -k\sum_s[f_s\ln f_s+(1-f_s)\ln(1-f_s)]
\end{aligned}
\tag{68}
$$

当$f_s\ll 1$时，有$1\pm f_s\approx 1,\ln(1\pm f_s)=\pm f_s$，故

$$S_{B.E.}\approx S_{F.D.}\approx S_{M.B.}=-k\sum_s(f_s\ln f_s-f_s) \tag{69}$$

□

Problem 8.4. 试证明，在热力学极限下均匀的二维理想玻色气体不会发生玻色凝聚。

Solution: 假设能发生玻色凝聚，在其临界温度T_c下，玻色系统的化学势满足

$$\frac{1}{V}\sum_l \frac{\omega_l}{e^{\frac{\varepsilon_l-\mu}{kT_c}}-1}=n \tag{70}$$

将二维自由粒子的状态密度$D(\varepsilon)d\omega=\frac{2\pi L^2}{h^2}md\varepsilon$代入并将求和换成积分得

$$\int_0^{+\infty}\frac{D(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT_c}-1}}=\frac{2\pi L^2}{h^2}m\int_0^{+\infty}\frac{d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT_c}-1}}=n \tag{71}$$

令$x=\frac{\varepsilon}{kT_c}$，上式化为

$$\frac{2\pi L^2}{h^2}mkT_c\int_0^{+\infty}\frac{dx}{e^x-1}=n \tag{72}$$

其中积分部分

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{e^x-1}&=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{e^x(1-e^{-x})}\\&=\int_0^{+\infty}e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nx}dx\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}e^{-nx}dx\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\end{aligned}$$

发散到正无穷，这意味着粒子数密度无穷大，这是物理所不能允许的，因此假设有误，二维理想玻色气体不会发生玻色凝聚。 □

Problem 8.5. 约束在磁光子陷阱中的理想原子气体，在三维谐振势场$V=\frac{1}{2}m(\omega_x^2x^2+\omega_y^2y^2+\omega_z^2z^2)$内运动。如果原子是玻色子，试证明：$T\leq T_c$时将有宏观量级的原子凝聚在能量为$\varepsilon_0=\frac{\hbar}{2}(\omega_x+\omega_y+\omega_z)$的基态。在$N\to\infty$、$\bar{\omega}\to 0$、$N\bar{\omega}^3$保持有限的热力学极限下，临界温度$T_c$由下式确定：

$$N=1.202\times\left(\frac{kT_c}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3$$

其中$\bar{\omega}=(\omega_x,\omega_y,\omega_z)^{\frac{1}{3}}$。温度为$T$时，凝聚在基态的原子数$N_0$与总原子数$N$之比为

$$\frac{N_0}{N}=1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^3$$

Solution: 由于V为三维谐振势场，故原子的能量为

$$\varepsilon_{n_x,n_y,n_z}=\hbar\omega_x(n_x+\frac{1}{2})+\hbar\omega_y(n_y+\frac{1}{2})+\hbar\omega_z(n_z+\frac{1}{2}) \tag{73}$$

若原子是玻色子，则其分布为

$$a_{n_x,n_y,n_z} = \frac{1}{e^{\frac{1}{kT}\left[\hbar\omega_x(n_x+\frac{1}{2})+\hbar\omega_y(n_y+\frac{1}{2})+\hbar\omega_z(n_z+\frac{1}{2})-\mu\right]}-1} \tag{74}$$

化学势小于最低能级

$$\mu < \varepsilon_0 = \frac{\hbar}{2}(\omega_x+\omega_y+\omega_z) \tag{75}$$

且满足

$$N = \sum_{n_x,n_y,n_z} \frac{1}{e^{\frac{1}{kT}[(\omega_x n_x+\omega_y n_y+\omega_z n_z)+(\varepsilon_0-\mu)]}-1} \tag{76}$$

在临界温度T_c下，$\mu\to\varepsilon_0$

$$N = \sum_{n_x,n_y,n_z} \frac{1}{e^{\frac{\hbar}{kT_c}(\omega_x n_x+\omega_y n_y+\omega_z n_z)}-1} \tag{77}$$

当$\bar{\omega}=(\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}\to 0$时，上式求和可化成积分

$$N = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{dn_x dn_y dn_z}{e^{\frac{\hbar}{kT_c}(\omega_x n_x+\omega_y n_y+\omega_z n_z)}-1} \tag{78}$$

令$\tilde{n}_i = \frac{k\omega_i}{kT_c} n_i (i=x,y,z)$，上式可化为

$$\begin{aligned}
N =& \left(\frac{kT_c}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3 \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{d\tilde{n}_x d\tilde{n}_y d\tilde{n}_z}{e^{\tilde{n}_x+\tilde{n}_y+\tilde{n}_z}-1}\\
=& \left(\frac{kT_c}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3 \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{d\tilde{n}_x d\tilde{n}_y d\tilde{n}_z}{e^{\tilde{n}_x+\tilde{n}_y+\tilde{n}_z}\left[1-e^{-(\tilde{n}_x+\tilde{n}_y+\tilde{n}_z)}\right]}\\
=& \left(\frac{kT_c}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3 \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(\tilde{n}_x+\tilde{n}_y+\tilde{n}_z)} \sum_{l=0}^{\infty} e^{-l(\tilde{n}_x+\tilde{n}_y+\tilde{n}_z)}\\
=& \left(\frac{kT_c}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3 \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-l(\tilde{n}_x+\tilde{n}_y+\tilde{n}_z)}\\
=& \left(\frac{kT_c}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3 \sum_{l=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-l\tilde{n}_x} d\tilde{n}_x \int_0^{+\infty}\sum_{l=1}^{\infty} e^{-l\tilde{n}_y} d\tilde{n}_y \int_0^{+\infty}\sum_{l=1}^{\infty} e^{-l\tilde{n}_z} d\tilde{n}_z\\
=& \left(\frac{kT_c}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3 \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^3}\\
=& 1.202\left(\frac{kT_c}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3
\end{aligned} \tag{79}$$

$$\Longrightarrow kT_c = \hbar\bar{\omega}\left(\frac{N}{1.202}\right)^{1/3} \tag{80}$$

临界温度就由上式确定。

在$T\leq T_c$时，凝聚在基态的原子数为

$$N_0 = N - 1.202\times\left(\frac{kT}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3 \tag{81}$$

从而凝聚在基态的原子数N_0与总原子数N之比为

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 \tag{82}$$

□

Problem 8.7. 计算温度为T时，在体积V内光子气体的平均总光子数，并据此估算①温度为1000K的平衡辐射和②温度为$3K$的宇宙背景辐射中光子的数密度。

Solution: 温度为T时，在体积V内，在ω到$\omega + d\omega$的圆频率范围内的平均光子数为

$$\bar{N}(\omega, T) = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \tag{83}$$

故平均总光子数为

$$\bar{N}(T) = \int_0^{+\infty} \bar{N}(\omega, T) d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^{+\infty} \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \tag{84}$$

令$x = \frac{\hbar\omega}{kT}$，上式可化为

$$\bar{N}(T) = \frac{V}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^3 \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \tag{85}$$

查课本附录C得

$$\bar{N}(T) = 2.404 \frac{V}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^3 \tag{86}$$

光子数密度为

$$\bar{n}(T) = \frac{\bar{N}(T)}{V} = 2.404 \frac{1}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^3 \tag{87}$$

① 温度为1000K的平衡辐射为中的光子数密度为

$$\bar{n}(T) = 2.404 \frac{1}{\pi^2 (3 \times 10^8)^3} \left(\frac{1.38 \times 10^{-23} \times 1000}{1.05 \times 10^{-34}}\right)^3 m^{-3} = 2.05 \times 10^{16} m^{-3} \tag{88}$$

② 温度为3K的宇宙背景辐射中光子的数密度为

$$\bar{n}(T) = 2.404 \frac{1}{\pi^2 (3 \times 10^8)^3} \left(\frac{1.38 \times 10^{-23} \times 3}{1.05 \times 10^{-34}}\right)^3 m^{-3} = 5.53 \times 10^8 m^{-3} \tag{89}$$

□

Problem 8.8. 试根据普朗克公式求平衡辐射内能密度按波长的分布：

$$u_\lambda d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

并据此证明，使辐射内能密度取极大的波长λ_m满足方程：（$x = hc/\lambda_m kT$）

$$5e^{-x} + x = 5$$

这个方程的数值解为$x = 4.9651$。因此

$$\lambda_m T = \frac{hc}{4.9651k}$$

λ_m随温度增加向短波方向移动。

Name: 陈稼霖
StudentID: 45875852

Solution: 根据普朗克公式，当温度为T时，在体积V内，在ω到$\omega+d\omega$的圆频率范围内的辐射场内能为

$$U(\omega,T)d\omega=\frac{V}{\pi^2c^3}\frac{\hbar\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}d\omega \tag{90}$$

辐射内能密度为

$$u_\omega d\omega=\frac{U(\omega,T)d\omega}{V}=\frac{1}{\pi^2c^3}\frac{\hbar\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}d\omega \tag{91}$$

利用$\omega=\frac{2\pi c}{\lambda}$，将上式化为按波长的分布

$$u_\lambda\left(-\frac{2\pi c}{\lambda^2}d\lambda\right)=\frac{1}{\pi^2c^3}\frac{\hbar\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^3}{e^{\frac{\hbar\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)}{kT}}-1}\left(-\frac{2\pi c}{\lambda^2}d\lambda\right) \tag{92}$$

$$\Longrightarrow u_\lambda d\lambda=\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{d\lambda}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1} \tag{93}$$

使辐射内能密度取极大的波长λ_m满足

$$\left.\frac{du_\lambda}{d\lambda}\right|_{\lambda_m}=\frac{8\pi\hbar c}{\lambda^6}\left.\left[-5-\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}e^{\frac{hc}{\lambda kT}}\frac{hc}{\lambda kT}\right]\right|_{\lambda_m}=0 \tag{94}$$

$$\Longrightarrow 5+\frac{e^x}{e^x-1}x=0 \tag{95}$$

$$\Longrightarrow 5e^{-x}+x=5 \tag{96}$$

其中$x=hc/\lambda_mkT$。

x_m为曲线$y=5e^{-x}$和$y=5-x$在y轴右侧交点的横坐标，通过图解法

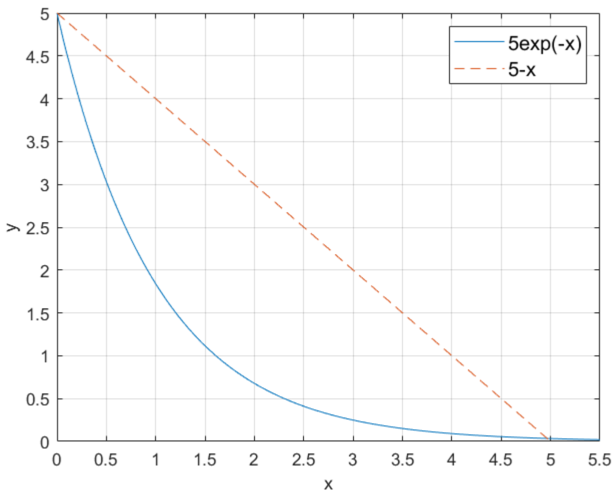

图 1: 第8.8题图解法

可得$x=4.9651$，因此

$$\lambda_mT=\frac{hc}{4.9651k} \tag{97}$$

λ_m随温度增加向短波方向移动。 $\square$

Problem 8.13. 银的导电电子数密度为$5.9\times 10^{28}/m^3$，试求$0K$时电子气体的费米能级、费米速率和简并压。

Solution: 0K时电子气体的费米能量为

$$\mu_0=\frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{2/3}=\frac{(1.05\times 10^{-34})^2}{2\times 9.1\times 10^{-31}}\left(3\pi^2\times 5.9\times 10^{28}\right)^{2/3}J=8.8\times 10^{-19}J=5.5eV \tag{98}$$

费米速率为

$$v_F=\frac{\hbar}{m}\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{1/3}=\frac{1.05\times 10^{-34}}{9.1\times 10^{-31}}\left(3\pi^2\times 5.9\times 10^{28}\right)^{1/3}m/s=1.4\times 10^6 m/s \tag{99}$$

简并压为

$$p=\frac{2}{5}n\mu_0=\frac{2}{5}\times 5.9\times 10^{28}\times 8.8\times 10^{-19}Pa=2.1\times 10^{10}Pa \tag{100}$$

□

Problem 8.17. 等温压缩系数κ_T和绝热压缩系数κ_S的定义分别为$\kappa_T=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$和$\kappa_S=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S$[式（2.2.13）]，试证明对于$0K$的理想费米气体，

$$\kappa_T(0)=\kappa_S(0)=\frac{3}{2}\frac{1}{n\mu(0)}$$

Solution: 0K下理想费米气体的简并压为

$$p(0)=\frac{2}{5}n\mu_0=\frac{\hbar^2}{5m}(3\pi^2)^{2/3}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3} \tag{101}$$

等温压缩系数为

$$\kappa_T(0)=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)\bigg|_{T=0}=-\frac{1}{V}\frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)\big|_{T=0}}=-\frac{1}{V}\frac{1}{\frac{\hbar^3}{5m}(3\pi^2)^{2/3}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}\left(-\frac{5}{3}\frac{1}{V}\right)}=\frac{3}{2}\frac{1}{n\mu(0)} \tag{102}$$

根据能斯特定理，$\lim_{T\Rightarrow 0}S=0$，故

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T=0}=\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{S=0} \tag{103}$$

从而绝热压缩系数为

$$\kappa_S(0)=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S=-\frac{1}{V}\frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)\big|_{T=0}}=\frac{3}{2}\frac{1}{n\mu(0)} \tag{104}$$

□

Problem 8.22. 由N个自旋极化的粒子组成的费米气体处在径向频率为ω_r、轴向频率为$\lambda\omega_r$的磁光陷阱内，粒子的能量（哈密顿量）为

$$\varepsilon=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+\frac{m}{2}\omega_r^2(x^2+y^2+\lambda^2z^2)$$

试求$0K$时费米气体的化学势和粒子的平均能量。假设$N=10^5$，$\omega_r=3800s^{-1}$，$\lambda^2=8$，求出数值结果。

Solution: 取能量零点为$\hbar\varepsilon\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)$，粒子的能量为

$$\varepsilon_{n_x,n_y,n_z}=\hbar\omega(n_x+n_y+\lambda n_z),\quad n_i=0,1,2,\cdots(i=x,y,z) \tag{105}$$

化学势满足

$$N=\sum_{n_x,n_y,n_z}\frac{1}{e^{\beta[\hbar\omega(n_x+n_y+\lambda n_z)-\mu]}+1} \tag{106}$$

当N足够大以至于n_i的足够多，上式可化为积分

$$N=\iiint\frac{dn_xdn_ydn_z}{e^{\beta[\hbar\omega_r(n_x+n_y+\lambda n_z)-\mu]}+1} \tag{107}$$

令$\varepsilon_i=n_i\hbar\omega_r,(i=x,y)$，$\varepsilon_z=\lambda n_z\hbar\omega_z$，上式可化为

$$N=\frac{1}{\lambda(\hbar\omega_r)^3}\iiint\frac{d\varepsilon_xd\varepsilon_yd\varepsilon_z}{e^{\beta[(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)-\mu]}+1}=\frac{1}{\lambda(\hbar\omega_r)^3}\iiint\frac{d\varepsilon d\varepsilon_xd\varepsilon_z}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} \tag{108}$$

其中$\varepsilon=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$，对给定的$\varepsilon$，$\varepsilon_x+\varepsilon_y\leq\varepsilon$，$\int d\varepsilon_x\int d\varepsilon_y=\frac{1}{2}\varepsilon^2$，故上式可化为

$$N=\frac{1}{2\lambda(\hbar\omega_r)^3}\int_0^{+\infty}\frac{\varepsilon d\varepsilon}{2e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}=\int_0^{+\infty}\frac{D(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} \tag{109}$$

其中态密度$D(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{1}{2\lambda(\hbar\omega_r)^3}\varepsilon^2d\varepsilon$。
0K时，所有粒子尽可能处于最低的能级，由于这是费米系统，故粒子将会从能量零点填充到费米能级$\mu(0)$，此时总粒子数为

$$N=\frac{1}{2\lambda(\hbar\omega_r)^3}\int_0^{\mu(0)}\varepsilon^2d\varepsilon=\frac{1}{2\lambda(\hbar\omega_r)^3}\frac{\mu^3(0)}{3} \tag{110}$$

故此时费米气体的化学势为

$$\mu(0)=\hbar\omega_r(6\lambda N)^{1/3} \tag{111}$$

粒子的平均能量为

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{N}\int_0^{\mu(0)}D(\varepsilon)\varepsilon d\varepsilon=\frac{1}{2\lambda(\hbar\omega_r)^3}\frac{\mu^4(0)}{4}=\frac{3}{4}\mu(0)=\frac{3}{4}\hbar\omega_r(6\lambda N)^{1/3} \tag{112}$$

代入题设数据得

$$\mu(0)=\hbar\omega_r(6\lambda N)^{1/3}=1.05\times10^{-34}\times3800\times(6\times2\sqrt{2}\times10^5)^{1/3}J=4.8\times10^{-29}J \tag{113}$$

$$\bar{\varepsilon}=\frac{3}{4}\mu(0)=3.6\times10^{-29}J \tag{114}$$

□

Problem 8.23. 承上题，试求低温极限$T\ll T_F$和高温极限$T\gg T_F$下，磁光陷阱中理想费米气体的化学势、内能和热容。

Solution: 在低温极限$T \ll T_F$下，根据课本式(8.5.14)，积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\eta(\varepsilon)}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} - 1} d\varepsilon \tag{115}$$

可展开为

$$I = \int_0^{\mu} \eta(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 \eta'(\mu) + \cdots \tag{116}$$

故磁光陷阱中理想费米气体的总粒子数可写为

$$N \approx \frac{1}{6\lambda(\hbar\omega_r)^3} \mu^3 \left[1 + \pi^2 \left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right] \tag{117}$$

$$\Longrightarrow \mu = (6\lambda N)^{1/3}(\hbar\omega_r) \left[1 + \pi \left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right] \approx \mu(0) \left[1 - \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{kT}{\mu(0)}\right)^2\right] \tag{118}$$

气体内能为

$$\begin{aligned} U =& \frac{1}{2\lambda(\hbar\omega_r)^3} \int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon^3 d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} - 1} \\ \approx& \frac{1}{8\lambda(\hbar\omega_r)^3} \mu^4 \left[1 + 2\pi^2 \left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right] \\ \approx& \frac{1}{8\lambda(\hbar\omega_r)^3} \mu^4(0) \left[1 - \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{kT}{\mu(0)}\right)^2\right]^4 \cdot \left[1 + 2\pi^2 \left(\frac{kT}{\mu(0)}\right)^2\right] \\ \approx& \frac{3}{4} N\mu(0) \left[1 + \frac{2}{3}\pi^2 \left(\frac{kT}{\mu(0)}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{119}$$

热容为

$$C = \frac{dU}{dT} = Nk\pi^2 \frac{kT}{\mu(0)} \tag{120}$$

在高温极限$T \gg T_F$下，有$e^{-\frac{\mu}{kT}} \approx e^{-\frac{T_F}{T}} \approx 1$，系统配分函数为

$$\begin{aligned} Z_1 =& \int_0^{+\infty} D(\varepsilon) e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon \\ =& \frac{1}{2\lambda(\hbar\omega_r)^3} \int_0^{+\infty} e^{-\beta\varepsilon} \varepsilon^2 d\varepsilon \\ =& \frac{1}{2\lambda(\hbar\omega_r)^3} \frac{2}{\beta^3} \end{aligned} \tag{121}$$

内能为

$$U = -N \frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z_1 = 3NkT \tag{122}$$

热容为

$$C = \frac{dU}{dT} = 3kN \tag{123}$$

化学势为

$$\mu = -kT \ln \frac{Z_1}{N} = -kN \left[6 \left(\frac{kT}{\mu(0)}\right)^3\right] \tag{124}$$

□