

Problem Set 25B: 欧拉图与哈密顿图 (哈密顿图部分)

提交截止时间: 6 月 10 日 10:00

Problem 1

证明: 奇数个顶点的二部图没有哈密顿回路。

Problem 2

若简单图 G 满足 $|V(G)| \geq 3$ 且 $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|-1}{2}$, 证明或反驳:

a) G 一定存在哈密顿回路。

b) G 一定存在哈密顿通路。

Problem 3

所谓“子图同构”(Subgraph isomorphism) 问题是指: 对于任意的图 $G=(V,E)$ 和图 $H=(V',E')$, 判定是否存在 G 的一个子图 $G_0=(V_0,E_0)$: $V_0 \subseteq V$, $E_0 \subseteq E \cap (V_0 \times V_0)$ 使得 G_0 与 H 同构 (记作 $G_0 \cong H$)。试说明, “判断一个图是否是哈密顿图”这一问题可以作为上述子图同构问题的一个特例。

Problem 4

对哪些 m 和 n 值来说, 完全二部图 $K_{m,n}$ 具有哈密顿回路?

Problem 5

证明或反驳: 若 G 不是 2- 连通图, 则 G 不是哈密顿图。

Problem 6

证明或反驳: 如果二部图 G 是 H - 图, 那么必有偶数个顶点。

Problem 7

考虑在 11 天安排 11 门课程的考试（每天考 1 门课），使得同一位老师所任的任意两门课程考试不排在接连的两天中，试证明如果没有老师担任多于 6 门课程，则符合上述要求的考试安排总是可能的。

Problem 8

简单图 G 满足 $|G| > 2$ ，令 m 为 G 的边数， n 为 G 的顶点数。试证明：如果 $m > \binom{n-1}{2} + 1$ ，则 G 一定存在哈密顿回路。（提示：可使用数学归纳法证明；组合数 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ，可对比 Problem Set 24 Problem 9）