大学数学试卷 2022.1.4

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 20 & 22 & 0 & 0 \\ 22 & 20 & 0 & 0 \\ 16 & 30 & 1 & 4 \\ 30 & 16 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ 的值.

2. 求与向量 $\alpha = (1,1,1)^{\mathrm{T}}, \beta = (2,0,1)^{\mathrm{T}}$ 均正交且长度为3的向量.

3. 3阶实对称矩阵 A 的三个特征值为 $-1,1,3$. 求二次型 $f(x,y,z) = (x,y,z)A^*(x,y,z)^{\mathrm{T}}$ 的正惯性指数和负惯性指数，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵.

4. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\mathbf{R}^3$ 的子空间 $V = \{\ Ax \mid x \in \mathbf{R}^3\ \}$ 的维数.

二、 (本题12分) 求向量组 $\alpha_1 = (1,-1,2,4)\mathrm{T}, \alpha_2 = (0,3,1,2)^{\mathrm{T}}, \alpha_3 = (3,0,7,14)^{\mathrm{T}}, \alpha_4 = (1,-1,2,0)^{\mathrm{T}}, \alpha_5 = (2,1,5,6)^{\mathrm{T}}$的秩,找到它的一个极大线性无关组并将其余向量表达为这组极大线性无关组的线性组合.

三. (本题12分) 设 A,B,C 是三个 n 阶实方阵，满足 $\mathrm{r}(AB) = \mathrm{r}(B)$. 试证明 $\mathrm{r}(ABC) = \mathrm{r}(BC)$.

四. (本题12分) 令 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$，其中 a,b,c,d 是两两不等的正实数.

(1) 计算 A^2, A^3, A^4;　　(2) 求 B 的所有特征值及其重数.

五. (本题12分) 线性空间 $\mathbf{R}^4$ 中有两组基底 $\varepsilon_1 = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}, \varepsilon_2 = (1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}, \varepsilon_3 = (1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}, \varepsilon_4 = (1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 和 $\eta_1 = (1,1,0,1)^{\mathrm{T}}, \eta_2 = (2,1,3,1)^{\mathrm{T}}, \eta_3 = (1,1,0,0)^{\mathrm{T}}, \eta_4 = (0,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求从基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 到基底 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的过渡矩阵 P;

(2) 求 $\zeta = (1,0,0,2)^{\mathrm{T}}$ 在基底 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标.

六. (本题12分) 令 A 为 n 阶实对称矩阵.

(1) 证明对于任意的正整数 k，必然存在实对称矩阵 B 使得 $B^{2k+1} = A$;

(2) 若存在实矩阵C满足$A = C^2$，是否可以说明A是半正定矩阵？若是,给出证明.若不是,给出例子.

七. (本题12分) 具有待定系数 $a > 0$ 的二次型 $f(x,y,z) = 2x^2 + 13y^2 + 13z^2 + 2ayz$ 经过正交变换可变为标准形 $g(u,v,w) = 8u^2 + 2v^2 + 18w^2$. 求 a 并找出一个这样的正交变换.

大学数学试卷 答案 2022.1.4

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix}20 & 22 & 0 & 0\\22 & 20 & 0 & 0\\16 & 30 & 1 & 4\\30 & 16 & 4 & 1\end{vmatrix}$ 的值.

解：$\begin{vmatrix}20 & 22 & 0 & 0\\22 & 20 & 0 & 0\\16 & 30 & 1 & 4\\30 & 16 & 4 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}20 & 22\\22 & 20\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}1 & 4\\4 & 1\end{vmatrix} = (20^2 - 22^2)(1^2 - 4^2) = 1260.$

2. 求与向量 $\alpha = (1,1,1)^{\mathrm{T}}, \beta = (2,0,1)^{\mathrm{T}}$ 均正交且长度为3的向量.

解：符合条件的向量 $(a,b,c)^{\mathrm{T}}$ 满足 $\begin{cases} a+b+c=0,\\ 2a+c=0,\\ a^2+b^2+c^2=9.\end{cases}$

解得 $(a,b,c)^{\mathrm{T}} = (\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, -\sqrt{6})^{\mathrm{T}}$ 或$(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{6})^{\mathrm{T}}$.

解法二：设满足正交的向量为 x，则有 $\begin{pmatrix}\alpha^{\mathrm{T}}x\\ \beta^{\mathrm{T}}x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 0 & 1\end{pmatrix} x = \theta.$

解得基础解系为 $(-1,-1,2)^{\mathrm{T}}$，单位化为 $\frac{\sqrt{6}}{6}(-1,-1,2)^{\mathrm{T}}$，所求向量为 $(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{6})^{\mathrm{T}}$.

3. 3阶实对称矩阵 A 的三个特征值为 $-1,1,3$. 求二次型 $f(x,y,z) = (x,y,z)A^*(x,y,z)^{\mathrm{T}}$ 的正惯性指数和负惯性指数，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵.

解：$|A| = (-1)\times 1 \times 3 = -3 \neq 0$，故有 $A^* = |A|A^{-1} = -3A^{-1}$，则 A^* 的三个特征值为 $3,-3,-1$.
又 $(A^*)^{\mathrm{T}} = (-3A^{-1})^{\mathrm{T}} = -3(A^{\mathrm{T}})^{-1} = -3A^{-1} = A^*$，故 A^* 是实对称矩阵，为二次型 $f(x,y,z)$ 的矩阵，且有特征值 $3,-3,-1$，所以二次型 $f(x,y,z)$ 的正惯性指数为1，负惯性指数为2.

解法二：实对称 A 有特征值 $-1,1,3$，故有正交矩阵 Q 使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ = \mathrm{diag}(-1,1,3) = B$，即 $A = QBQ^{\mathrm{T}}$.
$|A| = (-1)\times 1\times 3 = -3 \neq 0$，故 $A^* = |A|A^{-1} = -3A^{-1} = -3(QB^{-1}Q^{\mathrm{T}}) = Q\mathrm{diag}(3,-3,-1)Q^{\mathrm{T}}$，
令 $(x,y,z)^{\mathrm{T}} = Q(u,v,w)^{\mathrm{T}}$，则有 $f(x,y,z) = (u,v,w)\mathrm{diag}(3,-3,-1)(u,v,w)^{\mathrm{T}} = 3u^2 - 3v^2 - w^2$，
即二次型正惯性指数为1，负惯性指数为2.

4. 已知 $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 1 & 1\\-1 & 4 & 1\end{pmatrix}$，求 $\mathbf{R}^3$ 的子空间 $V = \{\ Ax \mid x \in \mathbf{R}^3\ \}$ 的维数.

解：$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 1 & 1\\-1 & 4 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 3 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，得 $\mathrm{r}(A) = 2$. 故 $V = \{\ Ax \mid x \in \mathbf{R}^3\ \}$ 的维数$=A$的列秩$=\mathrm{r}(A) = 2$.

解法二：因为 $|A| = 0, \begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{vmatrix} = -3 \neq 0$，故 $\mathrm{r}(A) = 2$，故 $V = \{\ Ax \mid x \in \mathbf{R}^3\ \}$ 的维数$=A$的列秩$=\mathrm{r}(A) = 2$.

解法三：$A = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 1 & 1\\-1 & 4 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 3 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，故 α_1,α_2 可以作为列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个极大无关组，即 $V = \{\ Ax \mid x \in \mathbf{R}^3\ \} = \mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 的一组基，故 $\dim(V) = 2$.

解法四：令 $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 1 & 1\\-1 & 4 & 1\end{pmatrix} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则易知向量 α_2,α_2 线性无关，且有 $\alpha_3 = \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2$，
故 α_1,α_2 是 $V = \{\ Ax \mid x \in \mathbf{R}^3\ \} = \mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 的一组基，于是 $\dim(V) = 2$.

解法五：$|\lambda E - A| = \lambda(\lambda+1)(\lambda-4)$，$A$ 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 4$，对应特征向量 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关. 对 $\mathbf{R}^3$的任意向量 x 有 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3$，则 $Ax = k_2\lambda_2\xi_2 + k_3\lambda_3\xi_3 \in \mathrm{span}\{\xi_2,\xi_3\}$，
故 $V \subseteq \mathrm{span}\{\xi_2,\xi_3\}$，又对任意 $y = k_2\xi_2 + k_3\xi_3$ 有 $x = \frac{k_2}{\lambda_2}\xi_2 + \frac{k_3}{\lambda_3}\xi_3, Ax = y$，故 $V \supseteq \mathrm{span}\{\xi_2,\xi_3\}$.

故 $V=\mathrm{span}\{\xi_2,\xi_3\},\dim(V)=2.$

二、 (本题12分) 求向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4)\mathrm{T},\alpha_2=(0,3,1,2)^{\mathrm T},\alpha_3=(3,0,7,14)^{\mathrm T},\alpha_4=(1,-1,2,0)^{\mathrm T},\alpha_5=(2,1,5,6)^{\mathrm T}$的秩,找到它的一个极大线性无关组并将其余向量表达为这组极大线性无关组的线性组合.

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&0&1\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$

向量组的秩为3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是向量组的一个极大线性无关组. $\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2,\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4.$

三. (本题12分) 设 A,B,C 是三个 n 阶实方阵，满足 $\mathrm r(AB)=\mathrm r(B)$. 试证明 $\mathrm r(ABC)=\mathrm r(BC)$.

证：只要证明 $ABCx=\theta$ 与 $BCx=\theta$ 同解.

显然若 x 满足 $BCx=\theta$，则有 $ABCx=A\theta=\theta$，即 x 也满足 $ABCx=\theta$.

反之若 x 满足 $ABCx=\theta$，令 $\xi=Cx$，则 ξ 满足 $AB\xi=\theta$.

易知 $By=\theta$ 的解空间是 $ABy=\theta$ 的解空间的子集，

由 $\mathrm r(AB)=\mathrm r(B)$ 知 $ABy=\theta$ 与 $By=\theta$ 解空间维数相同，故 $By=\theta$ 与 $ABy=\theta$ 同解，

于是由 $AB\xi=\theta$ 可得 $B\xi=BCx=\theta$，即 x 满足 $BCx=\theta$.

故 $ABCx=\theta$ 与 $BCx=\theta$ 同解，从而有 $\mathrm r(ABC)=\mathrm r(BC)$.

证法二：我们有 $\mathrm r(ABC)\le\mathrm r(BC)$.

又 $\mathrm r(AB)+\mathrm r(BC)=\mathrm r\begin{pmatrix}AB&O\\O&BC\end{pmatrix}\le\mathrm r\begin{pmatrix}AB&O\\B&BC\end{pmatrix}=\mathrm r\left(\begin{pmatrix}E&-A\\O&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}AB&O\\B&BC\end{pmatrix}\right)=\mathrm r\begin{pmatrix}O&-ABC\\B&BC\end{pmatrix}$

$=\mathrm r\left(\begin{pmatrix}O&-ABC\\B&BC\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&-C\\O&E\end{pmatrix}\right)=\mathrm r\begin{pmatrix}O&-ABC\\B&O\end{pmatrix}=\mathrm r(B)+\mathrm r(-ABC)=\mathrm r(B)+\mathrm r(ABC).$

故有 $\mathrm r(ABC)\ge\mathrm r(AB)+\mathrm r(BC)-\mathrm r(B)=\mathrm r(BC)$，于是 $\mathrm r(ABC)=\mathrm r(BC)$.

证法三：先证明当 $B=\mathrm{diag}(E_r,O)$ 时有 $\mathrm r(ABC)=\mathrm r(BC)$.

令 $B=\mathrm{diag}(E_r,O),A=(A_1,A_2),A_1\in\mathbf R^{n\times r},A_2\in\mathbf R^{n\times(n-r)}$，

则由 $AB=(A_1,O)$ 知 $\mathrm r(AB)=\mathrm r(A_1)=\mathrm r(B)=r$，即 A_1 为列满秩，

于是存在可逆矩阵 P 使得 $PA_1=\begin{pmatrix}E_r\\O\end{pmatrix}$，从而有 $P(A_1,O)=\mathrm{diag}(E_r,O)$.

故 $\mathrm r(ABC)=\mathrm r((A_1,O)C)=\mathrm r(P(A_1,O)C)=\mathrm r(\mathrm{diag}(E_r,O)C)=\mathrm r(BC)$.

当 B 为任意 n 阶矩阵时，令 $\mathrm r(B)=r$，则有 $B=P\mathrm{diag}(E_r,O)Q$，其中 P,Q 为 n 阶可逆矩阵.

于是由上面的结论，有

$$\mathrm r(ABC)=\mathrm r((AP)\mathrm{diag}(E_r,O)(QC))=\mathrm r(\mathrm{diag}(E_r,O)QC)=\mathrm r(P\mathrm{diag}(E_r,O)QC)=\mathrm r(BC).$$

四. (本题12分) 令 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\d&a&b&c\\c&d&a&b\\b&c&d&a\end{pmatrix}$，其中 a,b,c,d 是两两不等的正实数.

(1) 计算 A^2,A^3,A^4;　　　　(2) 求 B 的所有特征值及其重数.

解：(1) $A^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},A^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},A^4=E.$

(2) $|\lambda E-B|$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-a&-b&-c&-d\\-d&\lambda-a&-b&-c\\-c&-d&\lambda-a&-b\\-b&-c&-d&\lambda-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-a-c&-b-d&\lambda-a-c&-b-d\\-b-d&\lambda-a-c&-b-d&\lambda-a-c\\-c&-d&\lambda-a&-b\\-b&-c&-d&\lambda-a\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-a-c&-b-d&0&0\\-b-d&\lambda-a-c&0&0\\-c&-d&\lambda-a+c&-b+d\\-b&-c&b-d&\lambda-a+c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-a-c&-b-d\\-b-d&\lambda-a-c\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\lambda-a+c&-b+d\\b-d&\lambda-a+c\end{vmatrix}$$

$=((\lambda-a-c)^2-(b+d)^2)((\lambda-a+c)^2+(b-d)^2)$

$=(\lambda-a-c-b-d)(\lambda-a-c+b+d)(\lambda-a+c-(b-d)i)(\lambda-a+c+(b-d)i)=0,$

故特征值 $\lambda=a+c+b+d,a+c-b-d,a-c+(b-d)i,a-c-(b-d)i$，均为一重特征值.

(2)的解法二：易知 $B=aE+bA+cA^2+dA^3$，

令 $f(x)=a+bx+cx^2+dx^3$，则 $B=f(A)$，于是 $\lambda(B)=f(\lambda(A))$.

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ -1 & 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^4-1=0$，可得 A 的特征值 $\lambda=1,-1,i,-i$.

于是 $\lambda(B)=f(\lambda(A))=a+b+c+d,a-b+c-d,a-c+(b-d)i,a-c-(b-d)i$，均为一重特征值.

五. (本题12分) 线性空间 $\mathbf{R}^4$ 中有两组基底 $\varepsilon_1=(1,1,1,1)^{\mathrm T},\varepsilon_2=(1,1,-1,-1)^{\mathrm T},\varepsilon_3=(1,-1,1,-1)^{\mathrm T}$, $\varepsilon_4=(1,-1,-1,1)^{\mathrm T}$ 和 $\eta_1=(1,1,0,1)^{\mathrm T},\eta_2=(2,1,3,1)^{\mathrm T},\eta_3=(1,1,0,0)^{\mathrm T},\eta_4=(0,1,-1,-1)^{\mathrm T}$.

(1) 求从基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 到基底 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的过渡矩阵 P;

(2) 求 $\zeta=(1,0,0,2)^{\mathrm T}$ 在基底 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标.

解：(1) $(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)P$，$P=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)^{-1}(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)$

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&1&0\\1&1&1&1\\0&3&0&-1\\1&1&0&-1\end{pmatrix}=\frac14\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1&0\\1&1&1&1\\0&3&0&-1\\1&1&0&-1\end{pmatrix}=\frac14\begin{pmatrix}3&7&2&-1\\1&-1&2&3\\-1&3&0&-1\\1&-1&0&-1\end{pmatrix}.$$

(2) 设所求坐标为 x，则有 $(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)x=\zeta$，于是有

$$x=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)^{-1}\zeta=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\1&1&1&1\\0&3&0&-1\\1&1&0&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0&1\\-0.5&0.5&0.5&0\\3&-2&-1&-1\\-1.5&1.5&0.5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1/2\\1\\-3/2\end{pmatrix}.$$

解法二：(1) $(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)P$，解矩阵方程

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4|\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&2&1&0\\1&1&-1&-1&1&1&1&1\\1&-1&1&-1&0&3&0&-1\\1&-1&-1&1&1&1&0&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&3/4&7/4&1/2&-1/4\\0&1&0&0&1/4&-1/4&1/2&3/4\\0&0&1&0&-1/4&3/4&0&-1/4\\0&0&0&1&1/4&-1/4&0&-1/4\end{array}\right),$$

解得 $P=\frac14\begin{pmatrix}3&7&2&-1\\1&-1&2&3\\-1&3&0&-1\\1&-1&0&-1\end{pmatrix}$.

(2) 设所求坐标为 x，则有 $(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)x=\zeta$，解方程组

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\zeta)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&0&1\\1&1&1&1&0\\0&3&0&-1&0\\1&1&0&-1&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&-1/2\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&-3/2\end{array}\right)，得\ x=\begin{pmatrix}1\\-1/2\\1\\-3/2\end{pmatrix}.$$

六. (本题12分) 令 A 为 n 阶实对称矩阵.

(1) 证明对于任意的正整数 k，必然存在实对称矩阵 B 使得 $B^{2k+1}=A$;

(2) 若存在实矩阵C满足$A=C^2$，是否可以说明A是半正定矩阵？若是,给出证明.若不是,给出例子.

证：(1) A 实对称，则有正交矩阵 Q 使得 $Q^{\mathrm T}AQ=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=D$，其中 D 是实对角矩阵.

令 $B=Q\mathrm{diag}(\sqrt[2k+1]{\lambda_1}\ \sqrt[2k+1]{\lambda_2},\cdots,\sqrt[2k+1]{\lambda_n})Q^{\mathrm T}$，易知 B 实对称.

且有 $B^{2k+1}=Q(\mathrm{diag}(\sqrt[2k+1]{\lambda_1}\ \sqrt[2k+1]{\lambda_2},\cdots,\sqrt[2k+1]{\lambda_n}))^{2k+1}Q^{\mathrm T}=QDQ^{\mathrm T}=Q(Q^{\mathrm T}AQ)Q^{\mathrm T}=A$.

(2) 不是. 取反对称矩阵 $C=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$，则 $A=C^2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ 是实对称矩阵，但不是半正定矩阵.

(2) 解法二：不是. 设实矩阵 $C=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},a,b,c,d\in\mathbf{R}$，则实对称矩阵 $A=C^2=\begin{pmatrix}a^2+bc&(a+d)b\\(a+d)c&d^2+bc\end{pmatrix}$.

故有 $(a+d)b=(a+d)c$，不妨取 $a+d=0$，则 $A=\begin{pmatrix}a^2+bc&0\\0&a^2+bc\end{pmatrix}$.

可取 a,b,c 的值使得 $a^2+bc<0$，比如取 $a=d=0,b=1,c=-1$，则 $A=-E$ 不是半正定矩阵.

七. (本题12分) 具有待定系数 $a>0$ 的二次型 $f(x,y,z)=2x^2+13y^2+13z^2+2ayz$ 经过正交变换

可变为标准形 $g(u,v,w)=8u^2+2v^2+18w^2$. 求 a 并找出一个这样的正交变换.

解：二次型 $f(x,y,z)$ 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&13&a\\0&a&13\end{pmatrix}$，

经过正交变换得到的标准形 $g(u,v,w)$ 的矩阵为 $B=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&2&0\\0&0&18\end{pmatrix}$.

故 A 正交相似于 B. 于是 $|A|=2(13^2-a^2)=|B|=8\times2\times18$，因为 $a>0$，故解得 $a=5$.

对于 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&13&5\\0&5&13\end{pmatrix}$，正交相似于 B，故 A 有特征值 $\lambda=8,2,18$.

对应于 $\lambda=8,2,18$ 的单位特征向量为 $\beta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\beta_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

令 $P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则 P 是正交矩阵，正交变换为 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$.