

Problem Set 3: 谓词逻辑引论

提交截止时间：3 月 18 日 10:00

Problem 1

令 $C(x)$ 为语句“ x 有一只猫作为宠物”， $D(x)$ 为语句“ x 有一只狗作为宠物”， $F(x)$ 为语句“ x 有一只雪貂作为宠物”。用 $C(x)$ 、 $D(x)$ 、 $F(x)$ 、量词和逻辑联结词表达下列语句。令论域为你班上的所有学生。

- a) 班上的一个学生有一只猫和一只狗和一只雪貂。
- b) 班上的所有学生有一只猫或一只狗或一只雪貂。
- c) 班上的一些学生有一只猫和一只雪貂，但没有狗。
- d) 班上没有学生同时有一只猫和一只狗和一只雪貂。
- e) 对猫、狗和雪貂这三种动物的任意一种，班上都有学生将其作为宠物。

Problem 2

如果每个变量的论域都为实数集合，判断下列各语句的真值。

- a) $\exists x(x^2 = 2)$
- b) $\exists x(x^2 = -1)$
- c) $\forall x(x^2 + 2 \geq 1)$
- d) $\forall x(x^2 \neq x)$

Problem 3

求下列命题的真值（其中 $\exists!$ 表示量词：存在且唯一的）。

- a) $\exists !xP(x) \rightarrow \exists xP(x)$
- b) $\forall xP(x) \rightarrow \exists !xP(x)$
- c) $\exists !x\neg P(x) \rightarrow \neg \forall xP(x)$

Problem 4

离散数学班上有 1 个数学专业的新生, 12 个数学专业的二年级学生, 15 个计算机专业二年级学生, 2 个数学专业的三年级学生, 2 个计算机专业的三年级学生, 和 1 个计算机专业的四年级学生。用量词表达下列语句, 再给出其真值。

- a) 班上有一个三年级学生。
- b) 班上每个学生都是计算机专业的。
- c) 班上有个学生既不是数学专业的, 也不是三年级学生。
- d) 班上每个学生要么是二年级学生, 要么是计算机专业的。
- e) 存在这样一个专业使得该班级有这个专业每一个年级的学生。

Problem 5

使用谓词、量词、逻辑联结词和数学运算符表达语句 “有一个正整数不是三个整数的平方和”。

Problem 6

找出变元 x 、 y 和 z 的一个公共论域, 使语句 $\forall x \forall y ((x \neq y) \rightarrow \forall z ((z = x) \vee (z = y)))$ 为真, 再找出另外一个论域使其为假。

Problem 7

证明两个语句 $\neg \exists x \forall y P(x, y)$ 和 $\forall x \exists y \neg P(x, y)$ 是逻辑等价的, 这里两个 $P(x, y)$ 第一个变元的量词具有相同的论域, 两个 $P(x, y)$ 第二个变元的量词也具有相同的论域。

Problem 8

用推理规则证明: 如果 $\forall x (P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge S(x)))$ 和 $\forall x (P(x) \wedge R(x))$ 为真, 则 $\forall x (R(x) \wedge S(x))$ 为真。

Problem 9

用推理规则证明: 如果 $\forall x (P(x) \vee Q(x))$ 和 $\forall x (\neg Q(x) \vee S(x))$, $\forall x (R(x) \rightarrow \neg S(x))$ 和 $\exists x \neg P(x)$ 为真, 则 $\exists x \neg R(x)$ 为真。