理论力学作业_6

陈稼霖　　　45875852

2018.12.29

Q1

（a）

解：系统自由度$s=2$，取质点Mm连线与竖直方向的夹角θ和质点M在水平方向的坐标x为广义坐标。系统动能为

$$\begin{aligned}T=&\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m[(\dot{x}+b\dot{\theta}\cos\theta)^2+(b\dot{\theta}\sin\theta)^2]\\=&\frac{1}{2}[mb^2\dot{\theta}^2+2mb\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta+(M+m)\dot{x}^2]\end{aligned}$$

设质点m达到最低点时系统势能为零，则系统势能为

$$V=mgb(1-\cos\theta)$$

系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}[mb^2\dot{\theta}^2+2mb\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta+(M+m)\dot{x}^2]-mgb(1-\cos\theta)$$

（b）

解：在小角度近似的情况下，拉格朗日函数可近似写为

$$L=\frac{1}{2}[mb^2\dot{\theta}^2+2mb\dot{\theta}\dot{x}+(M+m)\dot{x}^2]-\frac{1}{2}mgb\theta^2$$

简正坐标是原广义坐标的线性组合，设简正坐标

$$\begin{cases}q_1=\theta+\alpha x\\q_2=\theta+\beta x\end{cases}$$

则原广义坐标可写为

$$\begin{cases}\theta=\frac{\alpha q_2-\beta q_1}{\alpha-\beta}\\x=\frac{q_1-q_2}{\alpha-\beta}\end{cases}\tag{1}$$

且有

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\alpha\dot{q}_2 - \beta\dot{q}_1}{\alpha-\beta} \\ \dot{x} = \frac{\dot{q}_1 - \dot{q}_2}{\alpha-\beta} \end{cases} \tag{2}$$

转换为简正坐标后T, V式中将不再有$\dot{q}_1\dot{q}_2, q_1q_2$交叉项，即将式(1)和(2)代入$V, T$式中，上述交叉项的系数为零

$$-2mb^2\frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)^2} + 2mb\frac{\alpha+\beta}{(\alpha-\beta)^2} - \frac{2(M+m)}{(\alpha-\beta)^2} = 0$$

$$mgb\frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)^2} = 0$$

解得

$$\alpha = \frac{M+m}{mb}$$

$$\beta = 0$$

从而简正坐标为

$$\begin{cases} q_1 = \theta + \frac{M+m}{mb}x \\ q_2 = \theta \end{cases} \tag{3}$$

说明：我们发现简正坐标q_2就是质点Mm连线与竖直方向的夹角θ，也可以看成质点m相对于系统质心转过的角位移；而若取简正坐标q_2的导数，则有$\dot{q}_2 = \dot{\theta} + \frac{M+m}{mb}\dot{x}$，这是质点$m$相对于系统质心的角速度与质点$M$相对于系统质心的角速度之和，因此简正坐标$q_1$是质点$m$相对于系统质心转过的角位移与质点$M$相对于系统质心转过的角位移之和。

（c）

解：由式(3)有

$$\begin{cases} \theta = q_2 \\ x = \frac{mb}{M+m}(q_1 - q_2) \end{cases} \tag{4}$$

及

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \dot{q}_2 \\ \dot{x} = \frac{mb}{M+m}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) \end{cases} \tag{5}$$

将式(4)和(5)代入原拉格朗日函数中得

$$L = \frac{1}{2}[\frac{m^2b^2}{M+m}\dot{q}_1^2 + \frac{Mmb^2}{M+m}\dot{q}_2^2] - \frac{1}{2}mgbq_2^2$$

拉格朗日方程

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = 0 \\ \ddot{q}_2 + \frac{(M+m)g}{M}q_2 = 0 \end{cases}$$

解得简正坐标作为时间函数的表达式为

$$\begin{cases} q_1 = At + B \\ q_2 = C\cos(\sqrt{\frac{(M+m)g}{Mb}}t) + D\sin(\sqrt{\frac{(M+m)g}{Mb}}t) \end{cases}$$

其中积分常数A, B, C, D由初始条件决定。

Q2

（1）

解：

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} =& me^{\alpha t}\dot{x} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} =& me^{\alpha t}(\alpha\dot{x} + \ddot{x}) \\ \frac{\partial L}{\partial x} =& -me^{\alpha t}\omega^2 x \end{aligned}$$

拉格朗日方程：

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \Longrightarrow& \ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega^2 x = 0 \end{aligned}$$

（2）

解：广义动量为

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2}me^{\alpha t}\dot{x}$$

从而广义速度可以表示为

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}e^{-\alpha t}$$

系统的哈密顿函数为

$$H = p_x\dot{x} - L = \frac{p_x^2}{2m}e^{-\alpha t} + \frac{m}{2}e^{\alpha t}\omega^2 x^2$$

利用哈密顿正则方程得到运动微分方程

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p}_x \\ \Longrightarrow& \ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega^2 x = 0 \end{aligned}$$

Q3

解：系统自由度$s = 1$，取质点P与盘心C连线与竖直方向的夹角为广义坐标。盘心平动速度为

$$v_C = R\dot{\theta}$$

质心P的速度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= -v_C\boldsymbol{i} + \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \boldsymbol{R} \\ &= -v_C\boldsymbol{i} + R\dot{\theta}(\boldsymbol{i}\cos\theta + \boldsymbol{j}\sin\theta) \\ &= R\dot{\theta}[\boldsymbol{i}(\cos\theta - 1) + \boldsymbol{j}\sin\theta]\end{aligned}$$

系统动能为

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}[\frac{3}{2}M + 2m(1-\cos\theta)]R^2\dot{\theta}^2\end{aligned}$$

设盘心C处为零势能点，则系统势能为

$$V = -mgR\cos\theta$$

系统的拉格朗日函数为

$$L = T - V = \frac{1}{2}[\frac{3}{2}M + 2m(1-\cos\theta)]R^2\dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta$$

广义动量为

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = [\frac{3}{2}M + 2m(1-\cos\theta)]R^2\dot{\theta}$$

从而广义速度可表示为

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{[\frac{3}{2}M + 2m(1-\cos\theta)]R^2}$$

系统的哈密顿函数为

$$\begin{aligned}H &= p_\theta\dot{\theta} - L \\ &= \frac{p_\theta^2}{2[\frac{3}{2}M + 2m(1-\cos\theta)]R^2} - mgR\cos\theta\end{aligned}$$

正则方程为

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{[\frac{3}{2}M + 2m(1-\cos\theta)]R^2} \\ \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial\theta} = \frac{p_\theta^2 m\sin\theta}{[\frac{3}{2}M + 2m(1-\cos\theta)]^2R^2} - mgR\sin\theta\end{aligned}$$

Q4

（i）

解：以OC所在的直线为x'轴，垂直OC的直线为y'，建立非惯性坐标系。小环M受到圆环的支持力垂直于其切线方向。小环受到惯性力大小为

$$F_t = m\omega^2\dot{2}a\cos\frac{\theta}{2}$$

方向为由O点指向M点，因此惯性力在切线方向上的分量大小为

$$-F_t\sin\theta\frac{\theta}{2} = -2ma\omega^2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

小环受到科里奥利力也垂直于其切线方向。在非惯性参考系中，小环沿切线方向的加速度大小为$a\ddot{\theta}$。从而小环沿切线方向的运动微分方程为

$$\begin{aligned}
ma\ddot{\theta} &= -F_t\sin\theta\frac{\theta}{2} = -2ma\omega^2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\
\Longrightarrow &\ddot{\theta} + \omega^2\sin\theta = 0
\end{aligned}$$

（ii）

解：系统自由度$s=1$，取CM连线和OC连线夹角θ为广义坐标。设$\overline{OM} = r, \angle xOM = \varphi$ 小环的动能为

$$\begin{aligned}
T =&\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}\{[\frac{d}{dt}(2a\cos\frac{\theta}{2})]^2 + (2a\cos\frac{\theta}{2})^2[\frac{d}{dt}(\omega t + \frac{\theta}{2})]^2\} \\
=&\frac{1}{2}m(4a^2\omega^2\cos^2\frac{\theta}{2} + 4a^2\omega\dot{\theta}\cos^2\frac{\theta}{2} + a^2\dot{\theta}^2)
\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} =& ma^2\dot{\theta} + 2ma^2\omega\cos^2\frac{\theta}{2} \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} =& ma^2\ddot{\theta} - ma^2\omega\dot{\theta}\sin\theta \\
\frac{\partial T}{\partial\theta} =& -ma^2\omega^2\sin\theta - ma^2\omega\dot{\theta}\sin\theta
\end{aligned}$$

虚功

$$\begin{aligned}
\delta W =& F_N\widehat{\overrightarrow{MC}}\cdot\delta\overrightarrow{OM} \\
=& F_N[-\boldsymbol{i}\cos(\omega t + \theta) - \boldsymbol{j}\sin(\omega t + \theta)]\cdot \\
&\{\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial\theta}a[\cos\omega t + \cos(\omega t + \theta)] + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial\theta}a[\sin\omega t + \sin(\omega t + \theta)]\}\delta\theta \\
=& 0\delta\theta
\end{aligned}$$

故小环受到的广义力为$Q_\theta = 0$。系统的拉格朗日方程为

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta \\
\Longrightarrow & ma^2\ddot\theta - 2ma^2\omega\dot\theta\sin\theta + ma^2\omega^2\sin\theta + 2ma^2\omega\dot\theta\sin\theta = 0 \\
\Longrightarrow & \ddot\theta + \omega^2\sin\theta = 0
\end{aligned}
$$

（iii）

解：由于广义力$Q_\theta = 0$，虚功$\delta W = 0$，从而可以认为系统势能$V = 0$，将系统的拉格朗日函数写为

$$L = T = \frac{1}{2}m(4a^2\omega^2\cos^2\frac{\theta}{2} + 4a^2\omega\dot\theta\cos^2\frac{\theta}{2} + a^2\dot\theta^2)$$

广义动量为

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = ma^2\dot\theta + 2ma^2\omega\cos^2\frac{\theta}{2}$$

从而广义速度可以表示为

$$\dot\theta = \frac{p_\theta}{ma^2} - 2\omega\cos^2\frac{\theta}{2}$$

系统的哈密顿函数为

$$
\begin{aligned}
H =& p_\theta\dot\theta - L \\
=& \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{ma^2} - 2\omega p_\theta\cos^2\frac{\theta}{2} - 2ma^2\omega^2\cos^2\frac{\theta}{2}
\end{aligned}
$$

系统的正则方程为

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\dot p_\theta$$

代入H, p_θ式得

$$\ddot\theta + \omega^2\sin\theta = 0$$

Q5

解：粒子自由度$s = 3$，取其在转动参考系中的三个笛卡尔坐标x, y, z为广义坐标，从而广义速度为$\dot x, \dot y, \dot z$。设匀速转动参考系相对于惯性系的角速度为$\boldsymbol{\omega}$，粒子势能为V，在转动坐标系中矢径为$\boldsymbol{r}$，速度为$\boldsymbol{v}_r = (\dot x, \dot y, \dot z)$，粒子在惯性系中的速度可表示为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \\
\Longrightarrow \boldsymbol{v}_r &= \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}
\end{aligned}
$$

粒子的动能为

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

拉格朗日函数为

$$L = T - V = \frac{p^2}{2m} - V$$

哈密顿函数为

$$\begin{aligned} H =& p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - L = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - \frac{p^2}{2m} + V \\ =& \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v}_r - \frac{p^2}{2m} + V \\ =& \frac{p^2}{2m} - \boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + V \end{aligned}$$