

Problem Set 5: 集合论导引

提交截止时间：3 月 25 日 10:00

Problem 1

设 a, b, c 各不相同，判断下列等式中哪个等式为真。

a. $\emptyset \in \{\emptyset\}$

1 | 答：T

b. $\{\{a, b\}, c, \emptyset\} = \{\{a, b\}, c\}$

1 | 答：⊥

c. $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$

1 | 答：⊥

d. $\{\{a\}, \{b\}\} = \{\{a, b\}\}$

1 | 答：⊥

e. $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

1 | 答：T

f. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, a, b\} = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, a, b\}$

1 | 答：⊥

Problem 2

判断下列各集合是否为某集合的幂集。

a. \emptyset

1 | 答：T, \emptyset 的幂集

b. $\{\emptyset, \{a\}\}$

1 | 答：T, $\{a\}$ 的幂集

c. $\{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset, a\}\}$

1 | 答：⊥, $\{\emptyset, a\}$ 的幂集元素个数为4个，不符合

d. $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

1 | 答: $\top, \{a, b\}$

Problem 3

给出以下各个谓词的真值集合，这里的域是整数集合。

a. $P(x) : x^2 < 3$

1 | 答: $\{-1, 0, 1\}$

b. $Q(x) : x^2 > x$

1 | 答: $\{x \mid x < 0 \vee x > 1\}$

c. $R(x) : x^2 = 3$

1 | 答: \emptyset

Problem 4

如果集合 A、B、C 满足下述条件，你能判断 $A = B$ 吗，请说明理由或者给出例子？

a. $A \cup C = B \cup C$

1 | 答: 令 $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{1, 2\}$
2 | 上式成立, 但 $A \neq B$

b. $A \cap C = B \cap C$

1 | 答: 令 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{2\}$
2 | 上式成立, 但 $A \neq B$

c. $A \cup C = B \cup C$ 并且 $A \cap C = B \cap C$

1 | 答:
2 | 假设 $A \neq B$
3 | 不妨设 $Z: \exists x, x \in A \wedge x \notin B$
4 |
5 | 1. 若 $Y: x \notin C$
6 | 则 $P: x \in A \cup C$
7 | 则 $Q: x \in B \cup C$
8 | $Y \wedge P \wedge Q \rightarrow M: x \in B$
9 | M 与 假设 Z 矛盾, Z 不成立
10 |
11 | 2. 若 $Y: x \in C$
12 | 则 $P: x \in B \cap C$
13 | $Y \wedge P \rightarrow Q: x \in B$
14 | Q 与 Z 矛盾, Z 不成立
15 |
16 | 综上 $A = B$

Problem 5

令 A 和 B 为全集 U 的子集。证明 $A \subseteq B$ 当且仅当 $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ ，这里 \overline{A} 指 $U - A$ 。

$$\forall x, x \in \overline{B}$$

$$\text{因为 } A \subseteq B \rightarrow x \notin A \wedge x \in \overline{A}$$

由于 x 是 B 的补集中的任意元素，且 $x \in \overline{A}$

$$\text{所以 } \overline{B} \subseteq \overline{A}$$

Problem 6

证明如果集合 A ，集合 B 是全集 U 的子集，则

$$a. A \oplus A = \emptyset$$

$$A \oplus A$$

$$= A \cup A - A \cap A$$

$$= A - A$$

$$= \emptyset$$

$$b. A \oplus U = \overline{A}$$

$$A \oplus U$$

$$= A \cup U - A \cap U$$

$$= U - A$$

$$= \overline{A}$$

$$c. A \oplus B = B \oplus A$$

左式：

$$= A \cup B - A \cap B$$

$$= B \cup A - B \cap A$$

$$= B \oplus A$$

$$d. (A \oplus B) \oplus B = A$$

$$= A \oplus (B \oplus B)$$

$$= A \oplus \emptyset$$

$$= A$$

Problem 7

令 $A_i = \{\dots, -2, -1, 0, 1, \dots, i\}$ ，求

$$a. \bigcup_{i=1}^n A_i$$

由题意得到 $A_i \cup A_{(i+1)} = A_{(i+1)}$ 所以原式得 A_n

$$b. \bigcap_{i=1}^n A_i$$

由题意得到 $A_i \cap A_{(i+1)} = A_i$ 所以原式得 A_i

Problem 8

集合 A 的后继是集合 $A \cup \{A\}$ 。求下列集合的后继。

$$a. \{1, 2, 3\}$$

$$1 \quad \text{答: } \{1, 2, 3\} \cup \{\{1, 2, 3\}\}$$

$$2 \quad \{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$$

b. \emptyset

- 1 答: $\emptyset \cup \{\emptyset\}$
- 2 $\{\emptyset\}$

c. $\{\emptyset\}$

- 1 答: $\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\}$
- 2 $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

d. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

- 1 答: $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
- 2 $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$