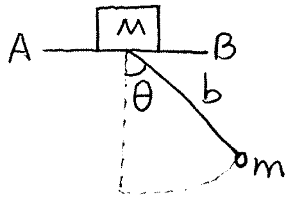
Q1 解：取广义坐标为质量M的质心位置x和线相对于竖直方向的偏转角θ。



(a) $T=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\left[(\dot{x}+b\dot{\theta}\cos\theta)^2+b^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right]$

$V=-mgb\cos\theta$

$\therefore L=T-V=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2+b^2\dot{\theta}^2+2b\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right]+mgb\cos\theta$

(b) 对于小振动的情形：

$L=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+b^2\dot{\theta}^2+2b\dot{x}\dot{\theta})+mgb(1-\frac{1}{2}\theta^2)$

$\therefore$ 运动方程为 $\begin{cases}(m+M)\dot{x}+mb\dot{\theta}=C, & C\text{为常数}\\ \ddot{x}+b\ddot{\theta}+g\theta=0\end{cases}$

若令 $\xi=x+\frac{mb\theta}{m+M}$，则 $(m+M)\dot{\xi}=C$，$\therefore \xi$是一个简正坐标。

ξ是系统质心的水平位置坐标，作匀速直线运动。

另，$\because \ddot{x}=-\frac{mb}{m+M}\ddot{\theta}$，$\therefore$ 后一个运动方程为 $b\frac{M}{m+M}\ddot{\theta}+g\theta=0$

由此可知θ为另一个简正坐标，对应的频率为 $\sqrt{\frac{(m+M)g}{Mb}}$

(c) 则 $\xi=At+B$，$\theta=C\sin(\omega t+D)$

其中A, B, C, D均为常数. $\omega=\sqrt{\frac{(m+M)g}{Mb}}$

Q2：解：以匀角速 $\vec{\omega}$ 转动的参考系中，粒子的拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}mv^2+m\vec{v}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})+\frac{1}{2}m(\vec{\omega}\times\vec{r})^2-V \quad (1)$$

$$\therefore \vec{p}=\frac{\partial L}{\partial v}=m\vec{v}+m\vec{\omega}\times\vec{r} \quad (2)$$

$$\therefore \vec{v}=\frac{\vec{p}}{m}-\vec{\omega}\times\vec{r} \quad (3)$$

粒子的哈密顿函数为 $H=\vec{p}\cdot\vec{v}-L$

$$=(m\vec{v}+m\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{v}-\left[\frac{1}{2}mv^2+m\vec{v}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})+\frac{1}{2}m(\vec{\omega}\times\vec{r})^2-V\right]$$

$$=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}m(\vec{\omega}\times\vec{r})^2+V$$

将(3)式代入得 $H=\frac{p^2}{2m}-\vec{p}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})+V \quad (4)$