Problem Set 24：图的连通性

提交截止时间：6 月 3 日 10:00

Problem 1

G 的围长是指 G 中最短回路的长；若 G 没有回路，则定义 G 的围长为无穷大。
证明：围长为 4 的 k 正则图至少有 2k 个顶点，且恰有 2k 个顶点的这样的图（在同构意义下）只有一个。
如无特意说明，以后各题只考虑有限个点的图。

```
∀ x y 相连 ∧ x, y ∈ G, 设N(x) = {m | m ∈ G ∧ m与x相连}
所以显然N(x) ∩ N(y) = ∅ ，此时G至少有2 * (k - 1) + 2个顶点。
又因为G是k正则图，N(x) ∩ N(y) = ∅, 所以只能将N(x)/{y}中的k - 1个顶点与N(y)/{x}中的k - 1个顶点相连，每个顶点的度数都是k
此时该图为完全二部图，同构意义只有一个。
```

Problem 2

证明：简单图 G 是二部图，当且仅当 G 没有包含奇数条边的简单回路。

```
从左向右：
  G是二部图，则设X, Y分别为G的两个互斥的点集，a、b、c ∈ X, 1、2、3 ∈ Y ,a 与 1相连，
  若要形成简单回路则1必须与X中其余点相连，设形成1b，
  若要形成简单回路则b必须与Y中其余点相连，设形成b2，
  若此时形成2a，结束回路则a1b2a共4条边，符合题意，
  若此时不结束贿赂，重复上述第一二两步，直到形成简单回路，
  由于每次循环都会给贿赂增加两个边，该简单回路一定为偶数条边。
从右向左：
  假设 G 是连通图，若不连通，则每次仅考虑一个连通分支。
  设 v 是图的一个顶点，设 A 是有从 v 出发奇数长度通路的所有顶点的集合，设 B 是有从 v 出发偶数长度通路的所有顶点的集合。
  由于该分支是连通的， 所以每个顶点都属于 A 或 B 没有顶点同时属于 A 和 B，
  若假设存在一个顶点 v’ 同时属于 A 和 B，则从 v 到 v’ 的奇长度通路，加上 v’ 到 v 的偶长度通路，就得到一个奇回路，与题意矛盾。
  所以，顶点集合划分成两个部分。
  要证每条边的端点都在不同的部分中，假设(x, y)是一条边，x∈A，则从 v 到 x 的奇长度通路加上（x, y）
  就产生从 v 到 y 的偶长度通路，所以 y∈B。
  同理可证 x∈B 的情况。
综上可得 G 是二部图。
```

Problem 3

证明：$\kappa(G) = 1$ 的 r-正则图 G，若 $r > 1$，总满足 $\lambda(G) \le r/2$ 。（$\lambda(G)$ 表示 G 的边连通度）

```
因为G的割点 v，G − v 至少有 2 个连通分量 C1, C2，
其中至少一个与 v 相连的边数量不超过 r/2，这些边构成 G 的一个割边集，
所以 λ(G) ⩽ r/2。
```

Problem 4

若无向图 G 中恰有两个奇数度的结点，则这两结点间必有一条路。

```
若G为连通图，则这两个结点间必有一条路。
若G为非连通图，则这两个结点必分别位于两个连通分支中
则这两个连通分支必各只有一个奇度结点，与连通分支必有偶数个奇度顶点矛盾，
故这两个结点位于一个连通分支
综上，这两个结点间必有一条路。
```

Problem 5

给定一个顶点个数有限的简单图 G，假定我们只可以通过如下方式逐步删除 G 中的顶点：每一步可以删除度数小于 2 的顶点。试证明：如果 G 中的所有顶点能被删除当且仅当 G 中没有回路。

```
从左向右：
  所有顶点能被删除则，所有顶点的度数小于2，此时只有以下几种点：
  1. 孤立点
  2. 叶节点
  3. 叶节点间的传递结点
  若G中有回路，则证明存在第四种点，所以G中无回路。
从左向右：
  G中没有回路，则该图可同构与一个长链图及其链上分支的同构图。
  先删除其链上的分支，由于闭包，链上分支与该链同构，
  则可重复此操作直到叶节点，删除叶节点即可。
  重复上述操作直到该链没有分支，此时从该链叶节点开始可删除知道删除所有结点。
```

Problem 6

证明：G 是 2-边连通图当且仅当 G 中任意两个顶点之间至少有两条不含公共边的通路。
（提示：证明过程中可使用 Whitney 定理，但需注意和本题的差异）

```
若 G 中任意两顶点都至少有两条边不重道路连接，显然对任意 e ∈ E(G)，G − e 是连通的，故 G 为 2-边连通的。
若 G 是 2-边连通的，则 G 无割边。把 G 分解成块，块与块之间以 G 中的割点互相连接。设 u, v 是 G 中任意两顶点。
分两种情况：
  – 若 u, v 同属于 G 的某一块，则由 Whitney 定理知，结论成立。
  – 若 u, v 属于 G 的不同块，设 B1, B2, ..., Bn 是 G 的块，其中块 Bi 与块 Bi+1 以割点 Vi 相互连接且 |v(Bi)| ⩾ 3。
  不妨设 u ∈ B1，v ∈ Bn。
  由之前的证明可知，在 B1 中存在两条由 u 到 v1 的不相交的 路 P11, P12
  同理在 Bi 中存在两条由 vi−1 到 vi 的不相交的路 Pi1, Pi2；在 Bn 中存在两条由 vn−1 由 v 的不相交的路 Pn1, Pn2。
  于是我们找到两条 u 到 v 的边不相交的路：P11 ∪ P21 ∪ ... ∪ Pn1 和 P12 ∪ P22 ∪ ... ∪ Pn2。
```

Problem 7

假设 P 是连通图 G 中的一条最长的初级通路（路径），且 P 不是回路。试证明 P 的端点不是图 G 的割点。

```
假设p的端点是图G的割点，则显然可以延伸该初级通路之p端点的下一个顶点，则P不是该连通图G的最长的初级通路，则假设不成立，命题得证。
```

Problem 8

证明：设 G 是一个简单图，k 是一个自然数，若 δ(G) ≥ v+k−2, 则 G 是 k−连通的。

```
假设 G 不是 k-连通的, 则 G 的连通 κ < k, 所以一定存在 G 的点割集 S, 使得 |S|<k, 且 G-S 不连通。
因为 G-S 有 v-|S| 个顶点, 且至少有两个连通分支, 故必有 G-S 的某个连通分支 G’ 含有不超过 (v−|S|)/2 个顶点。
又因为 G’ 中任一个顶点只可能与 G’ 内的点及 S 中的点相邻, 因而其在 G 中的顶点度 (v−|S|)/2 −1 + |S| = (v+|S|−2)/2 。
又因为 |S|<k, 所以δ(G) ⩽ (v+|S|−2)/2 < (v+k−2)/2 , 与定理矛盾故命题成立。
```

Problem 9

设n阶图G的边数为m，试证明：若$m > C_{n-1}^2$则G为连通图。

假设G不是连通图，
设其中一个连通分支中顶点数为$n1 \geq 1$，其余顶点数为$n2 \geq 1$，$n1 + n2 = n$，$m \leq C_{n1}^2 + C_{n2}^2$
可以验证：$C_{n1}^2 + C_{n2}^2 \leq C_{n-1}^2$，即$n1(n1-1) + n2(n2-1) \leq (n-1)(n-2)$
由于$0 \leq (n1-1)(n2-1)$因此$m \leq C_{n-1}^2$，矛盾。所以G为连通图。