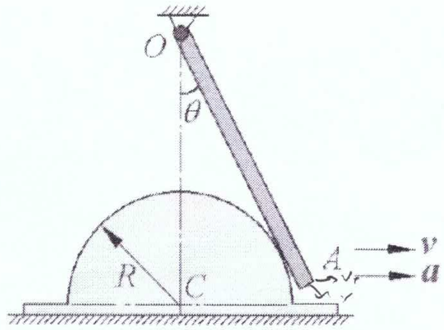
Q1.

[例] 凸轮机构

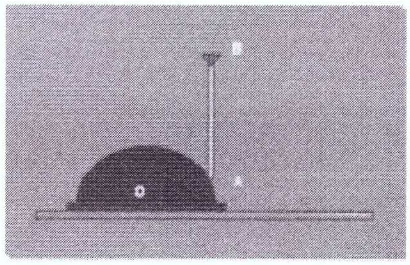
已知：凸轮半径为R，图示瞬时O、C在一条铅直线上;已知: θ，v，a。

求: 该瞬时OA杆的角速度和角加速度。



分析: 由于接触点在两个物体上的位置均是变化的，因此不宜选接触点为动点。

解: 取凸轮上C点为动点，动系固结于OA杆上。



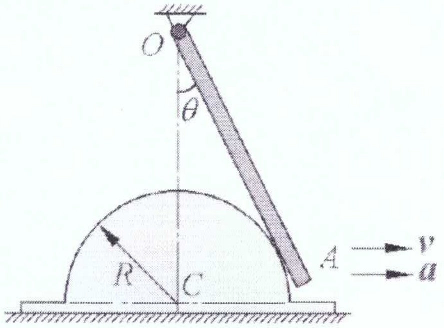
绝对运动: 直线运动；相对运动: 直线运动；牵连运动: 定轴转动。

$$v_a = v,\ a_a = a$$

$v_r = ?$，$a_r = ?$ 方向$/\!/ OA$ $v_e = ?$，方向$\perp OC$

$a_e^n = OC \cdot \omega^2 = ?$ 指向O ；$a_e^t = OC \cdot \alpha = ?$，方向$\perp OC$

根据 $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$ 作出速度平行四边形

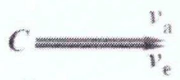


$$v_e = v_a = v,\ v_r = 0$$

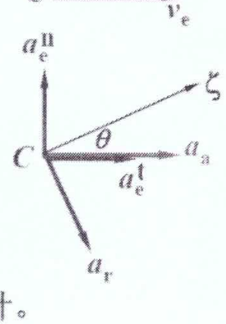
$$\omega = \frac{v_e}{OC} = \frac{v}{R/\sin\theta} = \frac{v}{R}\sin\theta$$

根据 $\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e^t + \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C$

作出加速度矢量图 $a_C = 2\omega v_r = 0$



$$a_e^n = OC\omega^2 = \frac{R}{\sin\theta} \cdot \left(\frac{v}{R}\sin\theta\right)^2 = \frac{v^2}{R}\sin\theta$$



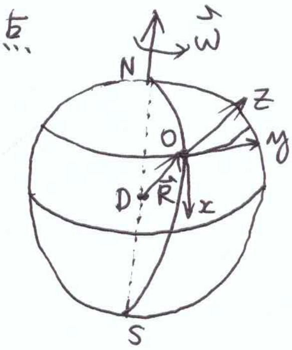
投至ζ轴: $a_a\cos\theta = a_e^t\cos\theta + a_e^n\sin\theta$

$$a_e^t = a_a - a_e^n\tan\theta$$

$$\alpha = \frac{a_e^t}{OC} = \frac{a - v^2\sin\theta/R}{R/\sin\theta} = \frac{a\sin\theta}{R} - \frac{v^2\sin^2\theta}{R^2}$$

转向由上式符号决定，$\alpha > 0$则逆时针，$\alpha < 0$ 则顺时针。

Q2 解：以地面为非惯性参照系，建坐标系 $Oxyz$，以发射点为原点 O，Ox 指向正南，Oy 指向正东，Oz 竖直向上，如右图所示，炮弹的运动微分方程为



$$m\ddot{x} = 2m\omega\dot{y}\sin\lambda \qquad (1)$$

$$m\ddot{y} = -2m\omega(\dot{z}\cos\lambda + \dot{x}\sin\lambda) \qquad (2)$$

$$m\ddot{z} = -mg + 2m\omega\dot{y}\cos\lambda \qquad (3)$$

将以上三式积分，得

$$\dot{x} = 2\omega y\sin\lambda, \quad \dot{y} = -2\omega(z\cos\lambda + x\sin\lambda) + V\cos\alpha$$

$$\dot{z} = -gt + 2\omega y\cos\lambda + V\sin\alpha$$

代入(1)、(2)、(3)式略去 ω^2 项，得

$$\ddot{x} = 2\omega V\sin\lambda\cos\alpha \quad (4)$$

$$\ddot{y} = 2\omega(gt - V\sin\alpha)\cos\lambda \quad (5) \qquad \ddot{z} = -g + 2\omega V\cos\lambda\cos\alpha \quad (6)$$

令 $b = \frac{2V}{g}\omega\cos\lambda\cos\alpha \ll 1$，由(6)式得 $\ddot{z} = -g(1-b)$，略去 b^2 项求出

落地时间：$t = \frac{2V\sin\alpha}{g(1-b)} \approx \frac{2V\sin\alpha}{g}(1+b)$，$t^2 = \frac{4V^2\sin^2\alpha}{g^2}(1+2b)$

由(4)式可得 $x \approx \frac{4V^3}{g^2}\omega\sin\lambda\sin^2\alpha\cos\alpha$

Q3 解：静止系 $Oxyz$ (S)，固连系动系 $O'x'y'z'$ (S')，

以S'系为参考系，小环在水平面内受相互作用力为圆圈施予的约束力 $\vec{N} = N_n \hat{e}_n$，受惯性力

$$\vec{F}_t = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = 2ma\omega^2\cos\frac{\theta}{2}\hat{e}_r'$$

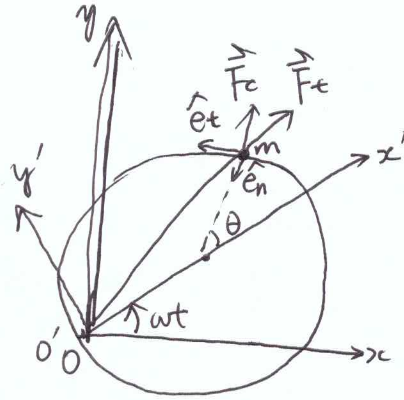
$$\vec{F}_c = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}' = -2m\vec{\omega}\times(a\dot{\theta}\hat{e}_t) = -2m\omega a\dot{\theta}\hat{e}_n$$

在S'中小环沿切向($\hat{e}_t$)的运动微分方程为

$$ma_t' = ma\ddot{\theta} = -2m\omega^2 a\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

即 $\ddot{\theta} + \omega^2\sin\theta = 0$

提示：也可以O'(取圆圈中心)为原点建固连的动系S'系.

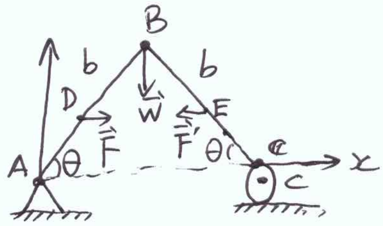


Q4(1)

Solutions to the 5th Homework

1. 解：

以系统为研究对象，解除弹簧约束代之以弹性力，建立如图坐标。



将 $\vec{W}$ 及 $\vec{F}$ 和 $\vec{F'}$ 均视为主动力，弹簧现长为

$$r_{DE}=2b\cos\theta$$

弹性力的大小 $F=k\delta=k|2b\cos\theta-l|$.

主动力作用点的坐标及其变分为：

$$y_B=(a+b)\sin\theta \quad \therefore \quad \delta y_B=(a+b)\cos\theta\,\delta\theta$$

$$r_{DE}=2b\cos\theta \qquad \delta r_{DE}=-2b\sin\theta\,\delta\theta$$

由虚功方程得：

$$F_{By}\delta y_B+[-k(r_{DE}-l)\,\delta r_{DE}]=0$$

即 $(-W)\delta y_B+[-k(r_{DE}-l)\,\delta r_{DE}]=0$

代入 $\delta y_B=(a+b)\cos\theta\,\delta\theta$，$\delta r_{DE}=-2b\sin\theta\,\delta\theta$，得

$$-W(a+b)\cos\theta\,\delta\theta+k(2b\cos\theta-l)\cdot 2b\sin\theta\,\delta\theta=0$$

因 $\delta\theta\neq 0$，$\therefore \tan\theta=\dfrac{W(a+b)}{2kb(2b\cos\theta-l)}$

2 解：(1) 设 m_1 的坐标为 x，则 m_2 的坐标为

$$x_P=x+l\sin\theta,\quad y_P=-l\cos\theta \quad (1)$$

系统动能 $T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_P^2+\dot{y}_P^2)$ (2)

(1)代入(2)，得 $T=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\theta}^2+m_2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$ (3)

取 m_1 所在平面为势能零点，则系统势能为

$$V=-m_2gl\cos\theta \quad (4)$$

拉氏函数为 $L=T-V$

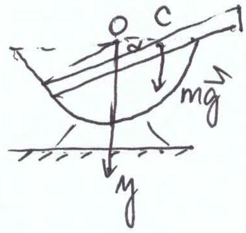
$$=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\theta}^2+m_2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta+m_2gl\cos\theta \quad (5)$$

系统的自由度为2，广义坐标可选为 x,θ，则拉氏方程为

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial x}=0 & (6)\\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial \theta}=0 & (7)\end{cases}$$

Q4(2) 解:

$s=1$，以α为广义坐标，如图所示



据虚功原理，有 $mg\delta y_c = 0$

设棒长度为l，$\because$

$$y_c = 2r\cos\alpha\sin\alpha - \frac{l}{2}\sin\alpha$$

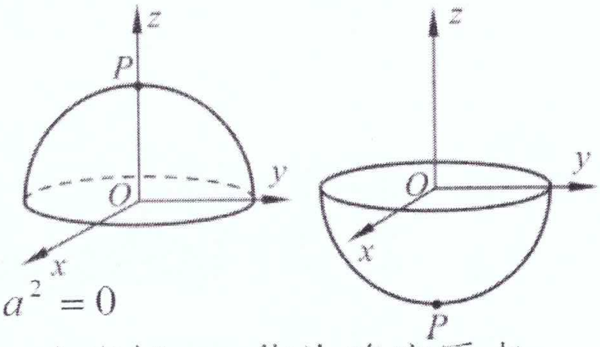
$$= r\sin 2\alpha - \frac{l}{2}\sin\alpha$$

$$\therefore mg\delta y_c = mg\left(2r\cos 2\alpha - \frac{l}{2}\cos\alpha\right)\delta\alpha = 0$$

由 $2r\cos 2\alpha - \frac{l}{2}\cos\alpha = 0$ 知 $\frac{l}{2} = \frac{2r\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$，代入 $\cos\alpha = \frac{c}{2r}$，得

$$l = \frac{4r(2\cos^2\alpha - 1)}{\cos\alpha} = \frac{4(c^2-2r^2)}{c}$$

例题 5　一质量为m的质点P被限制在光滑球面上运动. 已知球面的半径为a, 求质点的平衡位置和约束力.



[解] 系统: 质点

建立原点在球心上的直角坐标系 $Oxyz$,质点的约束方程为

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2=0$$

$s=2$,但解题时仍以质点的3个坐标x,y,z作为确定质点位置的变量. 它们的变分不独立, 满足以下关系:

$$2x\delta x+2y\delta y+2z\delta z=0$$

质点所受的主动力是重力$m\vec{g}$

根据虚功原理, $m\vec{g}\cdot\delta\vec{r}=0$ 即 $-mg\delta z=0$

$$-mg\delta z=0 \qquad 2x\delta x+2y\delta y+2z\delta z=0$$

$$(-mg+2\lambda z)\delta z+2\lambda x\delta x+2\lambda y\delta y=0$$

不定乘子的待定性可使$\delta x, \delta y, \delta z$相互独立(系数均为0), 于是,

$$\begin{cases}-mg+2\lambda z=0\\2\lambda x=0\\2\lambda y=0\end{cases} \qquad \because \lambda\neq 0$$

可得到质点平衡位置的两组坐标: $(0,0,a)$ $(0,0,-a)$

还可得出, $\lambda=\dfrac{mg}{2z}$

$$\therefore \vec{F}_R=2\lambda x\vec{i}+2\lambda y\vec{j}+2\lambda z\vec{k}=\frac{mg}{z}x\vec{i}+\frac{mg}{z}y\vec{j}+mg\vec{k}$$

以$x=0, y=0, z=\pm a$代入, 得 $\vec{F}_R=mg\vec{k}$