大学数学试卷　　2023.2.21（因疫情延考）

一、 简答题(每小题7分，共4题，计28分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&2&3&4\\3&3&3&4\\4&4&4&4\end{vmatrix}$ 的值.

2. 计算 $A=\begin{pmatrix}0&2&2&2&2\\2&0&2&2&2\\2&2&0&2&2\\2&2&2&0&2\\2&2&2&2&0\end{pmatrix}$ 的特征值及其重数.

3. 取正交矩阵 $A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$. 求最小的正整数 n 使得 $A^n=E_2$ 成立.

4. 求 $\alpha_1=(1,1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(5,3,0,-7,2)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(3,2,4,1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_4=(4,3,-2,-6,4)^{\mathrm{T}}$ 的一组极大线性无关组.

二、(本题12分) 令 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R^3}$ 为一组两两正交的单位列向量，令 $A=\beta\alpha^{\mathrm{T}}+\gamma\beta^{\mathrm{T}}+\alpha\gamma^{\mathrm{T}}$.
(1) 求 $A\alpha, A\beta, A\gamma$. 给出 A 的一个属于特征值 1 的特征向量. (6分)
(2) 求 $|A|$ 和 $\mathrm{tr}(A)$. (6分)

三、(本题12分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&a&0\\b&1&a\\0&b&1\end{pmatrix}$，$(a,b\geq 0)$.
(1) 当 $a=1,b=2$ 时，试求方阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵. （10分）
(2) 当 a,b 满足什么条件时 A 无法对角化？ (2分)

四、(本题12分) 用配方法将实二次型 $f(x,y,z)=x^2+5y^2-2xy+2xz+6yz$ 化成一个标准形，指出所用的线性变换并求 $f(x,y,z)$ 的正惯性指数和负惯性指数.

五、(本题12分) 令 $V=\{\ x:\ x=C_1+C_2\cos t+C_3\cos^2 t+C_4\cos^3 t,\ C_k\in\mathbf{R},\mathbf{t}\in[\mathbf{0},\mathbf{2}\pi]\ \}$ 为定义在 $[0,2\pi]$ 上的函数集.
(1) 证明 V 的全体元素对函数的加法和数乘运算构成一个 $\mathbf{R}$ 上的线性空间. (6分)
(2) 证明 $\{\ 1,\cos t,\cos^2 t,\cos^3 t\ \}$ 为 V 的一组基. (6分)

六、(本题24分) 设 B 为 n 阶实对称矩阵，E 为 n 阶单位矩阵.
(1) 计算 $\begin{pmatrix}E&-B\\O&E\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}E&B\\B&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&-B\\O&E\end{pmatrix}$. (6分)
(2) 设 A 为 m 阶实对称矩阵，C 为 m 阶可逆实矩阵. 证明 A 正定当且仅当 $C^{\mathrm{T}}AC$ 正定. (6分)
(3) 证明 $E-B^2$ 为对称矩阵. 证明 $E-B^2$ 正定当且仅当 B 的所有特征值的绝对值小于1. (6分)
(4) 利用以上结论证明实对称矩阵 $\begin{pmatrix}E&B\\B&E\end{pmatrix}$ 正定当且仅当 B 的所有特征值的绝对值小于1. (6分)

大学数学试卷 答案　　2023.2.21（因疫情延考）

一、 简答题(每小题7分，共4题，计28分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&2&3&4\\3&3&3&4\\4&4&4&4\end{vmatrix}$ 的值.

解：利用行列式的列变换，得：$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&2&3&4\\3&3&3&4\\4&4&4&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\2&0&1&2\\3&0&0&1\\4&0&0&0\end{vmatrix}=-4\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=-4.$

2. 计算 $A=\begin{pmatrix}0&2&2&2&2\\2&0&2&2&2\\2&2&0&2&2\\2&2&2&0&2\\2&2&2&2&0\end{pmatrix}$ 的特征值及其重数.

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-2&-2&-2&-2\\-2&\lambda&-2&-2&-2\\-2&-2&\lambda&-2&-2\\-2&-2&-2&\lambda&-2\\-2&-2&-2&-2&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-8&-2&-2&-2&-2\\\lambda-8&\lambda&-2&-2&-2\\\lambda-8&-2&\lambda&-2&-2\\\lambda-8&-2&-2&\lambda&-2\\\lambda-8&-2&-2&-2&\lambda\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-8&-2&-2&-2&-2\\0&\lambda+2&0&0&0\\0&0&\lambda+2&0&0\\0&0&0&\lambda+2&0\\0&0&0&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-8)(\lambda+2)^4.$$

因此 A 的特征值为 8(重数为1)和 -2(重数为4).

3. 取正交矩阵 $A=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt3}{2}&\dfrac12\\-\dfrac12&\dfrac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}$. 求最小的正整数 n 使得 $A^n=E_2$ 成立.

解：注意到 $A=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{6}&\sin\frac{\pi}{6}\\-\sin\frac{\pi}{6}&\cos\frac{\pi}{6}\end{pmatrix}, A^n=\begin{pmatrix}\cos\frac{n\pi}{6}&\sin\frac{n\pi}{6}\\-\sin\frac{n\pi}{6}&\cos\frac{n\pi}{6}\end{pmatrix}$. 因此 $n=12$.

解法二：$A^2=\begin{pmatrix}\frac12&\frac{\sqrt3}{2}\\-\frac{\sqrt3}{2}&\frac12\end{pmatrix}, A^3=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}, A^4=\begin{pmatrix}-\frac12&\frac{\sqrt3}{2}\\-\frac{\sqrt3}{2}&-\frac12\end{pmatrix}, A^5=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt3}{2}&\frac12\\-\frac12&-\frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}, A^6=-E$，

$A^{6+k}=-A^k\neq E, k=1,2,\cdots,5,\ \ A^{12}=E$，故知 $n=12$.

4. 求 $\alpha_1=(1,1,1,1,1)^{\mathrm T},\alpha_2=(5,3,0,-7,2)^{\mathrm T},\alpha_3=(3,2,4,1,0)^{\mathrm T},\alpha_4=(4,3,-2,-6,4)^{\mathrm T}$ 的一组极大线性无关组.

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\to\begin{pmatrix}1&5&3&4\\0&1&1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，可取 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为一组极大线性无关组.

二、(本题12分) 令 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R^3}$ 为一组两两正交的单位列向量，令 $A=\beta\alpha^{\mathrm T}+\gamma\beta^{\mathrm T}+\alpha\gamma^{\mathrm T}$.

(1) 求 $A\alpha,A\beta,A\gamma$. 给出 A 的一个属于特征值 1 的特征向量. (6分)

(2) 求 $|A|$ 和 $\mathrm{tr}(A)$. (6分)

解：(1) 因为 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R^3}$ 为两两正交的单位列向量，故有 $A\alpha=\beta(\alpha^{\mathrm T}\alpha)+\gamma(\beta^{\mathrm T}\alpha)+\alpha(\gamma^{\mathrm T}\alpha)=\beta$，$A\beta=\gamma, A\gamma=\alpha$，且 α,β,γ 线性无关，从而 $\alpha+\beta+\gamma\neq\theta$.

但是 $A(\alpha+\beta+\gamma)=\alpha+\beta+\gamma$. 从而 $\alpha+\beta+\gamma$ 是 A 的一个属于特征值 1 的特征向量.

(2) 我们有 $A(\alpha,\beta,\gamma)=(\beta,\gamma,\alpha)=(\alpha,\beta,\gamma)\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，从而 A 与 $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ 相似.

因此 $|A|=|B|=1,\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)=0$.

三、(**本题12分**) 设 $A=\begin{pmatrix}1&a&0\\b&1&a\\0&b&1\end{pmatrix}$，$(a,b\geq 0)$.

(1) 当 $a=1,b=2$ 时，试求方阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵. （10分）

(2) 当 a,b 满足什么条件时 A 无法对角化？ (2分)

解：(1) 当 $a=1,b=2$ 时，$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\0&2&1\end{pmatrix}$.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-2&\lambda-1&-1\\0&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-2&\lambda-1&-1\\-2(\lambda-1)&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+1).$$

故特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=-1$.

可以解得 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 所对应的无关特征向量为 $\alpha_1=(1,0,-2)^{\mathrm T},\alpha_2=(1,2,2)^{\mathrm T},\alpha_3=(1,-2,2)^{\mathrm T}$.

取 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&-2\\-2&2&2\end{pmatrix}$. 我们有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

(2) $|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda-1-\sqrt{2ab})(\lambda-1+\sqrt{2ab})$. 当 $ab\neq 0$ 时 A 有 3 个不同的特征值，A可对角化；当 $a=b=0$ 时，$A=E$可对角化；当 $ab=0$ 且 a,b 不全为 0 时，A有三重特征值1，但 A 的属于 1 的无关特征向量个数为 1，小于特征值重数 3，故 A 不可对角化.

综上所述，当 $ab=0$ 且 a,b 不全为 0 时 A 不可对角化.

四、(**本题12分**) 用配方法将实二次型 $f(x,y,z)=x^2+5y^2-2xy+2xz+6yz$ 化成一个标准形，指出所用的线性变换并求 $f(x,y,z)$ 的正惯性指数和负惯性指数.

解：我们有 $f(x,y,z)=(x-y+z)^2+4y^2-z^2+8yz=(x-y+z)^2+4(y+z)^2-5z^2$.

从而原二次型的一个标准形为 $g(u,v,w)=u^2+4v^2-5w^2$.

化为该标准形所用的线性变换为 $\begin{cases}u=x-y+z,\\v=y+z;\\w=z.\end{cases}$

从标准形可以看出该二次型正惯性指数为 2，负惯性指数为 1.

五、(**本题12分**) 令 $V=\{\ x:\ x=C_1+C_2\cos t+C_3\cos^2 t+C_4\cos^3 t,\ C_k\in\mathbf{R},t\in[0,2\pi]\ \}$ 为定义在 $[0,2\pi]$ 上的函数集.

(1) 证明 V 的全体元素对函数的加法和数乘运算构成一个 $\mathbf{R}$ 上的线性空间. (6分)

(2) 证明 $\{\ 1,\cos t,\cos^2 t,\cos^3 t\ \}$ 为 V 的一组基. (6分)

证明：(1) 任取 V 中的两个元素

$x=C_1+C_2\cos t+C_3\cos^2 t+C_4\cos^3 t\in V,y=D_1+D_2\cos t+D_3\cos^2 t+D_4\cos^3 t\in V$.

则 $x+y=(C_1+D_1)+(C_2+D_2)\cos t+(C_3+D_3)\cos^2 t+(C_4+D_4)\cos^3 t$，其中 $C_k+D_k\in\mathbf{R}$. 故 $x+y\in V$.

任取 $\lambda\in\mathbf{R},x=C_1+C_2\cos t+C_3\cos^2 t+C_4\cos^3 t\in V$，

则 $\lambda x=(\lambda C_1)+(\lambda C_2)\cos t+(\lambda C_3)\cos^2 t+(\lambda C_4)\cos^3 t$，其中 $\lambda C_k\in\mathbf{R}$. 故 $\lambda x\in V$.

我们得到 V 的元素对于加法和数乘满足封闭性.

容易验证：对任意的 $x,y,z\in V$，有 $x+y=y+x,(x+y)+z=x+(y+z)$，

V 中的零元素为 $x=0$，　　$x=C_1+C_2\cos t+C_3\cos^2 t+C_4\cos^3 t$ 的负元素为 $-x=-C_1-C_2\cos t-C_3\cos^2 t-C_4\cos^3 t$.

对任意的 $\lambda,\mu\in\mathbf{R},x,y\in V$，有 $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x,\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y,\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x,1x=x$.

故 V 的全体元素对函数的加法和数乘运算构成一个 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

(2) 显然 $1,\cos t,\cos^2 t,\cos^3 t$ 可以表示 V 的所有元素，下面证明线性无关.

取 4 个实数 C_1,C_2,C_3,C_4 使得对于任意的 $t\in[0,2\pi]$，有 $C_1+C_2\cos t+C_3\cos^2 t+C_4\cos^3 t=0$.

取 $t_1=0,t_2=\pi/4,t_3=\pi/2,t_4=\pi$. 我们有
$$\begin{cases}C_1+C_2\cos t_1+C_3\cos^2 t_1+C_4\cos^3 t_1=0,\\C_1+C_2\cos t_2+C_3\cos^2 t_2+C_4\cos^3 t_2=0,\\C_1+C_2\cos t_3+C_3\cos^2 t_3+C_4\cos^3 t_3=0,\\C_1+C_2\cos t_4+C_3\cos^2 t_4+C_4\cos^3 t_4=0.\end{cases}\qquad(*)$$

由范德蒙行列式可知 $\begin{vmatrix} 1 & \cos t_1 & \cos^2 t_1 & \cos^3 t_1 \\ 1 & \cos t_2 & \cos^2 t_2 & \cos^3 t_2 \\ 1 & \cos t_3 & \cos^2 t_3 & \cos^3 t_3 \\ 1 & \cos t_4 & \cos^2 t_4 & \cos^3 t_4 \end{vmatrix} \neq 0$，因此方程组(*) 只有零解.

即$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$，从而 $1, \cos t, \cos^2 t, \cos^3 t$ 线性无关.

六、(**本题24分**) 设 B 为 n 阶实对称矩阵，E 为 n 阶单位矩阵.

(1) 计算 $\begin{pmatrix} E & -B \\ O & E \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & B \\ B & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -B \\ O & E \end{pmatrix}$. (6分)

(2) 设 A 为 m 阶实对称矩阵，C 为 m 阶可逆实矩阵. 证明 A 正定当且仅当 $C^{\mathrm{T}}AC$ 正定. (6分)

(3) 证明 $E - B^2$ 为对称矩阵. 证明 $E - B^2$ 正定当且仅当 B 的所有特征值的绝对值小于1. (6分)

(4) 利用以上结论证明实对称矩阵 $\begin{pmatrix} E & B \\ B & E \end{pmatrix}$ 正定当且仅当 B 的所有特征值的绝对值小于1. (6分)

解：(1) $\begin{pmatrix} E & -B \\ O & E \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & B \\ B & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -B \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E - B^2 \end{pmatrix}$.

(2) 因为 C 可逆，故 A 与 $C^{\mathrm{T}}AC$ 合同，有合同关系的对称矩阵有相同的正定性，因为它们都合同于E.

(3) $(E - B^2)^{\mathrm{T}} = E^{\mathrm{T}} - (B^2)^{\mathrm{T}} = E - B^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} = E - B^2$. 所以 $E - B^2$ 是对称矩阵.

因为 $\lambda(E - B^2) = 1 - \lambda(B^2) = 1 - \lambda(B)^2$，由 $E - B^2, B$ 的对称性，有

$E - B^2$正定$\Leftrightarrow$所有的$\lambda(E - B^2) > 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda(B)^2 > 0 \Leftrightarrow |\lambda(B)| < 1 \Leftrightarrow B$所有特征值的绝对值小于1.

(3) 的证法二：$(E - B^2)^{\mathrm{T}} = E^{\mathrm{T}} - (B^2)^{\mathrm{T}} = E - B^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} = E - B^2$. 所以 $E - B^2$ 是对称矩阵.

令 P 为正交矩阵使得 $P^{\mathrm{T}}BP = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$. 我们有 $P^{\mathrm{T}}(E - B^2)P = \mathrm{diag}\{1 - \lambda_1, \cdots, 1 - \lambda_n\}$.

因此，$E - B^2$ 正定$\Leftrightarrow E - B^2$的特征值均为正实数$\Leftrightarrow$对任意的 $i = 1, \cdots, n$, 有$1 - \lambda_i^2 > 0$

$\Leftrightarrow$对任意的 $i = 1, \cdots, n$,有 $|\lambda_i| < 1 \Leftrightarrow$ B的所有特征值的绝对值小于 1.

(4) 由(1)和(2)，我们得到 $\begin{pmatrix} E & B \\ B & E \end{pmatrix}$ 正定当且仅当 $\begin{pmatrix} E & O \\ O & E - B^2 \end{pmatrix}$ 正定.

分块矩阵 $\begin{pmatrix} E & O \\ O & E - B^2 \end{pmatrix}$ 正定当且仅当其正惯性指数为 $2n$，当且仅当 $E - B^2$ 正惯性指数为 n，当且仅当 $E - B^2$ 正定. 由(3)，我们得到 $E - B^2$ 正定当且仅当 B 的所有特征值的绝对值小于 1.

综上所述，$\begin{pmatrix} E & B \\ B & E \end{pmatrix}$ 正定当且仅当 B 的所有特征值的绝对值小于1.