理论力学作业_2

陈稼霖　　45875852

2018.10.21

Q1.

解：如图(1)，以水平桌面为原点，与当地敬经线相切的直线为x轴，与纬线相切的直线为y轴（在图中垂直于纸面，没有标出），垂直于地表向上的直线为z轴，建立随桌面绕地轴转动的空间直角坐标系，其中沿x,y,z轴的单位矢量分别为$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，设在这一参考系中质点位置坐标为$(x,y,0)$ﬁ速度的$x,y$ 分量分别为v_x,v_y，即$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}$，初始条件下$x=0,y=0,v_x=v_{x0},v_y=v_{y0}$，即$\boldsymbol{v}_0=v_{x0}\boldsymbol{i}+v_{y0}\boldsymbol{j}$。

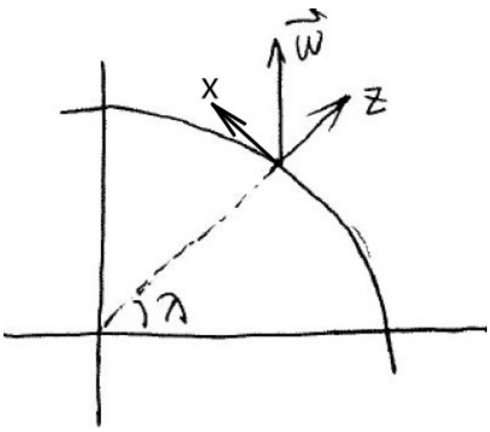

图 1: Q1图

在$O-xyz$转动参考系中，质点受到的离心力包含在重力mg中，因为离心力相对于地心引力很小，故可近似认为重力指向地心（沿z轴），此外质点还受到桌面垂直于地表的的支持力（沿z轴）和垂直于速度方向的科里奥利力

$$\begin{aligned}-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}&=-2m(\omega\cos\lambda\boldsymbol{i}+\omega\sin\lambda\boldsymbol{k})\times(v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j})\\&=2m\omega(v_y\sin\lambda\boldsymbol{i}-v_x\sin\lambda\boldsymbol{j}-v_y\cos\lambda\boldsymbol{k})\end{aligned}$$

根据牛顿第二定律，质点在各轴向上的动力学微分方程为

$$m\frac{dv_x}{dt} = 2m\omega v_y \sin\lambda$$
$$m\frac{dv_y}{dt} = -2m\omega v_x \sin\lambda$$
$$m\frac{dv_z}{dt} = F_N - mg - 2m\omega v_y \cos\lambda = 0$$

以上三式联立，并考虑初始条件$v_x|_{t=0} = 0, v_y|_{t=0} = 0$解得

$$\begin{aligned}
v_x &= v_{x0}\cos(2\omega t\sin\lambda) + v_{y0}\sin(2\omega t\sin\lambda) \\
v_y &= -v_{x0}\sin(2\omega t\sin\lambda) + v_{y0}\cos(2\omega t\sin\lambda) \\
F_N &= m\{g + 2\omega v_y\cos\lambda\} \\
&= m\{g + 2\omega[-v_{x0}\sin(2\omega t\sin\lambda) + v_{y0}\cos(2\omega t\sin\lambda)]\cos\lambda\}
\end{aligned}$$

v_x, v_y对时间积分，并考虑初始条件$x|_{t=0} = 0, y|_{t=0} = 0$，解得

$$x = \frac{1}{2\omega\sin\lambda}\{v_{x0}\sin(2\omega t\sin\lambda) + v_{y0}[1-\cos(2\omega t\sin\lambda)]\}$$
$$y = \frac{1}{2\omega\sin\lambda}\{v_{x0}[\cos(2\omega t\sin\lambda) - 1] + v_{y0}\sin(2\omega t\sin\lambda)\}$$

以上两式联立，消去t得到

$$(v_x - \frac{v_{y0}}{2\omega\sin\lambda})^2 + (v_y + \frac{v_{x0}}{2\omega\sin\lambda})^2 = \frac{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}{4\omega^2\sin^2\lambda}$$

即

$$(v_x - \frac{v_{y0}}{2\omega\sin\lambda})^2 + (v_y + \frac{v_{x0}}{2\omega\sin\lambda})^2 = \frac{v_0^2}{4\omega^2\sin^2\lambda}$$

故质点的运动轨迹是一个半径为$\frac{v_0}{2\omega\sin\lambda}$的圆。

根据牛顿第三定律，桌面受到的力为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_N' &= -\boldsymbol{F}_N = -m\{g + 2\omega v_y\cos\lambda\}\boldsymbol{k} \\
&= m\{-g + 2\omega[v_{x0}\sin(2\omega t\sin\lambda) - v_{y0}\cos(2\omega t\sin\lambda)]\cos\lambda\}\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

Q2.

(i)

解：如图(2)，设$MA = a$，$MB = b$，$\angle OBA = \theta$，A点和B点坐标$((a+b)\sin\theta, 0, 0)$ 和$(0, (a+b)\cos\theta, 0)$，A点和B点的速度$\boldsymbol{v}_A$ 和$\boldsymbol{v}_B$，AB的角速度$\boldsymbol{\omega}$。分别过A点和B点作其速度$\boldsymbol{v}_A$和$\boldsymbol{v}_B$ 的垂线交于S 点，S点即为转动瞬心，坐标为$((a+b)\sin\theta, (a+b)\cos\theta, 0)$。以椭圆规尺的质心（即$AB$ 的中点）为原点，

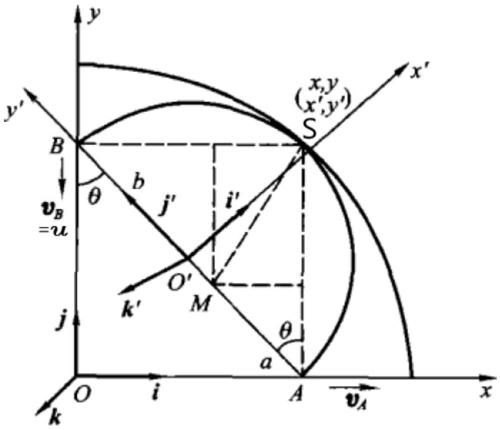

图 2: Q2图

建立固定在规尺上随规尺运动的直角坐标系$O-x'y'z'$。取单位矢量$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$沿$x$轴，$y$轴和$z$ 轴，单位矢量$\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}'$沿$x'$轴，$y'$ 轴和z' 轴。

以S点为转轴，B点的速率可表示为

$$v_B = u = (a+b)\sin\theta\cdot\omega$$
$$\Longrightarrow \omega = \frac{u}{(a+b)\sin\theta}$$

根据转动瞬心的定义，M点的速度为

$$\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{SM} = \omega\boldsymbol{k}\times(-a\sin\theta\boldsymbol{i} - b\cos\theta\boldsymbol{j}) = \frac{u}{(a+b)\sin\theta}(b\cos\theta\boldsymbol{i} - a\sin\theta\boldsymbol{j})$$

以B为基点，M点的加速度为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_M &= \boldsymbol{a}_B + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}'\omega^2 = -\frac{d\omega}{dt}\boldsymbol{k}'\times b\boldsymbol{j}' + b\omega^2\boldsymbol{j}' \\
&= -\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{k}'\times b\boldsymbol{j}' + b\omega^2\boldsymbol{j}' \\
&= -\frac{u\cos\theta}{(a+b)\sin^2\theta}\cdot\omega\cdot b\boldsymbol{i}' + b\cot\frac{u^2}{(a+b)^2\sin^2\theta}\boldsymbol{j} \\
&= \frac{bu^2}{(a+b)^2\sin^2\theta}(-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\boldsymbol{i}' + \boldsymbol{j}') \\
&= \frac{bu^2}{(a+b)^2\sin^2\theta}[-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}) + (-\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j})] \\
&= -\frac{bu^2}{(a+b)^2\sin^2\theta}(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} + \sin\theta)\boldsymbol{i} \\
&= -\frac{bu^2}{(a+b)^2\sin^3\theta}\boldsymbol{i}
\end{aligned}$$

(ii)

解：在固定坐标系$O-xyz$中，设S的坐标为(x,y,z)，根据(i)中S点的坐标

为$((a+b)\sin\theta,(a+b)\cos\theta,0)$

$$\begin{cases} x=(a+b)\sin\theta \\ y=(a+b)\cos\theta \\ z=0 \end{cases}$$

消去θ得

$$\begin{cases} x^2+y^2=(a+b)^2 \\ z=0 \end{cases}$$

故空间极迹为$O-xy$平面上中心在O半径等于$(a+b)$的圆周。

在活动系$O'-x'y'z'$中，设S的动坐标为(x',y',z')，显然S点在$O'-x'y'$ 平面上，且S点到O点距离恒为$\frac{a+b}{2}$，故有

$$\begin{cases} x'^2+y'^2=[\frac{1}{2}(a+b)]^2 \\ z'=0 \end{cases}$$

故本体极迹方程为$O'-x'y'$平面上中心在O'半径等于$\frac{1}{2}(a+b)$ 的圆周。

Q3.

解：如图(3)，以圆柱体质心为原点建立空间直角坐标系，过原点O做AB的平行线CB'。设圆柱体的密度为ρ，则其质量为$m=\pi r^2\cdot 2r\rho=2\pi\rho r^3$。

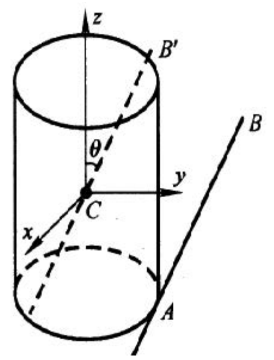

图 3: Q3图

先以CB'为轴，计算圆柱体的转动惯量：轴CB'对于x轴，y轴和z轴的方向余弦分别为$\alpha=0,\beta=\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},\gamma=\cos\theta=\frac{1}{2}$；根据对称性，各惯量积$I_{yz}=I_{zy}=I_{zx}=I_{xz}=I_{xy}=I_{yx}=0$；各轴转动惯量

$$I_{xx}=I_{yy}=\int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\int_{-r}^{r}(y^2+z^2)\rho dzdydx=\frac{7}{6}\pi\rho r^5$$

$$I_{zz}=\int_{-r}^{r}\int_{0}^{r}\rho\cdot x^2\cdot 2\pi xdxdh=\pi\rho r^5$$

故圆柱体对于轴线$A'B'$的转动惯量为

$$I = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 = \frac{9}{8}\pi\rho r^5$$

再根据平行轴定理计算柱体对于轴线AB的转动惯量为

$$\begin{aligned}
I' &= I + m\{\sqrt{r^2+r^2}\cos[45^\circ - (90^\circ - \theta)]\}^2 \\
&= (\frac{25}{8} + \sqrt{3})\pi\rho r^5 \\
&= (\frac{25}{16} + \frac{\sqrt{3}}{2})mr^2
\end{aligned}$$

(ii)

解：设沿着x, y, z轴的单位矢量分别为$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$。先求质心$C$ 相对于A点的角动量

$$\begin{aligned}
I_C &= \overrightarrow{AC} \times (m\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AC}) \\
&= (-r\boldsymbol{j} + r\boldsymbol{k}) \times [m\omega(\sin\theta\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k}) \times (-r\boldsymbol{j} + r\boldsymbol{k})] \\
&= m\omega r^2(sin\theta + \cos\theta)(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) \\
&= \frac{\sqrt{3}+1}{2}m\omega r^2(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})
\end{aligned}$$

柱体相对于C点的角动量为

$$\begin{aligned}
J_{C'} &= I_{xx}\boldsymbol{\omega_x} + I_{yy}\boldsymbol{\omega_y} + I_{zz}\boldsymbol{\omega_z} \\
&= \frac{7}{6}\pi\rho r^5\omega\cos\frac{\pi}{2}\boldsymbol{i} + \frac{7}{6}\pi\rho r^5\omega\sin\theta\boldsymbol{j} + \pi\rho r^5\omega\cos\theta\boldsymbol{k} \\
&= \frac{7\sqrt{3}}{12}\pi\rho r^5\omega\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}\pi\rho r^5\omega\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

故柱体相对于A点的角动量为

$$\begin{aligned}
J_A = J_C + J_{C'} &= \pi\rho r^5\omega[(\frac{19\sqrt{3}}{12} + 1)\boldsymbol{j} + (\sqrt{3} + \frac{3}{2})\boldsymbol{k}] \\
&= m\omega r^2[(\frac{19\sqrt{3}+12}{24})\boldsymbol{j} + (\frac{2\sqrt{3}+3}{4})\boldsymbol{k}]
\end{aligned}$$

Q4.

（1）

解：如图(4)，以墙角为原点O，水平地面为x轴，铅锤墙面为y轴，建立直角坐标系$O-xy$。设在某一位置时杆与地面所成夹角为φ，杆与地面和墙面的接触点分别为A和B，杆的质心为C（由于是均质杆，故C为AB中点），C点的速度为$\boldsymbol{v}_C$，其x, y分量分别为v_{Cx}和v_{Cy}，杆的角速度为

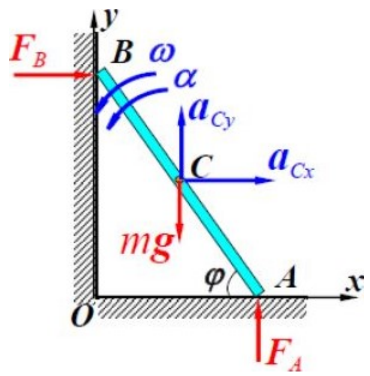

图 4: Q4图

以质心C为基点，杆绕C点转动的转动惯量为

$$I = 2\int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{1}{12} m l^2$$

根据动能定理有

$$mg\frac{l}{2}(\sin\varphi_0 - \sin\varphi) = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

由于A点沿着地面运动，故A点速度的y分量为0

$$v_{Ay} = v_{Cy} + \omega\frac{l}{2}\cos\varphi = 0$$

$$\Longrightarrow v_{Cy} = -\omega\frac{l}{2}\cos\varphi$$

同理，点B沿着墙面运动，故其速度的x分量为0

$$v_{Bx} = v_{Cx} - \omega\frac{l}{2}\sin\varphi$$

$$\Longrightarrow v_{Cx} = \omega\frac{l}{2}\sin\varphi$$

此外，C的速度大小与其分量之间的关系为

$$v_C^2 = v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2$$

以上各式联立，解得杆的角速度为

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(\sin\varphi_0 - \sin\varphi)}$$

上式两边同时对t求导，得到杆的角加速度为

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{3g}{l}}\frac{-cos\varphi}{2\sqrt{\sin\varphi_0 - \sin\varphi}}\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{3g}{2l}\cos\varphi$$

（2）

解： C点速度的x,y分量分别为

$$v_{Cx} = \sqrt{3gl(\sin\varphi_0 - \sin\varphi)}\frac{\sin\varphi}{2}$$
$$v_{Cy} = -\sqrt{3gl(\sin\varphi_0 - \sin\varphi)}\frac{\cos\varphi}{2}$$

上面两式两边同时对t求导，得到C点加速度的x,y分量为

$$a_{Cx} = \frac{3g}{2}(\sin\varphi_0 - \frac{3}{2}\sin\varphi)\cos\varphi$$
$$a_{Cy} = \frac{3g}{2}[(\sin\varphi_0 - \frac{3}{2}\sin\varphi)\sin\varphi + \frac{1}{2}]$$

根据质心运动定理

$$ma_{Cx} = F_B$$
$$ma_{Cy} = F_A - mg$$

以上各式联立解得墙壁和地面对杆的约束力分别为

$$F_B = \frac{3mg}{2}(\sin\varphi_0 - \frac{3}{2}\sin\varphi)\cos\varphi$$
$$F_A = \frac{3mg}{2}[(\sin\varphi_0 - \frac{3}{2}\sin\varphi)\sin\varphi + \frac{7}{6}]$$

墙壁和地面对杆的约束力的方向分别为水平向右和竖直向上。

（3）

解：杆脱离墙的那一瞬间，墙壁对杆的约束力恰好为0

$$F_B = \frac{3mg}{2}(\sin\varphi_0 - \frac{3}{2}\sin\varphi)\cos\varphi = 0$$

解得此时杆与水平面的夹角为

$$\varphi = \arcsin(\frac{2}{3}\sin\varphi_0)$$

Q5.

解：如图(5)，以圆柱体顶点O为原点，槽所在直线为x轴，在槽和圆锥对称轴所在平面内过O点与槽垂直的直线为y 轴，过O点垂直于槽和圆锥对称轴所在平面的直线为z轴，建立随槽绕圆锥对称轴转动的空间直角坐标系，沿x,y,z轴正方向的单位矢量设为$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$。设槽对于质点的压力为$\boldsymbol{F}_N$，其$y,z$方向分量分别为$F_{Ny},F_{Nz}$

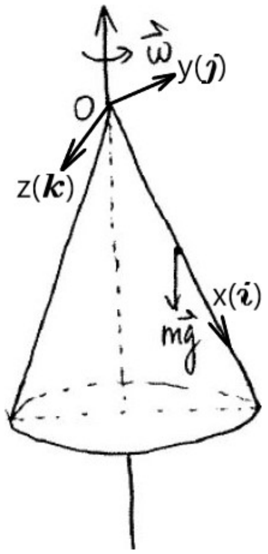

图 5: Q5图

在转动参考系$O-xyz$中，根据牛顿第二定律，质点在各轴向上的动力学微分方程为

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= mg\cos\alpha + m\omega^2 x\sin\alpha\sin\alpha \\
m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_{Ny} - mg\sin\alpha + m\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha = 0 \\
m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_{Nz} + 2m\omega\frac{dx}{dt}\sin\alpha = 0
\end{aligned}
$$

以上三式联立，代入$x=s$并考虑初始条件$\begin{cases} x|_{t=0}=0 \\ \frac{dx}{dt}|_{t=0}=0 \end{cases}$，解得

$$
\begin{aligned}
x = s &= \frac{g\cos\alpha}{2\omega^2\sin^2\alpha}(e^{\omega t\sin\alpha} + e^{-\omega t\sin\alpha} - 2) \\
F_{Ny} &= m(g-\omega^2 s\cos\alpha)\sin\alpha \\
F_{Nz} &= -2m\omega\sqrt{(2g\cos\alpha + \omega^2 s\sin^2\alpha)s}\sin\alpha
\end{aligned}
$$

根据牛顿第三定律，质点对槽作用的压力为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{N'} &= -F_{Ny}\boldsymbol{j} - F_{Nz}\boldsymbol{k} \\
&= m\sin\alpha(\omega^2 s\cos\alpha - g)\boldsymbol{j} + 2m\omega\sin\alpha\sqrt{(2g\cos\alpha + \omega^2 s\sin^2\alpha)s}\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$