Problem Set 17: 代数系统引论

提交截止时间：5 月 6 日 10:00

Problem 1

设 S 为 n 元集, 问

1. 集合 S 上可以定义多少个不同的二元运算?
   2^{n^3}
2. 其中有多少个二元运算是可交换的?
   $2^{\frac{(n^2)(n+1)}{2}}$
3. 其中有多少个二元运算是幂等的?
   2^{n^2}
4. 其中有多少个二元运算是既不可交换又不幂等的?
   $2^{\frac{n^3+n^2}{2}}$

Problem 2

设$A = 0, 1, S = A^A$,

1. 试列出 S 中的所有元素;

```
f1 = {(0, 0), (1, 0)}
f2 = {(0, 0), (1, 1)}
f3 = {(0, 1), (1, 0)}
f4 = {(0, 1), (1, 1)}
```

2. 给出 S 上函数复合运算的运算表, 并指出单位元、零元和每一个可逆元素的逆元.

∘	f1	f2	f3	f4
f1	f1	f1	f1	f1
f2	f1	f2	f3	f4
f3	f1	f3	f2	f4
f4	f1	f4	f1	f4

单位元： f2
零元： f1
逆元： f2逆元为f2, f3逆元为f3

Problem 3

设 A = {a, b, c}, a, b, c ∈ R, 能否确定 a, b, c 的值使得

1. A 对普通加法封闭?

```
a = -x, b = 0, c = x
```

2. A 对普通乘法封闭?

```
a = -1, b = 0, c = 1
```

Problem 4

判断下列集合对所给的二元运算是否封闭, 并说明理由.

1. 非零整数集合 $Z*$ 和普通的除法运算.

```
不封闭
1 / 3 = 0.33... ∉ Z*
```

2. 全体 $n \times n$ 实可逆矩阵集合关于矩阵加法和乘法运算, 其中 $n \geq 2$.

```
如果 A, B ∈ aij  ∧  rank(A) == rank(B) == n
则rank(A * B) == n, 所以关于矩阵乘法封闭

如果 A, B ∈ aij  ∧  A == B ∧  rank(A) == rank(B) == n
则A - B == 0ij ∧ rank(A - B) == 0 所以关于矩阵加法不封闭
```

3. 正实数集合 $R+$ 和 $\circ$ 运算, 其中 $\circ$ 运算定义为:
   $\forall a, b \in R+$, $a \circ b = ab - a - b$

```
a = 1/2, b = 1/3
a ∘ b = 1/6 - 5/6 < 0
故该运算不在R+上封闭
```

4. $S = \{x \mid x = \ln n, n \in Z+\}$ 关于普通的加法和乘法运算.

```
令F(x) = e ^ x
∀ x, y ∈ Z+, F(x + y) = x * y
所以S上的加法与Z+上的乘法同态，所以S上的加法与Z+上的乘法一样具有封闭性。

令x = 2，y = 2， 则ln x * ln y = 0.479006，故乘法在S上不封闭
```

Problem 5

R 为实数集, 定义以下 4 个函数 $f1$, $f2$, $f3$, $f4$. $\forall x, y \in R$ 有
$f1((x, y)) = x \cdot y$
$f2((x, y)) = x - y$
$f3((x, y)) = \max(x, y)$
$f4((x, y)) = |x - y|$

1. 判断上述二元运算是否为可交换, 可结合, 幂等的.

```
f1:
    可交换 : 据乘法的交换律，成立。
    可结合 : 据乘法的结合律，成立。
    幂等性 : 若x = 3，y = 4， 则幂等性不成立。

f2:
```

```
    可交换 : 减法无交换律，不成立。
    可结合 : 减法无结合律，不成立。
    幂等性 : 若x = 3，y = 4， 则幂等性不成立。

f3:
    可交换 : max(a，b) == max(b, a) ∈ R，成立
    可结合 : 显然max(a，max(b, c)) == max(max(a, b), c)，成立
    幂等性 : ∀a, b ∈ R, f3(a, b) == f3(max(a, b), b) == f3(f3(a, b), b)

f4:
    可交换 : |x - y| == |y - x| ∈ R，成立
    可结合 : 当x = 3，y = 4，z = 5， |x - |y - z|| != ||x - y| - z|，不成立
    幂等性 : 当x = 3，y = 4，|x - y| != ||x - y| - x|，不成立
```

2. 求上述二元运算的单位元, 零元以及每一个可逆元素的逆元.

```
f1:
    单位元 : 单位元为1。
    零元 : 零元为0。
    逆元 : ∀x ∈ R ∧ x != 0, x^(-1) = 1/x

f2:
    单位元 : 单位元为0。
    零元 : 无零元
    逆元 : ∀x ∈ R ∧ x != 0, x^(-1) = -x

f3:
    单位元 : 无单位元。
    零元 : 无零元。
    逆元 : 无逆元。

f4:
    单位元 : 单位元为0。
    零元 : 无零元
    逆元 : ∀x ∈ R, x^(-1) = x。
```

3. 设 A = {a, b}, 试给出 A 上一个不可交换, 也不可结合的二元运算.

```
f(x, y) = {
    a, (x == a ∧ y == b)
    b, (x != a ∨ y != b)
}
```

Problem 6

设 S = {1, 2, ..., 10}, 问下面定义的运算能否与 S 构成代数系统 ⟨S, ∗⟩? 如果能, 则说明 ∗ 运算是否满足交换律、结
合律, 并给出单位元和零元.

1. x ∗ y = gcd(x, y), gcd(x, y) 是 x 与 y 的最大公约数.

```
显然gcd(x, y) ∈ S, 满足封闭性
交换律: gcd(x, y) == gcd(y, x)，满足交换律
结合律: gcd(x, gcd(y, z)) == gcd(gcd(x, y), z)，满足结合律
单位元: 10
零元  : 1
```

2. $x * y = \text{lcm}(x, y)$, $\text{lcm}(x, y)$ 是 x 与 y 的最小公倍数.

```
令x = 9，y = 10
lcm(9, 10) = 90
在S上不满足封闭性。
```

3. $x * y = \max(x, y)$.

```
显然max(x, y) ∈ S, 在S上满足封闭性。
交换律: max(x, y) == max(y, x)，满足交换律
结合律: max(x, max(y, z)) == max(max(x, y), z)，满足结合律
单位元: 1
零元  : 10
```

4. $x * y$ = 质数 p 的个数, 其中 $x \le p \le y$.

```
取x = 9,  y = 10,  则 x * y == 0 ∉ S,
所以不满足封闭性
```

Problem 7

判断集合 $A = \{x \mid x \in N \wedge x$ 与 5 互素 $\}$ 能否构成代数系统 $V = \langle N, + \rangle$ 的子代数, 并说明理由.
本题请参考并自学教材【屈婉玲】pp.174-175 关于子代数的部分.

```
于A中取1、9，1 + 9 = 10
10 不与5互素
故A上 + 不封闭，所以<A, +>不是V的子系统。
```

Problem 8

设集合 A = {a, b, c, d} 上的一个二元运算 ∘ 如下表所示：

1. 说明运算是否可结合？为什么？

∘	**a**	**b**	**c**	**d**
a	a	b	c	d
b	b	a	d	d
c	c	d	a	d
d	d	d	d	d

```
可结合
有图可知，∘ 满足交换律。
```

```
(1)表达式中含有d
因为d为零元
显然表达式交换结合次序不影响结果。

(2)表达式中不含有d
由于∘满足交换律，单位元为a所以
表达式一定可以化为只有含有b、c项的表达式。
又由于 b ∘ b == a ∧ c ∘ c == a，
所以最终表达式中一定为 b ∘ c 或 c ∘ b
又因为图中b ∘ c == c ∘ b == d
所以表达式交换结合次序不会影响表达式结果，

综上∘运算可以结合
```

2. 求单位元与零元.

```
单位元：a
零元：d
```

Problem 9

设集合 A = {a, b, c}，∘ 是 A 上的二元运算，在 V = ⟨A, ∘⟩ 的运算表中，除了 a ∘ b = a 以外，其余运算结果都等于 b. 试给出 V = ⟨A, ∘⟩ 的两个非恒等映射的自同态.
（自同态：如果映射 f 是 V 到 V 的，则称 f 为自同态.）

```
| ∘   | a   | b   | c   |
| --- | --- | --- | --- |
| a   | b   | a   | b   |
| b   | b   | b   | b   |
| c   | b   | b   | b   |

f1(x) = {
    a, x == b
    b, x == a
}

f2(x) = {
    a, x == b
    b, x == a
    b, x == c
}
```