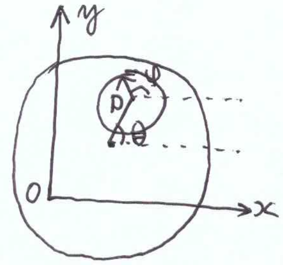
Solutions to the 5th Homework of TM

Q1. 解：取静止坐标系Oxyz，系统由大、小圆盘组成。



系统自由度为4，选大盘质心 $C(x,y)$ 及大小盘的转动角度 θ 和 φ 为广义坐标 (x,y,θ,φ)。

则系统拉格朗日函数为（桌面为势能零点）

$$L=T=T_M+T_m=\frac{1}{2}M(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m[(\dot{x}-b\dot{\theta}\sin\theta)^2+(\dot{y}+b\dot{\theta}\cos\theta)^2]+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2$$

$$=\frac{1}{2}[(m+M)\dot{x}^2+(m+M)\dot{y}^2]+\left(\frac{1}{4}MR^2+\frac{1}{2}mb^2\right)\dot{\theta}^2-mb\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta+mb\dot{y}\dot{\theta}\cos\theta+\frac{1}{4}mr^2\dot{\varphi}^2$$

$\because \frac{\partial L}{\partial x}=0$，$\therefore \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=(m+M)\dot{x}-mb\dot{\theta}\sin\theta=C_1$，表示x方向动量守恒。

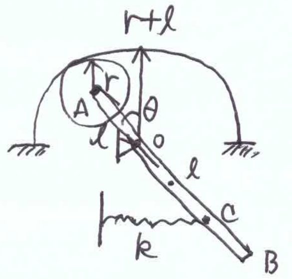
由 $\frac{\partial L}{\partial y}=0$，$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=(M+m)\dot{y}+mb\dot{\theta}\sin\theta=C_2$，表示y方向动量守恒。

由 $\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0$，$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}=C_3$，即 $\dot{\varphi}=C_3$，表示小圆盘质心角动量守恒。

由 $\frac{\partial L}{\partial t}=0$，$T=T_2$，$\therefore T+V=C_4$，表示机械能守恒；

其中 C_1, C_2, C_3, C_4 都是常量。

Q2. 解：单自由度系统，取 θ 为广义坐标，如图



$v_A=l\dot{\theta}$，$\omega_A=\frac{v_A}{r}=\frac{l}{r}\dot{\theta}$

系统动能为 $T=\frac{1}{2}J_A\omega_A^2+\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}J_O\dot{\theta}^2$

$$=\frac{5}{4}ml^2\dot{\theta}^2$$

其中 $J_O=\frac{1}{12}m(3l)^2+m\left(\frac{l}{2}\right)^2=ml^2$，$J_A=\frac{1}{2}mr^2$

系统势能为 $V=\frac{1}{2}k(l\sin\theta)^2-\cancel{mg\frac{l}{2}}\,mg\frac{l}{2}\cos\theta+mgl\cos\theta$

$$=\frac{1}{2}kl^2\sin^2\theta+\frac{1}{2}mgl\cos\theta$$

$L=T-V$ 代入拉格朗日方程，得 $\frac{5}{2}ml^2\ddot{\theta}+\frac{1}{2}kl^2\sin2\theta-\frac{1}{2}mgl\sin\theta=0$

微振动，$\sin\theta\approx\theta$，$\sin2\theta\approx2\theta$，$\therefore \ddot{\theta}+\left(\frac{2k}{5m}-\frac{g}{5l}\right)\theta=0$

$\therefore T=2\pi\sqrt{\frac{5ml}{2kl-mg}}$

（系统振动周期）

Q3 解：如题中图所示设角θ_1和θ_2，系统的拉格朗日方程为

$$\begin{cases} (2M+m)R\ddot{\theta}_1 + mR\ddot{\theta}_2 + (M+m)g\theta_1 = 0 \\ R\ddot{\theta}_2 + R\ddot{\theta}_1 + g\theta_2 = 0 \end{cases}$$

微振动的简正坐标为$(M+m)\theta_1 + m\theta_2$，$\theta_1 - \theta_2$

解得简正频率为$\sqrt{g/2R}$，$\sqrt{(m+M)g/MR}$

Q4 解：（见后打印页答案）.

Q5 解：如题中图所示，$s=1$，以x为广义坐标

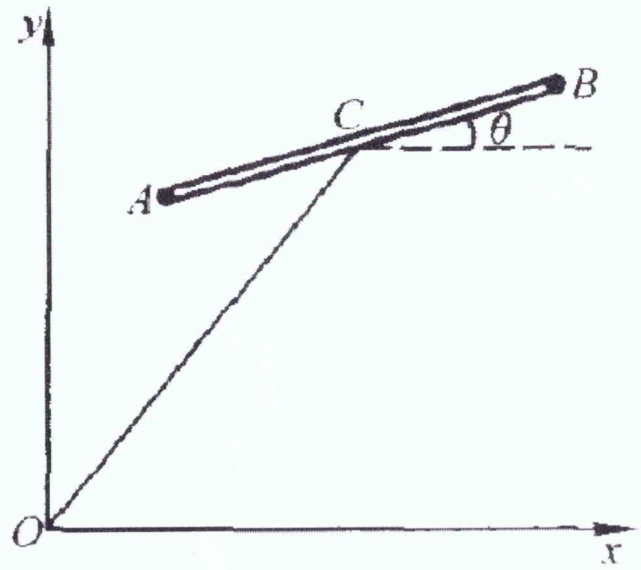
$$L = T - V = \frac{1}{2}m[(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\omega^2x^2] - mgy$$

$$= \frac{1}{2}m[\dot{x}^2(1+\frac{x^2}{4a})+\omega^2x^2] - mg\frac{x^2}{4a}$$

因$\frac{\partial L}{\partial t}=0$，∴广义能量守恒

$$H = T_2 - T_0 + V = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2(1+\frac{x^2}{4a}) - \omega^2x^2] + mg\frac{x^2}{4a} = 常量。$$

Q4: **【例】** 两个质量均为 m 的质点 A 和 B 用一长为 l 的轻杆相连接. 设此体系只能在铅直平面内运动,并且杆的中点 C 的速度必须沿杆 AB 的方向,求质点 A 和 B 的运动.



解:如不考虑对 C 点速度方向的限制,则此体系是完整理想的,自由度为 3. 取 C 点的坐标 x、y 和杆 AB 与水平轴的夹角 θ 为广义坐标,则 A 点和 B 点的坐标为

$$\begin{cases} x_1 = x - \dfrac{l}{2}\cos\theta, \\ y_1 = y - \dfrac{l}{2}\sin\theta, \\ x_2 = x + \dfrac{l}{2}\cos\theta, \\ y_2 = y + \dfrac{l}{2}\sin\theta. \end{cases} \tag{1}$$

体系的拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - (mgy_1 + mgy_2) \\ &= m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m}{4}l^2\dot{\theta}^2 - 2mgy. \end{aligned} \tag{2}$$

如果直接将(2)式代入拉格朗日方程,那么所得的结果是不考虑 C 点的速度方向有限制的情况. v_C 的方向限制在杆 AB 的方向,就是 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 在垂直于 AB 方向的投影之和为零. 从图 2.15可知,此条件的数学表示式为

$\dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta = 0$, (3) 或 $\sin\theta\mathrm{d}x - \cos\theta\mathrm{d}y = 0$. 这是一个不可积的微分约束.

$$a_x = \sin\theta,\quad a_y = -\cos\theta,\quad a_\theta = a_0 = 0. \tag{4}$$

将(2)和(4)代入非完整体系的拉格朗日方程

$$\begin{cases} 2m\ddot{x} = \lambda\sin\theta, \\ 2m\ddot{y} + 2mg = -\lambda\cos\theta, \\ \dfrac{1}{2}ml^2\ddot{\theta} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

由(5)中的第三个方程得

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \alpha, \\ \theta &= \alpha t + \beta. \end{aligned} \tag{6}$$

α 和 β 是常数. 由(5)中的前两个方程得

$$\ddot{x} = -(\ddot{y} + g)\tan\theta \tag{7}$$

由(6)得

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = \alpha^2\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\theta^2},$$

$$\dot{y} = \alpha\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta},$$

$$\ddot{y} = \alpha^2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\theta^2},$$

将它们代入(3)和(7)得

$$\sin\theta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} - \cos\theta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = 0, \tag{8}$$

$$\alpha^2\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\theta^2} = -\tan\theta\left(\alpha^2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\theta^2} + g\right). \tag{9}$$

由(8)得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \cot\theta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}.$$

上式两边对 θ 求导得

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\theta^2} = -\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} + \cot\theta\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\theta^2}.$$

将它代入(9)式经过整理后得

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\theta^2} - \cot\theta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} + \frac{g}{\alpha^2}\sin^2\theta = 0. \tag{10}$$

方程(10)的解为

$$y = -\frac{\gamma}{\alpha}\cos\theta - \frac{g}{2\alpha^2}\cos^2\theta + \delta, \tag{11}$$

式中 γ 和 δ 是积分常数. 将(11)代入(3)得

$$\begin{aligned} x &= \int \mathrm{d}x = \int\left(\frac{\gamma}{\alpha}\cos\theta + \frac{g}{\alpha^2}\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\gamma}{\alpha}\sin\theta + \frac{g}{2\alpha^2}(\sin\theta\cos\theta + \theta) + \varepsilon, \end{aligned} \tag{12}$$

式中 ε 亦为积分常数.

将(11)、(12)代入(1)再加上(6)式，最后得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\gamma}{\alpha}\sin\theta + \dfrac{g}{2\alpha^2}(\sin\theta\cos\theta + \theta) - \dfrac{l}{2}\cos\theta + \varepsilon, \\ y_1 = -\dfrac{\gamma}{\alpha}\cos\theta - \dfrac{g}{2\alpha^2}\cos^2\theta - \dfrac{l}{2}\sin\theta + \delta, \\ x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}\sin\theta + \dfrac{g}{2\alpha^2}(\sin\theta\cos\theta + \theta) + \dfrac{l}{2}\cos\theta + \varepsilon, \\ y_2 = -\dfrac{\gamma}{\alpha}\cos\theta - \dfrac{g}{2\alpha^2}\cos^2\theta + \dfrac{l}{2}\sin\theta + \delta, \\ \theta = \alpha t + \beta. \end{cases} \tag{13}$$

这就是 A 和 B 两个质点的运动情况.

对称性和守恒定律

质点在有心力的作用下运动，可用角动量和能量守恒

$$\begin{cases} mr^2\dot{\theta} = L, \\ \dfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E \end{cases}$$