第二次作业

3.请用完备归纳法证明定理T2 ¬ T5

定理T2：结合律

```
 (A ＋ B) ＋ C = A ＋ (B ＋ C)

**基础情况:** 对于 n = 2，结合律成立

**归纳假设:** 假设结合律对于 n = k 成立

**归纳步骤:** 考虑 n = k+1 的情况。我们可以将 (k+1) 个变量分为两组，一组有 m 个变量，另一组有 k+1-m 个变量，其中 m 可以取 1, 2, ..., k。由归纳假设，我们有:

(A1 ＋ A2 ＋ ... ＋ Am) ＋ (Am+1 ＋ ... ＋ Ak+1) = (A1 ＋ ... ＋ Am) ＋ [(Am+1 ＋ ... ＋ Ak) ＋ Ak+1]

因此，结合律对于所有的正整数 n 成立。```

```

定理T3：分配律

A ＋ (B + C) = (A ＋ B) + (A ＋ C)

1. 当 B = 0 且 C = 0 时, A ＋ (B + C) = A ＋ (0 + 0) = A ＋ 0 = 0，同时，(A ＋ B) + (A ＋ C) = (A ＋ 0) + (A ＋ 0) = 0 + 0 = 0。因此，对于 B = 0 且 C = 0 的情况，分配律成立。
2. 当 B = 0 且 C = 1 时, A ＋ (B + C) = A ＋ (0 + 1) = A ＋ 1 = A，同时，(A ＋ B) + (A ＋ C) = (A ＋ 0) + (A ＋ 1) = 0 + A = A。因此，对于 B = 0 且 C = 1 的情况，分配律成立。
3. 同理可证 B = 1 且 C = 0 以及 B = 1 且 C = 1 的情况。

定理T4：德摩根定理（De Morgan's Theorem）

```
 ¬(A ＋ B) = ¬A + ¬B
对于 ¬(A ＋ B)，当且仅当 A ＋ B = 0 时，其为真，即 A = 0 或 B = 0。因此，¬(A ＋ B) = ¬A + ¬B
```

定理T5：互补律

```
 A + ¬A = 1

当 A = 0 时，A + ¬A = 0 + 1 = 1
当 A = 1 时，A + ¬A = 1 + 0 = 1
。因此，无论 A 取何值，都有 A + ¬A = 1。
```

5. 有人根据德摩根定理认为逻辑表达式`X ＋ Y · Z`的反是`¬X · ¬y ＋ ¬Z`。但当`XYZ = 110`时，这两个函数的运算结果都是1。对于同样的输入组合，这两个函数的结果本应相反，错在哪里？

```
`·`运算的优先级高于`＋`
因此，表达式 ¬(X ＋ Y · Z) ≡ ¬X · ¬(Y · Z) ≡ ¬X · (¬Y ＋ ¬Z)
根据分配律，结果应该为
¬X · ¬Y ＋ ¬X · ¬Z
```

7. 请写出下面各个逻辑函数的真值表

- (5) F = ¬(W · X) · ¬(¬Y ＋ ¬Z)

W	X	Y	Z	EXPR
T	T	T	T	⊥
T	T	T	⊥	⊥
T	T	⊥	T	⊥
T	T	⊥	⊥	⊥
T	⊥	T	T	T
T	⊥	T	⊥	⊥
T	⊥	⊥	T	⊥
T	⊥	⊥	⊥	⊥
⊥	T	T	T	T
⊥	T	T	⊥	⊥
⊥	T	⊥	T	⊥
⊥	T	⊥	⊥	⊥
⊥	⊥	T	T	T
⊥	⊥	T	⊥	⊥
⊥	⊥	⊥	T	⊥
⊥	⊥	⊥	⊥	⊥

- (6) F = A · B ＋ ¬B · C ＋ ¬C · D ＋ ¬D · A

A	B	C	D	EXPR
T	T	T	T	T
T	T	T	⊥	T

A	B	C	D	EXPR
⊤	⊤	⊥	⊤	⊤
⊤	⊤	⊥	⊥	⊤
⊤	⊥	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤	⊥	⊤
⊤	⊥	⊥	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤	⊤	⊥
⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥	⊤	⊤
⊥	⊤	⊥	⊥	⊥
⊥	⊥	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤	⊥	⊤
⊥	⊥	⊥	⊤	⊤
⊥	⊥	⊥	⊥	⊥

8. 请写出下面各个逻辑函数的标准与-或表达式和标准或-与表达式

- (1) F (A, B, C) = ∑ m (2, 4, 6, 7)

```
F(A, B, C)
≡  (¬A · B · ¬C) ＋ (A · ¬B · ¬C) ＋ (A · B · ¬C ) ＋ (¬A · ¬B · ¬C)
≡  ¬((A ＋ ¬B ＋ C) · (¬A ＋ B ＋ C) · (¬A ＋ ¬B ＋ C) (A ＋ B ＋ C))
```

- (6) F = A ＋ ¬A · B ＋ B · C

```
F(A, B, C)
≡ A · (B ＋ ¬B) · (C ＋¬C) ＋ ¬A · B · (C ＋ ¬C) ＋ (A ＋¬A) · B · C
≡ ¬((¬A ＋ (¬B · B) ＋ (¬C · C)) · (A ＋ ¬B ＋ (¬C · C)) · ((¬A · A) ＋ B ＋ C))
```

12. 能够实现任何逻辑函数的逻辑门类型的集合成为逻辑门的完全集。

例如，2输入与门、2输入或门以及反相器构成一个逻辑门完全集。因为任何逻辑函数都能表示为输入信号（以原变量或反变量形式表示）构成的与-或表达式，而且任何超过两个输入端的与（或）门到能通过2输入端与门（2输入端或门）级联得到。请问2输入与非门能构成逻辑门的完全集吗？请证明你的答案。2输入端异或门呢？

```
可以。 与非门
A · B ≡ (A NAND B) NAND (A NAND B)
A + B ≡ (¬A NAND ¬B) NAND (¬A NAND ¬B)

不可以。异或门
A + B ≡  (A XOR A) XOR (B XOR B) XOR T
A ·  B ≡

```

13. 利用卡诺图将下列标准表达式化简为最简与-或表达式，并把结果转换为与非-与非表达式。

- (2) F(W, X, Y, Z) ≡ ∑ m (1, 4, 5, 6, 7, 9, 14, 15)

	00	**01**	**11**	**10**
00	1	0	0	1
01	0	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	0	1

```
化简结果 F(W, X, Y, Z)
≡  (¬W + ¬Z) NAND (W + ¬Z) NAND (W  + Z) NAND (X + ¬Y) NAND (X + Y)
```

- (5) F(A, B, C, D) ≡ ∏ M (4, 5, 6, 13, 15)

	00	**01**	**11**	**10**
00	0	0	0	0
01	1	1	0	0
11	0	1	1	0
10	0	0	0	0

```
化简结果 F(A, B, C, D)
≡ (¬A · B · ¬C · D) + (A · ¬B · ¬C · ¬D)
≡ ¬(¬(¬A · B · ¬C · D) · ¬(A · ¬B · ¬C · ¬D))
≡ ¬(¬A · B · ¬C · D) NAND ¬(A · ¬B · ¬C · ¬D)
```