理论力学作业_3

陈稼霖　　45875852

2018.11.2

Q1.

解：以地面为静止参考系，以杆OA为绕定点O的转动参考系。
点C的绝对速度为$\boldsymbol{v}$。
点C的相对速度设为$\boldsymbol{v}'$（沿$\overrightarrow{OA}$方向）。
杆OA的牵连速度为$\omega\times\overrightarrow{OC}$
根据相对运动关系，有

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\omega\times\overrightarrow{OC}$$

做速度矢量图，注意到$\boldsymbol{v}'=0$，在平行地面方向有

$$v=\omega\frac{R}{\sin\theta}$$

解得该瞬时杆的角速度

$$\omega=\frac{v}{R}\sin\theta$$

方向垂直纸面朝外。
点C的绝对加速度为$\boldsymbol{a}$。
点C的相对加速度设为$\boldsymbol{a}'$（沿$\overrightarrow{OA}$方向）。
杆OA的牵连加速度为$\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\overrightarrow{OC}-\omega^2\overrightarrow{OC}$。
点C在转动参考系中的科里奥利加速度为$2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'=0$。
根据相对运动关系，有

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\overrightarrow{OC}-\omega^2\overrightarrow{OC}$$

做加速度矢量图，在平行和垂直地面方向上分别有

$$a=a'\sin\theta+\dot{\omega}\frac{R}{\sin\theta}$$
$$0=a'\cos\theta-\omega^2\frac{R}{\sin\theta}$$

解得该瞬时杆的角加速度

$$\dot{\omega}=\frac{a}{R}\sin\theta-\frac{v^2}{R^2}\sin^2\theta\tan\theta$$

若$\dot{\omega}>0$，则其方向垂直纸面朝外，否则其方向垂直纸面朝内。

Q2.

证明：以炮弹发射点为原点，炮弹发射点处经线的切线为x轴（朝南为正方向），纬线的切线为y轴（朝东为正方向），垂直于地表的直线为z 轴（由地心指向外为正方向），建立随地球转动的坐标系。设沿x,y,z轴正方向的单位矢量为$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$。设炮弹在这一转动参考系中的坐标为$(x,y,z)$，速度为$\boldsymbol{v}'=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k}$，加速度为$\boldsymbol{a}'=\ddot{x}\boldsymbol{i}+\ddot{y}\boldsymbol{j}+\ddot{z}\boldsymbol{k}$。根据转动参考系中的牛顿第二定律，有

$$m\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{F}-mg\boldsymbol{k}-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'$$

其中，由于在抛体运动中炮弹不受除重力外的任何力，故$\boldsymbol{F}=0$；地球的自转的角速度可表示为$\boldsymbol{\omega}=-\omega\cos\lambda\boldsymbol{i}+\omega\sin\lambda\boldsymbol{k}$，故

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'=-\omega\dot{y}\sin\lambda\boldsymbol{i}+\omega(\dot{x}\sin\lambda+\dot{z}\cos\lambda)\boldsymbol{j}-\omega\dot{y}\cos\lambda\boldsymbol{k}$$

从而得到炮弹在x,y,z三个轴向上的运动微分方程为

$$\begin{aligned}m\ddot{x}&=2m\omega\dot{y}\sin\lambda\\ m\ddot{y}&=-2m\omega(\dot{x}\sin\lambda+\dot{z}\cos\lambda)\\ m\ddot{z}&=-mg+2m\omega\dot{y}\cos\lambda\end{aligned}\tag{1}$$

上式积分对t积分一次并考虑到$t=0$时，$x=0,y=0,z=0,\dot{x}=0,\dot{y}=V\cos\alpha,\dot{z}=V\sin\alpha$，得到

$$\begin{aligned}\dot{x}&=2\omega y\sin\lambda\\ \dot{y}&=-2\omega(x\sin\lambda+z\cos\lambda)+V\cos\alpha\\ \dot{z}&=-gt+2\omega y\cos\lambda+V\sin\alpha\end{aligned}$$

将上式回代入式(1)，得到

$$\begin{aligned}\ddot{x}&=2\omega[-2\omega(x\sin\lambda+z\cos\lambda)+V\cos\alpha]\sin\lambda\\ \ddot{y}&=-2\omega[2\omega y\sin^2\lambda+(-gt+2\omega y\cos\lambda+V\sin\alpha)\cos\lambda]\\ \ddot{z}&=-g+2\omega[-2\omega(x\sin\lambda+z\cos\lambda)+V\cos\alpha]\cos\lambda\end{aligned}$$

由于ω项极小，忽略ω^2项和$\ddot{z}$式中的ω项，得到

$$\begin{aligned}\ddot{x}&=2\omega V\cos\alpha\sin\lambda\\ \ddot{y}&=2\omega(gt-V\sin\alpha)\cos\lambda\\ \ddot{z}&=-g\end{aligned}$$

上式对t积分两次并考虑初始条件，得到

$$\begin{aligned}x&=\omega Vt^2\cos\alpha\sin\lambda\\ y&=\omega(\frac{1}{3}gt^3-Vt^2\sin\alpha)\cos\lambda+Vt\cos\alpha\\ z&=-\frac{1}{2}gt^2+Vt\sin\alpha\end{aligned}$$

当炮弹落地时，$z=0$，解得

$$t=\frac{2V\sin\alpha}{g}$$

代入x式中得到横向偏移为

$$d=x=\frac{4V^3}{g^2}\omega\sin\lambda\sin^2\alpha\cos\alpha$$

Q3.

解：如图(1)，设圆圈的圆心为C，CO和CM之间的夹角为θ。

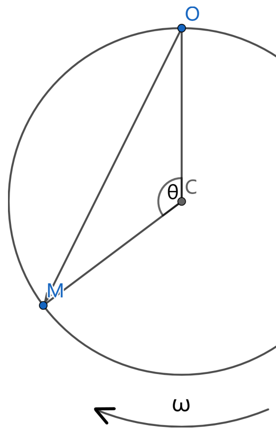

图 1: Q3图

在圆圈这一平面转动参考系中，对于小环，根据牛顿第二定律，有

$$m\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{F}+m\omega^2\overrightarrow{OM}-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'$$

其中$\boldsymbol{a}'$为小环在转动参考系中的加速度，$\boldsymbol{F}$为小环受到的作用力，在题设条件下为圆圈对小环的支持力，垂直于圆圈的切线方向，$\boldsymbol{v}'$为小环对在转动参考系中的速度，垂直于圆圈的切线方向。故沿切线方向有

$$ma_t=m\omega^2\cdot 2a\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}$$
$$\Longrightarrow a_t=\omega^2 a\sin\theta$$

由于$a_t=a\ddot{\theta}$，故

$$\ddot{\theta}=\omega^2\sin\theta$$

Q4.

(i)

解：以A点为原点，AC所在直线为x轴，建立平面直角坐标系。设B 点坐

标为(x_1, y_1)，D点坐标为(x_2, x_2)，E点坐标为(x_3, y_3)。根据虚功原理，机构的平衡条件为

$$-W\delta y_1 + k(x_3 - x_2)\delta x_2 - k(x_3 - x_2)\delta x_3 = 0$$

利用广义坐标$\angle BAC = \theta$表示各点坐标

$$\begin{aligned}
y_1 &= (a+b)\sin\theta \\
x_2 &= a\cos\theta \\
x_3 &= (a+b)\cos\theta + b\cos\theta = (a+2b)\cos\theta
\end{aligned}$$

代入平衡条件得到

$$\begin{aligned}
-W\delta((a+b)\sin\theta) + k((a+2b)\cos\theta - a\cos\theta)\delta(b\cos\theta) \\
-k((a+2b)\cos\theta - a\cos\theta)\delta((a+2b)\cos\theta) = 0
\end{aligned}$$

由于θ为独立变量，故

$$[-W(a+b) + 2kab\sin\theta]\cos\theta = 0$$

解得机构的平衡位置为

$$\theta = \arcsin\frac{W(a+b)}{2kab}$$

此时各点坐标为$B((a+b)\cos\theta, (a+b\cos\theta)), C(2(a+b)\cos\theta, 0), D(a\cos\theta, a\sin\theta), E((a+2b)\cos\theta, a\sin\theta)$

(ii)

证明：设杆的质心$C(x, y)$。根据虚功原理，杆的平衡条件为

$$mg\delta y = 0$$

又

$$y = 2r\cos\alpha\sin\alpha - \frac{l}{2}\cos\alpha = r\sin 2\alpha - \frac{l}{2}\cos\alpha$$

代入平衡条件中得到

$$mg\delta(r\sin 2\alpha - \frac{l}{2}\cos\alpha) = mg(2r\cos 2\alpha - \frac{l}{2}\cos\alpha)\delta\alpha = 0$$

由于α为独立变量，故

$$2r\cos 2\alpha - \frac{l}{2}\cos\alpha = 0 \tag{2}$$

又

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{c}{2r} \\
\Longrightarrow \cos 2\alpha &= 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{c^2 - 2r^2}{2r^2}
\end{aligned}$$

代入式(2)中得到

$$l = \frac{4(c^2 - 2r^2)}{c}$$

Q5.

解：以球心为原点，过原点竖直向上的直线为z轴，建立空间直角坐标系。根据虚功原理，平衡条件为

$$m\boldsymbol{g}\delta\boldsymbol{r} = -mg\delta z = 0$$

质点被限制在球面上运动，约束方程为

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

微分得

$$2x\delta x + 2y\delta y + 2z\delta z = 0$$

约束方程的微分与拉格朗日未定乘数λ相乘并加上平衡条件，有

$$\lambda \cdot 2x\delta x + \lambda \cdot 2y\delta y + (-mg + \lambda \cdot 2z)\delta z = 0$$

由此得

$$\begin{aligned} &2\lambda x = 0 \\ &2\lambda y = 0 \\ &-mg + 2\lambda z = 0 \\ &x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \end{aligned}$$

解得

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = a \\ \lambda = \frac{mg}{2a} \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -a \\ \lambda = -\frac{mg}{2a} \end{cases}$$

约束力为

$$\boldsymbol{R} = \lambda \nabla f = -m\boldsymbol{g}$$

综上：质点的平衡位置有两个，分别为$(0, 0, -a)$和$(0, 0, a)$，在两点处的约束力大小均为mg，方向均为竖直向上。