Q3

解：设雨滴的本体为m.由物理学知

$$\frac{d}{dt}(mv) = F. \tag{1}$$

1) 在处理这类问题时，常常将模型的几何形状理想化。对于雨滴，我们常将它看成球形，设其半径为r,则雨滴质量m是与半径r的三次方成正比，密度看成是不变的，于是

$$m = k_1 r^3, \tag{2}$$

其中k_1为常数。

2) 由题设知，雨滴质量的增加率与其表面积成正比，即

$$\frac{dm}{dt} = k \cdot 4\pi r^2 = k_2 r^2, \tag{3}$$

其中k_2为常数。由(2)，得

$$\frac{dm}{dt} = k_1 \cdot 3r^2 \frac{dr}{dt}. \tag{4}$$

由(3)=(4)，得

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k_2}{3k_1} = \lambda. \tag{5}$$

对(5)两边积分：$\int_a^r dr = \int_0^t \lambda dt$, 得

$$r = \lambda t + a, \tag{6}$$

将(6)代入(2)，得

$$m = k_1(\lambda t + a)^3. \tag{7}$$

3）以雨滴下降的方向为正，分析(1)式

$$\frac{d}{dt}[k_1(\lambda t + a)^3 v] = k_1(\lambda t + a)^3 g, \tag{8}$$

$$\int_0^v d[k_1(\lambda t + a)^3 v] = \int_0^t k_1(\lambda t + a)^3 g dt,$$

$$k_1(\lambda t + a)^3 v = \frac{1}{4\lambda} k_1 g(\lambda t + a)^4 + k_3,\text{（}k_3\text{为常数）}$$

当$t = 0$时，$v = 0$，故$k_3 = -\frac{k_1 g a^4}{4\lambda}$, $v = \frac{g}{4\lambda}[\lambda t + a - \frac{a^4}{(\lambda t + a)^3}]$.

以上计算未涉及空气阻力，故当$t \to \infty$，v将无穷大，但实际情况由于阻力随速度增大，v不会无限增加。对上面v积分一次，记x初始值为x_0，则$x = x_0 + \frac{gt^2}{8}\left(\frac{2r_0 + \lambda t}{r_0 + \lambda t}\right)^2$，若$t=0$时雨滴半径为零且$x_0=0$，则$x = \frac{1}{8}g$