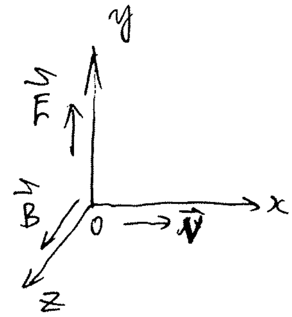
Solutions to Homework 1

Q1: (1) 以电子 $t=0$ 时位置为坐标原点,建立坐标系 $Oxyz$,



如右图所示,电子受力为 $e(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$,电子运动微分方程为 $m\ddot{\vec{r}}=e(E\vec{j}+\vec{v}\times B\vec{k})$

即
$$\begin{cases}\ddot{x}=\dfrac{eB}{m}\dot{y} & (1),\\[2mm] \ddot{y}=\dfrac{eE}{m}-\dfrac{eB}{m}\dot{x}\ (2),\quad \ddot{z}=0 & (3)\end{cases}$$

对(1)式积分,用 $y=0$ 时,$\dot{x}=V$ 定积分常数,得 $\dot{x}=\dfrac{eB}{m}y+V$ (4)

将(4)代入(2),得 $\ddot{y}+\left(\dfrac{eB}{m}\right)^2 y=\dfrac{eE}{m}-\dfrac{eB}{m}V$

其通解为: $y=C_1\cos\dfrac{eB}{m}t+C_2\sin\dfrac{eB}{m}t+\dfrac{mE}{eB^2}-\dfrac{mV}{eB}$ (5)

$t=0$ 时,$y=0$,$\dot{y}=0$,$\therefore C_1=\dfrac{mV}{eB}-\dfrac{mE}{eB^2}$,$C_2=0$,则

$y=\left(\dfrac{mE}{eB^2}-\dfrac{mV}{eB}\right)\left(1-\cos\dfrac{eB}{m}t\right)$,代入(4)式得 $\dot{x}=\left(V-\dfrac{E}{B}\right)\cos\dfrac{eB}{m}t+\dfrac{E}{B}$

积分,$t=0$ 时 $x=0$,得 $x=\left(\dfrac{mV}{eB}-\dfrac{mE}{eB^2}\right)\sin\dfrac{eB}{m}t+\dfrac{E}{B}t$

由(3)式及 $t=0$ 时 $z=0$,$\dot{z}=0$,可知 $z=0$

(2) 若 $\vec{B}=0$,则运动微分方程为 $\ddot{x}=0$,$\ddot{y}=\dfrac{eE}{m}$,$\ddot{z}=0$

积分,且 $t=0$ 时,$x=y=z=0$,$\dot{x}=V$,$\dot{y}=\dot{z}=0$,得

$x=Vt$,$y=\dfrac{eE}{2m}t^2$,$z=0$,其轨道为 Oxy 平面内的抛物线,方程

$$\begin{cases}y=\dfrac{eE}{2mV^2}x^2\\[2mm] z=0\end{cases}$$

(3) 若 $\vec{E}=0$,运动微分方程为

$x=\dfrac{mV}{eB}\sin\dfrac{eB}{m}t$,$y=\dfrac{mV}{eB}\cos\dfrac{eB}{m}t-\dfrac{mV}{eB}$,$z=0$

电子轨道方程为
$$\begin{cases}x^2+\left(y+\dfrac{mV}{eB}\right)^2=\left(\dfrac{mV}{eB}\right)^2\\[2mm] z=0\end{cases}$$

该轨道为 Oxy 平面内,圆心位于 $\left(0,-\dfrac{mV}{eB}\right)$ 半径为 $\dfrac{mV}{eB}$ 的圆。