Name: 陈稼霖
StudentID: 45875852

Problem 6.2. 试证明，对于一个一维自由粒子，在长度L内，在ε到$\varepsilon+d\varepsilon$的能量范围内，量子态数为

$$D(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{2L}{h}\left(\frac{m}{2\varepsilon}\right)^{1/2}d\varepsilon$$

Solution: 在以x和p为直角坐标的μ空间中，每个相格（量子态占据的格子）大小为

$$\Delta x\Delta p_x=h \tag{1}$$

因此，μ空间中的量子态密度为

$$\frac{1}{h} \tag{2}$$

长度L和ε到$\varepsilon+d\varepsilon$的能量范围对应的μ空间中的面积（考虑到动量p_x可以有正负两个方向）为

$$dxdp_x=2Ld(2m\varepsilon)^{1/2}=L\left(\frac{2m}{\varepsilon}\right)^{1/2}d\varepsilon \tag{3}$$

在这块面积中的量子态数为

$$D(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{1}{h}\cdot dxdp_x=\frac{2L}{h}\left(\frac{m}{2\varepsilon}\right)^{1/2}d\varepsilon \tag{4}$$

□

Problem 6.4. 在极端相对论情形下，粒子的能量动量$\varepsilon=cp$。试求在体积V内，在ε到$\varepsilon+d\varepsilon$的能量范围内三维粒子的量子态数。

Solution: 在体积V内，动量大小在p到$p+dp$的范围内（动量方向为任意），自由粒子可能的状态数为

$$\frac{4\pi V}{h^3}p^2dp \tag{5}$$

根据公式$\varepsilon=cp$，在体积V内，在ε到$\varepsilon+d\varepsilon$的能量范围内，自由粒子可能的状态数为

$$\frac{4\pi V}{h^3}\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^2d\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)=\frac{4\pi V\varepsilon^2}{h^3c^3}d\varepsilon \tag{6}$$

□

Problem 6.5. 设系统含有两种粒子，其粒子数分别为N和N'。粒子间的相互作用很弱，可以看做是近独立的。假设粒子可以分辨，处在一个个体量子态的粒子数不受限制。试证明，在平衡状态下两种粒子的最概然分布分别为

$$a_l=\omega_l e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}$$

和

$$a_l'=\omega_l' e^{-\alpha'-\beta\varepsilon_l'}$$

其中ε_l和ε_l'是两种粒子的能级，ω_l和ω_l'是能级的简并度。
讨论：如果把一种粒子看作是一个系统，系统由两个子系统组成。以上结果表明，互为热平衡的两个子系统具有相同的β。

Name: 陈稼霖
StudentID: 45875852

Solution: 由于粒子可分辨，且处在一个个体量子态的粒子数不受限制，故为玻尔兹曼分布，两种粒子的微观状态数分别为

$$\Omega = \frac{N!}{\prod_l a_l!}\prod_l \omega_l^{a_l} \tag{7}$$

$$\Omega' = \frac{N'!}{\prod_l a_l!}\prod_l \omega_l'^{a_l'} \tag{8}$$

系统总微观状态数为

$$\Omega_{总} = \Omega\Omega' \tag{9}$$

对上式两边同取对数得

$$\ln\Omega_{总} = \ln\Omega + \ln\Omega' = \ln N! - \sum_l \ln a_l! + \sum_l \ln\omega_l^{a_l} + \ln N'! - \sum_l \ln a_l'! + \sum_l \ln\omega_l'^{a_l'} \tag{10}$$

当$a_l \gg 1$时，利用斯特林公式得

$$\begin{aligned}\ln\Omega_{总} \approx& N(\ln N - 1) - \sum_l a_l(\ln a_l - 1) + \sum_l a_l\ln\omega_l\\ &+ N'(\ln N' - 1) - \sum_l a_l'(\ln a_l' - 1) + \sum_l a_l'\ln\omega_l'\\ \approx& N\ln N - \sum_l a_l\ln a_l + \sum_l a_l\ln\omega_l + N'\ln N' - \sum_l a_l'\ln a_l' + \sum_l a_l'\ln\omega_l'\end{aligned} \tag{11}$$

当a_l和a_l'变化δa_l和$\delta a_l'$，$\ln\Omega_{总}$变化$\delta\ln\Omega_{总}$，为使$\ln\Omega_{总}$，

$$\delta\ln\Omega_{总} = -\sum_l a_l\frac{1}{a_l}\delta a_l - \sum_l \ln a_l\delta a_l + \sum_l \ln\omega_l da_l - \sum_l a_l'\frac{1}{a_l'}\delta a_l' - \sum_l \ln a_l'\delta a_l' + \sum_l \ln\omega_l' da_l' \tag{12}$$

由于存在约束

$$\sum_l a_l = N \Longrightarrow \delta N = \sum_l \delta a_l = 0 \tag{13}$$

$$\sum_l a_l' = N' \Longrightarrow \delta N' = \sum_l \delta a_l' = 0 \tag{14}$$

$$\sum_l \varepsilon_l a_l + \sum_l \varepsilon_l' a_l' = E \Longrightarrow \delta E = \sum_l \varepsilon_l\delta a_l + \sum_l \varepsilon_l'\delta a_l' = 0 \tag{15}$$

设拉格朗日乘子α, α', β

$$\begin{aligned}\delta\ln\Omega_{总}-\alpha\delta N-\alpha' N'-\beta\delta E=&-\sum_l\left(\ln\frac{a_l}{\omega_l}+\alpha+\beta\varepsilon_l\right)\delta a_l\\&-\sum_l\left(\ln\frac{a_l'}{\omega_l'}+\alpha'+\beta\varepsilon'\right)\delta a_l'\\=&0\end{aligned}\tag{16}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\ln\frac{a_l}{\omega_l}+\alpha+\beta\varepsilon_l=0\\\ln\frac{a_l'}{\omega_l'}+\alpha'+\beta\varepsilon_l'=0\end{cases}\tag{17}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}a_l=\omega_l e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}\\a_l'=\omega_l' e^{-\alpha'-\beta\varepsilon_l'}\end{cases}\tag{18}$$

如果把一种粒子看作是一个系统，互为热平衡的两个子系统具有相同的β，这是因为在热平衡的过程中两个子系统之间可以发生能量的交换。 □

Problem 6.6. 同上题，如果粒子是玻色子或者费米子，结果如何？

Solution: 分类讨论：

- 设波色子粒子数为N，费米子粒子数为N'，则两种粒子的微观状态数分别为

$$\Omega=\prod_l\frac{(\omega_l+a_l-1)!}{a_l!(\omega_l-1)!}\tag{19}$$

$$\Omega'=\prod_l\frac{\omega_l'}{a_l'!(\omega_l'-a_l')!}\tag{20}$$

对系统的微观状态数

$$\Omega_{总}=\Omega\Omega'\tag{21}$$

取对数并利用斯特林公式得

$$\ln\Omega_{总}=\sum_l[(\omega_l+a_l)\ln(\omega_l+a_l)-a_l\ln a_l-\omega_l\ln\omega_l]+\sum_l[\omega_l'\ln\omega_l'-a_l'\ln a_l'-(\omega_l'-a_l')\ln(\omega_l'-a_l')]\tag{22}$$

要使$\ln\Omega_{总}$极大，

$$\ln\Omega_{总}\approx\sum_l\ln\frac{(\omega_l+a_l)}{a_l}\delta a_l+\sum_l\ln\frac{(\omega_l'-a_l')}{a_l'}\delta a_l'=0\tag{23}$$

根据约束

$$\sum_l a_l=N\Longrightarrow\delta N=\sum_l\delta a_l=0\tag{24}$$

$$\sum_l a_l'=N'\Longrightarrow\delta N'=\sum_l\delta a_l'=0\tag{25}$$

$$\sum_l\varepsilon_l a_l+\sum_l\varepsilon_l' a_l'=E\Longrightarrow\delta E=\sum_l\varepsilon_l\delta a_l+\sum_l\varepsilon_l'\delta a_l'=0\tag{26}$$

设拉格朗日乘子α,α',β

$$\begin{aligned}\delta\ln\Omega_{总}-\alpha\delta N-\alpha'\delta N'-\beta\delta E=&\sum_l\left(\ln\frac{(\omega_l+a_l)}{a_l}+\alpha+\beta\varepsilon_l\right)\delta a_l\\&+\sum_l\left(\ln\frac{(\omega_l'-a_l')}{a_l'}+\alpha'+\beta\varepsilon_l'\right)\delta a_l'\\=&0\end{aligned}\tag{27}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}a_l=\frac{\omega_l}{e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}-1}\\a_l'=\frac{\omega_l'}{e^{-\alpha'-\beta\varepsilon_l'}+1}\end{cases}\tag{28}$$

- 若两种粒子均为波色子，设其粒子数分别为N和N'，则两种粒子的微观状态数分别为

$$\Omega=\prod_l\frac{(\omega_l+a_l-1)!}{a_l!(\omega_l-1)!}\tag{29}$$

$$\Omega'=\prod_l\frac{(\omega_l'+a_l'-1)}{a_l'!(\omega_l'-1)!}\tag{30}$$

对系统的微观状态数

$$\Omega_{总}=\Omega\Omega'\tag{31}$$

取对数并利用斯特林公式得

$$\ln\Omega_{总}=\sum_l[(\omega_l+a_l)\ln(\omega_l+a_l)-a_l\ln a_l-\omega_l\ln\omega_l]+\sum_l[(\omega_l'+a_l')\ln(\omega_l'+a_l')-a_l'\ln a_l'-\omega_l'\ln\omega_l']\tag{32}$$

要使$\ln\Omega_{总}$极大，

$$\ln\Omega_{总}\approx\sum_l\ln\frac{(\omega_l+a_l)}{a_l}\delta a_l+\sum_l\ln\frac{(\omega_l'+a_l')}{a_l'}\delta a_l'=0\tag{33}$$

根据约束

$$\sum_l a_l=N\Longrightarrow\delta N=\sum_l\delta a_l=0\tag{34}$$

$$\sum_l a_l'=N'\Longrightarrow\delta N'=\sum_l\delta a_l'=0\tag{35}$$

$$\sum_l\varepsilon_l a_l+\sum_l\varepsilon_l'a_l'=E\Longrightarrow\delta E=\sum_l\varepsilon_l\delta a_l+\sum_l\varepsilon_l'\delta a_l'=0\tag{36}$$

Name: 陈稼霖
StudentID: 45875852

设拉格朗日乘子α, α', β

$$\begin{aligned}\delta\ln\Omega_{总}-\alpha\delta N-\alpha'\delta N'-\beta\delta E=&\sum_l\left(\ln\frac{(\omega_l+a_l)}{a_l}+\alpha+\beta\varepsilon_l\right)\delta a_l\\&+\sum_l\left(\ln\frac{(\omega_l'+a_l')}{a_l'}+\alpha+\beta\varepsilon_l'\right)\delta a_l'\\=&0\end{aligned} \tag{37}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}a_l=\frac{\omega_l}{e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}-1}\\a_l'=\frac{\omega_l'}{e^{-\alpha'-\beta\varepsilon_l'}-1}\end{cases} \tag{38}$$

- 若两种粒子均为费米子，设其粒子数分别为N和N'，则两种粒子的微观状态数分别为

$$\Omega=\prod_l\frac{\omega_l}{a_l!(\omega_l-a_l)!} \tag{39}$$

$$\Omega'=\prod_l\frac{\omega_l'}{a_l'!(\omega_l'-a_l')!} \tag{40}$$

对系统的微观状态数

$$\Omega_{总}=\Omega\Omega' \tag{41}$$

取对数并利用斯特林公式得

$$\ln\Omega_{总}=\sum_l[\omega_l\ln\omega_l-a_l\ln a_l-(\omega_l-a_l)\ln(\omega_l-a_l)]+\sum_l[\omega_l'\ln\omega_l'-a_l'\ln a_l'-(\omega_l'-a_l')\ln(\omega_l'-a_l')] \tag{42}$$

要使$\ln\Omega_{总}$极大，

$$\ln\Omega_{总}\approx\sum_l\ln\frac{(\omega_l-a_l)}{a_l}\delta a_l+\sum_l\ln\frac{(\omega_l'-a_l')}{a_l'}\delta a_l'=0 \tag{43}$$

根据约束

$$\sum_l a_l=N\Longrightarrow\delta N=\sum_l\delta a_l=0 \tag{44}$$

$$\sum_l a_l'=N'\Longrightarrow\delta N'=\sum_l\delta a_l'=0 \tag{45}$$

$$\sum_l\varepsilon_l a_l+\sum_l\varepsilon_l'a_l'=E\Longrightarrow\delta E=\sum_l\varepsilon_l\delta a_l+\sum_l\varepsilon_l'\delta a_l'=0 \tag{46}$$

Name: 陈稼霖
StudentID: 45875852

设拉格朗日乘子α,α',β

$$\begin{aligned}\delta\ln\Omega_{总}-\alpha\delta N-\alpha'\delta N'-\beta\delta E=&\sum_l\left(\ln\frac{(\omega_l-a_l)}{a_l}+\alpha+\beta\varepsilon_l\right)\delta a_l\\&+\sum_l\left(\ln\frac{(\omega_l'-a_l')}{a_l'}+\alpha'+\beta\varepsilon_l'\right)\delta a_l'\\=&0\end{aligned} \tag{47}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}a_l=\frac{\omega_l}{e^{-\alpha-\beta\varepsilon}l+1}\\a_l'=\frac{\omega_l'}{e^{-\alpha'-\beta\varepsilon'}l+1}\end{cases} \tag{48}$$

□

Problem *. 假定一种满足波色统计的分子可能占据的能级有4个，对应能级能量分别为0，E，$2E$，$3E$，能级简并度分别为1，2，2，2，如果系统含有6个分子，

a. 写出与总能量$3E$相关的分布以及分布需要满足的条件，

b. 计算a)中每种分布对应的微观状态数，

c. 确定a)中每种分布的概率。

Solution:

a. 与总能量相关的分布见表1 分布$\{a_n\}$所需要满足的条件

表 1: 与总能量$3E$相关的各种分布

分布		a_0	a_1	a_2	a_3
能级		0	E	$2E$	$3E$
可能情况序号	1	3	3	0	0
	2	4	1	1	0
	3	5	0	0	1

$$\sum_{l=0}^{3}a_l=a_0+a_1+a_2+a_3=6 \tag{49}$$

$$\sum_{l=0}^{3}\varepsilon_la_l=Ea_1+2Ea_2+3Ea_3=E(a_1+2a_2+3a_3)=3E \tag{50}$$

b. 分布$\{a_0,a_1,a_2,a_3\}=\{3,3,0,0\}$对应的微观状态数为

$$\Omega=\prod_l\frac{(\omega_l+a_l-1)!}{(\omega_l-a_l)!a_l!}=\frac{(1+3-1)!}{(1-1)!3!}\frac{(2+3-1)!}{(2-1)!3!}\frac{(2+0-1)!}{(2-1)!0!}\frac{(2+0-1)!}{(2-1)!0!}=4 \tag{51}$$

分布$\{a_0,a_1,a_2,a_3\}=\{4,1,1,0\}$对应的微观状态数为

$$\Omega=\prod_l\frac{(\omega_l+a_l-1)!}{(\omega_l-a_l)!a_l!}=\frac{(1+4-1)!}{(1-1)!4!}\frac{(2+1-1)!}{(2-1)!1!}\frac{(2+1-1)!}{(2-1)!1!}\frac{(2+0-1)!}{(2-1)!0!}=4 \tag{52}$$

分布$\{a_0,a_1,a_2,a_3\}=\{5,0,0,1\}$对应的微观状态数为

$$\Omega=\prod_l\frac{(\omega_l+a_l-1)!}{(\omega_l-a_l)!a_l!}=\frac{(1+5-1)!}{(1-1)!5!}\frac{(2+0-1)!}{(2-1)!0!}\frac{(2+0-1)!}{(2-1)!0!}\frac{(2+1-1)!}{(2-1)!1!}=2 \tag{53}$$

通过枚举法也可得到相同的结论，见表2。

表 2: 与总能量3E相关的各种微观状态下的各量子态分布的粒子数

能级				0	E		$2E$		$3E$	
简并态序号				1	1	2	1	2	1	2
分布可能情况序号	1	微观状态数可能情况序号	1	3	3	0	0	0	0	0
			2	3	2	1	0	0	0	0
			3	3	1	2	0	0	0	0
			4	3	0	3	0	0	0	0
	2		5	4	1	0	1	0	0	0
			6	4	1	0	0	1	0	0
			7	4	0	1	1	0	0	0
			8	4	0	1	0	1	0	0
	3		9	5	0	0	0	0	1	0
			10	5	0	0	0	0	0	1

c. 根据等概率原理，分布$\{a_0,a_1,a_2,a_3\}=\{3,3,0,0\}$的概率为

$$P_1=\frac{4}{4+4+2}=\frac{2}{5} \tag{54}$$

分布$\{a_0,a_1,a_2,a_3\}=\{4,1,1,0\}$的概率为

$$P_1=\frac{4}{4+4+2}=\frac{2}{5} \tag{55}$$

分布$\{a_0,a_1,a_2,a_3\}=\{5,0,0,1\}$的概率为

$$P_1=\frac{2}{4+4+2}=\frac{1}{5} \tag{56}$$

$\square$