最近更新：2023/05/27 10:11

七上

第二单元 - 有理数

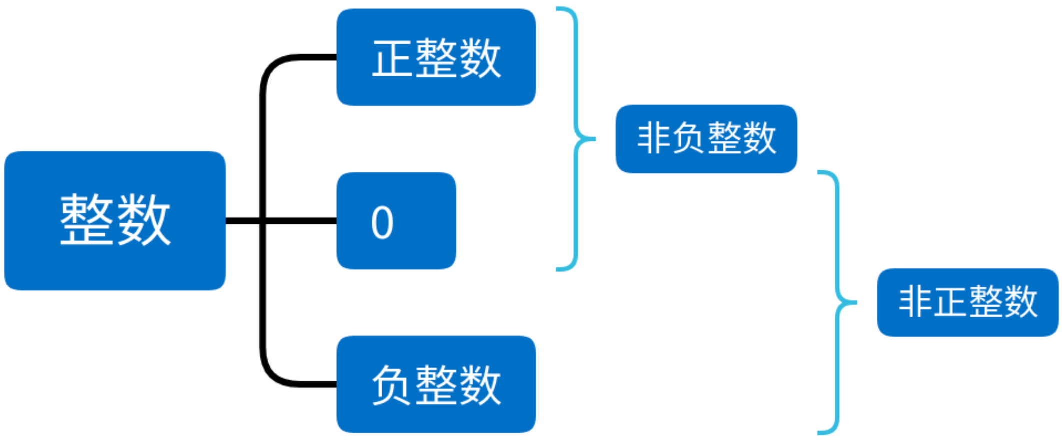
2.1 正数与负数

1. 正数：大于0的数
2. 负数：小于0的数

0不是正数也不是负数

3. 非正数：≤ 0的数，即为0和负数
4. 非负数：≥ 0的数，即为0和正数
5. 应用

正数	收入	盈利	上升	存入	...
负数	支出	亏损	下降	取出	...

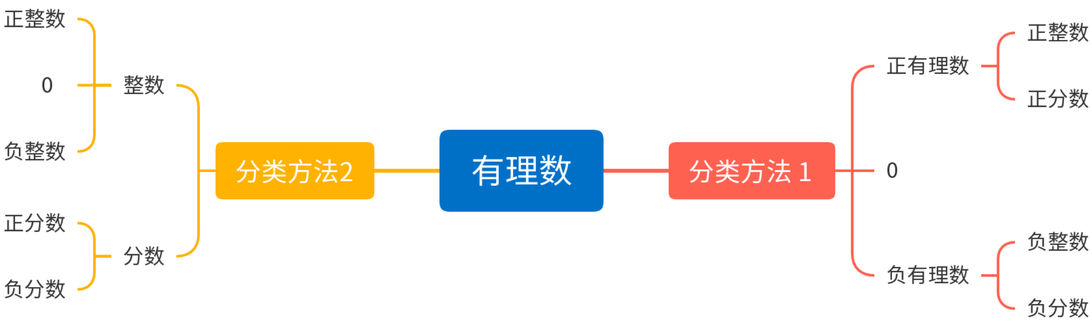


2.2 有理数

有理数

1. 能写成$\frac{m}{n}$的形式的数，其中$n \neq 0$，$m \in Z$
2. 整数与分数的统称

分类



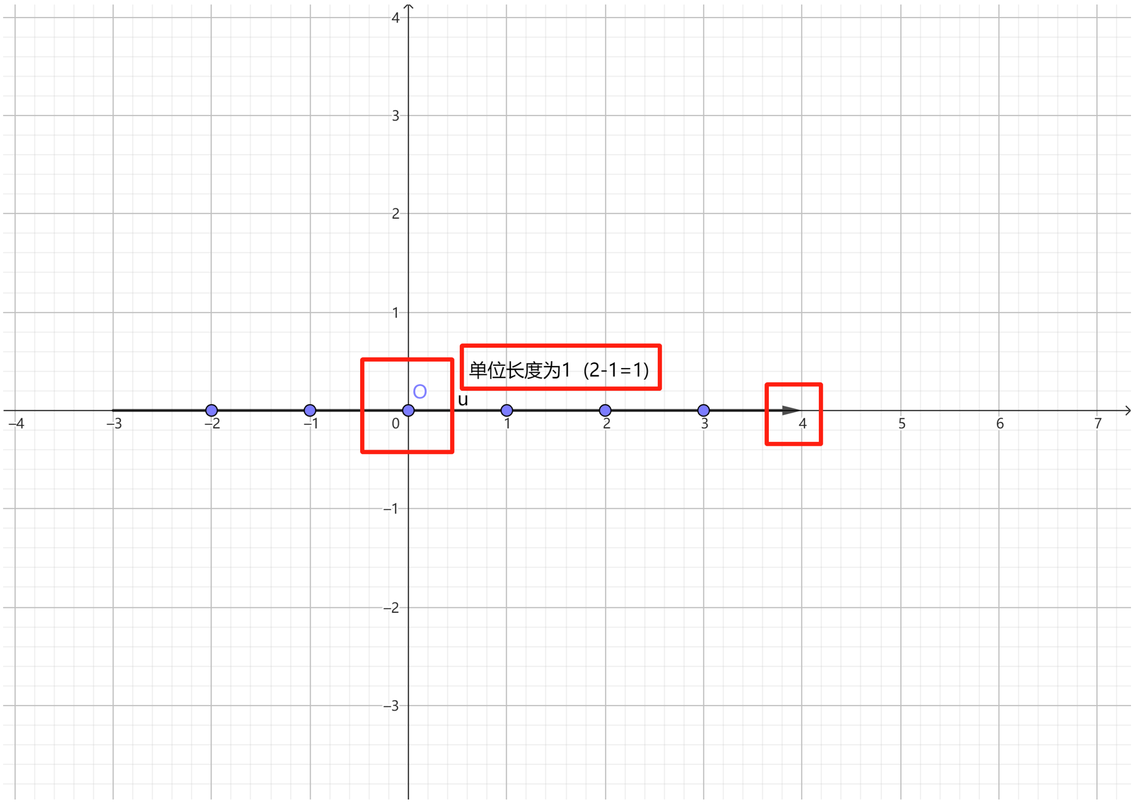
3. **无理数：无限不循环小数(如$\pi, \sqrt{2}, 1.\dot{0}\dot{1}$等)**
4. **证明$\sqrt{2}$为无理数**

$$\text{证明：假设}\sqrt{2}\text{为有理数, 则有}$$
$$\frac{m}{n} = \sqrt{2}$$
$$\text{根据平方根的意义得}2 = (\frac{m}{n})^2 = \frac{m^2}{n^2}\ \text{即}2n^2 = m^2$$
$$\therefore m\text{为偶数}$$
$$\text{设}m = 2k, k \in N*$$
$$\therefore 2n^2 = 4p^2, \text{即}n^2 = 2p^2$$
$$\therefore n\text{为偶数}$$
$$\therefore m, n\text{均为}2\text{的倍数, 这与}m, n\text{没有大于}1\text{的公因数相悖}$$
$$\therefore \sqrt{2}\text{不可表示为}\frac{m}{n}$$
$$\therefore \sqrt{2}\text{不为有理数即其为无理数}$$

(此为八年级上册4.3实数中的方法)

2.3 数轴

1. **数轴三要素：原点(下图点0)，正方向(下图数轴右箭头)，单位长度(下图文字详解)**



2. 任意数均可在数轴上表示
3. 数轴左侧点小于右侧
4. 方法
    1. 画数轴
    2. 标数字
    3. 连接

2.4 绝对值和相反数

绝对值

几何 - 一个数在数轴上到原点的距离

代数 - 一个数的绝对值，正数是它本身，负数是它的相反数，**0的绝对值是0**

绝对值一定大于等于0

a的绝对值写作$|a|$

由绝对值倒推原数得$\pm a$

$$|\pm a| = \begin{cases} a(a>0) \\ 0(a=0) \\ -a(a<0) \end{cases}$$

相反数

只有符号不同的两数<u>互为相反数</u>

0的相反数为0

表示a的相反数可在前加负$(-)$号

奇数个负号为负，偶数个负号为正

2.5 有理数运算

1. 加法

法则

同号两数相加，取**相同**的符号，并把绝对值相加

异号两数相加，取**绝对值较大的加数**的符号，并用较大的绝对值减去较小的

互为相反数的两数相加得0，如$-3+3=0,-\pi+\pi=0$

0加任何数都得该数，如$5+0=5,\sqrt{2}+0=\sqrt{2}$

运算律

交换律 $a+b=b+a$

结合律 $a+(b+c)=(a+b)+c$

2. 减法

法则

减去一个数等于**加**上这个数的**相反数**

任何数减去0都得该数，如$5-0=5,\sqrt{2}-0=\sqrt{2}$

0减去任何数都得该数的**相反数**

$a-b$可读作"a减b"或"a与负b的和"

线段AB的长度$=|a-b|=|b-a|,(a-b)=-(b-a)$

3. 加减混合运算

绝对值有括号性 $|a|=\begin{cases}(a)\\(-a)\end{cases}$

简便计算

凑整

$$93.1-8.9+6.9=(93.1+6.9)-8.9=91.1$$

同号加数结合

$$22-9-20+|-27|=(22+27)+(-9-20)=20$$

同分母结合

$$\frac{1}{9}-\frac{7}{8}+1\frac{6}{9}+|-\frac{2}{9}|-2\frac{1}{8}=(\frac{1}{9}+1\frac{6}{9}+\frac{2}{9})+(-\frac{7}{8}-2\frac{1}{8})=1$$

相反数结合

$$\frac{1}{9}-\frac{7}{8}-|-\frac{1}{9}|+\frac{1}{8}=\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-(\frac{7}{8}-\frac{1}{8})=-\frac{3}{4}$$

加减混合运算可以从左向右运算，**可以统一为加法**(只有加法的和式，即代数和)

4. 乘法

法则

两数相乘，同号得正，异号得负，并把绝对值相乘

$$
\begin{aligned}
(+)\times(+)=(+)\\
(+)\times(-)=(-)\\
(-)\times(+)=(-)\\
(-)\times(-)=(+)
\end{aligned}
$$

0乘任何数都得0

运算律

交换律 $a\cdot b=b\cdot a$**

结合律 $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

分配律 $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$

奇负偶正

奇数个负数相加得负，偶数个负数相加得正

倒数

两个乘积为1的数**互为倒数**，如5和$\frac{1}{5}$，其中一个数被称为另一个数的倒数

±1的倒数为±1，0**没有倒数**

5. 除法

法则

1. 两数相处，同号得正，异号得负，并把绝对值相除

2. **除以一个数就等于乘上这个数的倒数**

0除以任何数都得0，如$0\div5=0$

(以简便来说)除法中若可以整除则用法则1，反之则用法则2

6. 乘方

乘方写作a^b的形式，其中a称为底数，b称为指数，读作"a的b次方"，统称幂**(见七年级下册第八单元 - 幂的运算)**

$$
\begin{cases}
a^n>0\ (a>0)\\
a^n=0\ (a=0)\\
a^{2n}>0, a^{2n+1}<0\ (a<0)
\end{cases}
$$

$$0^2=0,1^2=1$$

$0^3=0,1^3=1,(-1)^3=-1$

7. 简单的混合运算

运算顺序

括号&绝对值 >> 乘方&开方 >> 乘除法 >> 加减法

非负性方程

一般形式$a+b=0(a\geq 0,b\geq 0)$

绝 对 值$|a+3|+|b-1|=0(|a+3|\geq 0,|b-1|\geq 0)$

乘 方$(a-2)^2+(b+4)^2=0((a-2)^2\geq 0,(b+4)^2\geq 0)$

8. 复杂的混合运算

无

9. 科学计数法

写作$a\times 10^n(n\in N*,1\leq |a|<10)$

n可看作该数整数位数-1

$103.12=1.0312\times 10^2$

第三单元 - 代数式

3.1 字母表示数

特点

1. 字母与数字相乘，乘号一般省略或写成*点乘形式*($3\cdot x$或$3x$)
2. 填空中若**多项式**后有**单位**，则需加括号($(x-2)$个人)
3. 有除法写**分数**（$x\div 3=\frac{x}{3}$）
4. 有相同因式写**乘方**($(x+1)(x-2)(x+1)=(x+1)^2(x-2)$)
5. **带分数**与字母项乘，转换为**假分数**($1\frac{3}{4}\cdot x=\frac{7}{4}x$)
6. 数与字母相乘，字母系数1常省略，-1常写作$-$（$1a=a,-1a=-a$)

3.2 代数式

代数式

只有运算符(无逻辑符号$=,\geq,\leq,<,>,\neq$等)**并含有数字或字母的式子**

单独的数(3)或字母(a)也是代数式

单项式

只有**数字与字母的积**的代数式($33x,42x^2y$)

单独的数或字母也是单项式

单项式的数字因式叫**系数**

单项式的字母的次数叫**单项式的次数**

多项式

由多个单项式的和或差组成的式子$(3x+6y^2, x-2y+3xy)$

多项式中的每一个单项式都叫**多项式的项**

多项式中*单项式的*个数叫**项数**

多项式中**最高次数的单项式的次数**叫**多项式的次数**

多项式的名称：n次m项式

多项式中因式没有字母的项叫**常数项**

> **单项式与多项式统称为整式**
>
> 分母中含有字母的式子叫**分式**

对于任意项， 若该项系数为0，则该项为0

3.3 代数式的值

代入数字

$x^2y+2x-y^3$

已知$x=4, y=3$

$$\begin{aligned}\text{原式}&=4^2\times3+2\times4-3^3\\&=48+8-27=29\end{aligned}$$

已知$(x-4)^2+|y-3|=0$

$$\because (x-4)^2+|y-3|=0$$
$$\therefore x=4, y=3$$
$$\therefore \text{原式}=4^2\times3+2\times4-3^3=48+8-27=29$$

代入代数式

$(x-y)^3+(y-x)^2-(2x-2y)$

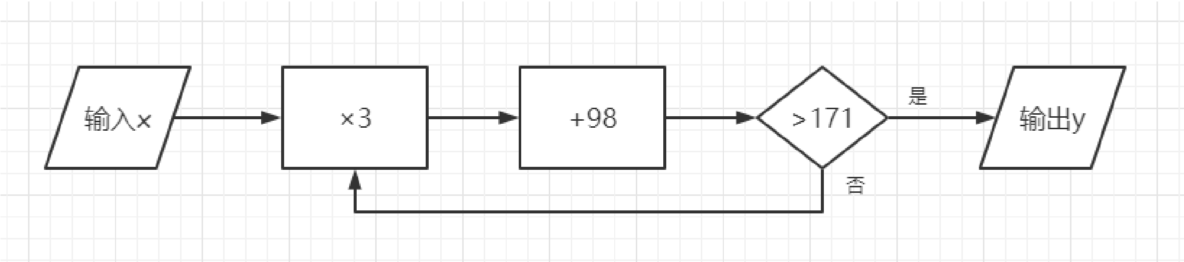
已知$x-y=2$

$$\text{原式}=2^3+2^2-2\times2=8$$

已知$x-y-3=2$

$$\text{由}x-y-3=-1\text{得}x-y=2$$
$$\text{代入原式得}2^3+2^2-2\times2=8$$

程序性求值



3.4 合并同类项

同类项

字母指数和**数字**指数均相同的多个式子

同类项的判定**与系数无关**

同类项的判断**与字母的顺序无关**

同类项要么同时为单项式，要么同时为多项式

合并同类项

合并同类项是用**乘法分配律**将几个同类项的系数**提出并合并**后化为最简形式

系数相加得系数，指数不变

互为相反数的两数的偶次幂相同 >> 为同类项

互为相反数的两数的奇次幂互为相反数 >> 为同类项

3.5 去括号

去括号

多项式外的符号为正(加)号($+$)，直接去括号

多项式外的符号为负(减)号($-$)，去括号需变符号($\times(-1)$)

加括号

加正(加)号**不变号**

加负(减)号**变号**

多项式外若为乘号，则将省略的乘号或点乘号添加并用**乘法分配律**将其拆分

$$\begin{aligned}&-2(4+a-7)\\=&-2\times4-2\cdot a-7\times-2\\=&-8-2a+14=6-2a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-2(4+a-7)\\=&-[2\times4+2\cdot a+2\times(-7)]\\=&-[8+2a-14]=6-2a\end{aligned}$$

3.6 整式的加减

化简步骤

1. 去括号
2. 合并同类项

将未知数的值代入化简后的式子叫求值

第四单元 - 一元一次方程

4.1 从问题到方程

由等号(=)连接的式子叫等式，表示相等关系

含有未知数的式子叫方程，分式方程也是方程（分式方程：分母中含有未知数的方程）

m元n次方程，即有m个未知数(字母)，且最高次项次数为n，只能为**整式方程**

> 一元一次方程，即有一个未知数，且最高次数为1的**整式方程**

等式的分类

> 恒等式 - 一定成立（$5=5,\pi=\pi$等）
>
> 条件等式 - 可能成立（$a=b,5x+3y-4z=0$等）
>
> 矛盾等式 - 不能成立（$a-1=a,5-\pi=\pi$等）

4.2 解一元一次方程

方程的解

> 使方程成立的未知数的值

判断方程的解

1. 将结果代入方程
2. 判断等式是否成立
3. 得出结论

多个方程的解的形式：

$$\begin{cases} x=a \\ y=b \\ z=c \\ \dots \end{cases}$$

解方程

> 解方程的过程

步骤

1. **去分母(最小公倍数&乘法分配律&等式的性质)**
2. **去括号(乘法分配律)**
3. **移项(等式的性质)**
4. **合并同类项(乘法分配律)**
5. **系数化为一(等式的性质)**

等式的性质(重要)

等式两边同时加减同一个数，等式仍成立

$$若a=b,则a\pm 2=b\pm 2$$

等式两边同时乘或除以一个相同的**不是0**的数，等式仍成立

$$若a=b,c\neq 0,则ac=bc,\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$$

移项

将一个数字或字母由方程的一边转移到另一边的过程叫移项

移项需改变符号（$a-2=4>>a=4+2$）

4.3 用一元一次方程解决问题

1. 解决问题的一般步骤

1. 审 - 等量关系
2. 设 - 找未知数
3. 列 - 列出方程
4. 解 - 解出方程
5. 验 - 检验答案
6. 答 - 回答问题

2. 列表分析问题

无

3. 用线性示意图分析问题

无

4. 列表或用线性示意图分析问题

行程问题

相遇

$$S_{和}=(V_{甲}+V_{乙})\times T$$

追及

$$S_{差}=(V_{甲}-V_{乙})\times T$$

工程问题

工作总量=工作速度×工作时间（$1=vt, v=\frac{1}{t}, t=\frac{1}{v}$）

合作效率=效率和×时间

利润问题

$$\begin{cases}进价\\售价=\begin{cases}进价+进价\times利润率\\标价\times折扣\end{cases}\\标价\\利润=\begin{cases}售价-进价\\进价\times利润率\end{cases}\\利润率=\frac{利润}{进价}\end{cases}$$

5. 用列表或圆形示意图分析问题

无

6. 用柱状示意图分析问题

无

第十一单元 - 一元一次不等式

*注：本单元原属于七年级下册，因教学进度原因提前学习

11.1 生活中的不等式

不等式

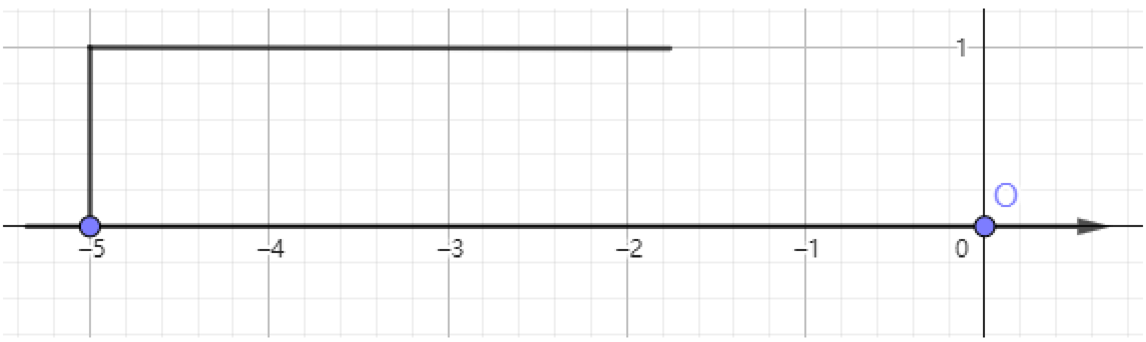
用不等号($>, <, \leq, \geq, \neq$)连接的式子叫不等式

11.2 不等式的解集

代数表示

$x \geq -5$，由未知数(x)、不等号($>$)、数(-5)组成

几何表示



注意：若解集符号为$<$或$>$，则点需画空心点；若为$\leq$或$\geq$，则点需画实心点

不等式的解

能使不等式成立的未知数的值

不等式的解集

一个含有未知数的不等式的**所有解的集合**，简称不等式的解集

求不等式解集的过程叫**解不等式**

11.3 不等式的性质

不等式的两边同时加减同一个数，不等式符号不变

不等式的两边同时乘除同一个数：

正数：不等式符号不变

负数：不等式符号改变

0：乘法变为等式，除法错误

11.4 解一元一次不等式

步骤

1. 去分母
2. 去括号
3. 移项
4. 合并同类项
5. 系数化为一

先找大范围($<,>$)，再找临界点($=$)

番外 - 含参方程&不等式

在一元一次方程$ax=b$中，$x=\begin{cases}\frac{b}{a}\ (a\neq 0)\\ \infty\ (a=0,b=0)\\ \phi\ (a=0,b\neq 0)\end{cases}$

在一元一次不等式$ax>b$中，$\begin{cases}x>\frac{b}{a}\ (a>0)\\ x<\frac{b}{a}\ (a<0)\\ x=\phi\ (a=0,b\geq 0)\\ x=\infty\ (a=0,b<0)\end{cases}$

11.5 用一元一次不等式解决问题

无

11.6 一元一次不等式组

一元一次不等式组

由多个一元一次不等式联立($\wedge$)得到

不等式组的解集

1. 所有不等式解集的公共部分
2. 使所有不等式同时成立的部分

不等式组的解法

1. 画数轴分析
2. 结论

不等式组的结论

同大取大 $\begin{cases} x > 1 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow x > 2$

同小取小 $\begin{cases} x < -1 \\ x < -2 \end{cases} \Rightarrow x < -2$

大小小大中间找 $\begin{cases} x < 1 \\ x > -2 \end{cases} \Rightarrow -2 < x < 1$

大大小小无处找 $\begin{cases} x < -1 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow x = \phi$

番外 - 含参不等式组

已知一元一次不等式组$\begin{cases} x > a \\ x < 1 \end{cases}$

当$a > 1$时，$\begin{cases} x > a \, (a > 1) \\ x < 1 \end{cases}$，大大小小无处找，无解

当$a = 1$时，$\begin{cases} x > 1 \\ x < 1 \end{cases}$，无解

当$a < 1$时，$\begin{cases} x > a \, (a < 1) \\ x < 1 \end{cases}$，大小小大中间找，有解

先找大范围(<,>)，再找**临界点(=)**

已知一元一次不等式组$\begin{cases} x > a \\ x < 1 \end{cases}$有$n$个整数解

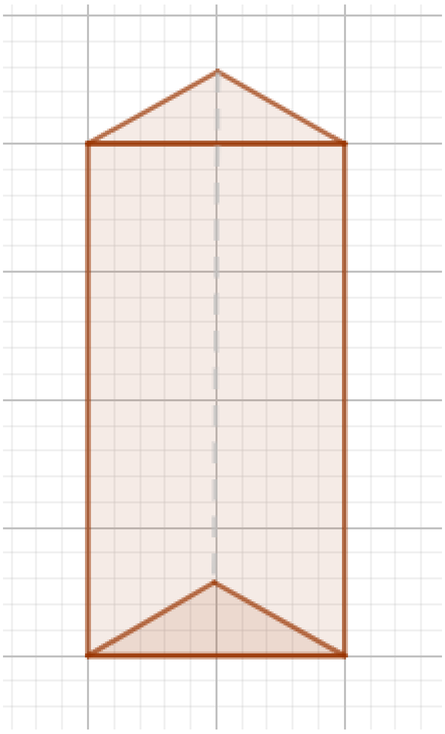
1. 画数轴
2. **确定特殊解**
3. 确定大范围
4. 确定**临界值**(**代入**查看解是否满足题意)

第五单元 - 走进图形世界

5.1 丰富的图形世界

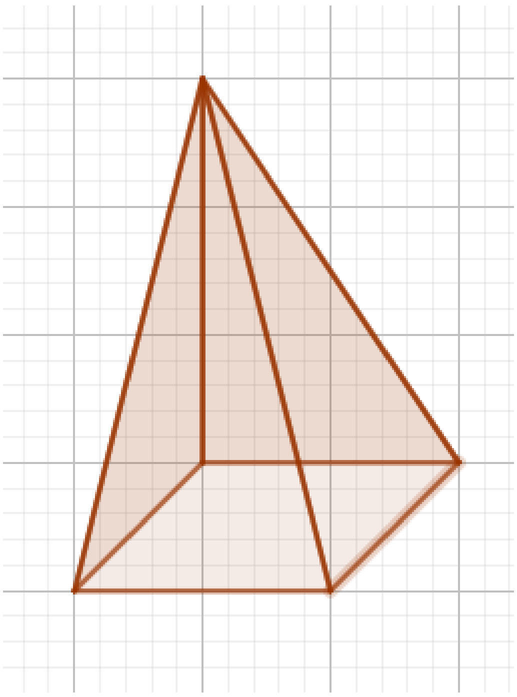
棱柱

顶面，底面，侧面，n条侧棱，$3n$条棱，**顶面全等于底面**



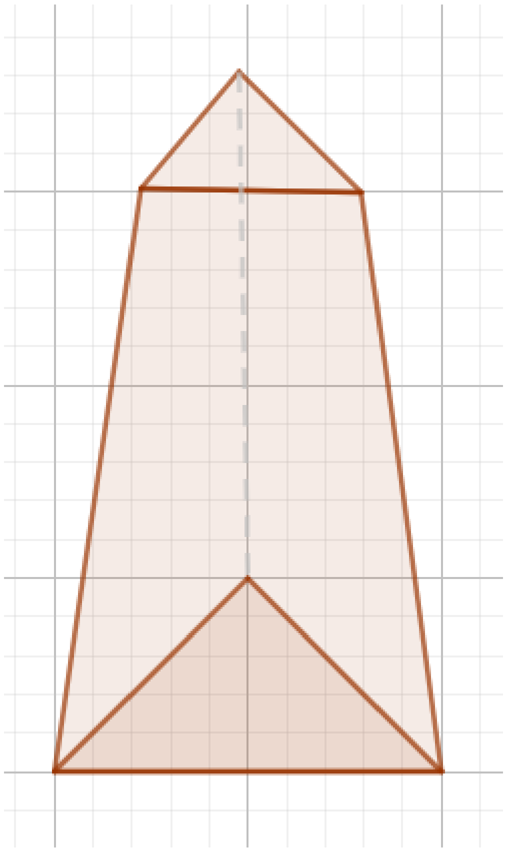
棱锥

底面，侧面，n条侧棱，$2n$条棱



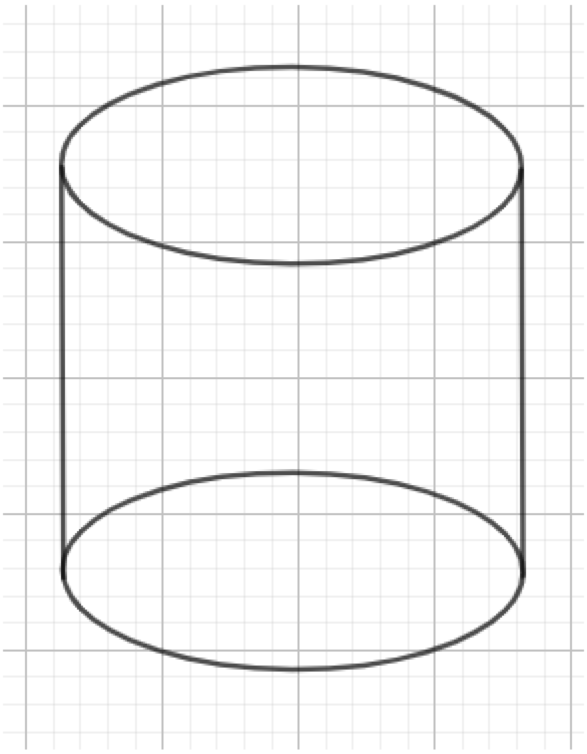
台体

顶面，底面，n条侧棱，$3n$条棱，**顶面与底面不全等**



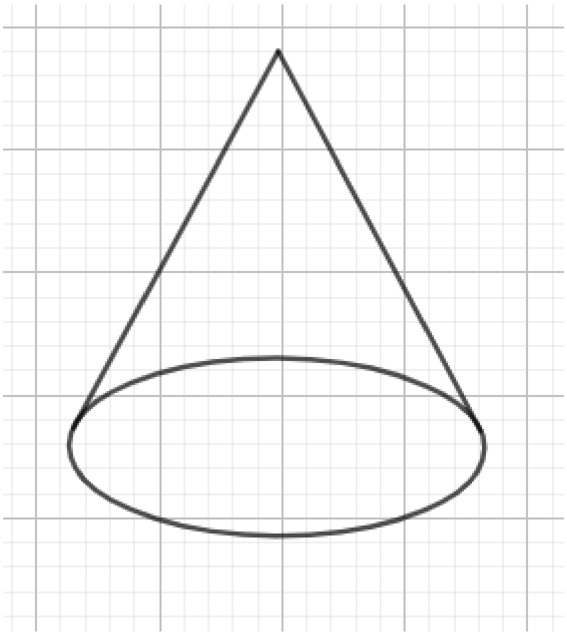
圆柱

顶面，底面，侧棱，侧面(展开图为四边形)



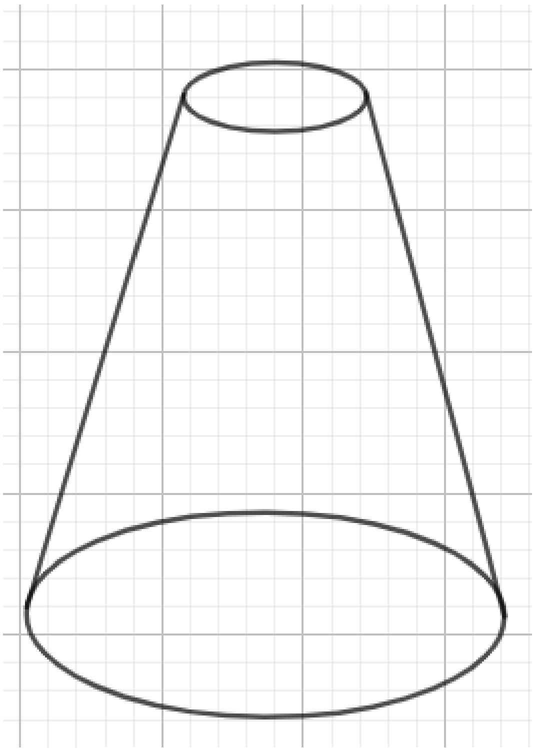
圆锥

底面，侧棱，侧面(展开图为半圆)

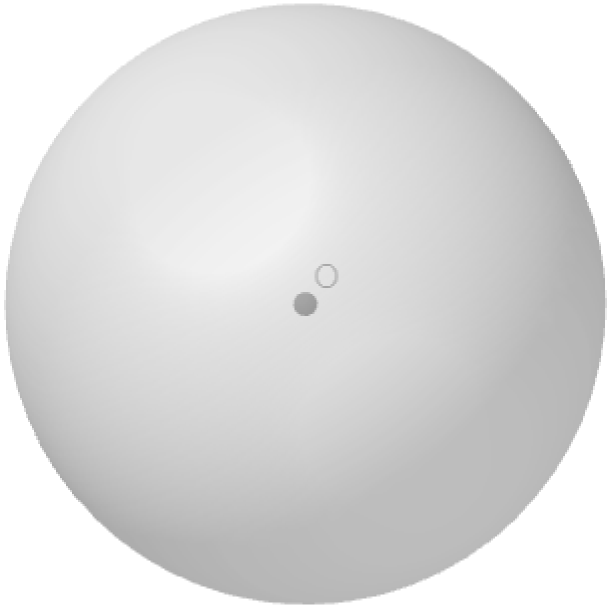


圆台

顶面，底面，侧棱，侧面(展开图为不规则图形)



球



5.2 图形的运动

平移

不改变图形的形状和大小，将其移动至另一位置

旋转

不改变图形的形状和大小，将其绕一点旋转

翻折(轴对称)

不改变图形的形状和大小，沿着对称轴将图形翻折

5.3 展开与折叠

展开图

棱柱

多个平行四边形+两个全等的多边形

棱锥

多个三角形+一个多边形

棱台

多个梯形+两个不全等的多边形

圆柱

一个平行四边形+两个全等的圆

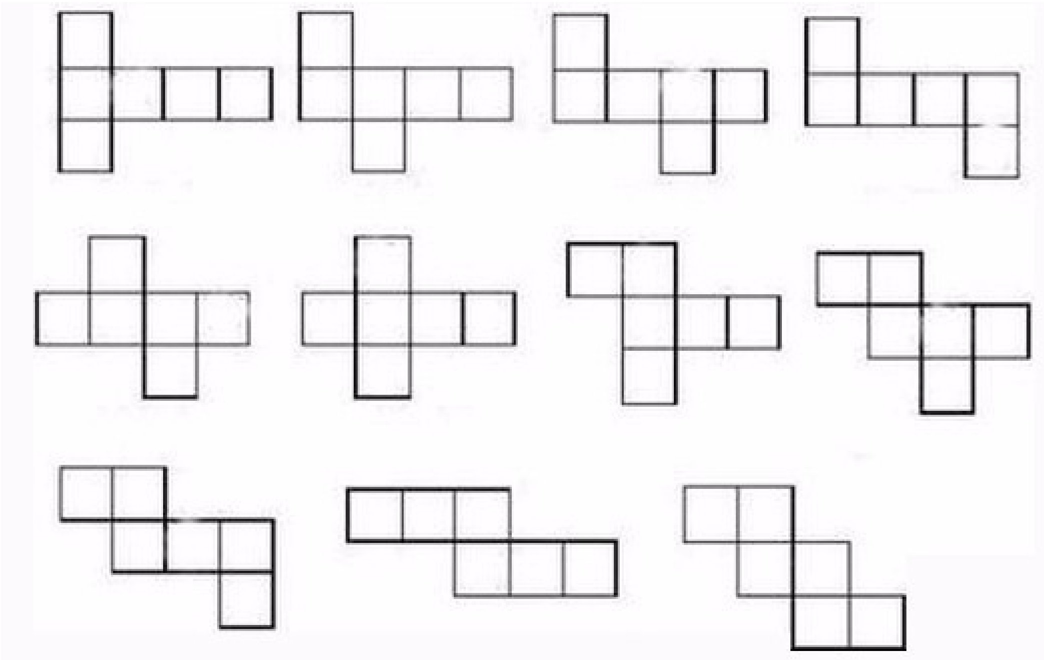
圆锥

一个扇形+一个圆

圆台

一个梯形+两个不全等的圆

正方体展开图(11种)

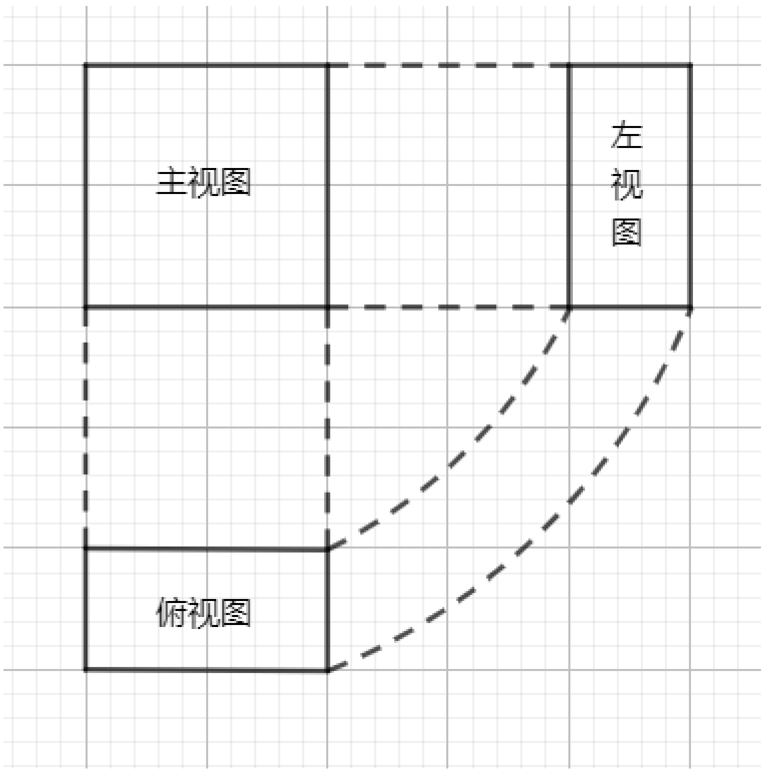


5.4 主视图、左视图、俯视图

主视图：正面视图

左视图：左面视图

俯视图：上面视图



主视图&左视图面长对正

主视图&俯视图面高平齐

左视图和俯视图面宽相等

用俯视图确定立体图形位置最方便

第六单元 - 平面图形的认识（一）

6.1 线段、射线、直线

	端点	延长线	限制	符号
线段	2个	2	有限	线段$AB=$线段$BA=$线段α
射线	1个	1	无限	射线$AB=$射线$\beta\neq$射线BA
直线	0个	0	无限	直线$AB=$直线$BA=$直线γ

射线的表示：第一个字母为端点

基本事实

1. 两点之间线段最短
2. 两点确定一条直线

延长

沿一端点延长线段(变为射线)或射线(变为直线)

反向延长

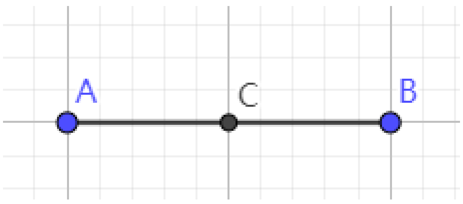
沿一端点的相反方向延长线段或射线

线段中点

使线段左右两边长度相等的点

判定&性质

1. $AC=BC$
2. $AC(BC)=\frac{1}{2}AB$
3. $AB=2AC(BC)$



已知直线上点个数，求线段个数：$\frac{n(n-1)}{2}=1+2+3+...+(n-1)$

同一平面内三点确定三条直线

比较线段长度

1. 度量法(测量长度)
2. 叠合法(重叠一段点看与端点的远近程度)

6.2 角

定义

> 静态 - 由两条有公共端点的射线组成的图形
>
> 动态 - 一条射线绕其端点旋转之后得到的图形

名称	角度
锐角	$0^\circ < x < 90^\circ$
直角	$x = 90^\circ$
钝角	$90^\circ < x < 180^\circ$
平角	$x = 180^\circ$
周角	$x = 360^\circ$
劣角	$0^\circ < x < 180^\circ$
优角	$180^\circ < x < 360^\circ$

比较角度大小

1. 度量法(量角器)
2. 叠合法

度、分、秒

$1^\circ = 60' = 3600''$

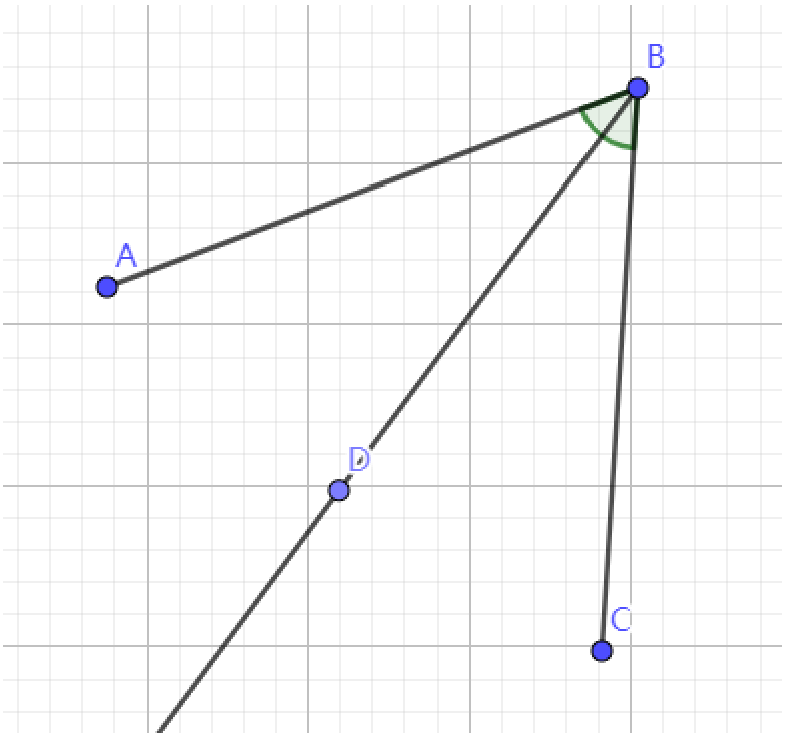
时钟夹角公式$\theta = |5.5y - 30x|$，x为小时数，y为分钟数

角平分线

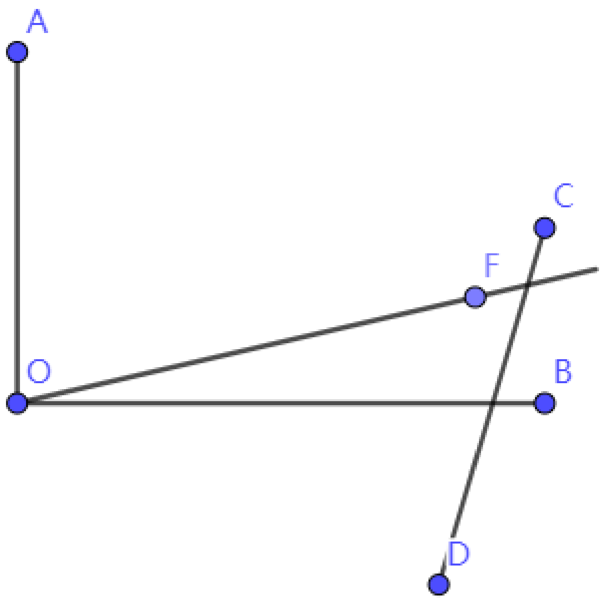
> 一条平分一个角的射线

性质&判定

> $\angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2}\angle ABC$,$\angle ABC = 2\angle ABD = 2\angle CBD$



6.3 余角、补角、对顶角



余角

两个度数相加等于90°的角

判断

$\because \angle 1+\angle 2=90^{\circ}$

$\therefore \angle 1$与$\angle 2$互余

性质

$\because \angle 1与\angle 2互余$
$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^{\circ}$

补角

两个度数相加等于180°

判断

$\because \angle 1 + \angle 2 = 180^{\circ}$
$\therefore \angle 1与\angle 2互补$

性质

$\because \angle 1与\angle 2互补$
$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 180^{\circ}$

互为邻补角：两个有公共顶点和公共边的补角，即一条边重合，另一条互为反向延长线

余补角性质定理

同(等)角的余(补)角相等

对顶角

一角的两条边为另一角两边的反向延长线的两个角互为对顶角

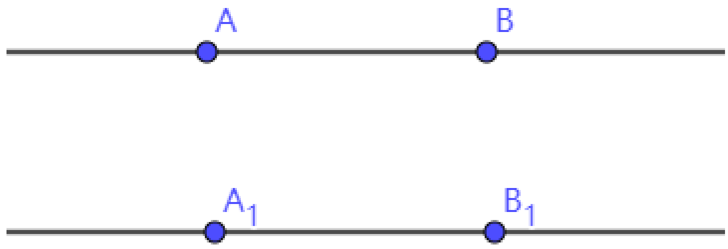
性质

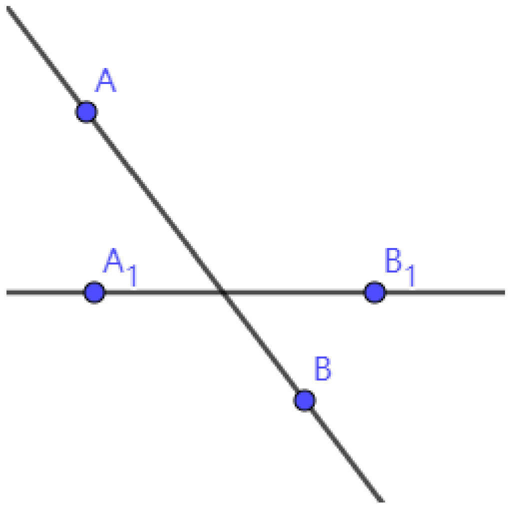
对顶角相等

6.4 平行

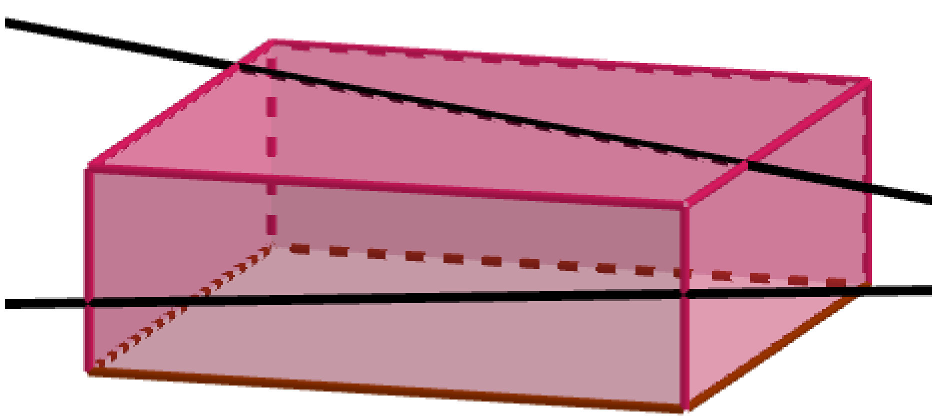
两直线位置关系

1. 平行(左下图)
2. 相交(右下图)
3. 重合(共线)(下下图)
4. 异面(下下下图)


A
B
A1
B1


A
A1
B1
B


A1
A2
B1
B2



平行

在同一平面内不相交的两条直线互相平行，写作$a//b$

线段和射线的平行关系参照其所在直线的平行关系

画图过程

一放 二贴 三移 四画

平行性质

过直线外一点，有且只有一条直线与已知直线平行

平行于同一直线的两直线平行

方格纸

方格点上作线段可写成$a \times b$的线段，其中a为水平偏移距离，b为垂直偏移距离

方格纸上$a \times b$的线段与$ac \times bc\ (c \neq 0)$的线段**平行**

6.5 垂直

定义

两条直线相交产生的角为90°时，这两条直线互相垂直，记作$l_1 \perp l_2$，l_1和l_2互为对方的垂线

性质

若线段垂直，则角为90°

判定

若角为90°，则线段垂直

垂直性质

过一点，有且只有一条直线与已知直线垂直

画线段和射线的垂线就是画其所在直线的垂线

垂直于同一直线的两直线平行

方格纸

$a \times b$的线段的垂线是$b \times a$的线段

垂线段

连接直线外一点与垂足的线段是垂线段

垂线段的性质

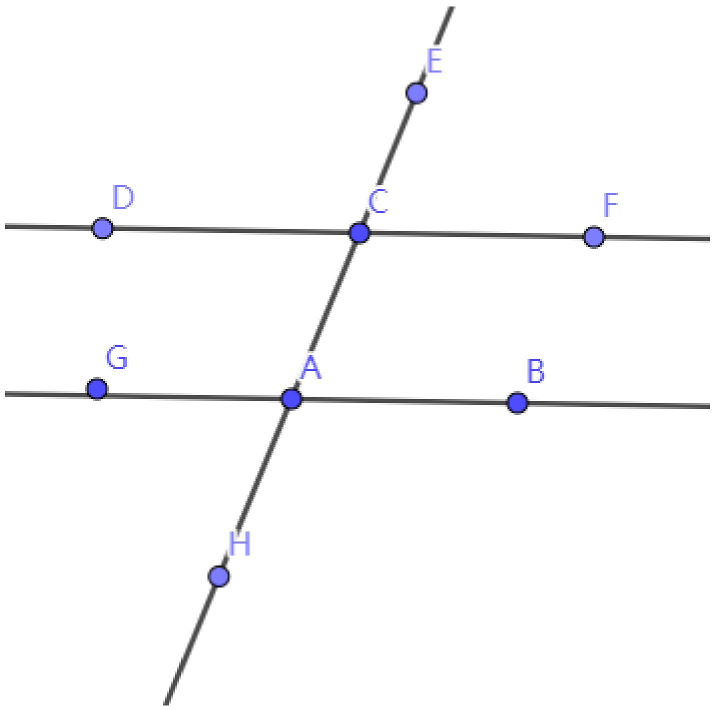
直线外一点与直线上一点连接的所有线段中，垂线段长度最短，**即垂线段最短**

点到直线的距离就是垂线段的长度

七下

第七单元 - 平面图形的认识（二）

7.1 探索直线平行的条件



同位角

两个处于**截线同旁**(同)，**被截线同方向**(位)的角，两角的边的连线像"F"

上图例体现为$\angle GAH$和$\angle DCA$

内错角

两个处于**截线异侧**(错)，**被截线内侧**(内)的角，两角的边的连线像"Z"

上图例体现为$\angle DCA$和$\angle CAB$

同旁内角

两个处于**截线同侧**(同旁)，**被截线内侧**(内)的角，两角的边的连线像"C"

上图例体现为$\angle GAC$和$\angle DCA$

平行的性质

两直线平行，同位角相等

两直线平行，内错角相等

两直线平行，同旁内角互补

平行的判定

同位角相等，两直线平行

内错角相等，两直线平行

同旁内角互补，两直线平行

格式

$\because \angle A=\angle B^{\circ}$

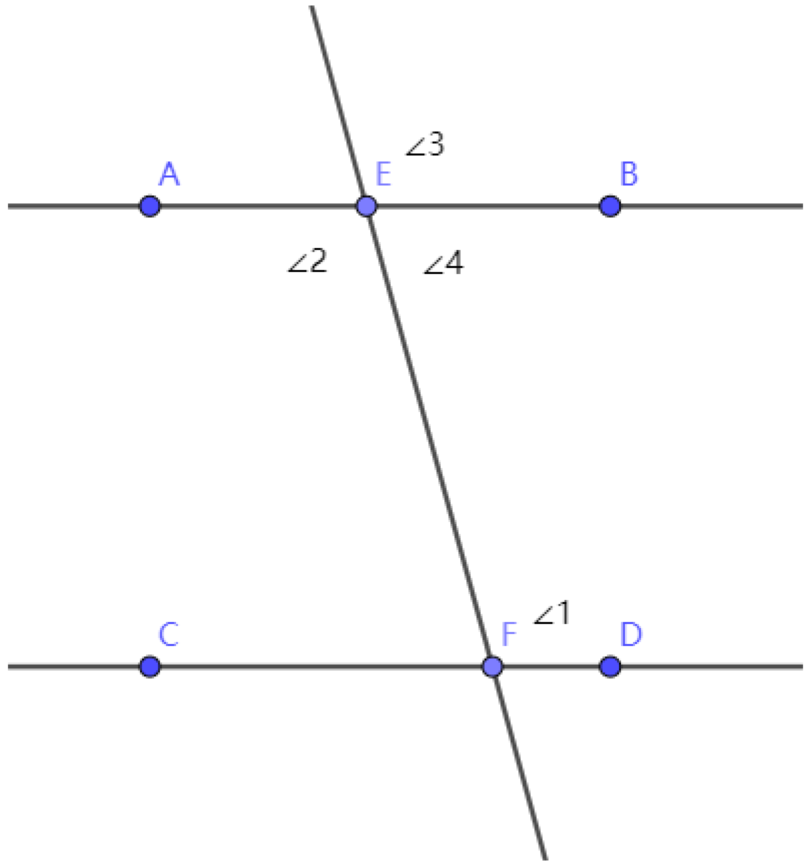
$\therefore a//b$

$\because \angle A+\angle B=180^{\circ}$

$\therefore a//b$

7.2 探索平行线的性质

证明平行的性质



证明〃两直线平行,内错角相等〃:

作AB,CD被EF所截,且$AB//CD$

已知AB

CD,求证$\angle 1=\angle 2$

证明$:\because AB//CD$

$\therefore \angle 1=\angle 3$

$\therefore \angle 2=\angle 3$(对顶角相等)

$\therefore \angle 1=\angle 2$

证明"两直线平行，同旁内角互补"：

作AB, CD被EF所截，且$AB//CD$

已知AB

CD，求证$\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$

证明 $\because AB//CD$

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ \because \angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$

$\therefore \angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$

7.3 图形的平移

定义

将图形向一方向移动一定距离

大小方向形状不变

位置改变

性质

对应点连线平行且相等

7.4 认识三角形

定义

三条线段首尾相连形成的图形

元素

3个顶点

3条边

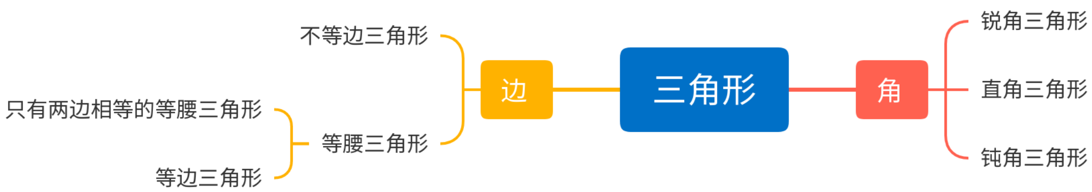
3个角

符号

$\triangle ABC = \triangle BAC = \triangle CBA = ...$(字母无顺序)

直角三角形:$Rt\triangle ABC$，$\angle B$为直角

分类



三角形三边关系

任意两边之和大于第三边

$$\begin{cases}a+b>c\\a+c>b\\b+c>a\end{cases}$$

任意两边之差小于第三边

$$\begin{cases}a>|b-c|\\b>|a-c|\\c>|a-b|\end{cases}$$

三角形第三边取值范围

$$|a-b|<c<a+b$$

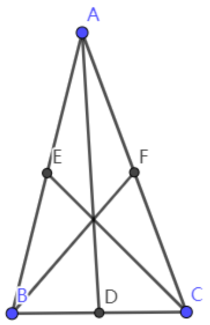
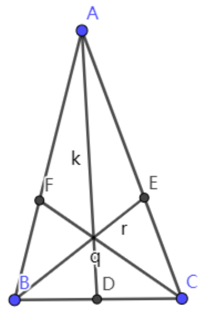
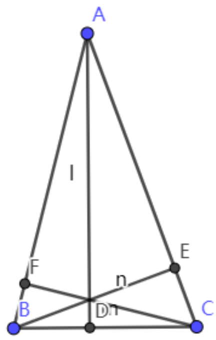
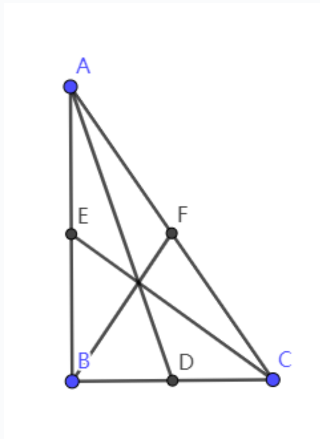
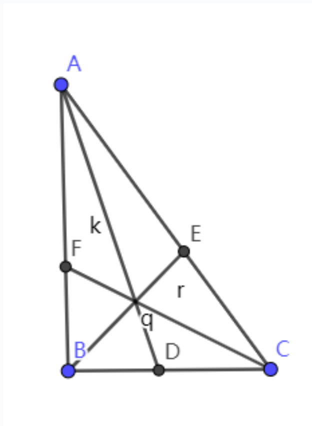
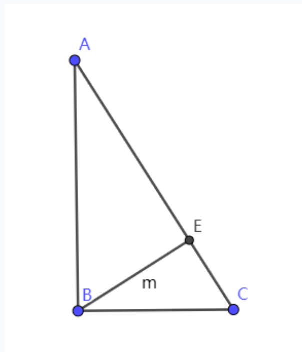
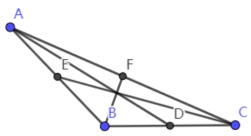
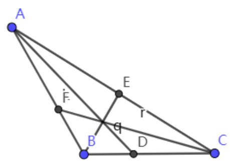
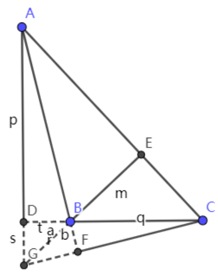
中线、角平分线、高(线)

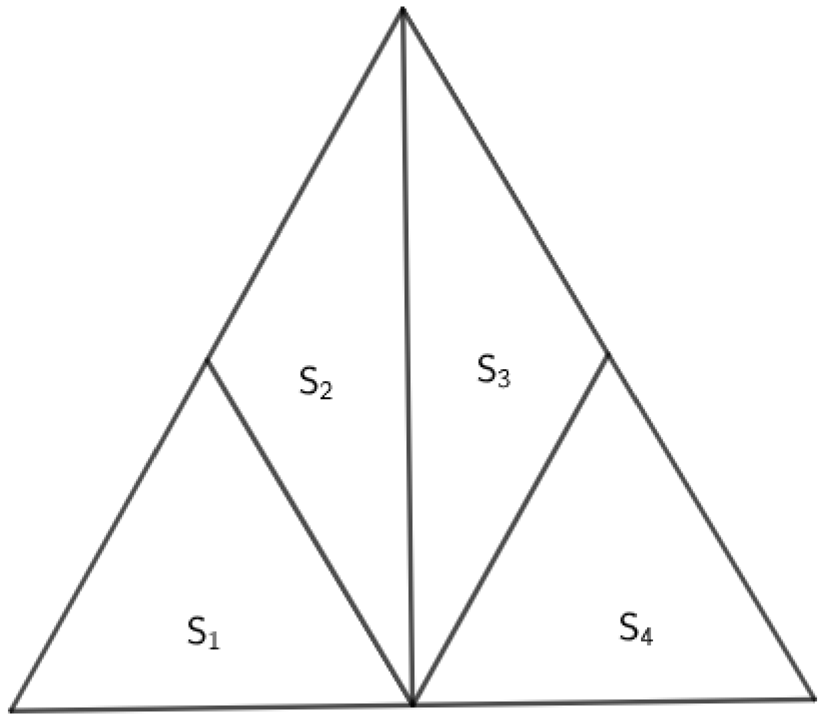
中线平分三角形一边长度

角平分线平分三角形一角

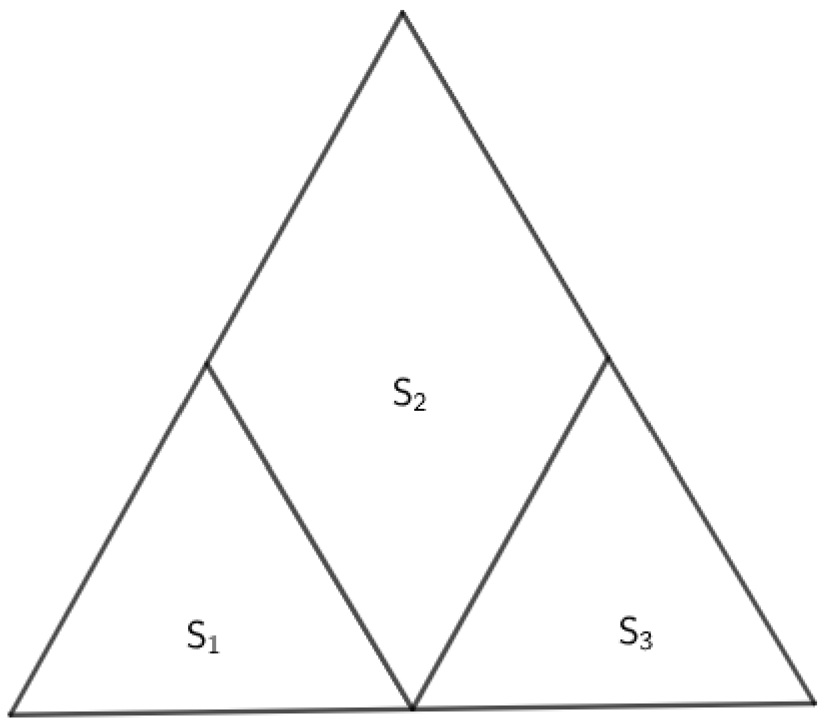
高(线)即作三角形一点到其对边的**垂线段**

中线、角平分线、高(线)都是**线段**

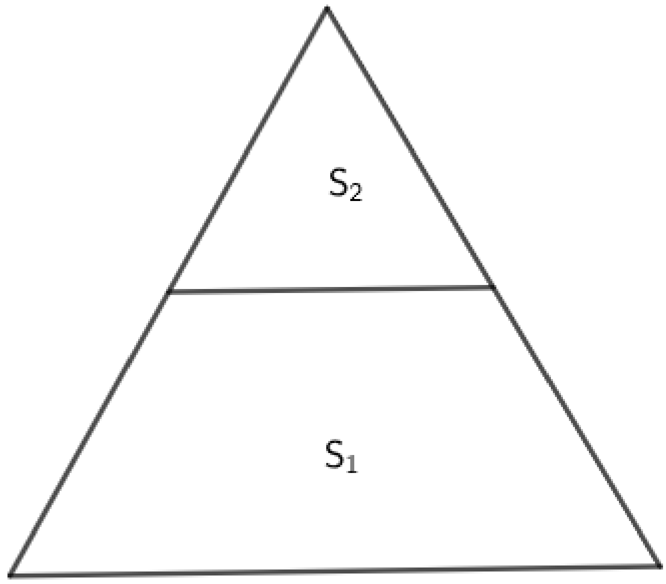
	三条中线	三条角平分线	三条高(线)
锐角三角形			
直角三角形			
钝角三角形			



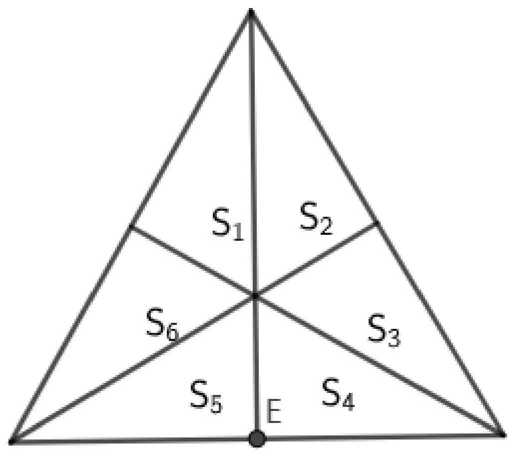
$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4$$



$$S_1 = \frac{S_2}{2} = S_3$$



$$S_1 = 3 \times \ S_2$$



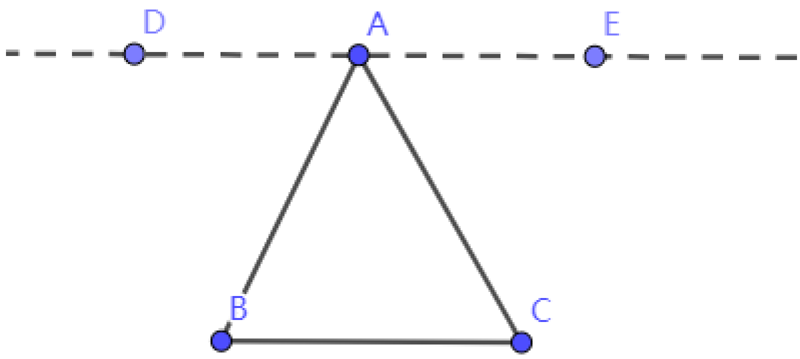
$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6$$

7.5 多边形的内角和与外角和

定理1

三角形内角和为180°

证明



法1

$$证明：过点A作AD//BC并反向延长至点E$$
$$\because AD//BC$$
$$\therefore \angle DAC=\angle C,\angle EAB=\angle B(两直线平行，内错角相等)$$
$$又\because \angle EAB+\angle BAC+\angle CAD=180^{\circ}(平角的定义)$$
$$\therefore \angle B+\angle BAC+\angle C=180^{\circ}$$

法2

$$证明：过点A作AD//BC$$
$$\because AD//BC$$
$$\therefore \angle DAB+\angle B=180^{\circ},\angle DAC=\angle C$$
$$(两直线平行，内错角相等，同旁内角互补)$$
$$又\because \angle DAB=\angle DAC+\angle CAB$$
$$\therefore \angle BAC+\angle C+\angle B=180^{\circ}$$

推论

在$Rt\triangle ABC$中，两个锐角互余

多边形

同一平面内由多条线段首尾相连组成的图形，由n条线段组成就称为n边形

正多边形：每个内角相等，每条线段长度相等

对角线

多边形中连接一个顶点和与之不相邻的顶点的线段

定理2

n边形内角和$180^{\circ}(n-2)$

n边形对角线数$\frac{n(n-3)}{2}(n>3)$

正n边形每个内角度数$(180^{\circ}-\frac{360^{\circ}}{n})$

多边形的外角

多边形一内角的邻补角

其邻边的延长线

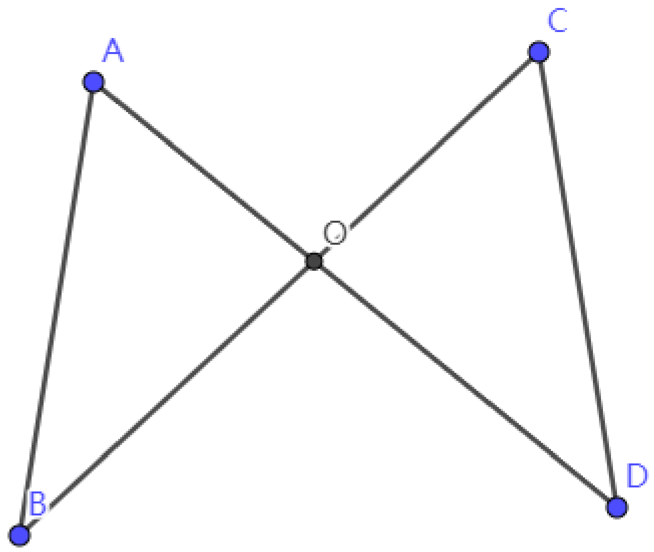
定理3

三角形任意一个外角等于与之不相邻的两个内角的和

多边形的外角和

多边形的外角和固定为360°

八字模型



证明：$\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$

证 $\because \angle AOD$是$\triangle ABO$的外角

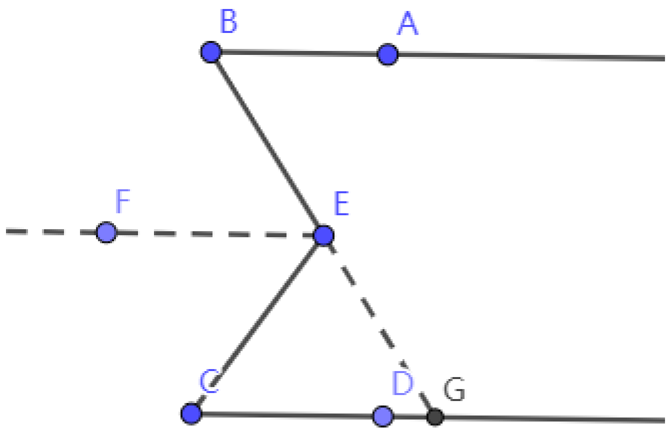
$\therefore \angle AOD=\angle A+\angle B$

又 $\because \angle AOD$是$\triangle DOC$的外角

$\therefore \angle AOD=\angle C+\angle D$

$\therefore \angle A+\angle B=\angle C+\angle D$

"M"形



已知$AB//CD$,求证$\angle BEC=\angle B+\angle C$

法1

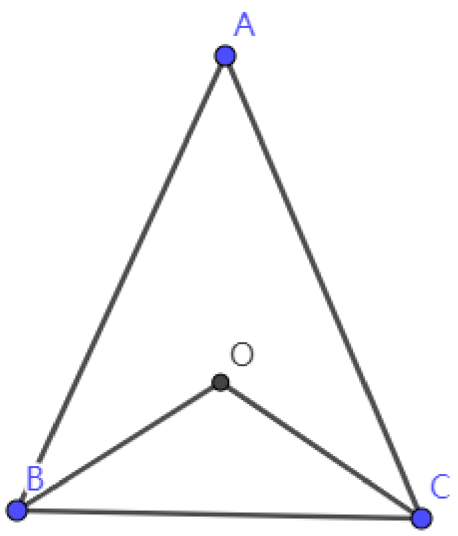
$$\begin{gathered}证：过点E作EF//CD\\ \because CD//EF,AB//CD\\ \therefore AB//EF\\ \therefore \angle BEF=\angle B\\ \because EF//CD\\ \therefore \angle FEC=\angle C\\ \because \angle BEC=\angle BFE+\angle FEC\\ \therefore \angle BEC=\angle B+\angle C\end{gathered}$$

法2

$$\begin{gathered}证明：延长BE至点G,交CD于点G\\ \because AB//CD\\ \therefore \angle EGC=\angle B\\ \because \angle BEC是\triangle ECG外角\\ \therefore \angle BEC=\angle C+\angle EGC=\angle C+\angle B\end{gathered}$$

三角形角平分线模型

两内角角平分线



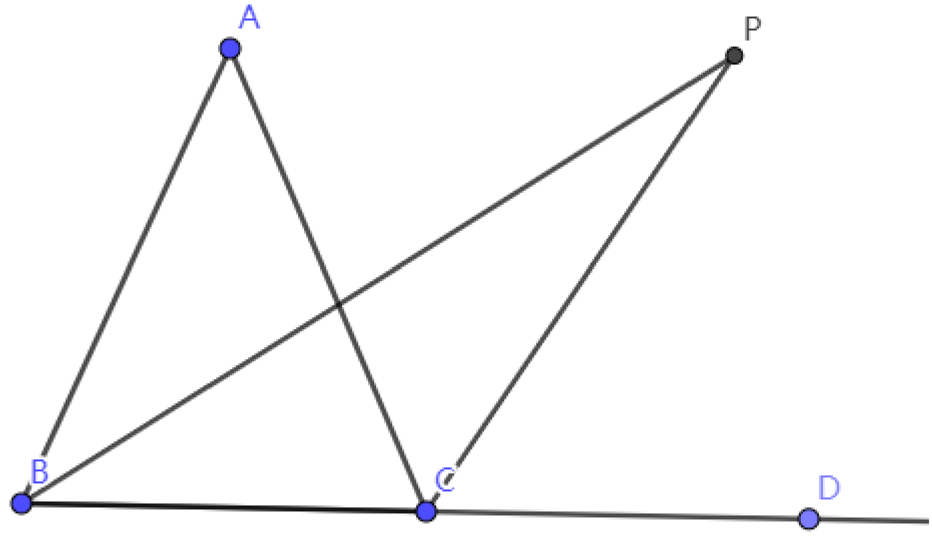
结论

$\angle O = 90^{\circ} + \frac{1}{2}\angle A$

证明

证：$\angle OBC + \angle OCB = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}(180^{\circ} - \angle A) = 90^{\circ} - \frac{1}{2}\angle A$

一内一外角平分线



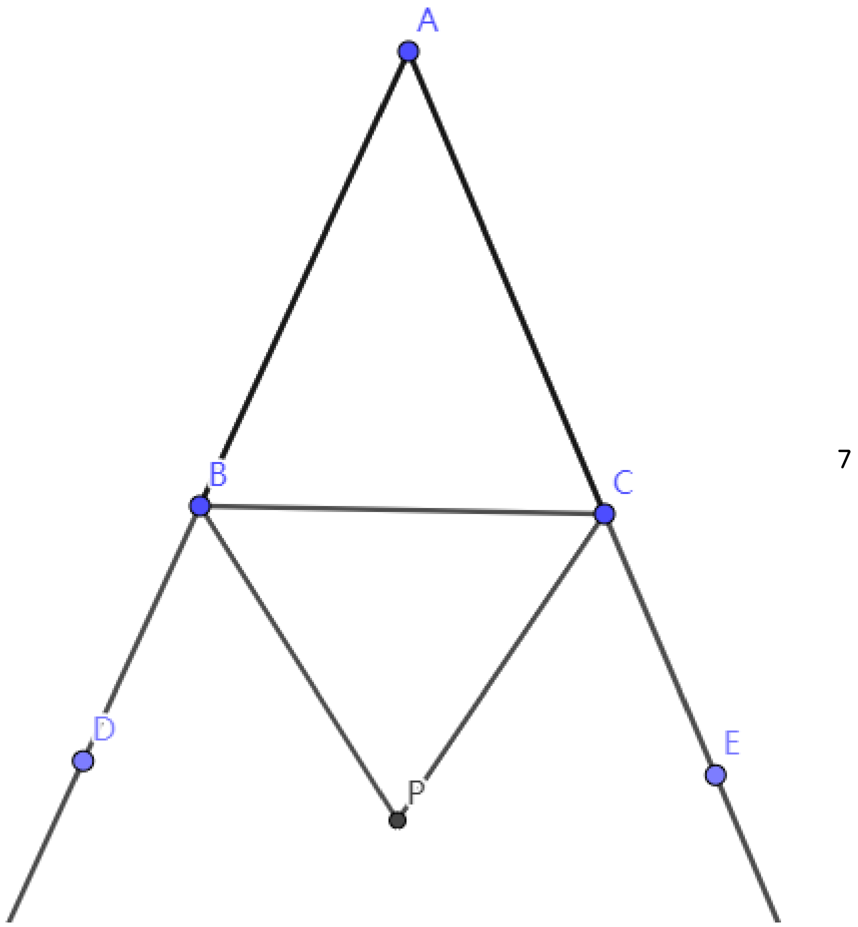
结论

$\angle P = \frac{1}{2}\angle A$

证明

$$\text{证}: \angle ACB = 180^\circ - \angle A - \angle ABC$$
$$\therefore \angle ACD = \angle A + \angle ABC$$
$$\therefore \angle ACP = \frac{1}{2}\angle A + \angle PBC$$
$$\angle PCB = \frac{1}{2}\angle A + \angle PBC + \angle ACB$$
$$\therefore \angle P = 180^\circ - \angle PCB - \angle PBC = \frac{1}{2}\angle A$$

两外角角平分线



结论

$\angle P = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$

证明

$$\text{证}: \angle CBP + \angle BCP = \frac{1}{2}(\angle CBD + \angle BCE) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$$
$$\therefore \angle P = 180^\circ - \angle CBP - \angle BCP = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$$

第八单元 - 幂的运算

8.1 同底数幂的乘法

幂

a^n，a为底数，n为指数

$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n个a}$

同底数幂的乘法公式

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \ (m \in N* \wedge n \in N*)$

8.2 幂的乘方与积的乘方

幂的乘方

$(a^m)^n = a^{mn}, a^{mn} = (a^m)^n \ (m \in N* \wedge n \in N*)$

积的乘方

$(ab)^n = a^n b^n, a^n b^n = (ab)^n$

8.3 同底数幂的除法

同底数幂的除法公式

$a^m \div a^n = a^{m-n}, a^{m-n} = a^m \div a^n (a \neq 0, m \in N* \wedge n \in N*)$

其他公式

$a^0 = 1 (a \neq 0)$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n} (a \neq 0, n \in N)$, 故$a^{-1} = \frac{1}{a}$, 即为$a$的倒数

$(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m} (b \neq 0)$

科学计数法

$a \times 10^{-n} (1 \leq |a| < 10, n \in N*)$

n为小数中第一个非零数前0的个数(包括整数位数的0,如$0.abcd$中个位的0)

幂为1

$$\begin{cases} a^0 = 1 (a \neq 0) \\ 1^n = 1 \\ (-1)^{2n} = 1 (n \in N*) \end{cases}$$

两幂相乘

指数一样或底数一样

第九单元 – 整式乘法与因式分解

9.1 单项式乘单项式

法则

系数相乘，字母指数相乘(包括幂)

$$\begin{aligned}(2x)^3 \cdot 4(y \cdot 2z)^2 \div x &= 8x^3 \cdot 4y^2 \cdot 4z^2 \div x \\ &= (8 \times 4 \times 4) \cdot (x^3 \cdot y^2 \cdot z^2 \div x) \\ &= 128x^2y^2z^2\end{aligned}$$

使用运算律以提升运算速度

9.2 单项式乘多项式

法则

单项式分别乘上多项式的每一项，并把所得的结果相加

$$\begin{aligned}-x^3y^2(7xy - 8y^2 + 2x^3 - 1) &= -x^3t^2 \cdot 7xy - (-x^3y^2 \cdot 8y^2) + (-x^3y^2 \cdot 2x^3) + x^3y^2 \\ &= -7x^4y^3 + 8x^3y^4 - 2x^6y^2 + x^3y^2\end{aligned}$$

使用运算律以增强运算准确率

9.3 多项式乘多项式

法则

多项式中每一项分别与多项式中每一项相乘，并把结果合并同类项

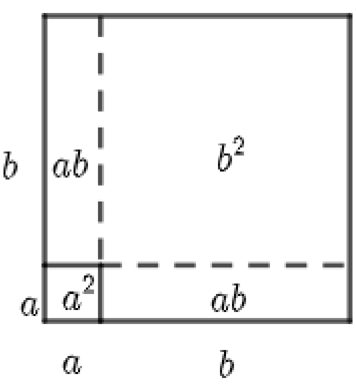
$$\begin{aligned}(-x^2 + y)(x - y^3 + 2x^2) &= -x^2 \cdot x - x^2 \cdot (-y^3) - x^2 \cdot 2x^2 + y \cdot x + y \cdot (-y^3) + y \cdot 2x^2 \\ &= -x^3 + x^2y^3 - 2x^4 + xy - y^4 + 2x^2y\end{aligned}$$

9.4 乘法公式

完全平方公式

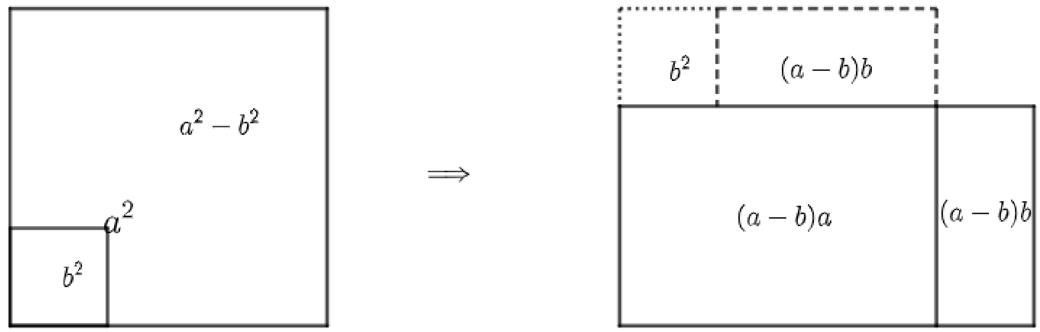
$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$

注意完全平方式的**双、多解**



平方差公式

$a^2 -^2 = (a+b)(a-b)$



完全立方公式

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

立方和公式

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

利用公式简便计算

9.5 多项式的因式分解

基础

1. 提公因式法

提公因式法是一种因式分解方法，它适用于多项式中存在相同因式的情况。具体来说，如果一个多项式的各项都可以被某个因式整除，那么我们就可以将这个因式提取出来，从而实现因式分解的目的。

以一个简单的例子来说明，假设有一个多项式：$4x^3 + 8x^2$。发现这两项都可以被$4x$整除，因此我们可以使用提公因式法将其分解成：$4x^2(x+2)$。

一般地，提公因式法的步骤如下：

1. 找到多项式中所有项的公因式
2. 将公因式提取出来，得到一个新的因式
3. 将多项式除以新的因式，得到一个新的多项式
4. 递归执行以上步骤，直到不能再继续因式分解为止

提公因式法一般是我们**优先考虑的方法。能提公因式，先提公因式，然后再用其他方法。**

需要注意的是，不是所有的多项式都可以使用提公因式法进行因式分解。并且，在实际问题中，还需要注意到是否存在特殊情况，比如有多个可能的公因子、含有常数项等。

一般形式：$ab + ac + ad + ae = a(b+c+d+e)$

2. 公式法

公式法因式分解是一种基于数学公式的因式分解方法，它可以用来分解一些特定形式的多项式。

以下是一些常见的公式：

1. 平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
2. 完全平方公式：$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$和 $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
3. 一次三项式公式：$ax^2+bx+c=a(x-x1)(x-x2)$，其中$x1$和$x2$是多项式的根
4. 平方和公式：$a^2+b^2=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2}$
5. 完全立方公式：$(a+b)^3=a^3+b^3+3a^b+3ab^2$ 和 $(a-b)^3=a^3-b^3+3ab^2-3a^2b$
6. 三元完全平方公式：$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ 和 $(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc$
7. 立方和差公式：$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 和 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

需要注意的是，公式法因式分解只能用于具有特定形式的多项式，对于其他形式的多项式，需要使用其他方法进行因式分解。同时，也需要注意到实际问题中可能存在多种可能的公式来进行因式分解，需要根据具体问题选择合适的公式。

3. 分组分解法

分组分解法是一种用于因式分解的常见技巧，它适用于多项式中存在四项及以上的情况。具体来说，分组分解法可以将多项式中的各项按照某种规律分为两组，然后再分别提取出每组中的公共因子进行因式分解。

以下是一个具体的例子：

假设我们要对多项式$3x^3+6x^2+4x+8$进行因式分解。我们可以将其分为两组，一组是$3x^3+6x^2$，另一组是$4x+8$。然后，我们可以分别从这两组中提取公共因子，变形之后得到：$3x^2(x+2)+4(x+2)$。注意到后面两项都含有$(x+2)$这个因子，因此我们可以将它们合并起来，得到最终的因式分解：$(x+2)(3x^2+4)$。

需要注意的是，分组分解法在使用时需要找到**合适的分组方式**，以使得每组中都有相同的公共因子。同时，有时候也需要进行一些*初步变形*，以便更方便地进行分组分解。

4. 十字相乘法

十字相乘法是一种用于因式分解的常见技巧，也是初中数学中解一元二次方程的一种简便方法。它适用于二次多项式的情况，可以将多项式分解成两个一次因式的形式。

对于**因式分解**，具体步骤如下：

1. 将要分解的多项式转换成二次三项式的形式(如$2x^2+3x+1$)。
2. 将常数项和最高次的字母项的**系数**分别分解成两个数的乘积形式。
3. 将分解出的两组共四个数写成$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$的形式，每列两数的积等于上述系数。
4. 将交叉的两数相乘，并将得到的两个结果相加。若该数与原式中的交叉项的**系数相等**，则进入第6步；反之进入第5步。
5. 重复第2步，在过程中变换分解的结果(如第一次是$4=1\times4$，那现在就转换成另一种$4=2\times2$)，**直到满足第4步中的条件**。
6. 将原式转换为$(ax+by)(cx+dy)$的形式，其中ac为原x^2的系数，bd为原y^2的系数，$ac+bd$为原xy的系数。

对于**解一元二次方程**，具体步骤如下：

1. 将要求解的多项式化成标准形式ax^2+bx+c的形式。
2. 写出该多项式的乘积形式$(lx+m)(nx+p)$ 。
3. 将$(lx+m)(nx+p)$展开得到 $lnx^2+(lp+mn)x+mp$ 。
4. 将展开后的式子与原多项式比较，得出$lp+mn=b$，$mp=c$，$ln=a$。
5. 解出l,m,n,p的值。
6. 根据已求出的l,m,n,p，求出x的值。

需要注意的是，十字相乘法在使用时只适用于二次多项式的情况，且可能存在实根和复根的情况，需要根据实际问题选择合适的方法进行因式分解。

5. 配方法

配方法是适用于因式分解求最值的一种方法。它通过"**等式的性质**"，在式子中添加的同时减少同一个数，以凑成$(ax)^2-(by)^2$或$(ax)^2+b$的形式。前者为因式分解，后者一般利用"**平方的非负性**"以求出最值。

如$4x^2+12x+5$ 这个式子，与完全平方式$4x^2+12x+9$仅有一点不同。我们这时就可以将它写作$4x^2+12x+(5+4)-4$，化简得$(2x+1)(2x+5)$。这里还利用了公式法进行因式分解。

而对于求最值，如下面这题：

若已知$M=3x^2-8xy+9y^2-4x+6y+17$，求M的最小值。

由题可分解$(x^2-4x+4)+(2x^2-8xy+8y^2)+(y^2+6y+9)+4$，即
$(x-2)^2+2(x-2y)^2+(y+3)^2+4$。由于平方的非负性，可以得出下面的不等式：

$(x-2)^2+2(x-2y)^2+(y+3)^2\geq 0$即$(x-2)^2+2(x-2y)^2+(y+3)^2+4\geq 4$

所以M的最小值为4。

配方法求最值很容易出现在考试中，每个人都要掌握。

进阶

6. 双十字相乘法

十字相乘法是一种用于因式分解的常见技巧，它适用于二次多项式的情况，可以将多项式分解成两个一次因式的形式。

具体步骤如下：

1. 将要分解的多项式转换成二次六项式的形式(如$2x^2+3x+4y^2+5y-8xy+1$)。
2. 将常数项和最高次的字母项的**系数**分别分解成两个数的乘积形式。
3. 将分解出的三组共六个数写成$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix}$的形式，每列两数的积等于上述系数。
4. 将交叉的两数相乘，并将得到的两个结果相加。若该数与原式中的交叉项的**系数相等**，则进入第6步；反之进入第5步。
5. 重复第2步，在过程中变换分解的结果(如第一次是$4=1\times 4$，那现在就转换成另一种$4=2\times 2$)，**直到满足第4步中的条件**。
6. 将原式转换为$(ax+by+cz)(dx+ey+fz)$的形式，其中ad为原x^2的系数，be为原y^2的系数，cf为原z^2的系数，$ae+bd$为原xy的系数，$af+cd$为原xz的系数，$bf+ce$为原yz的系数。

注意：双十字相乘需要找出6个数使**3组单十字相乘同时成立**。

7．添项拆项法

拆项是指把多项式中的**某项拆成两项或几项代数和**的方法；添项是指在多项式中添加上**两个仅符号相反**的项。添项最终通过**完全平放式减去平方式**，用平方差公式因式分解；拆项最终通过配合其他方法来因式分解。

添项例题：

因式分解：x^8+x^4+1

通过添项得到原式$=x^8+2x^4+1-x^4$化简得$(x^4+1)^2-x^4$利用平方差公式得$(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$再添项得$[x^4+2x^2+1-x^2](x^4-x^2+1)$最终得$(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$

拆项例题：

因式分解：a^3-4a+3

通过拆项得原式$=a^3-a-3a+3$，提公因式得$a(a^2-1)-3(a-1)$，用平方差公式得$a(a+1)(a-1)-3(a-1)$，最终化简得$(a-1)(a^2+a-3)$。

8．选主元法

选主元法是分解多项式的一种简单又暴力的方法，适用于项数很多的情况。

下面是步骤：

1. 选出主元
2. 按照主元降幂排列
3. 合并同类项
4. 结合其他方法分解因式

如下面这题，

因式分解：$a(6a+11b+4)+b(3b-1)-2$

将原式拆分得$6a^2+11ab+4a+3b^2-3b-2$

我们在这里将a看作主元，将原式按照a降幂排列得$6a^2+a(11b+4)+3b^2-b-2$

$3b^2-b-2$可以用十字相乘得$(3b+2)(b-1)$，回代得$6a^2+a(11b-4)+(3b+2)(b-1)$这里又能用十字相乘因式分解得$(3a+b-1)(2a+3b+2)$

9．换元法

如果在多项式中某r部分代数式**重复出现**或本身很**复杂**（例如代数式为根式、高次多项式、分式等），那么可将这个部分代数式用另一个字母代替，即将改代数式整体使用。

如此，不仅可以简化整个多项式，而且更重要的是，可以使得整个多项式达到“降次”的效果，非常有利于进行分解因式。

例如这题

因式分解：$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$

原式=$(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$

设$x^2+8x+11=t$则原式=$(t-4)(t+4)+15$

化简得t^2-1

即$(t+1)(t-1)$

代入t得原式=$(x^2+8x+10)(x^2+8x+12)$

熟练

10. 因式定理法

因式定理是余式定理的推论之一。在初中，我们可以简单理解它为这样：*如果一个多项式中有因式$x=a$时该多项式的值为0，那么$(x-a)$一定为原多项式的一个因式。*

简单的说，就是当 $x=a$时原式值为0，那么你分解过后必定出现 $(x-a)$ 这个因式。（当然，注意一下分解彻底）

因式分解：x^3+x^2-4x-4

这道题可以用添项拆项法做，但是还有我们用因式定理解更快：

令$x^3+x^2-4x-4=0$

解得$x=-1$

$\therefore$ 原方程式中有因式$(x+1)$

设原方程组 $=k(x+1)$

则$k=\frac{x^3+x^2-4-4}{x+1}=(x+2)(x-2)$

$\therefore$ 原方程组 $=(x+1)(x+2)(x-2)$

总结一下步骤：

1、先设法找出多项式为0的时候x的取值

2、利用因式定理确认是多项式的因式

3、利用长除法计算另一个（这个地方极其考验计算功底）

4、继续化简

11. 待定系数法

待定系数法是一种常用的将多项式分解为若干个较简单的乘积形式的方法，其基本思想是先将原多项式表示成已知函数的和或积的形式，然后假设未知常数，通过求解这些常数，最终得到因式的乘积形式。待定系数法的步骤如下：

1. 将要分解的多项式表示成若干个已知函数的和或积的形式。
2. 假设所有未知系数都不为零，并将它们代入原多项式，得到带有未知系数的简单多项式。
3. 求解这些未知系数，一般可以通过消元法来得到方程组的解，也可以根据特殊条件进行推导。
4. 将解出的各个系数代入原多项式中，得到分解式。

例如，我们要将二次多项式 $P(x)=ax^2+bx+c$ 分解成一次多项式的乘积形式，则根据待定系数法，可以假设分解式为 $P(x)=(mx+n)(px+q)$，其中 m,n,p,q 都是待定系数。将此形式代入 $P(x)$ 中，得到

$P(x)=(mx+n)(px+q)=mpx^2+(mq+np)x+nq$

比较 $P(x)$ 和上式中 $mpx^2+(mq+np)x+nq$ 的系数，我们可以列出如下方程组

$$\begin{cases} mp=a \\ mq+np=b \\ nq=c \end{cases}$$

其中系数 a, b, c 是原多项式的系数。通过解这个方程组，即可求解出 m, n, p, q 的值，从而得到分解式。

需要注意的是，待定系数法要求待分解的多项式具有一定的特殊形式，并且需要根据具体情况选择不同的已知函数进行分解。

12. 轮换对称法

这里不展开了，要了解去网上搜吧

因式分解具有唯一性，不同方法所得的结果应相同

第十单元 - 二元一次方程组

10.1 二元一次方程

定义

有两个未知数(二元)且未知数次数都为1(即最高次项的次数为1)(一次)的**整式方程**

形式

$ax + by + c = d(a \neq 0 \wedge b \neq 0)$

解

一组使方程成立的数

解的形式

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$

10.2 二元一次方程组

定义

多个二元一次方程联立形成的方程组

形式

$$\begin{cases} x + a = b \\ y + c = d \end{cases}$$

解

使方程组中方程同时成立的未知数的值

方程组中方程的公共解

10.3 解二元一次方程组

代入消元法

1. 将方程组中**一个**方程转换为$x=$或$y=$(以此类推)的形式
2. 将得到的式子**代入其他方程**以达到消元的目的
3. 重复上述步骤直到方程变为一个**一元一次方程**
4. 解一元一次方程并回代
5. 求出方程组的解

解方程组：$\begin{cases}x+y=12\\2y-x=50\end{cases}$

$$\text{解：设}x+y=12\text{为}A,2y-x=50\text{为}B$$
$$\text{由}A\text{得}x=12-y$$
$$\text{代入}B\text{得}2y-12+y=50,\text{解得}y=\frac{62}{3}$$
$$\text{代入}x=12-y\text{得}x=-\frac{26}{3}$$
$$\therefore\text{原方程组的解为}\begin{cases}x=-\frac{26}{3}\\y=\frac{62}{3}\end{cases}$$

加减消元法

1. 对方程组中的方程**每个**进行运算使方程组中的一个(或多个)**未知数的系数相等**
2. 将方程组中的方程**加减**得到一个一元一次方程
3. 解一元一次方程并将结果代入原方程组
4. 求出方程组的解

解方程组：$\begin{cases}x+y=12\\2y-x=50\end{cases}$

$$\text{解：设}x+y=12\text{为}A,2y-x=50\text{为}B$$
$$A+B\text{得}3y=62,\text{解得}y=\frac{62}{3}$$
$$\text{代入}A\text{得}x=-\frac{26}{3}$$
$$\therefore\text{原方程组的解为}\begin{cases}x=-\frac{26}{3}\\y=\frac{62}{3}\end{cases}$$

补充:图像解法

<u>*此为八年级上侧一次函数单元中的方法，此处仅作为补充</u>

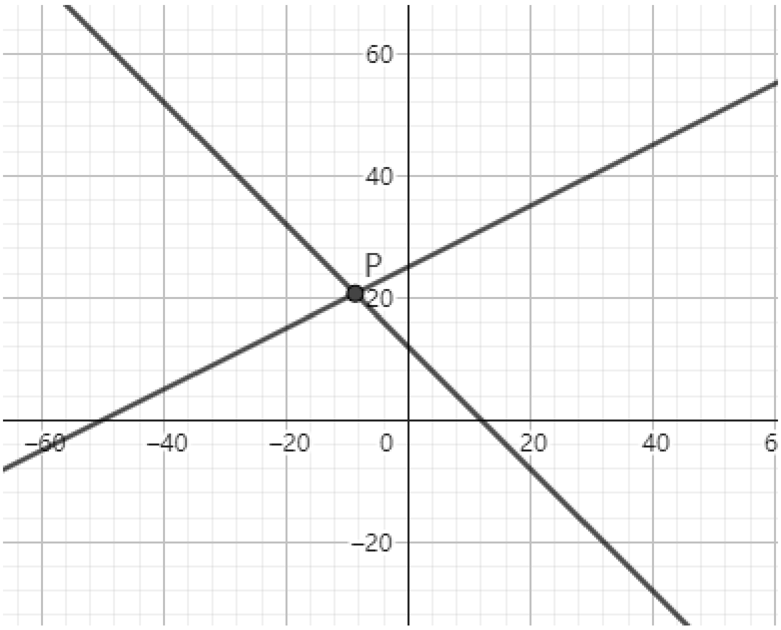
1. 将方程组的每个方程都转换成函数形式
2. 建立平面直角坐标系，在图中表示上述函数
3. 寻求函数的交点：若有，则交点的坐标即为方程组的解；若无，则该方程组无解

解方程组：$\begin{cases}x+y=12\\2y-x=50\end{cases}$

$$解:x+y=12即y=12-x$$
$$2y-x=50即y=25+\frac{x}{2}$$

建立平面直角坐标系,画出图像,交点为$P(-\frac{26}{3},\frac{62}{3})$

$$\therefore 原方程组的解为\begin{cases}x=-\frac{26}{3}\\y=\frac{62}{3}\end{cases}$$



10.4 三元一次方程组

通过加减消元或代入消元**将三元转换为二元**，然后解二元一次方程组

一个方程能消一个未知数

比例方程

通法：**设比值**k，然后代入未知数

轮换对称方程

通法：全部相加，然后分别加减原方程

10.5 用二元一次方程组解决问题

无

第十二单元 -证明

12.1 定义与命题

人们常用一些*名称与术语*(如"平行线""数轴")，对它们的含义(**性质与判定**)进行描述和规定，就是给出它们的**定义**(如"在同一平面内不相交的两条直线"是平行线的定义)

判断一件事情*是否成立*的句子叫**命题**(需要做出**判断**)

如果$\underbrace{a>0,b>0}_{\text{条件}}$,那么$\underbrace{|a|=|b|}_{\text{结论}}$

若条件成立时结论成立，那么**再经过证明后**其为真命题

若条件成立时结论不一定成立，那么**再经过举反例后**其为假命题

12.2 证明

根据已知的真命题，确定某个命题的真实性的**过程**叫**证明**

已被证明的真命题称为**定理**

$$\text{证明过程}\begin{cases}\text{因} \because\Rightarrow \text{已知事项}\\ \text{果} \therefore\Rightarrow \text{推论}\\ \text{由因得果的依据}'()' \Rightarrow \text{基本事实，定义，定理等}\end{cases}$$

由一个定理推出的正确结论被称为**这个定理的推论**，如"三角形的外角等于与之不相邻的两个内角的和"就是由外角的定义推出的推论

推论可以作为证明的依据

12.3 互逆命题

若A命题的条件是B命题的结论，A命题的结论亦然，那么这两个命题**互为逆命题**

每个命题都有其逆命题

真命题的逆命题不一定为真命题

(原八上)第一单元 - 全等三角形

*注：本单元原属于八年级上册，因教学进度原因提前学习

1.1 全等图形

定义

形状大小相同的两个图形全等

两个能完全重合的图形全等

符号

$\cong$

**注：此为西文字符，中文教科书中符号上方波浪线为反方向，不影响阅读(这两个符号都对，表达意义上没区别)*

构造

平移

旋转

翻折

…

1.2 全等三角形

定义

两个能完全重合的三角形

符号

$\triangle ABC\cong\triangle DEF$(对应顶点写在对应位置上)

性质

对应角相等

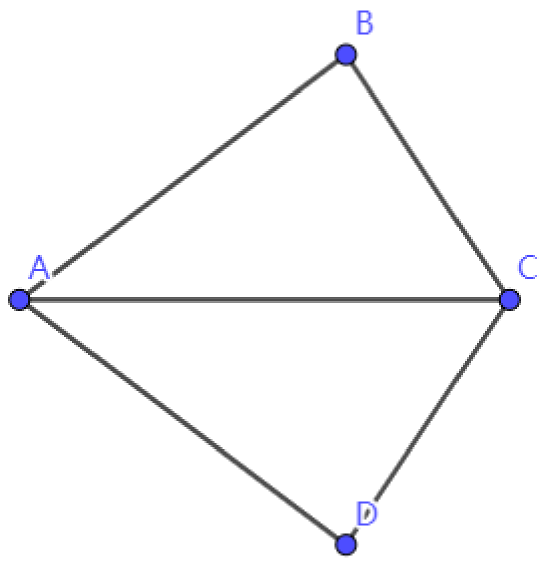
对应边相等

1.3 探索三角形全等的条件

判定

1. 两边及其夹角分别相等(边角边 - SAS)

如图，已知$AB=AD,AC$是$\angle BAD$的角平分线,求证$\triangle ABC\cong\triangle ADC$



证明 $\because AC$是$\angle BAD$的角平分线

$\therefore\angle BAC=\angle DAC$

$\therefore$ 在$\triangle ABC$和$\triangle ADC$中,

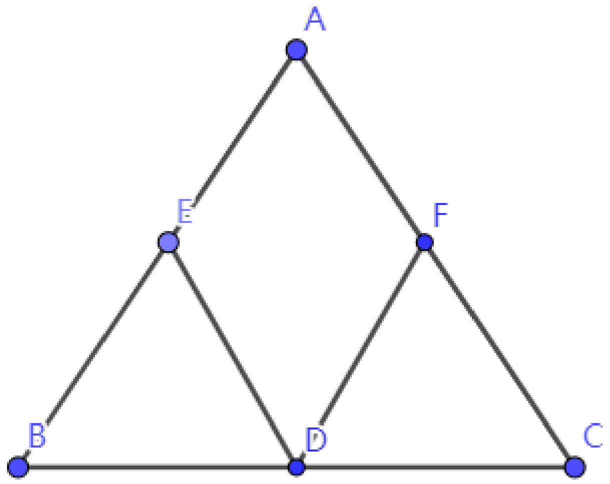
$$\begin{cases}AB=AD\\ \angle BAC=\angle DAC\\ AC=AC\end{cases}$$

$\therefore\triangle ABC\cong\triangle ADC(SAS)$

2．两角及其夹边分别相等(角边角 - ASA)

如图,已知在$\triangle ABC$中,D为BC中点,E和F分别在线段AB,AC上,且$DE//AC$,$DF//AB$,

求证：$BE=DF,DE=CF$



证明 $\because DE//AC,DF//AB$

$\therefore \angle EDB=\angle C,\angle B=\angle FDC$

$\because D$为BC中点

$\therefore BD=CD$

在$\triangle EBD$和$\triangle FDC$中

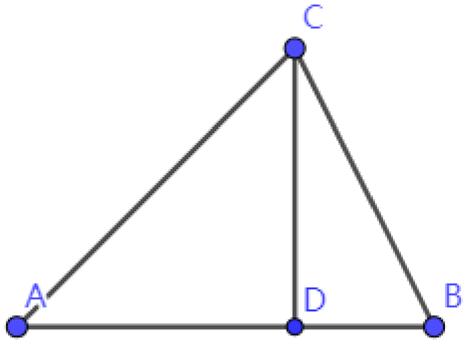
$$\begin{cases}\angle EDB=\angle C\\ BD=CD\\ \angle B=\angle FDC\end{cases}$$

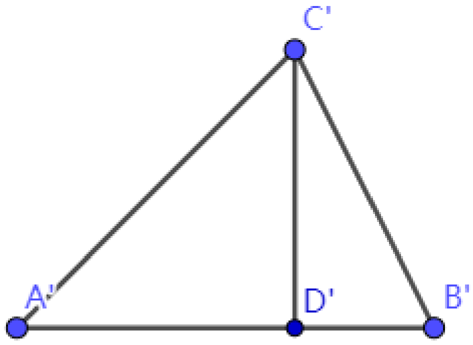
$\therefore \triangle EBD\cong\triangle FDC(ASA)$

$\therefore BE=DF,DE=CF$

3．两角分别相等且其中一组等角的对边相等(角角边 - AAS)

如图,$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$,$AD$,$A'D'$分别是两个三角形的高.求证：$AD=A'D'$





证明 $\because \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

$\therefore AB = A'B', \angle B = \angle B'$

$\because AD, A'D'$分别为两个三角形的高

$\therefore \angle ADB = \angle A'D'B' = 90^\circ$

在$\triangle ABD$和$\triangle A'B'D'$中

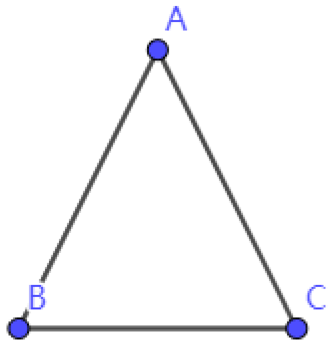
$$\begin{cases} \angle B = \angle B' \\ \angle ADB = \angle A'D'B' = 90^\circ \\ AB = A'B' \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle A'B'D'(AAS)$

$\therefore AD = A'D'$

4. 三边分别相等(边边边 - SSS)

如图, 已知在$\triangle ABC$中, $AB = AC$. 求证 : $\angle B = \angle C$



证明：作$\triangle ABC$的中线AD

$\therefore BD=CD$

在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中

$$\begin{cases}AB=AC\\BD=CD\\AD=AD\end{cases}$$

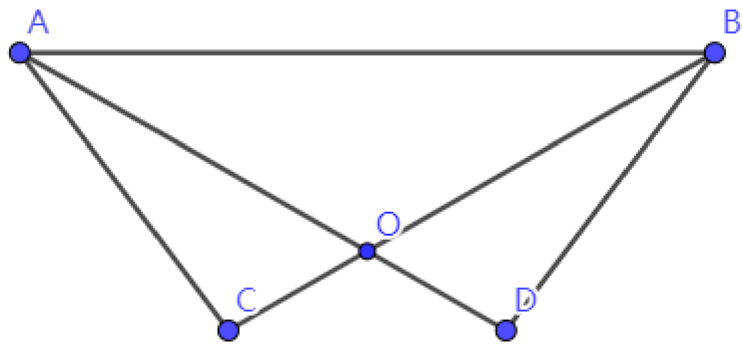
$\triangle ABD\cong\triangle ACD(SSS)$

$\therefore\angle B=\angle C$

5. 斜边和直角边分别相等(斜边、直角边 - HL)

***本法只能在$Rt\triangle$中使用**

如图, AD,BC相交于点O, $AD=BC,\angle C=\angle D=90^\circ$. 求证：$AO=BO,CO=DO$.



证明：在$Rt\triangle ABC$和$Rt\triangle BAD$中，$\angle C=\angle D=90^\circ$,

$$\begin{cases} BC=AD \\ AB=BA \end{cases}$$

$$\therefore Rt\triangle ABC\cong Rt\triangle BAD(HL)$$

$$\therefore AC=BD$$

在$\triangle AOC$和$\triangle BOD$中

$$\begin{cases} \angle C=\angle D=90^\circ \\ \angle AOC=\angle BOD \\ AC=BD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOC\cong\triangle BOD(AAS)$$

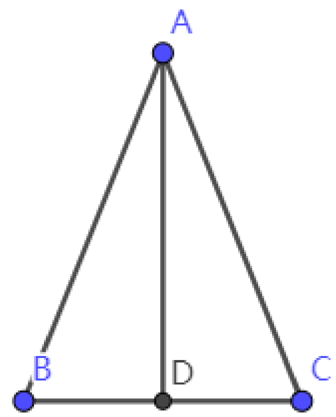
$$\therefore AO=BO, CO=DO$$

隐藏条件

$$\text{隐藏角}\begin{cases} \text{对顶角} \\ \text{平行线} \\ \text{角平分线} \\ \text{内外角} \\ \text{公共角} \\ \text{余补角} \\ \cdots \end{cases} \qquad \text{隐藏线段}\begin{cases} \text{公共边} \\ \text{平行线} \\ \text{中点/中线} \\ \cdots \end{cases}$$

模型

等腰三角形 – 底边上的三线合一



如图, 已知$AB = AC$,

(1)$BD = CD$. 求证 : $BC \perp AD, \angle BAD = \angle CAD$.

(2)$BC \perp AD$. 求证 : $\angle BAD = \angle CAD, BD = CD$.

(3)$\angle BAD = \angle CAD$. 求证 : $BC \perp AD, BD = CD$

(1)证明 : 在$\triangle BAD$和$\triangle CAD$中

$$\begin{cases} AB = AC \\ BD = CD \\ AD = AD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD(SSS)$

$\therefore \angle BAD = \angle CAD, \angle BDA = \angle CDA$

又 $\because \angle BDA + \angle CDA = 180^\circ$

$\therefore \angle BDA = \angle CDA = 90^\circ$

$\therefore BC \perp AD$

(2)证明 : $\because BC \perp AD$

$\therefore \angle BDA = \angle CDA = 90^\circ$

在$Rt\triangle ADB$和$Rt\triangle ADC$中

$$\begin{cases} AD = AD \\ AB = AC \end{cases}$$

$\therefore Rt\triangle ADB \cong Rt\triangle ADC(HL)$

$\therefore BD = CD, \angle BAD = \angle CAD$

(3)证明 : 在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle DAC \\ AD = AD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD(SAS)$

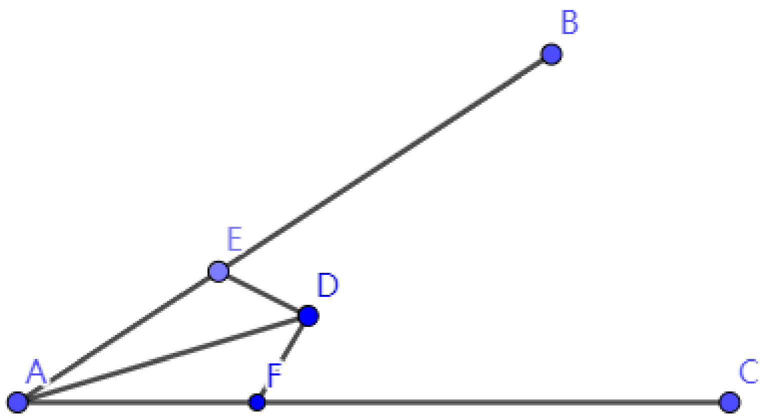
$\therefore BD = CD, \angle BDA = \angle CDA$

又 $\because \angle BDA + \angle CDA = 180^\circ$

$\therefore \angle BDA = \angle CDA = 90^\circ$

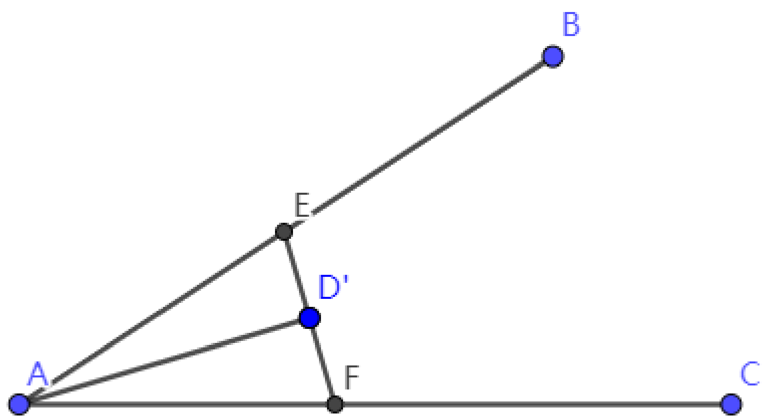
$\therefore BC \perp AD$

角平分线证全等



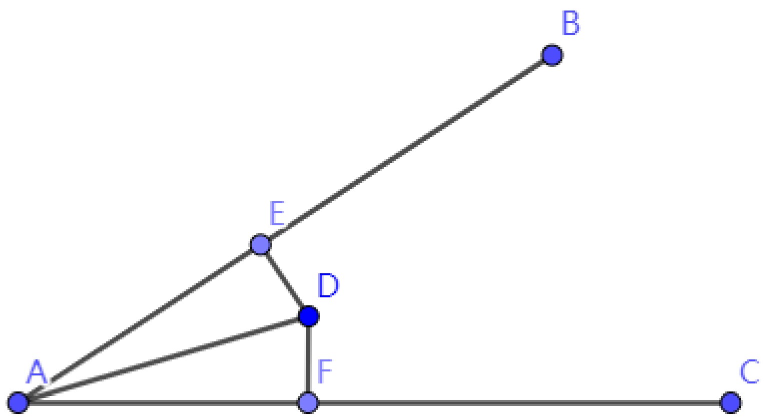
如图, AD是$\angle BAC$的平分线, $AE = AF$.

结论 : $\triangle AED \cong \triangle AFD(SAS)$



如图, AD是$\angle BAC$的平分线, $\angle ED'A = \angle FD'A = 90^\circ$.

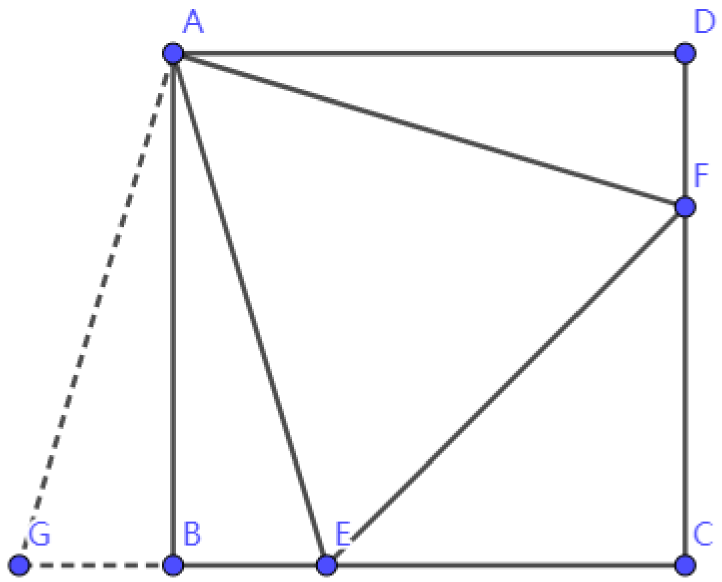
结论 : $\triangle AD'E \cong \triangle AD'F(ASA)$



如图, AD是$\angle BAC$的平分线, $\angle AED = \angle AFD = 90^{\circ}$.

结论 : $\angle AED \cong \angle AFD(AAS)$

半角及其有关模型



已知□$ABCD, \angle EAF = 45^\circ$.

求证：

(1)$EF = BE + DF$

(2)$\angle EAF = \angle BAE + \angle DAF$

(3)EA平分$\angle BEF$

(4)FA平分$\angle DFE$

(1)证明：延长EB至点G, 使得$BG = DF$.

在$\triangle AGB$和$\triangle AFD$中

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle ABG = \angle D = 90^\circ \\ BG = DF \end{cases}$$

$\therefore \triangle AGB \cong \triangle AFD(SAS)$

$\therefore AG = AF, \angle GAB = \angle DAF$

$\therefore \angle BAE + \angle GAB = \angle BAE + \angle DAF = \angle BAD - \angle EAF = 45^\circ$

即$\angle GAE = 45^\circ$

$\because \angle EAF = 45^\circ$

$\therefore \angle GAE = \angle EAF$

在$\triangle GAE$和$\triangle FAE$中

$$\begin{cases} AG = AF \\ \angle GAE = \angle EAF \\ AE = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle GAE \cong \triangle FAE(SAS)$

$\therefore GE = EF$

又$\because GE + BE + BG = BE + DF$

$\therefore EF = BE + DF$

(2)证明：由(1)得$\angle GAE = \angle EAF, \angle GAB = \angle DAF$

$\because \angle GAE = \angle GAB + \angle BAE = \angle DAF + \angle BAE$

$\therefore \angle EAF = \angle BAE + \angle DAF$

(3)证明：由(1)得$\triangle GAE \cong \triangle FAE(SAS)$

$\therefore \angle BEA = \angle FEA$

$\therefore AE$平分$\angle BEF$

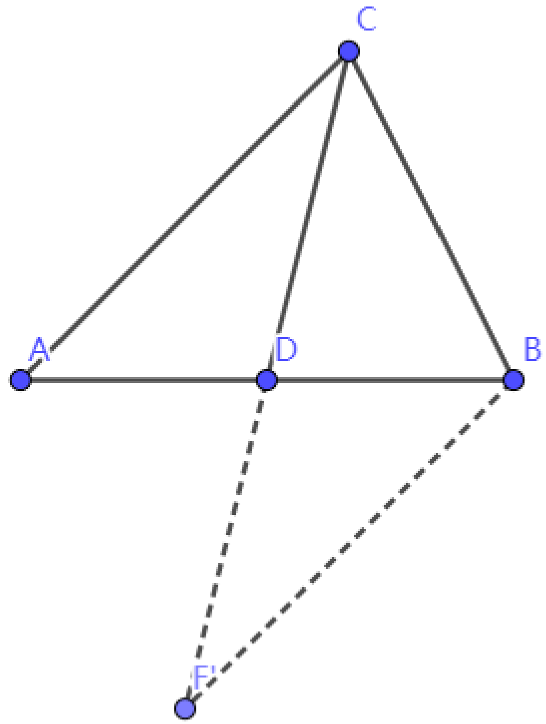
(4)证明：由(1)得$\triangle GAE \cong \triangle FAE(SAS)$

$\therefore \angle EFA = \angle DFA$

$\therefore FA$平分$\angle EFD$

三角形中也有类似半角模型的图形,解决方法都是旋转后证多次全等

倍长中线



如图,CD是$\triangle ABC$的中线.

延长CD至点F',使$CD = DF'$,连接BF'.

在$\triangle ADC$和$\triangle BDF'$中

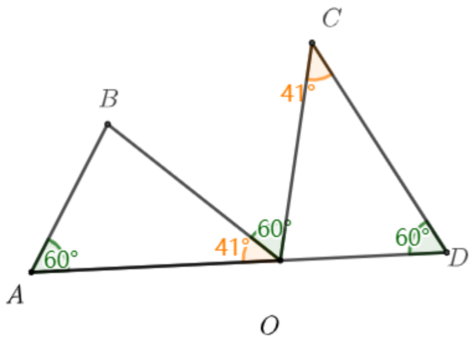
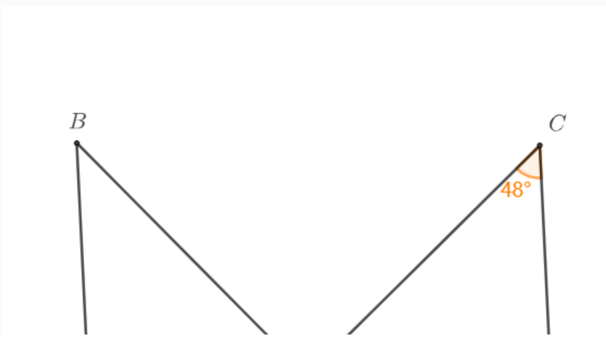
$$\begin{cases} AD = DB \\ \angle ADC = \angle BDF' \\ CD = DF' \end{cases}$$

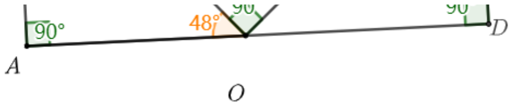
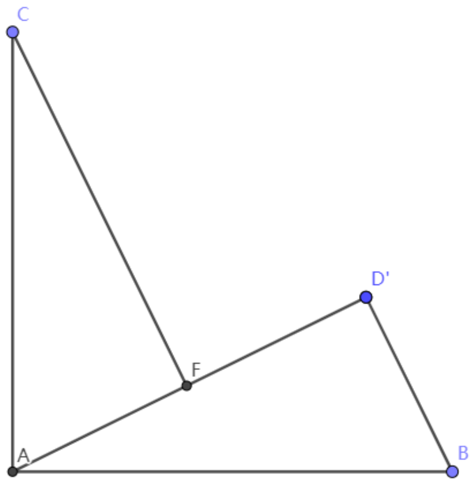
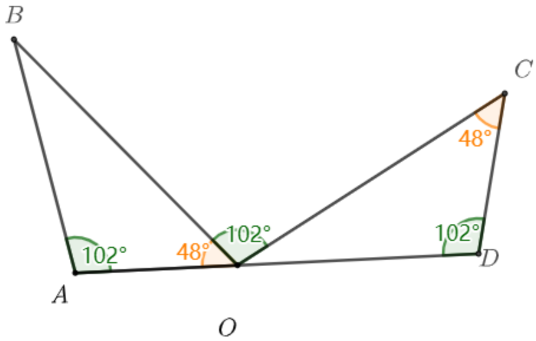
$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle BDF' (SAS)$$

一线三等角★★★

已知一边证全等，没有已知证相似

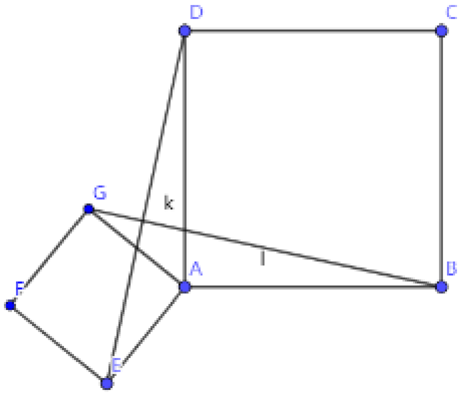
如此情况中,$AB = DO$

三角形种类	图例	结论
锐角三角形		$\begin{cases}\triangle ABO \cong \triangle DOC(AAS) \\ AB = DO \\ AO = CD \\ BO = CO \\ \angle A = \angle BOC = \angle D \\ \angle BOA = \angle C\end{cases}$
		$\triangle ABO \cong \triangle DOC(AAS)$ $AB = DO$ $AO = CD$ $BO = CO$

三角形种类 直角三角形	 	$\begin{cases} \angle A = \angle BOC = \angle D = 90^\circ \\ BA \perp AD \\ CD \perp AD \\ BO \perp CO\text{结论} \\ \angle BOA = \angle C \end{cases}$ $\begin{cases} \triangle AFC \cong \triangle BDA(AAS) \\ \angle CAF = \angle B \\ \angle CFA = \angle D = 90^\circ \\ \angle ACF = \angle DAB \\ CA = CB \\ AF = DB \\ CF = AD \\ CA \perp AB \\ CE \perp AD \\ BD \perp AD \end{cases}$
钝角三角形		$\begin{cases} \triangle ABO \cong \triangle DOC(AAS) \\ AB = DO \\ AO = CD \\ BO = CO \\ \angle A = \angle BOC = \angle D \\ \angle BOA = \angle C \end{cases}$

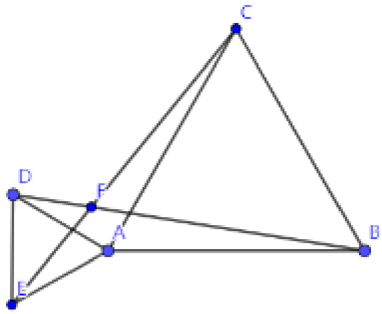
手拉手模型

正方形



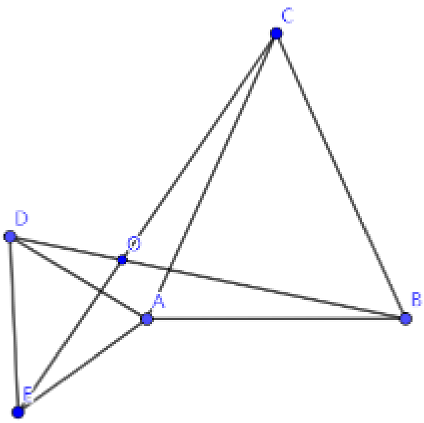
$$\begin{cases}\triangle GAB \cong \triangle EAD(SAS)\\ ED = GB\\ ED \perp GB\end{cases}$$

等边三角形



$$\begin{cases}\triangle EAC \cong \triangle DAB\\ CE = BD\\ \angle DFC = 60^{\circ}\end{cases}$$

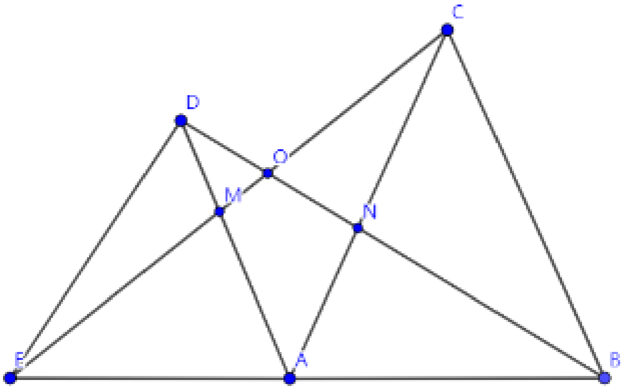
等腰三角形



条件 : $\angle DAE = \angle CAB = \alpha^{\circ}$

$$\begin{cases}\triangle EAC \cong \triangle DAB\\ BD = CE\\ \angle DOC = \angle DAE = \angle CAB\end{cases}$$

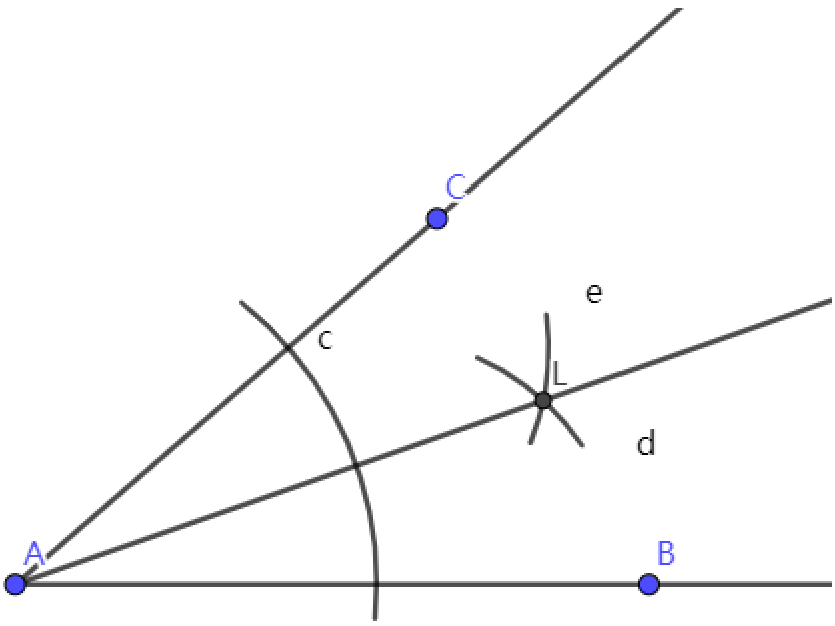
特殊



$$\begin{cases}\triangle EAC \cong \triangle DAB(SAS) \\ DB = EC \\ \angle DOC = 60^\circ \\ \triangle MEA \cong \triangle NDA(ASA) \\ MD = NE \\ \triangle CMA \cong \triangle BNA(ASA) \\ BM = CN \\ AM = AN \\ \triangle AMN\text{是等边三角形} \\ MN // AB \\ OA\text{平分}\angle EOB \\ OE = OD + OA \\ OB = OC + OA\end{cases}$$

尺规作图

角平分线



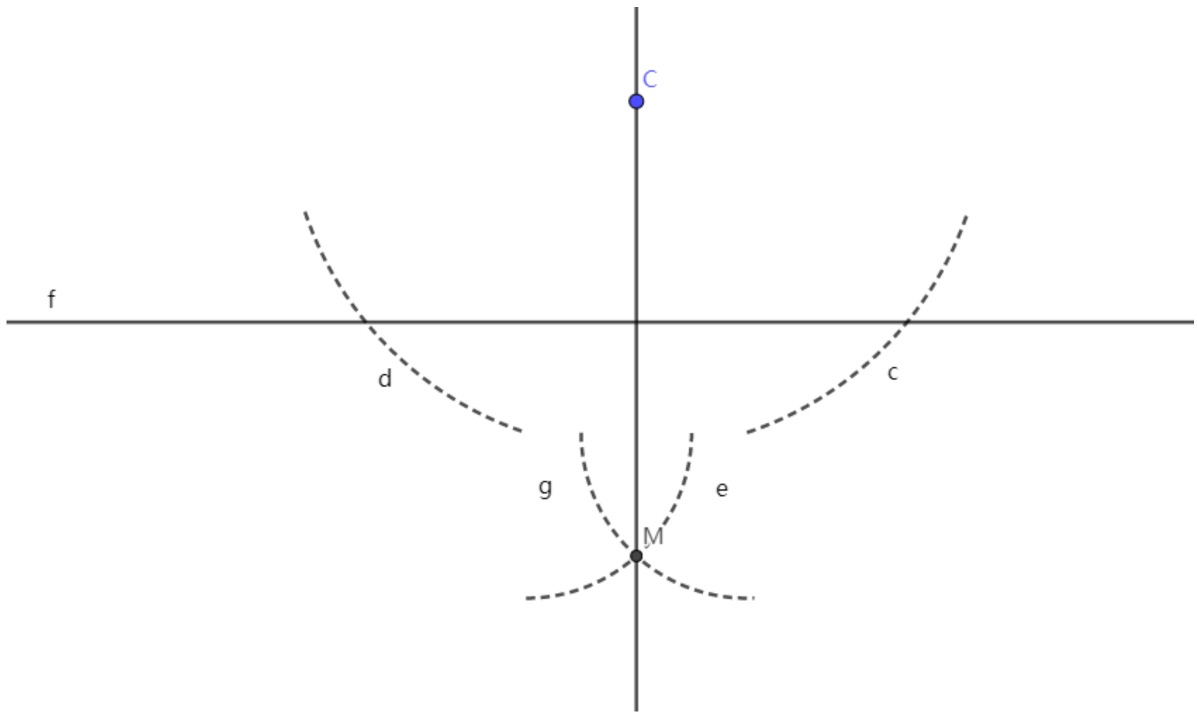
如图,作$\angle BAC$的角平分线

以A为圆心,任意长度为半径,作圆弧c,交射线AB,AC

分别以两交点为圆心,$>\dfrac{1}{2}$两交点距离为半径,作圆弧e,d,交于点L

连接AL即为所求

垂线



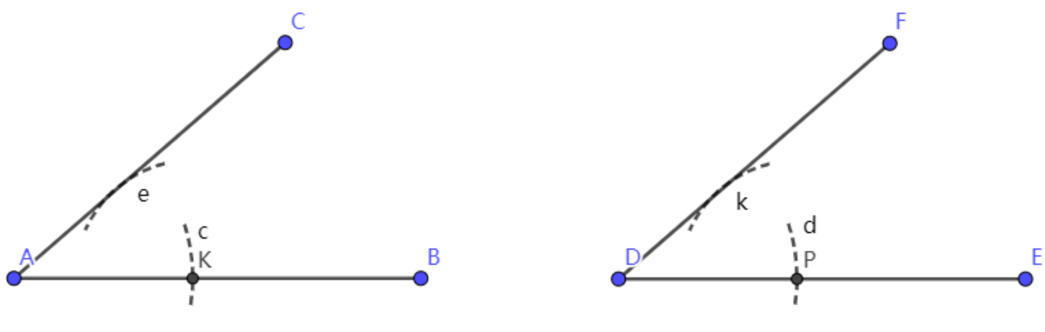
如图,过点C作直线f的垂线

以点C为圆心,相同长度为半径,分别作圆弧d,c

分别以d和f的交点,c和f的交点为圆心,$>\dfrac{1}{2}$两交点长度为半径作圆弧g,e,交于点M.

连接CM即为所求

相等角



如图,作$\angle FDE=\angle CAB$,已知$\angle CAB$,线段DE

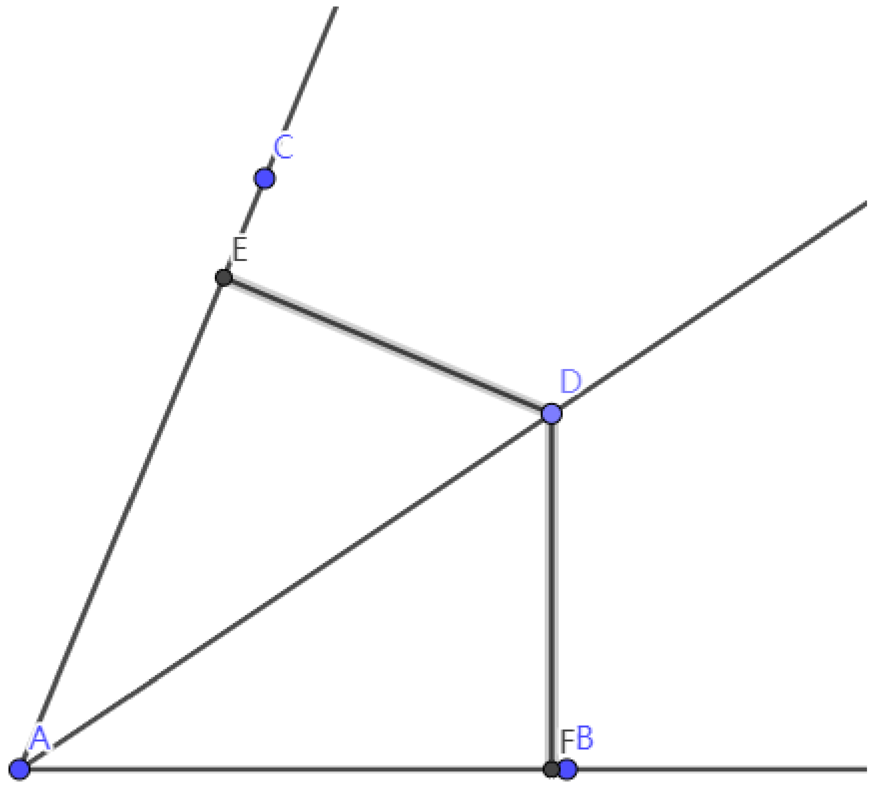
分别以A,D为圆心,相同长度为半径,分别作圆弧c,d,交线段AB,DE于点K,P

再分别以点K,P为圆心,K到AC的距离为半径,作圆弧e,k,e与AC相切

作线段DF,与圆弧k相切,$\angle FDE$即为所求

做辅助线

角平分线 – 做垂直



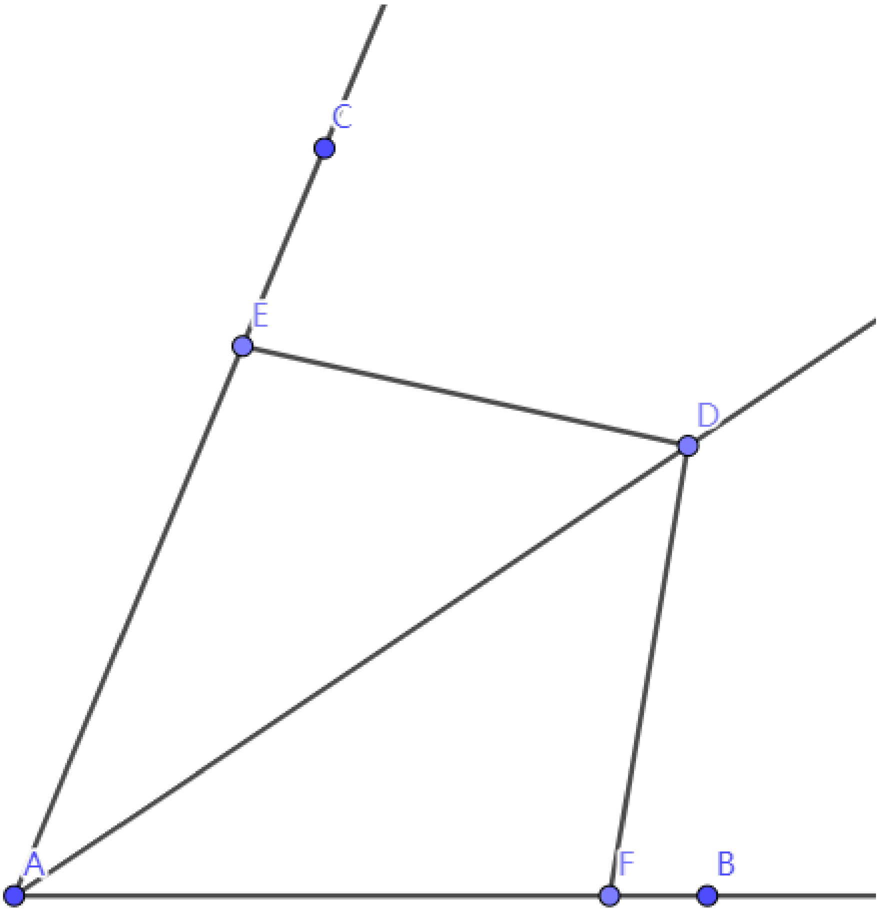
如图, $ED \perp AC, DF \perp AB, AD$平分$\angle CAB$. 易证$\triangle EAD \cong \triangle FAD(AAS)$

如图, $ED \perp AC, FD \perp AB, ED = DB$. 易证$Rt\triangle AED \cong Rt\triangle AFD(HL)$, 可得$AD$平分$\angle CAB$

在题中遇见角平分线，做双垂直，必出全等三角形

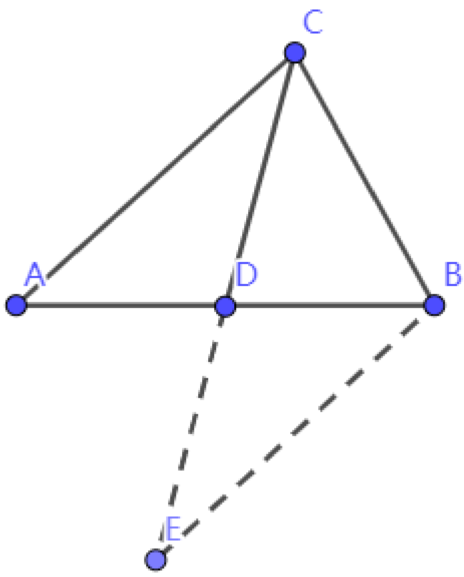
可以从角平分线上的点向两边作垂线，也可以过角平分线上的点作角平分线的垂线与角的两边相交

角平分线 – 截取构造全等



如图,已知$AE=AF$,AD平分$\angle CAB$.易证$\triangle EAD\cong\triangle FAD(SAS)$.

(类)倍长中线



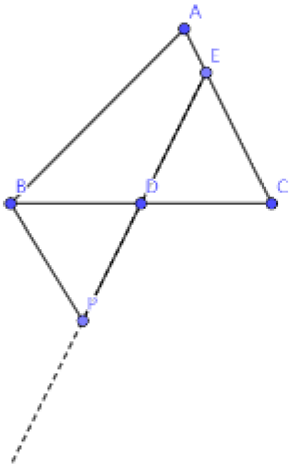
如图, CD是$\triangle ABC$的中线.

延长CD至点E, 使得$CD = DE$. 易证$\triangle ADC \cong \triangle BDE(SAS)$

若$AC = 5, BC = 4$, 求CD的取值范围.

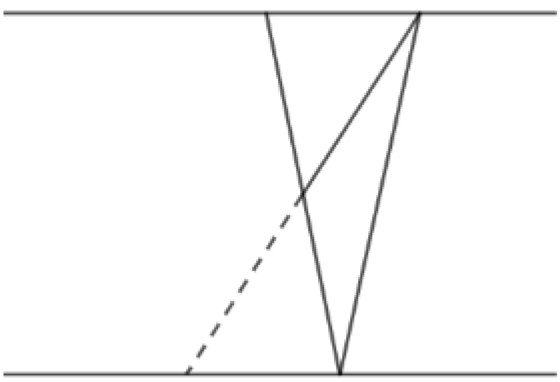
同理易证$BE = AC = 5$.在$\triangle CEB$中, $|BE - CB| < CE < CB + BE$, 即$1 < CE < 9$.

$$\because CE = DE \therefore CD = \frac{1}{2}CE \therefore \frac{1}{2} < CD < \frac{9}{2}$$



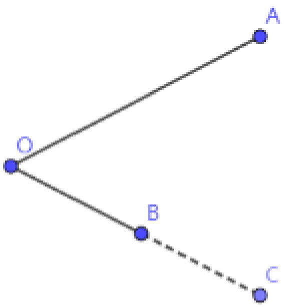
如图, D是BC中点, E是AC上一点.

延长ED至点P, 使得$ED = PD$. 易证$\triangle EDC \cong \triangle PDB(SAS)$

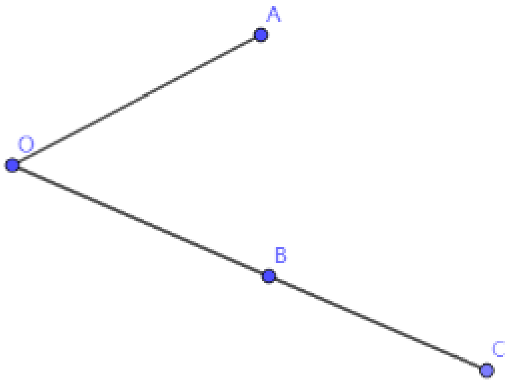


如果遇到三角形的中线、类中线、与中点有关的线段，通常考虑倍长中线或倍长类中线法

截长补短



延长OB至点C，使得$OA=OC$



在OC上取一点B，使得$OB=OA$

若遇到证明线段的和、差、倍、分关系时，通常考虑截长补短法

等腰三角形三线合一

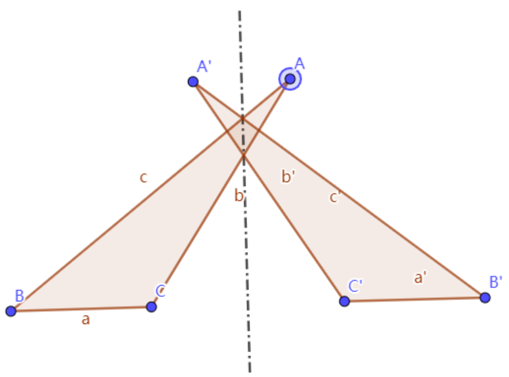
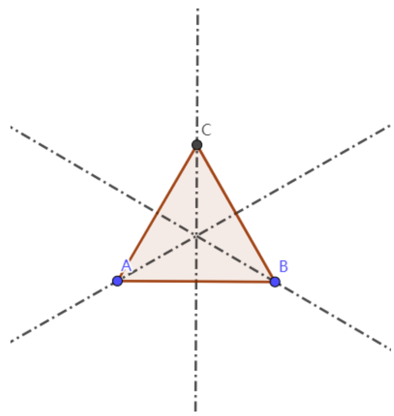
详见《等腰三角形 - 底边上的三线合一》

遇到等腰三角形，可作底边上的高，利用“三线合一”的性质解题

(原八上)第二单元 - 轴对称图形

*注：本单元原属于八年级上册，因教学进度原因提前学习

2.1 轴对称与轴对称图形

	轴对称	轴对称图形
图形个数	多个	单个
对称轴个数	单个	多个
图例		

对称轴

　　使图形成轴对称的直线

2.2 轴对称的性质

垂直平分线(中垂线)

　　垂直且平分一条线段的直线

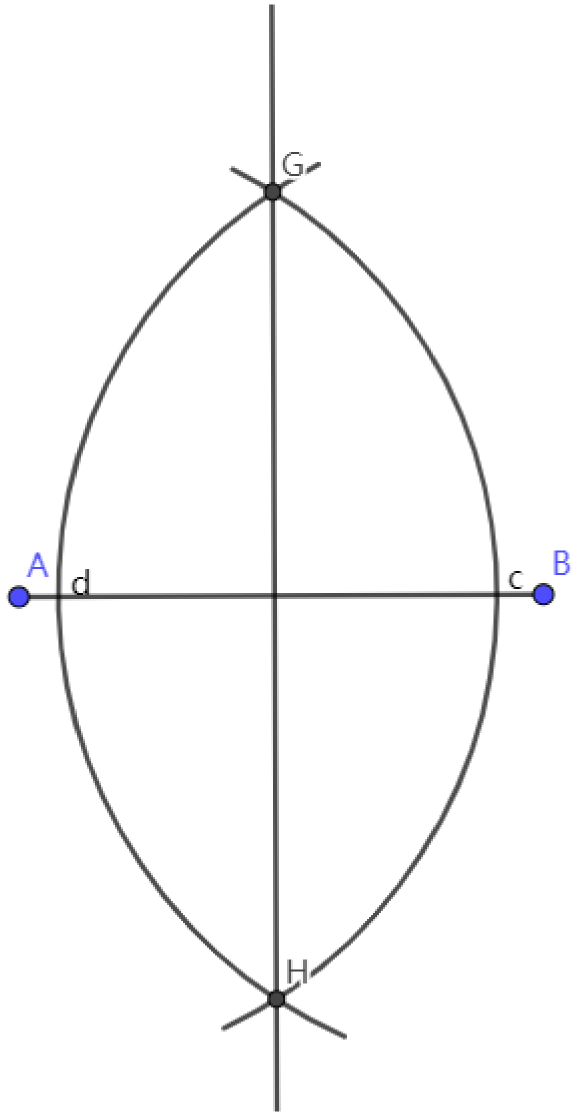
　　成轴对称的连个图形中，对应点的连线被对称轴垂直平分

2.3 设计轴对称图案

暂　无

2.4 线段、角的轴对称性

作中垂线



如图, 作线段AB的垂直平分线

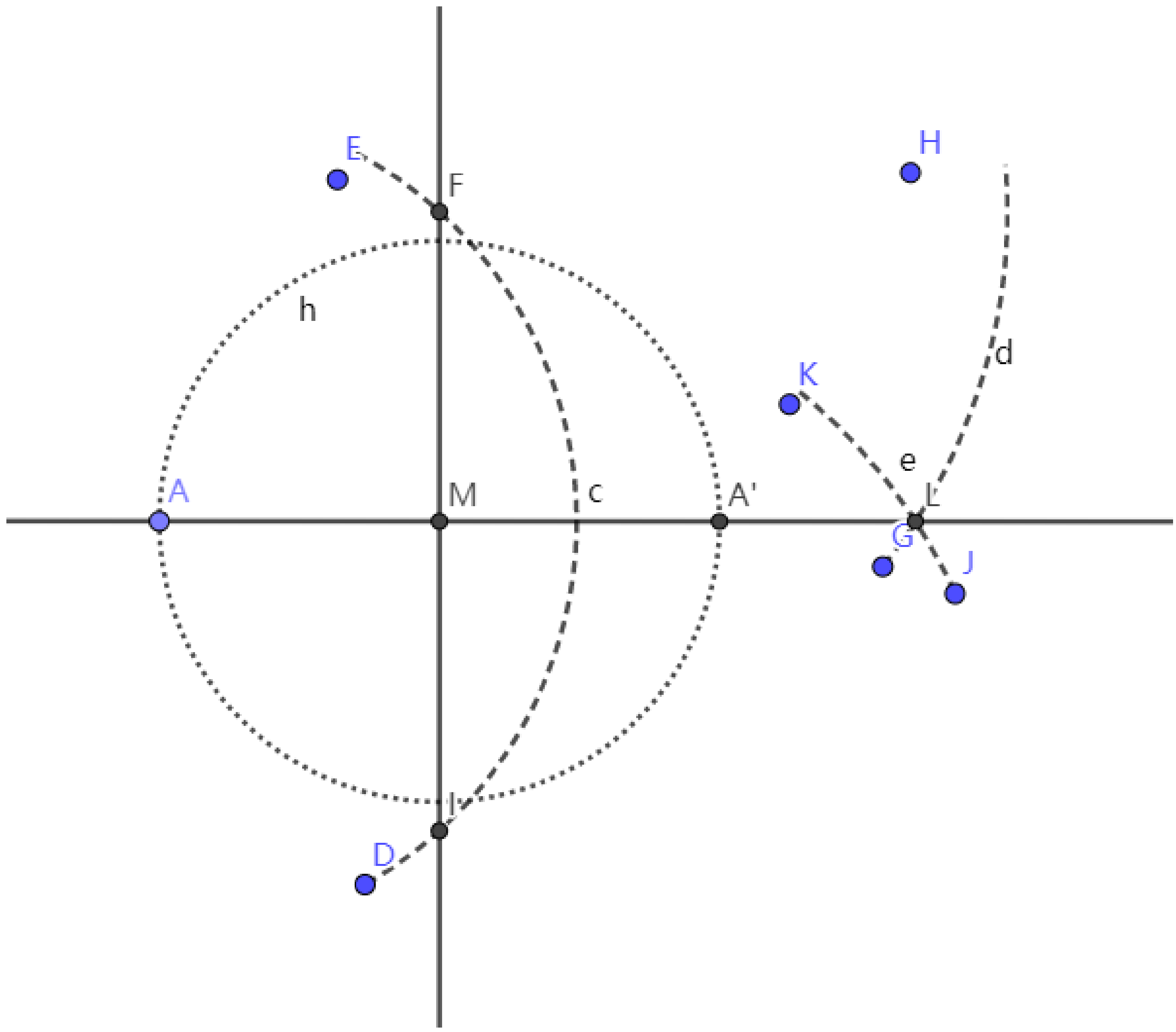
分别以A, B为圆心, 特点长度为半径, 作圆弧c, d, 交于点G, H

连接GH即为所求

中垂线的性质

线段中垂线上的点到线段两端点的距离相等

作对应点



如图,以A为圆心,适当长度为半径作圆弧c,交已知直线于两点F, I

分别以F, I为圆心,适当长度为半径,作圆弧d, e,交于一点L

连接A与L即为两交点所产生线段的垂直平分线

以M(垂直平分线与线段的交点)为圆心,AM为半径作圆,交垂直平分线于两点

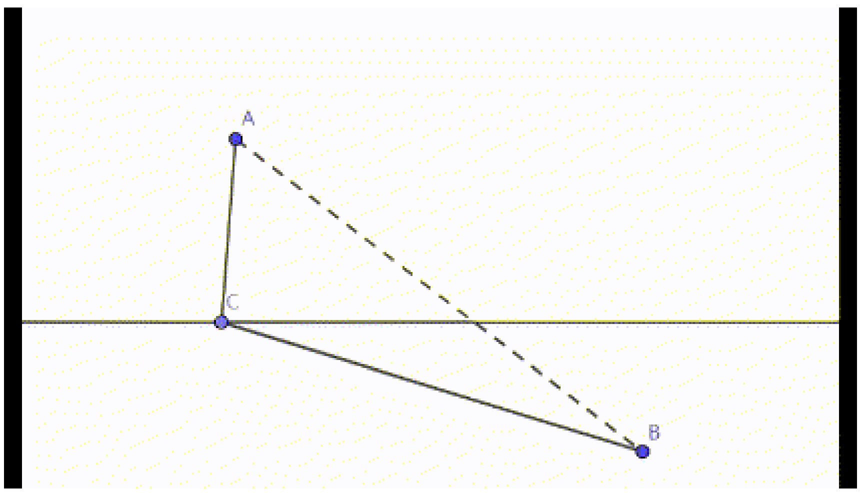
一点为A,另一点(A')即所求

将军饮马★★★

有一天,一个将军要去军营,但是他需要在路上去到河边让马喝水.求他如何走的路程最短.

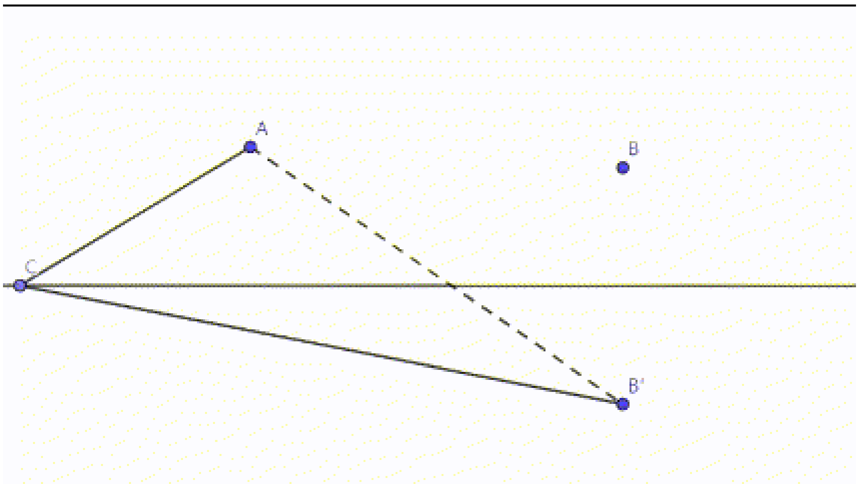
如图,A, B在直线异侧,C在直线上移动.

连接AC, BC,得当$AC + BC = AB$时距离最短(两点之间线段最短)



如图,A,B在直线同侧,C在直线上移动.作点B'与点B关于直线对称.问题转化为上图

连接$AC,B'C$,得当$AC+B'C=AB'$,即$AC+BC=AB'$时距离最短



线段的对称轴

1. 其中垂线
2. 其所在直线

中垂线的判定

1. 定义:垂直且为中点
2. 到线段两端距离相等的点在中垂线上
3. 到线段两端距离相等的点的集合

证明:作线段AB和点P,使$PA=PB$.连接PA,PB.

$$\begin{gathered}
\text{当}P\text{在线段}AB\text{上时:}\\
\because PA=PB\\
\therefore P\text{是}AB\text{中点}\\
\therefore P\text{在}AB\text{中垂线上}\\
\\
\text{当}P\text{在线段}AB\text{外时:}\\
\text{作}PD\perp AB\text{于点}D\\
\text{得}\angle ADP=\angle BDP=90^\circ\\
\text{在}Rt\triangle ADP\text{和}Rt\triangle BDP\text{中}\\
\begin{cases}AP=BP\\DP=DP\end{cases}\\
\therefore Rt\triangle ADP\cong Rt\triangle BDP(HL)\\
\therefore AD=DB\\
\therefore P\text{在}AB\text{中垂线上}
\end{gathered}$$

三角形的三中垂线交于一点

三角形的四心(除旁心)

三角形的外心:三角形三边的垂直平分线的交点(或三角形外接圆的圆心)

三角形的内心:三角形三条内角平分线的交点(或内切圆的圆心)

三角形的重心:三角形三条中线的交点

三角形的垂心:三角形三边上的高的交点

角的对称轴

其角平分线所在直线

定理

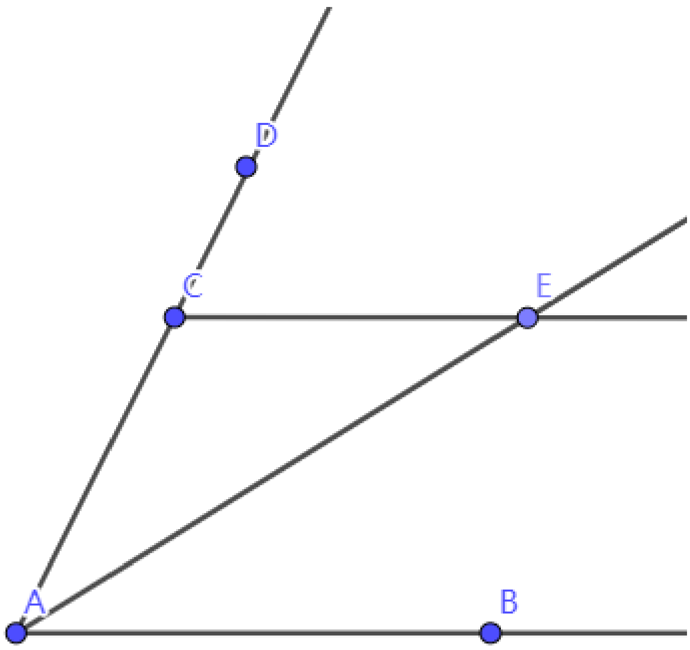
角平分线上的点到角两边的距离相等

$$\because OC\text{平分}\angle AOB, PC \perp OA, QC \perp OB$$
$$\therefore PC = QC$$

角平分线的判定(增改版)

1. 定义
   1. 角相等
   2. 角成$\frac{1}{2}$或2倍关系
2. 角内到角两边距离相等的点在角的平分线上

角平分线,平行,等腰的关系



如图. 射线AD上有一点C, 在$\angle DAB$中有一点E, 连接CE, AE.

已知：

(1)AE平分$\angle DAB, CE//AB$. 求证：$\triangle CAE$是等腰三角形.

(2)AE平分$\angle DAB, \triangle CAE$是等腰三角形. 求证：$CE//AB$.

(3)$CE//AB, \triangle CAE$是等腰三角形. 求证：AE平分$\angle DAB$.

(1)证明 $\because$ AE平分$\angle DAB$

$\therefore \angle CAE = \angle EAB$

又 $\because CE//AB$

$\therefore \angle CEA = \angle EAB = \angle CAE$

$\therefore \triangle CAE$是等腰三角形

(2)证明 $\because$ AE平分$\angle DAB$

$\therefore \angle CAE = \angle EAB$

又 $\because \triangle CAE$是等腰三角形

$\therefore \angle CEA = \angle CAE = \angle EAB$

$\therefore CE//AB$

(3)证明 $\because CE//AB$

$\therefore \angle CEA = \angle EAB$

又 $\because \triangle CAE$是等腰三角形

$\therefore \angle CAE = \angle CEA = \angle EAB$

$\therefore AE$平分$\angle DAB$

2.5 等腰三角形的轴对称性

暂 无