Problem Set 9：数论初步

提交截止时间：4 月 8 日 10:00 前

Problem 1

设 a, b, c, d 均为正整数，下列命题是否为真？若为真，给出证明；否则，给出反例。

a) 若 $a \mid c$, $b \mid c$, 则 $ab \mid c$

b) 若 $a \mid c$, $b \mid d$, 则 $ab \mid cd$

c) 若 $ab \mid c$, 则 $a \mid c$

d) 若 $a \mid bc$, 则 $a \mid b$ 或 $a \mid c$

Problem 2

证明：若 p 是大于 3 的素数，则 $p^2 - 1$ 是 24 的倍数。

Problem 3

计算：

a) $23300 \bmod 11$

b) $2^{3300} \bmod 31$

c) $3^{516} \bmod 7$

Problem 4

试证明: 对于任意的正整数 n，都有 $n^2 \mid (n+1)^n - 1$。

Problem 5

证明：如果 a 和 b 为正整数，则 $(2^a - 1) \bmod (2^b - 1) = 2^{a \bmod b} - 1$。

Problem 6

证明：如果 $2^n - 1$ 是质数，则 n 也为质数。

Problem 7

证明:

a) 设 $d \geq 1$, $d \mid m$, 则 $a \equiv b(\bmod m) \Rightarrow a \equiv b(\bmod d)$.

b) 设 $d \geq 1$, 则 $a \equiv b(\bmod m) \Leftrightarrow da \equiv db(\bmod dm)$.

c) 设 c 与 m 互质, 则 $a \equiv b(\bmod m) \Leftrightarrow ca \equiv cb(\bmod m)$.

Problem 8

借助于费马小定理证明如果 n 是一个正整数，则 42 能整除 $n^7 - n$。

Problem 9

试证明: 若 $p \geq 7$ 为质数，则 $240 \mid (p^4{-}1)$。

Problem 10

证明：若 m 和 n 互质，则 $m^{\phi(n)} + n^{\phi(m)} \equiv 1(\bmod mn)$.