南京大学数学试卷 2022.6.13

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$ 的值.

2. 令 $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，计算 $((A^*)^{\mathrm{T}})^*$.

3. 求使得方阵 $\begin{pmatrix} 3 & x & 0 \\ x & 4 & y \\ 0 & y & 5 \end{pmatrix}$ 正定的所有实数对 (x, y) 在平面直角坐标系中所构成的区域面积.

4. 求 $\alpha_1 = (0,2,1,1,0)^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = (3,4,2,1,1)^{\mathrm{T}}, \alpha_3 = (0,0,0,7,2)^{\mathrm{T}}, \alpha_4 = (1,0,0,2,1)^{\mathrm{T}}$ 的一组极大无关组，并将其余向量表达为极大无关组的线性组合.

二、 (**本题12分**) 利用分块矩阵计算 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n, (n \geq 1)$.

三. (**本题12分**) 设线性方程组 $AX = B$ 中 $\mathrm{r}(A) = 2$. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是其解向量，满足 $4\alpha_1 - 3\alpha_2 = (1,0,2,1)^{\mathrm{T}}$, $2\alpha_2 + \alpha_3 = (0,3,9,3)^{\mathrm{T}}, \alpha_1 + 3\alpha_3 = (0,0,4,4)^{\mathrm{T}}$. 求 $AX = B$ 的通解.

四. (**本题12分**) 用正交变换将实二次型 $f(x,y,z) = 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 4yz$ 化成一个标准形并求 $f(x,y,z)$ 的正惯性指数和负惯性指数.

五. (**本题12分**) 线性空间 $\mathbf{R}^3$ 中有两组基 $\alpha_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = (0,1,2)^{\mathrm{T}}, \alpha_3 = (2,0,0)^{\mathrm{T}}$，和 $\beta_1 = (3,2,2)^{\mathrm{T}}, \beta_2 = (0,2,0)^{\mathrm{T}}, \beta_3 = (-2,2,4)^{\mathrm{T}}$. 试用 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的线性组合表达 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

六. (**本题12分**) 令 A 为 n 阶实系数对称正交方阵.

(1) 证明 A 的特征值为1或-1.

(2) 证明可以找到 n 个两两正交的单位列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-m}$ 使得 $A\alpha_i = \alpha_i, A\beta_j = -\beta_j, (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-m)$.

七. (**本题12分**) (1) 计算n阶上三角实方阵全体和n阶下三角实方阵全体分别构成的实线性空间V和W的维数.

(2) 计算实线性空间 $V \cap W$ 和 $V + W$ 的维数.

南京大学数学试卷 答案 2022.6.13

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$ 的值.

解：$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & b & a \\ b & 0 & 0 \end{vmatrix} = a^2(a^2-b^2) - b^2(a^2-b^2) = (a+b)^2(a-b)^2.$

解法二：$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & 0 & 0 & a+b \\ 0 & a+b & a+b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 & 0 \\ 0 & b & a-b & 0 \\ b & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+b)^2(a-b)^2.$

2. 令 $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，计算 $((A^*)^{\mathrm{T}})^*$.

解：$((A^*)^{\mathrm{T}})^* = ((A^*)^*)^{\mathrm{T}} = (|A|A)^{\mathrm{T}} = |A|A^{\mathrm{T}} = -109\begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

解法二：由 $|A| = -109$ 得 $A^* = |A|A^{-1}$，故 $B = (A^*)^{\mathrm{T}} = |A|(A^{\mathrm{T}})^{-1}$，则 $|B| = |A|^3|(A^{\mathrm{T}})^{-1}| = |A|^2$.

于是 $((A^*)^{\mathrm{T}})^* = B^* = |B|B^{-1} = |A|^2|A|^{-1}A^{\mathrm{T}} = |A|A^{\mathrm{T}} = -109\begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

3. 求使得方阵 $\begin{pmatrix} 3 & x & 0 \\ x & 4 & y \\ 0 & y & 5 \end{pmatrix}$ 正定的所有实数对 (x, y) 在平面直角坐标系中所构成的区域面积.

解：该方阵正定当且仅当 $12 - x^2 > 0$ 且 $60 - 5x^2 - 3y^2 > 0$. 所有满足这两个不等式的实数对 (x, y) 的集合为椭圆 $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{20} < 1$. 其面积为 $\pi \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{20} = 4\sqrt{15}\pi$.

4. 求 $\alpha_1 = (0,2,1,1,0)^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = (3,4,2,1,1)^{\mathrm{T}}, \alpha_3 = (0,0,0,7,2)^{\mathrm{T}}, \alpha_4 = (1,0,0,2,1)^{\mathrm{T}}$ 的一组极大无关组，并将其余向量表达为极大无关组的线性组合.

解：$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为一组极大无关组，$\alpha_4 = -\dfrac{2}{3}\alpha_1 + \dfrac{1}{3}\alpha_2 + \dfrac{1}{3}\alpha_3$.(极大无关组选取不唯一)

二、 (本题12分) 利用分块矩阵计算 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n, (n \geq 1).$

解：令 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. 我们有 $A^2 = E, AB = BA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.因此

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} A & B \\ O & A \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} A^n & nA^{n-1}B \\ O & A^n \end{pmatrix}.$$

因此，当 n 为偶数时 $M=\begin{pmatrix}1&0&3n&2n\\0&1&2n&3n\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，当 n 为奇数时 $M=\begin{pmatrix}0&1&2n&3n\\1&0&3n&2n\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$.

解法二：易知 $K=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\1&0&3&2\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&2&3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&O\\O&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&D\\O&E\end{pmatrix}$.

其中 $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}$，且有 $\begin{pmatrix}A&O\\O&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&D\\O&E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&D\\O&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&O\\O&A\end{pmatrix}, A^2=E$.

于是 $K^n=\begin{pmatrix}A&O\\O&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&D\\O&E\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}A&O\\O&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&D\\O&E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&O\\O&A\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}E&D\\O&E\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}A^n&O\\O&A^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&nD\\O&E\end{pmatrix}$.

故当 n 为偶数时，有 $K^n=\begin{pmatrix}E&nD\\O&E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&3n&2n\\0&1&2n&3n\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,

当 n 为奇数时，有 $K^n=\begin{pmatrix}A&nAD\\O&A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&2n&3n\\1&0&3n&2n\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$.

三. (**本题12分**) 设线性方程组 $AX=B$ 中 $\mathrm{r}(A)=2$. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是其解向量，满足 $4\alpha_1-3\alpha_2=(1,0,2,1)^{\mathrm{T}}$, $2\alpha_2+\alpha_3=(0,3,9,3)^{\mathrm{T}}, \alpha_1+3\alpha_3=(0,0,4,4)^{\mathrm{T}}$. 求 $AX=B$ 的通解.

解：由于 $\mathrm{r}(A)=2$，未知数个数为4，$AX=\theta$ 的解空间维数为2.

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $AX=B$ 的解向量，从而

$4\alpha_1-3\alpha_2=(1,0,2,1)^{\mathrm{T}}, \dfrac{1}{3}(2\alpha_2+\alpha_3)=(0,1,3,1)^{\mathrm{T}}, \dfrac{1}{4}(\alpha_1+3\alpha_3)=(0,0,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $AX=B$ 的解，

从而 $(1,0,2,1)^{\mathrm{T}}-(0,1,3,1)^{\mathrm{T}}=(0,-1,-1,0)^{\mathrm{T}}, (0,1,3,1)^{\mathrm{T}}-(0,0,1,1)^{\mathrm{T}}=(0,1,2,0)^{\mathrm{T}}$ 是 $AX=\theta$ 的两个解. 注意到这两个解线性无关，从而 $AX=\theta$ 的通解为 $k_1(1,-1,-1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(0,1,2,0)^{\mathrm{T}}, (k_1,k_2\in\mathbf{R})$.

因此 $AX=B$ 的通解为 $(1,0,2,1)^{\mathrm{T}}+k_1(1,-1,-1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(0,1,2,0)^{\mathrm{T}}, (k_1,k_2\in\mathbf{R})$.

(本题通解表达式不唯一)

解法二：易知 $(4\alpha_1-3\alpha_2, 2\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+3\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}4&0&1\\-3&2&0\\0&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\2&9&4\\1&3&4\end{pmatrix}$.

解得 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}2/7&1/21&-2/21\\9/7&12/7&-3/7\\27/7&94/21&1/21\\1&1&1\end{pmatrix}$, 故$\alpha_1=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}2\\9\\27\\7\end{pmatrix}, \alpha_2=\dfrac{1}{21}\begin{pmatrix}1\\36\\94\\21\end{pmatrix}, \alpha_3=\dfrac{1}{21}\begin{pmatrix}-2\\-9\\1\\21\end{pmatrix}$.

令 $\beta_1=\alpha_2-\alpha_1=\dfrac{1}{21}(-5,9,13,0)^{\mathrm{T}}, \beta_2=\alpha_3-\alpha_1=-\dfrac{4}{21}(2,9,20,0)^{\mathrm{T}}$.

显然 β_1,β_2 为 $AX=\theta$ 的无关解，又由 $\mathrm{r}(A)=2$，故 β_1,β_2 构成 $AX=\theta$ 的一个基础解系，

故 $AX=B$ 的通解为：$\alpha_1+k_1\beta_1+k_2\beta_2, k_1,k_2\in\mathbf{R}$.

四. (**本题12分**) 用正交变换将实二次型 $f(x,y,z)=3x^2+4y^2+5z^2+4xy-4yz$ 化成一个标准形并求 $f(x,y,z)$ 的正惯性指数和负惯性指数.

解：设 $X=(x,y,z)^{\mathrm{T}}, A=\begin{pmatrix}3&2&0\\2&4&-2\\0&-2&5\end{pmatrix}$. 我们有 $f(x,y,z)=X^{\mathrm{T}}AX$. A 的特征值为1,4,7. 它们的一个特征向量分别为 $\alpha_1=(-2,2,1)^{\mathrm{T}}, \alpha_2=(2,1,2)^{\mathrm{T}}, \alpha_3=(-1,-2,2)^{\mathrm{T}}$. 由于这三个分量分属对称矩阵 A 的三个不同特征值，所以它们两两正交，经它们单位化，得到正交矩阵 $U=(\dfrac{\alpha_1}{|\alpha_1|},\dfrac{\alpha_2}{|\alpha_2|},\dfrac{\alpha_3}{|\alpha_3|})=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&2&-1\\2&1&-2\\1&2&2\end{pmatrix}$.

我们有 $U^{\mathrm{T}}AU=\mathrm{diag}(1,4,7)$. 令 $(u,v,w)^{\mathrm{T}}=U^{\mathrm{T}}X$，标准形为

$f(u,v,w) = X^{\mathrm{T}}AX = (u,v,w)U^{\mathrm{T}}AU(u,v,w)^{\mathrm{T}} = u^2 + 4v^2 + 7w^2$.
正惯性指数为3，负惯性指数为0. (本题中二次型化为标准形形式不唯一)

五. (**本题12分**) 线性空间 $\mathbf{R}^3$ 中有两组基 $\alpha_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = (0,1,2)^{\mathrm{T}}, \alpha_3 = (2,0,0)^{\mathrm{T}}$，和 $\beta_1 = (3,2,2)^{\mathrm{T}}, \beta_2 = (0,2,0)^{\mathrm{T}}, \beta_3 = (-2,2,4)^{\mathrm{T}}$. 试用 β_1,β_2,β_3 的线性组合表达 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

解：令 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)P$，则有

$$P = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)^{-1}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

故有 $\alpha_1 = \frac{1}{4}\beta_1 + \frac{3}{8}\beta_2 - \frac{1}{8}\beta_3, \alpha_2 = \frac{1}{4}\beta_1 - \frac{1}{8}\beta_2 + \frac{3}{8}\beta_3, \alpha_3 = \frac{1}{2}\beta_1 - \frac{1}{4}\beta_2 - \frac{1}{4}\beta_3$.

解法二：$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/8 & -1/8 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/8 & 3/8 & -1/4 \end{array}\right)$.

故有 $\alpha_1 = \frac{1}{4}\beta_1 + \frac{3}{8}\beta_2 - \frac{1}{8}\beta_3, \alpha_2 = \frac{1}{4}\beta_1 - \frac{1}{8}\beta_2 + \frac{3}{8}\beta_3, \alpha_3 = \frac{1}{2}\beta_1 - \frac{1}{4}\beta_2 - \frac{1}{4}\beta_3$.

解法三：设 $\sum\limits_{i=1}^{3} k_{ij}\alpha_i = \beta_j (1 \le j \le 3)$. 解得 $\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \beta_2 = 2\alpha_1 - \alpha_3 \\ \beta_3 = 2\alpha_2 - \alpha_3 \end{cases}$.

即 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

从而 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$，即有 $\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{4}\beta_1 + \frac{3}{8}\beta_2 - \frac{1}{8}\beta_3 \\ \alpha_2 = \frac{1}{4}\beta_1 - \frac{1}{8}\beta_2 + \frac{3}{8}\beta_3 \\ \alpha_3 = \frac{1}{2}\beta_1 - \frac{1}{4}\beta_2 - \frac{1}{4}\beta_3 \end{cases}$.

六. (**本题12分**) 令 A 为 n 阶实系数对称正交方阵.

(1) 证明 A 的特征值为1或-1.

(2) 证明可以找到 n 个两两正交的单位列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-m}$ 使得 $A\alpha_i = \alpha_i, A\beta_j = -\beta_j, (1 \le i \le m, 1 \le j \le n-m)$.

证：(1) 由 A 的性质可得 $AA^{\mathrm{T}} = E_n$ 且 $A = A^{\mathrm{T}}$. 从而 $A^2 = E_n$. 因此 A 的任意特征值 λ 满足 $\lambda^2 = 1$. 所以 A 的特征值为1或-1.

(2) 由于 A 是对称实数矩阵且特征值为 1 或 -1，不妨设特征值 1 的重数为 m 而特征值 -1 的重数为 $n-m$. 那么存在正交矩阵 $U = (\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_{n-m})$ 使得 $U^{\mathrm{T}}AU = \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & -E_{n-m} \end{pmatrix}$.

从而 $(A\alpha_1,\cdots,A\alpha_m,A\beta_1,\cdots,A\beta_{n-m}) = AU = U\begin{pmatrix} E_m & O \\ O & -E_{n-m} \end{pmatrix} = (\alpha_1,\cdots,\alpha_m,-\beta_1,\cdots,-\beta_{n-m})$，

即有 $A\alpha_i = \alpha_i, A\beta_j = -\beta_j (1 \le i \le m, 1 \le j \le n-m)$. 注意到 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_{n-m}$ 是正交矩阵 U 的 n 个列向量，所以是两两正交的单位向量.

证法二：(1) A 实对称且正交，故有 $A^2 = A^{\mathrm{T}}A = E$. 设 λ 为 A 的任一特征值，对应特征向量为 ξ，则有 $A\xi = \lambda\xi$. 故 $\xi = A^2\xi = \lambda A\xi = \lambda^2\xi$，由 $\xi \ne \theta$，故 $\lambda^2 = 1$，即 $\lambda = \pm 1$.

(2) A 实对称，故可对角化，. 设 A 有 m 个特征值 1， $n-m$ 个特征值 -1，

则对应于 1 有 m 个无关特征向量，标准正交化后得到 m 个标准正交的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，即有 $A\alpha_i = \alpha_i, 1 \le i \le m$.

同理有对应于 -1 的标准正交的特征向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-m}$，有 $A\beta_j = -\beta_j, 1 \le j \le n-m$.

由于 α_i,β_j 对应不同的特征值，故正交，于是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-m}$ 是标准正交向量组.

七. (**本题12分**) (1) 计算n阶上三角实方阵全体和n阶下三角实方阵全体分别构成的实线性空间V和W的维数.
(2) 计算实线性空间 $V \cap W$ 和 $V + W$ 的维数.

解：(1) 令 $E_{ij} = e_i e_j^{\mathrm{T}}$，其中 $e_i \in \mathbf{R}^n, i = 1,2,\cdots,n$ 为 n 维列向量，除了第 i 个分量为1其余都是0.

则 $E_{ij}, i=1,2,\cdots,n, j=i,i+1,\cdots,n$ 构成 V 的一组基，共有基向量 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 个，

故 $\dim(V)=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

同理 $E_{ij}, i=1,2,\cdots,n, j=1,2,\cdots,i$ 构成 V 的一组基，有 $\dim(V)=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

(2) 易知 $V+W=\mathbf{R}^{n\times n}$，故 $\dim(V+W)=n^2$，从而 $\dim(V\cap W)=\dim(V)+\dim(W)-\dim(V+W)=n$.

(2) 解法二：易知 $V\cap W$ 为n阶对角矩阵构成的空间，$E_{ii}, i=1,2,\cdots,n$ 为一组基，故 $\dim(V\cap W)=n$，
则 $\dim(V+W)=\dim(V)+\dim(W)-\dim(V\cap W)=n^2$.