微积分 II（第一层次）期末试卷 (2012.6.20)

一、计算下列各题(6分 × 10=60分)

1. 计算曲面积分 $\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S$，其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\ (0<h<a)$ 截出的顶部.

2. 计算曲面积分 $\iint\limits_S (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(y-z)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 S 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0, z=3$ 所围成的空间闭区域 V 的整个边界曲面的外侧.

3. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$ 的和.

4. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ 的收敛半径和收敛域.

5. 求微分方程 $y''+y=x^2$ 的通解.

6. 求微分方程 $(x-y)\,\mathrm{d}x+(x+y)\,\mathrm{d}y=0$ 的通解.

7. 求函数 $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 在 $x=0$ 处的泰勒展式.

8. 判别广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^p}\,\mathrm{d}x\ (p>0)$ 的敛散性.

9. 计算曲线积分 $\displaystyle\int_C\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$，其中 C 为圆周 $x^2+y^2=ay\ (a>0)$.

10. 计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 为锥面 $z=\sqrt{4x^2+4y^2}$ 与 $z=2$ 所围立体.

二、(10分) 讨论实数 p 为何值时，级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^p$ 收敛，实数 p 为何值时，级数发散.

三、(10分) 设函数 $f(x), g(x)$ 连续可微，$f(0)=g(0)=0$，使得曲线积分

$$\int_{(0,1,0)}^{(1,0,1)}\Big((x^2-f(x))y+\frac{1}{2}g(x)y^2\Big)\,\mathrm{d}x+\big(f(x)y-g(x)\big)\,\mathrm{d}y+\,\mathrm{d}z$$

与路径无关，求出 $f(x), g(x)$，并求出该曲线积分的值.

四、(10分) 1. 设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，它在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=\pi^2-x^2$, $(-\pi\le x\le\pi)$，求函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅立叶级数展开式；

2. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ 的和.

3. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

五、(本题非商学院的学生必做题，10分) 已知曲线积分 $\displaystyle\int_L\frac{1}{f(x)+8y^2}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)$ 恒等于常数 A，其中函数 $f(x)$ 连续可导，$f(1)=1$，L 为任意包围原点 $O(0,0)$ 的简单闭曲线，取正向，

(1) 设 G 为不包含原点的单连通区域，证明：G 内的曲线积分 $\displaystyle\int_C\frac{1}{f(x)+8y^2}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)$ 与路径无关，其中 C 为完全位于 G 内的曲线；

(2) 求函数 $f(x)$ 与常数 A.

六、(本题商学院学生做，非商学院学生做了不给分，10分) 利用斯托克斯公式计算曲线积分

$$\oint_C(y-z)\,\mathrm{d}x+(z-x)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}z,$$

其中 C 是椭圆 $x^2+y^2=a^2, \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1(a>0,h>0)$，从 x 轴的正向看去，此椭圆取逆时针方向.

微积分II（第一层次）期末试卷 (2013.6.26)

一、计算下列各题(5分 × 10=50分)

1. 计算曲面积分 $\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\ (0<h<a)$ 截出的顶部.

2. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$ 的和.

3. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ 的收敛半径, 收敛区间和收敛域.

4. 求微分方程 $y''-2y'+5y=0$ 的通解.

5. 解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^2}{xy+x^2}$.

6. 判别广义积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性, 若收敛，计算其值.

7. 计算曲面积分 $\iint\limits_S xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在 $x\ge 0, y\ge 0$ 的部分.

8. 计算曲线积分 $\int_l \dfrac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中 l 为椭圆周 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$, 积分按逆时针方向进行.

9. 求曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面的方程.

10. 计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是区域 $x^2+y^2+z^2\le 4z, \sqrt{x^2+y^2}\le z$.

二、(8分) 设区域 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le t, x^2+y^2\le t^2\}\ (t>0)$, 函数 $f(u)$ 可导并且 $f(0)=0, f'(0)=2, F(t)=\iiint\limits_\Omega f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^5}$.

三、(10分) 设函数 $f(x)$ 二阶连续可微，满足 $\int_0^x (x+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t=x^2+e^x-f(x)$, 求函数 $f(x)$.

四、(12分) 计算曲线积分 $\int_l (x^2-yz)\,\mathrm{d}x+(y^2-xz)\,\mathrm{d}y+(z^2-xy)\,\mathrm{d}z$, 其中积分曲线 l 是从 $A(a,0,0)$ 到 $B(a,0,h)$ 的螺线 $x=a\cos\varphi,\ y=a\sin\varphi,\ z=\dfrac{h}{2\pi}\varphi$.

五、(12分) 1. 设函数 $f(x)$ 是周期为2的周期函数，且 $f(x)=2+|x|, (-1\le x\le 1)$, 求函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的傅立叶展开式;

2. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ 的和. 3. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和.

六、(8分) 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的连续可微函数，使得广义积分 $\int_1^{+\infty}|f'(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛，证明：如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f(n)$ 收敛，则广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

微积分II（第一层次）期末试卷 (2014.6.23)

一、简答题(6分 × 8=48分)

1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n$ 的收敛域.

2. 求积分 $I = \int_C \sqrt{y}\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为抛物线 $y = x^2$ 从点 $(0,0)$ 到 $(2,4)$ 的一段弧.

3. 求微分方程 $yy'' + (y')^2 = 0$ 的通积分.

4. 已知 $f(x)$ 为 $[0,2]$ 上的连续函数，证明 $\int_0^1 \int_0^1 f(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 u[f(u) + f(2-u)]\,\mathrm{d}u$.

5. 求函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 关于 x 的幂级数展式.

6. 判别广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ $(p \in \mathbb{R})$ 的敛散性.

7. 求函数项级数 $I(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n$ 的和函数.

8. 计算曲面积分 $I = \iint_S x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2 = R^2 (R > 0)$ 外侧在 $z \geq 0$ 的部分.

二、(10分)　求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot \frac{1}{2^n n!}$ 的和.

三、(10分)　计算曲线积分 $\int_\Gamma 2y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + e^z\,\mathrm{d}z$, 其中积分曲线 Γ 为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1, \\ x+y = 1 \end{cases}$ 从 y 轴正向看去是顺时针方向.

四、(10分)　计算曲面积分 $\iint_S (xy + yz + zx)\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 所截得的有限部分.

五、(10分)　设 $f(x) = |x|$,

1. 求 $f(x)$ 在 $[0,\pi)$ 上的正弦级数展式的前两项系数 b_1 和 b_2；

2. 证明：对于二元函数 $F(a,b) = \int_0^{\pi} \Big[f(x) - a\sin x - b\sin(2x)\Big]^2 \mathrm{d}x$, (b_1, b_2) 为其在 $\mathbb{R}^2$ 上的最小值点.

商学院同学任选下列两题中一题，其他院系同学必须选做第七题.

六、(12分)　(1) 求方程 $y'' - 5y' + 6y = e^x$ 的通解.

(2) 设 $y = f(x)$ 为 $y''' - 5y'' + 6y' = e^x$ 的解，证明：$y = f(x)$ 为 $y'' - 5y' + 6y = e^x$ 的解的充要条件为 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

七、(12分)　(1) 求方程 $y'' - 5y' + 6y = f(x)$ 的通解, 其中 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

(2) 若 $f(x) \geq 0$, 证明上述方程满足条件 $y(0) = y'(0) = 0$ 的解必非负.