第四次作业

Problem 3

证明所有正整数 n = 4m + 3（m 为自然数）都不能写成两个整数的平方和。

```
假设存在某个正整数n, 两个自然数a, b，使得 n = a^2 + b^2。
若 a 和 b 均为偶数，那么 a^2 和 b^2 都可以被 4 整除，
而 n = a^2 + b^2 也可以被 4 整除。然而，4m + 3 形式的数除以 4 的余数为 3，所以无法写成两个偶数的平方和。

若 a 和 b 中至少有一个为奇数，那么 a^2 和 b^2 将有一个为奇数，一个为偶数，
所以n = a^2 + b^2 将为奇数。然而，对于任意正整数 x，x^2 模 4 的余数只能是 0 或 1。当 x 为偶数时，x^2 模 4 的余数为 0；当 x 为奇数时，x^2 模 4 的余数为 1。因此，两个平方数之和模 4 的余数只能是 0、1 或 2，不可能是 3。
```

Problem 4

证明方程 x ^ 2 + y ^ 2 = z ^ 2 有无穷多个正整数解 x,y,z。

```
显然一组解为x = 3, y = 4, z = 5
∀n ∈ N, x ^ 2 * n ^ 2 + y ^ 2 * n ^ 2 = z ^ 2 * n ^ 2依旧成立,
所以x = n * x, y = n * y, z = n * z依然为一组解,
因为n具有任意性，所以该方程有无数个解。
```

Problem 5

两个实数 x 和 y 的平方均值是 (1/2 * (x ^ 2 + y ^ 2)) ^ (1/2)通过计算不同正实数对的算术均值和平方均值，构造一个关于这两种均值的相对大小的猜想并证明之。

```
设 a = (x + y) / 2，b = (1/2 * (x^2 + y^2))^(1/2)。

假设存在某对正实数 x 和 y，使得 a < b
     (x + y) / 2 <= (1/2 * (x^2 + y^2))^(1/2)
   (x + y)^2 / 4 <= (x^2 + y^2) / 2
 x^2 + 2xy + y^2 <= 2x^2 + 2y^2
               0 <= x^2 - 2xy + y^2
       (x - y)^2 >= 0

显然成立
```

Problem 6

在黑板上写下数字 1，2，3 ... 2n, 其中 n 是奇数。从中任意挑出两个数 j 和 k，在黑板上写下 |j − k| 并擦掉 j 和 k。继续这个过程，直到黑板上只剩下一个整数为止。证明这个整数必为奇数。

```
当 n = 1 时结论成立。

假设对于∀奇数 n 该结论依旧成立

接下来考虑 n = k + 2，其中 k 是奇数。我们将黑板上的数字分成两组：1 到 2k 和 2k + 1 和 2k + 2。由于 k 是奇数，所以 2k + 1 和 2k + 2 之间的差值为奇数。在前一组中，根据归纳假设，最终剩下的数字是奇数。因此，我们只需要证明无论我们选择哪两个数字，最终结果都将是奇数。

无论选择的两个数字属于哪一组，它们的差值都是奇数，因为其中至少有一个数字是奇数。将其中一个数字擦掉，剩下的数字是奇数。
综上所述，该结论成立
```

Problem 7

用归谬法证明不存在有理数 r 使得 $r^3 + r + 1 = 0$。

```
假设存在一个有理数r = p/q(p、q均为素数)， 使得方程成立
p^3 + pq^2 + q^3 = 0
这个方程是一个整系数方程，因此 p 和 q 的立方相加后得到的结果应该是一个整数。然而，方程左边的结果不可能为 0，因为 p^3 和 q^3 都是整数，而且 p ≠ 0，q ≠ 0。
与前提矛盾，因此该方程不成立
```

Problem 8

证明任一个有理数和任一个无理数之间都有一个无理数。

```
假设题设条件不存在，则存在一个有理数r和一个无理数x之间没有无理数。
r = q/p (p、q均为素数)
所以r - x 可以表示为m/n(m、n均为素数)的形式
故x = r - m/n = (pn - mq)/(qn)
而x是一个无理数，与假设矛盾，故该假设不成立。

```

Problem 9

证明三角不等式：假设 x, y 都是实数，则 $|x| + |y| \geq |x + y|$。

```
将x、y、x + y看作表示一个三角形的三边的三个向量，
根据三角形的性质，|x| + |y| > |x ＋ y|
```

Problem 10

证明$2 ^ {(1 / 3)}$ 是无理数。

```
a = 2 ^ (1 / 3)
假设a为有理数，则a = p/q(p、q皆为素数)
所以a ^ 3 = p ^ 3 /  q ^ 3 = 2
因此p为偶数所以p = 2 * n
所以q ^ 3 = 4 * n ^ 3
所以q也为偶数，
与假设条件矛盾，故假设不成立。
```

Problem 11

a. 证明或驳斥如果 a 和 b 是有理数，那么 ab 也是有理数。

```
a  = p/q, b = m/n
ab = pm/qn
所以ab也为一个有理数
```

b. 是否存在有理数 x 和无理数 y，使得 xy 是无理数。

```
当x = 0时，提议成立
```

c. 是否存在无理数 x 和 y，使得 x ^ y 是有理数。

```
假设存在无理数x、y使得x ^ y为有理数
所以x ^ y = p/q(p、q均为素数),
p = q * x ^ y
所以p为有理数，与假设条件矛盾，故假设不成立
```