

Problem Set 6: 二元关系 (提交截止时间: 4月1日 10:00)

Problem 1

设集合 $A = \{a, b, c\}$, 判断一下结论是否正确

a. $\emptyset \subseteq A \times A$

1 \top , \emptyset 是任何集合的子集

b. $\{a, b\} \in A \times A$

1 $A \times A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$

2 \perp , $A \times A$ 中没有 $\{a, b\}$ 这个元素

c. $\{a, c\} \in A$

1 \perp , A 中没有 $\{a, c\}$ 这个元素

d. $(c, c) \in A \times A$

1 \top , 集合中有这个元素

Problem 2

证明 $A \times B \neq B \times A$ 除非 $A = B$, 其中 A 和 B 均为非空集合

- 1 假设 $(A \times B = B \times A) \wedge (A \neq B)$
- 2 不妨设 $x \in B \wedge x \notin A$
- 3 所以 $\exists y \in A, (x, y) \in B \times A$
- 4 所以 $(x, y) \in A \times B$
- 5 所以 $x \in A$
- 6 与假设矛盾, 故 $A \times B \neq B \times A$ 除非 $A = B$

Problem 3

设 R 是从集合 A 到集合 B 的关系。从集合 B 到集合 A 的逆关系, 记作 R^{-1} , 是有序对 $\{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$ 的集合,

补关系 \overline{R} 是有序对 $\{(a, b) \mid (a, b) \notin R, a \in A, b \in B\}$ 的集合。

设 R 是正整数集合上的关系, $R = \{(a, b) \mid a \text{ 整除 } b\}$, 求

a. R^{-1}

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid a \text{ 整除 } b\}$$

b. \overline{R}

$$\overline{R} = \{(a, b) \mid a \text{ 不整除 } b\}$$

Problem 4

设 R 是关系 $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}$, S 是关系 $\{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 2)\}$, 求 $S \circ R$

$$1 \quad S \circ R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

Problem 5

设 R 是定义在具有博士学位的人的集合上的关系, $(a, b) \in R$ 当且仅当 a 是 b 的论文导师。什么情况下一个有序对 (a, b) 在 R^n 中? 这里 n 是正整数。

$$1 \quad \exists c, (a, c) \in R \wedge (c, b) \in R$$

Problem 6

设 R_1 和 R_2 分别是证书集合上的“模3同余”和“模4同余”关系，即 $R_1 = \{(a, b) \mid a \equiv b \pmod{3}\}$ 和 $R_2 = \{(a, b) \mid a \equiv b \pmod{4}\}$

$$k = n * 4 + m$$

$$a. R_1 \cup R_2$$

$$1 \quad \{(a, b) \mid a \equiv b \pmod{3} \vee a \equiv b \pmod{4}\}$$

$$b. R_1 \cap R_2$$

$$1 \quad \{(a, b) \mid a \equiv b \pmod{3} \wedge a \equiv b \pmod{4}\}$$

$$c. R_1 - R_2$$

$$1 \quad \{(a, b) \mid a \equiv b \pmod{3} \wedge \neg(a \equiv b \pmod{4})\}$$

$$d. R_2 - R_1$$

$$1 \quad \{(a, b) \mid a \equiv b \pmod{4} \wedge \neg(a \equiv b \pmod{3})\}$$

$$e. R_2 \oplus R_1$$

$$1 \quad \{(a, b) \mid (a \equiv b \pmod{3} \vee a \equiv b \pmod{4}) \wedge \neg(a \equiv b \pmod{3} \wedge a \equiv b \pmod{4})\}$$

Problem 7

a. 在集合中 $\{a, b, c\}$ 上有多少个不同的关系？

$$2^{3^2} = 512$$

b. 在集合中{a, b, c, d}上有多少个关系包含有序对(a, a)?

$$4 * 4 == 16$$

$$2^{15} == 32768$$