# 理论力学作业_1

陈稼霖　　45875852

2018.9.25

## Q1

### （1）

解：设电子的质量为$m$，$t$时刻的坐标为$(x(t), y(t), z(t))$，速度为$(v_x(t), v_y(t), v_z(t))$。电子在$x, y, z$轴方向的运动微分方程分别为

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = eB\frac{dy}{dt} \tag{1}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = e(E - B\frac{dx}{dt}) \tag{2}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = 0 \tag{3}$$

考虑电子在$z$轴方向上的初始条件$z(0) = 0, v_z(0) = 0$，式(3) 解得

$$v(t) = 0$$

$$z(t) = 0$$

式(1)和(2) 联立

$$m\frac{dv_x}{dt} = eBv_y$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = e(E - Bv_x)$$

考虑电子在$x, y$轴方向上的初始条件$v_x(0) = V, \frac{dv_x}{dt}(0) = 0, v_y(0) = 0, \frac{dv_y}{dt}(0) = \frac{eE}{m}$，解得

$$v_x(t) = (V - \frac{E}{B})\cos(\frac{eB}{m}t) + \frac{E}{B}$$

$$v_y(t) = (\frac{E}{B} - V)\sin(\frac{eB}{m}t)$$

以上两式对时间$t$积分，并考虑初始条件$x(0) = 0, y(0) = 0$，得

$$x(t) = \frac{m}{eB}(V - \frac{E}{B})\sin(\frac{eB}{m}t) + \frac{E}{B}t$$

$$y(t) = \frac{m}{eB}(V - \frac{E}{B})[\cos(\frac{eB}{m}t) - 1]$$

综上，电子的速度随时间变化的情况为

$$\begin{cases} v_x(t) = (V - \frac{E}{B})\cos(\frac{eB}{m}t) + \frac{E}{B} \\ v_y(t) = (\frac{E}{B} - V)\sin(\frac{eB}{m}t) \\ v_z(t) = 0 \end{cases}$$

电子的坐标随时间的变化的情况为

$$\begin{cases} x = \frac{m}{eB}(V - \frac{E}{B})\sin(\frac{eB}{m}t) + \frac{E}{B}t \\ y = \frac{m}{eB}(V - \frac{E}{B})[\cos(\frac{eB}{m}t) - 1] \\ z = 0 \end{cases}$$

**（2）**

证：当$\mathbf{B} = 0$时，电子在$x, y, z$轴方向的运动微分方程分别为

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = eE$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

考虑初始条件$x(0) = 0, \frac{dx}{dt}(0) = V, y(0) = 0, \frac{dy}{dt}(0) = 0, z(0) = 0, \frac{dz}{dt}(0) = 0$，解得

$$x(t) = Vt$$
$$y(t) = \frac{eE}{2m}t^2$$
$$z(t) = 0$$

以上三式联立，消去时间$t$，解得电子运动的轨道方程为

$$\begin{cases} y = \frac{eE}{2mV^2}x^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

故电子轨道为在竖直平面（$xy$平面）的抛物线。

**（3）**

证：将$\mathbf{E} = 0$代入（1）中解得的电子的坐标随时间变化的三个方程中，得

$$\begin{cases} x = \frac{mV}{eB}\sin(\frac{eB}{m}t) \\ y = \frac{mV}{eB}[\cos(\frac{eB}{m}t) - 1] \\ z = 0 \end{cases}$$

联立上面三式，消去时间$t$，得到电子运动的轨道方程为

$$\begin{cases} x^2+(y+\frac{mV}{eB})^2=(\frac{mV}{eB})^2 \\ z=0 \end{cases}$$

故电子轨道为半径为$\frac{mV}{eB}$的圆。

## Q2

### (i)

解：设系统启动瞬时小虫相对于通过盘心$O$的水平轴的转动速率（角速度的大小）为$\omega_0$。盘的转动惯量通过积分得到

$$I=\int_0^r x^2\cdot\frac{m}{\pi r^2}\cdot 2\pi x dx=\frac{1}{2}mr^2$$

在启动过程中系统未受到外力矩作用，根据角动量守恒定理，有

$$I\Omega_0-\frac{m}{10}r^2\omega_0=0$$

根据相对运动关系，有

$$r(\Omega_0+\omega_0)=u$$

以上三式联立解得系统启动瞬时圆盘和小虫的转动速率（角速度的大小）分别为

$$\begin{cases} \Omega_0=\frac{u}{6r} \\ \omega_0=\frac{5u}{6r} \end{cases}$$

### (ii)

解：设圆盘的角速度大小为$\Omega(t)$，小虫的角速度大小为$\omega(t)$。小虫爬行过程中，系统的角动量受到小虫所受重力力矩的作用，根据角动量定理，有

$$\frac{d}{dt}(I\Omega-\frac{m}{10}r^2\omega)=\frac{m}{10}gr\sin\theta$$

其中

$$\theta=\int_0^t\omega dt$$

再根据相对运动关系，有

$$r(\Omega+\omega)=u$$

以上三式联立，得到$OA$ 与铅垂线之间的夹角$\theta$应满足的二阶微分方程为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{6r}\sin\theta$$

更进一步，可化为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\frac{d\omega}{d\theta}=\omega\frac{d\omega}{d\theta}=-\frac{g}{6r}\sin\theta$$
$$\Longrightarrow \omega d\omega=-\frac{g}{6r}\sin\theta d\theta$$

两边同对$\theta$积分，并考虑初始条件当$t=0$时，$\theta=0,\omega(0)=\frac{5u}{6r}$，解得

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{3r}(\cos\theta-1)+(\frac{5u}{6r})^2}$$

即$OA$ 与铅垂线之间的夹角$\theta$应满足的一阶微分方程为

$$\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{\frac{g}{3r}(\cos\theta-1)+(\frac{5u}{6r})^2}$$

## (iii)

解：对圆盘使用角动量定理，有

$$\frac{dI\Omega}{dt}=F_N r$$

代入(ii)中得到的二阶微分方程

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{6r}\sin\theta$$

和相对运动关系

$$r(\Omega+\omega)=u$$

解得

$$F_N=\frac{mg}{12}\sin\theta$$

## (iv)

解：在竖直方向上使用动量定理，有

$$F_{Ry}-mg-\frac{mg}{10}=\frac{m}{10}\frac{d(r\omega)}{dt}\sin\theta$$
$$\Longrightarrow F_{Ry}=\frac{mg(66-\sin^2\theta)}{60}$$

在水平方向上使用动量定理，有

$$F_{Rx}=\frac{m}{10}\frac{d(r\omega)}{dt}\cos\theta=-\frac{mg\sin\theta\cos\theta}{60}$$

综上，圆盘轴对圆盘作用的力$\mathbf{F}_N$的大小为

$$F_N=\sqrt{F_{Nx}^2+F_{Ny}^2}=\frac{mg\sqrt{(66-\sin^2\theta)^2+(\sin\theta\cos\theta)^2}}{60}$$
$$=\frac{mg\sqrt{262\cos2\theta+17162}}{120}$$

圆盘轴对圆盘作用的力$\mathbf{F}_N$的方向斜向上与竖直方向成角度$\arctan\frac{|F_{Nx}|}{|F_{Ny}|}=\arctan\frac{\sin2\theta}{131+\cos2\theta}$（夹在小虫的加速度($\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\overrightarrow{OA}$) 和竖直向上的方向之间）

## Q3

解：设球形雨滴的质量为$m(t)$，初始质量为$m_0$，质量的增加率为每单位时间每单位面积$\lambda$，半径为$r(t)$，表面积为$S(t)$，密度为$\rho$，速度为$v(t)$，下落的高度为$h(t)$，下落时周围水蒸汽的初始速度为0。球形雨滴的动力学方程为

$$\frac{d}{dt}(mv) = mg$$

球形雨滴质量为

$$m = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = m_0 + \int_0^t \lambda S dt$$

球形雨滴表面积为

$$S = 4\pi r^2$$

以上二式联立，并考虑初始条件$r(0) = \sqrt[3]{\frac{3m_0}{4\pi\rho}}, m(0) = m_0$ 解得

$$r(t) = \frac{\lambda}{\rho}t + \sqrt[3]{\frac{3m_0}{4\pi\rho}}$$

$$m(t) = \frac{4\pi\rho}{3}(\frac{\lambda}{\rho}t + \sqrt[3]{\frac{3m_0}{4\pi\rho}})^3$$

将其代入动力学方程，并考虑初始条件$v(0) = 0$，解得

$$v(t) = \frac{g}{4A}[(At + B) - B^4(At + B)^{-3}]$$

其中$A = \frac{\lambda}{\rho}, B = \sqrt[3]{\frac{3m_0}{4\pi\rho}}$。两边同对时间$t$积分，并考虑初始情况$h(0) = 0$，解得球形雨滴下落高度随时间变化的关系为

$$h(t) = \frac{g}{8A^2}[(At + B)^2 + B^4(At + B)^{-2}]$$

## Q4

解：设物体$A$和$B$质量均为$m$。两根劲度系数均为$k$的弹簧并联，故其总的劲度系数为

$$K = \frac{k\Delta x + k\Delta x}{\Delta x} = 2k$$

在初始平衡状态下，弹簧压缩的长度为

$$x_1 = \frac{mg}{2k}$$

给物体$A$以冲量$I$后，根据动量定理，物体$A$的动量变为$I$，此时物体$A$的动能为

$$E_k = \frac{I^2}{2m}$$

考虑使$B$跳起来的临界条件：物体$A$反弹至最高点时，底面对于$B$ 的支持力恰好为0，此时弹簧伸长的长度为

$$x_2 = \frac{mg}{2k}$$

当物体A达到最高点时，动能变为0。根据系统机械能守恒，有

$$E_k + \frac{1}{2}kx_1^2 = mg(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}kx_2^2$$

联立以上各式，有

$$I = \sqrt{\frac{2m^3g^2}{k}}$$

故$I$需要大于阈值$\sqrt{\frac{2m^3g^2}{k}}$，才可以使$B$跳起来。

## Q5

### （1）

证明：由质点运动的双扭线轨迹方程$r^2 = a^2\cos 2\theta$得

$$\begin{aligned}
&u = \frac{1}{r} = \frac{1}{a\sqrt{\cos 2\theta}} \\
&\Longrightarrow \frac{du}{d\theta} = \frac{1}{a}\frac{\sin 2\theta}{\cos^{\frac{3}{2}} 2\theta} \\
&\Longrightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{a}(2\cos^{-\frac{1}{2}} 2\theta + 3\sin^2 2\theta\cos^{-\frac{5}{2}} 2\theta)
\end{aligned}$$

代入Binet公式可得

$$\begin{aligned}
F &= -mh^2\frac{1}{a^2\cos 2\theta}[\frac{1}{a}(2\cos^{-\frac{1}{2}} 2\theta + 3\sin^2 2\theta\cos^{-\frac{5}{2}} 2\theta) + \frac{1}{a\sqrt{\cos 2\theta}}] \\
&= -\frac{3mh^2}{a^3\cos^{\frac{3}{2}} 2\theta}(1 + \tan^2 2\theta) = -\frac{3mh^2}{a^3\cos^{\frac{7}{2}} 2\theta} \\
&= -\frac{3mh^2}{a^3(\frac{r^2}{a^2})^{\frac{7}{2}}} = -h^2\frac{3ma^4}{r^7}
\end{aligned}$$

### （2）

证明：位力定理的公式为

$$\overline{T} = -\frac{1}{2}\overline{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i}$$

左边$\overline{T}$为质点组动能对时间的平均值，右边为均位力积。

假设行星绕太阳做椭圆周运动且视太阳为静止，设行星质量为$m$，相对于太阳的位矢为$\mathbf{r}(t)$ 速度为$\mathbf{v}(t)$，运动周期为$\tau$，太阳质量为$M$。行星的平均动能为

$$\begin{aligned}
\text{左边} = \overline{T} &= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{1}{2}mv^2 dt = \frac{m}{2\tau}\int_0^\tau \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}dt = \frac{m}{2\tau}\int_0^\tau \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} \\
&= \frac{m}{2\tau}[\int_0^\tau d(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}) - \int_0^\tau \mathbf{r}\cdot d\mathbf{v}] = \frac{m}{2\tau}[(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r})|_0^\tau - \int_0^\tau \mathbf{r}\cdot d\mathbf{v}] \\
&= -\frac{m}{2\tau}\int_0^\tau \mathbf{r}\cdot d\mathbf{v}
\end{aligned}$$

行星的动力学方程为

$$\begin{aligned}
m\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\frac{GMm}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \\
\Longrightarrow d\mathbf{v} &= -\frac{GM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}dt
\end{aligned}$$

代入可得平均动能的表达式中可得

$$\begin{aligned}
\text{左边} &= -\frac{m}{2\tau}\int_0^\tau \mathbf{r}\cdot d\mathbf{v} = \frac{m}{2\tau}\int_0^\tau \mathbf{r}\cdot\frac{GM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}dt = \frac{m}{2\tau}\int_0^\tau \frac{GM}{r}dt \\
&= \frac{GMm}{2}\overline{(r^{-1})}
\end{aligned}$$

再来计算右边的均位力积

$$\text{右边} = -\frac{1}{2}\overline{\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i\cdot\mathbf{r}_i} = -\frac{1}{2}[\overline{\frac{GMm}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\mathbf{0} + (-\frac{GMm}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r})\cdot\mathbf{r}}] = \frac{GMm}{2}\overline{(r^{-1})}$$

左边=右边，即对于行星绕太阳的运动，$\overline{T} = -\frac{1}{2}\overline{\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i\cdot\mathbf{r}_i}$，位力定理成立。