$$|r_c \sin\varphi| = |\vec{e}_l \times \vec{r}_c| = \frac{(1+\sqrt{3})}{2} r \qquad \therefore d^2 = \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) r^2$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 0 & -r & r \end{vmatrix} \qquad \therefore J_{AB} = \frac{1}{16}(25+8\sqrt{3}) m r^2$$

(ii) 杆件对A点的角动量

$$\vec{h} = \vec{r}_c \times m\vec{v}_c + \vec{h}_c'$$

$$\vec{v}_c = \vec{\omega} \times \vec{r}_c = \omega \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 0 & -r & r \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})\,\omega r \vec{i}$$

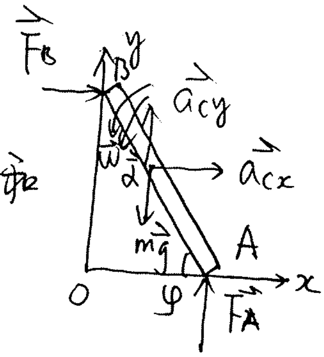
$$\vec{h}_c' = \vec{J}_c \cdot \vec{\omega} = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \omega = \frac{\omega}{2}(\sqrt{3} J_{yy}\vec{j} + J_{zz}\vec{k})$$

$$= \frac{\omega}{24}(7\sqrt{3}\vec{j} + 6\vec{k}) r^2$$

$$\vec{h} = \vec{r}_c \times m\vec{v}_c + \vec{h}_c'$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) m\omega r(-r\vec{j} + r\vec{k}) \times \vec{i} + \vec{h}_c'$$

$$= \frac{1}{24} m\omega r^2 \left[(12+19\sqrt{3})\vec{j} + (18+12\sqrt{3})\vec{k}\right]$$



Q4: 解: 以任意位置的杆AB为研究对象,受力如图。

杆作平面运动,设角速度和角加速度分别为$\vec{\omega}$和$\vec{\alpha}$,质心C的加速度为 $\vec{a}_{cx}$, $\vec{a}_{cy}$

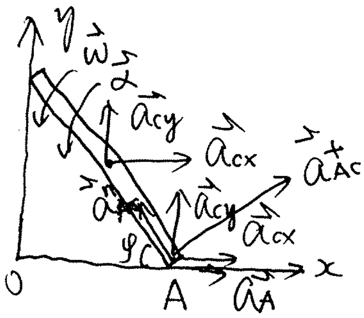
由刚体平面运动微分方程

$m a_{cx} = F_B$ (1), $m a_{cy} = F_A - mg$ (2), $J_C \alpha = F_A \frac{l}{2}\cos\varphi - F_B \frac{l}{2}\sin\varphi$ (3)

3个方程,5个未知量,须补充运动学关系才可以求解。

以C为基点,则A点的加速度为 $\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}_{AC}^t + \vec{a}_{AC}^n = \vec{a}_{cx} + \vec{a}_{cy} + \vec{a}_{AC}^t + \vec{a}_{AC}^n$

作加速度矢量图,在y轴上投影,得



$$a_{cy} + a_{Ac}^t \cos\varphi + a_{Ac}^n \sin\varphi = 0$$

即 $a_{cy} = -\left(\frac{l}{2}\alpha\cos\varphi + \frac{l}{2}\omega^2\sin\varphi\right)$ (4)

同理,以C为基点分析B的加速度,并投影至x轴

$a_{cx} = \frac{l}{2}\alpha\sin\varphi - \frac{l}{2}\omega^2\cos\varphi$ (5)