微积分II（第一层次）期末试卷 (2021.6.22)

一、计算下列各题（6分×5 = 30分）

1. 求空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=14, \\ 3x+2y+z=10 \end{cases}$ 在点 $P(1,2,3)$ 处的法平面与切线方程.

2. 求柱面 $x^2+y^2=ay\ (a>0)$ 位于球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内部分曲面的面积.

3. 计算第二类曲线积分 $I_1=\int_C \cos(x+y^2)\mathrm{d}x+\left(2y\cos(x+y^2)-\sqrt{1+y^4}\ \right)\mathrm{d}y$, 其中 C 为旋轮线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$, 由 $O(0,0)$ 到 $A(2\pi a,0)$, 其中 $a>0$.

4. 计算第一类曲面积分 $I_2=\iint\limits_S (xy+yz+zx)\mathrm{d}S$, 其中 S 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax\ (a>0)$ 所截下的部分.

5. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

二、计算下列各题（8分×5 = 40分）

1. 讨论数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$ 的敛散性.

2. 讨论数项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin(\frac{n\pi}{6})}{\sqrt{n}}$ 的敛散性. 如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛?

3. 求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)$ 的和.

4. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{3x^2+2xy-y^2}{2xy-x^2}$ 的通积分.

5. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x^4+y^3}{xy^2}$ 的通积分.

三、（本题10分）计算 $I_3=\int_C y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z$, 其中 C 是平面 $x+y+z=1$ 的第一卦限部分与三个坐标面的交线，从 z 周正向往 z 轴负向看去是逆时针方向.

四、（本题10分）计算 $I_4=\iint\limits_S 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S为曲线 $z=\mathrm{e}^y(0\le y\le a)$ 绕 z 轴旋转生成的旋转曲面，取下侧.

五、（本题10分）设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)}x^{2(n+1)},\ x\in(-1,1)$. 求出 $f(x)$ 满足的微分方程，并求解之. 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{(2n+1)!!(n+1)}$.

微积分 II（第一层次）期末试卷 (2022.6.13)

一、简答题（8 分 $\times 6 = 48$ 分）

1. 计算 $I = \iint\limits_D x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由曲线 $xy = 1, xy = 2$ 以及 $y = x, y = 2x$ 所围图形在第一象限的部分.

2. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\Big(\cos(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) - \cos(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2})\Big)$ 绝对收敛.

3. 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 的和函数及收敛域.

4. 求方程 $y'' + \mathrm{e}^{y'} = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0$ 的解.

5. 求函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 的马克劳林展式.

6. 求函数 $y = x\ (x \in [0, \pi])$ 的余弦级数.

二、(10 分) 已知 $y = \mathrm{e}^x$ 为方程 $y'' + \tan x\ y' - (1 + \tan x)y = 0$ 的一个解, 求方程的通解.

三、(10 分) 计算第二型曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \dfrac{1}{1+z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$, 取上侧.

四、(10 分) 已知第二型曲线积分 $I_L = \int_L (x + y^2 + \mathrm{e}^z)\mathrm{d}x + (2xy + yz)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z$ 与路径无关, $R(0, 0, z) = z^2$. 求函数 $R(x, y, z)$ 的表达式以及当 L 的起点为 $(0, 0, 0)$, 终点为 $(1, 1, 1)$ 时 I_L 的值.

五、(10 分) 已知 $A = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{1}{t^k} \iiint\limits_{\Omega(t)} (e^{xy} - 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 为非零常数, 求 A 及 k 的值, 其中 $\Omega(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2\}$.

六、(12 分) 设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的有界连续函数, 记 $M = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. 求方程 $y'' - y = f(x)\ (-\infty < x < \infty)$ 的有界解, 并证明对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 有 $|y(x)| \leq M$.

微积分 II（第一层次）期末试卷 (2023.6.14)

一、计算下列各题（每题6分, 共3题, 合计18 分）

1. 设 $u=\mathrm{e}^{xy^2}+\ln(x+y+z^2)$, 求 u 在点 $P(1,-1,1)$ 处的全微分.

2. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被柱面 $x^2+y^2=ax(a>0)$ 截下的部分曲面的面积.

3. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$ 的和.

二、计算下列各题（每题7分, 共3题, 合计21 分）

1. 求函数 $f(x)=\dfrac{5x-12}{x^2+5x-6}$ 的马克劳林级数，并给出其收敛域.

2. 求微分方程 $y'-y=xy^5$ 的通积分.

3. 求微分方程 $y''-8y'+16y=x\mathrm{e}^{4x}$ 的通解.

三. (本题10分）求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

四. (本题10分）$\Omega: x^2+y^2+z^2\le 2z$, Σ 为立体 Ω 的表面，求曲面积分 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}(x^4+y^4+z^4-z^3)\mathrm{d}S$.

五. (本题10分）讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}$ 的敛散性 (绝对收敛/条件收敛/发散), 其中 $p>0$.

六. (本题10分）试将函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\ne 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 展成 x 的幂级数，并求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

七. (本题10分）设函数 $f(x)$ 是周期为2的周期函数，且 $f(x)=2+|x|, x\in[-1,1]$.

1. 求 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的傅里叶展开式;
2. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ 的和;
3. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

八. (本题11分）求微分方程 $y''-y=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}+\cos x$ 的通解.

微积分 II（第一层次）期末试卷参考答案 (2021.6.22)

一、 1. 法平面方程为 $x-2y+z=0$, 切线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$.

2. $4a^2$. 3. $\sin(2\pi a)$. 4. $\dfrac{64}{15}\sqrt{2}a^4$. 5. 仅当 $p>0$ 时收敛；

二、1. 收敛. 2. 条件收敛. 3. $\ln\dfrac{3}{2}$. 4. $x^3+x^2y-xy^2=C$. 5. $y^3=x^3(C+3x)$.

三、 -1. 四、 $(\mathrm{e}^{2a}-1)\pi a^2$.

五、$f(x)$ 满足的微分方程为 $f''(x)-\dfrac{x}{1-x^2}f'(x)=\dfrac{8x^2}{1-x^2}$, 这是关于 $f'(x)$ 的一阶线性微分方程，解得 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big(C_1+4\arcsin x-4x\sqrt{1-x^2}\Big)$, 由 $f'(0)=0$ 得 $C_1=0$, 故 $f'(x)=4\Big(\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-x\Big)$, 两边再积分得 $f(x)=2(\arcsin x)^2-2x^2+C_2$, 由 $f(0)=0$ 得 $C_2=0$, 所以 $f(x)=2(\arcsin x)^2-2x^2$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)!!(n+1)}=f(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{\pi^2}{8}-1.$$

微积分 II（第一层次）期末试卷参考答案 (2022.6.13)

一、 1. $\dfrac{3}{8}$.

2. $\left|n\Big(\cos(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2})-\cos(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2})\Big)\right|=2n\sin\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n^2}\le\dfrac{2}{n^2}$, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ 收敛，故原级数绝对收敛.

3. 收敛域为$[-1,1]$，和函数 $S(x)=\begin{cases}-\ln(1-x)+1+\frac{\ln(1-x)}{x}, & x\in[-1,1), x\neq 0,\\ 1, & x=1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

4. $y=-x\ln(1+x)+x-\ln(1+x)$.

5. $\sqrt{1-x^2}=1-\dfrac{x^2}{2}-\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^{2n},\quad(|x|\le 1)$.

6. x 的余弦级数为 $\dfrac{\pi}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}((-1)^n-1)\cos(nx),\quad x\in[0,\pi]$.

二. 通解为 $y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}(\sin x-2\cos x)$, 其中$c_1,c_2$ 为任意常数.

三. $(\dfrac{8}{3}-2\ln 2)\pi$.

四. $R(x,y,z)=x\mathrm{e}^z+\dfrac{1}{2}y^2+z^2$. 当$L$ 的起点为$(0,0,0)$, 终点为$(1,1,1)$ 时, $I_L=\mathrm{e}+\frac{7}{3}$.

五. 解: 由泰勒公式可得，当 $(x,y,z)\in\Omega(t)$ 时, $\mathrm{e}^{xy}-1=xy+\frac{1}{2}x^2y^2+o(t^4)$.

$$\iiint\limits_{\Omega(t)}(e^{xy}-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega(t)}x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+o(t^7)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}x^2y^2\sqrt{t^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+o(t^7)$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta \mathrm{d}\theta \int_0^t \rho^5 \sqrt{t^2-\rho^2} \mathrm{d}\rho + o(t^7) \xlongequal{(\sqrt{t^2-\rho^2}=u)} \frac{\pi}{4}\int_0^t u^2(t^2-u^2)^2 \mathrm{d}u + o(t^7)$$

$$= \frac{2\pi}{105}t^7 + o(t^7). \quad \text{因此} k=7, A=\frac{2\pi}{105}.$$

六. 解: 齐次方程的通解为 $y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}$.

利用常数变易法, 设非齐次方程的解为 $y=c_1(x)\mathrm{e}^x+c_2(x)\mathrm{e}^{-x}$, 则有

$$\begin{cases} c_1'(x)\mathrm{e}^x + c_2'(x)\mathrm{e}^{-x} = 0 \\ c_1'(x)\mathrm{e}^x - c_2'(x)\mathrm{e}^{-x} = f(x) \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} c_1'(x) = \frac{1}{2}f(x)\mathrm{e}^{-x} \\ c_2'(x) = -\frac{1}{2}f(x)\mathrm{e}^{x} \end{cases}$$

为了保证方程的解为有界解, 形式上需要 $c_1(+\infty)=0, c_2(-\infty)=0$.

从而我们取 $c_1(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{+\infty}^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$, $c_2(x)=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t$.

因此形式上非齐次方程的解为 $y(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}\displaystyle\int_{+\infty}^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t$.

同时由于对任意的 $t\in\mathbb{R}$, $|f(t)|\le M$, 从而

$$|y(x)| \le \frac{\mathrm{e}^x}{2}\left|\int_{+\infty}^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right| + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\left|\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t\right| \le \frac{M\mathrm{e}^x}{2}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t + \frac{M\mathrm{e}^{-x}}{2}\int_{-\infty}^x \mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t \le M.$$

微积分 II（第一层次）期末试卷参考答案 (2023.6.14)

一、1. $\mathrm{d}u\Big|_{(1,-1,1)} = (\mathrm{e}+1)\mathrm{d}x + (-2\mathrm{e}+1)\mathrm{d}y + 2\mathrm{d}z$;　2. $2a^2(\pi-2)$;　3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}=1$.

二、1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\Big(1+\frac{(-1)^n}{6^n}\Big)x^n$, $x\in(-1,1)$.　2. $y^4(C\mathrm{e}^{-4x}-x+\dfrac{1}{4})=1$.　3. $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{4x}+\dfrac{x^3\mathrm{e}^{4x}}{6}$.

三、$x-y+2z=\pm\sqrt{\dfrac{11}{2}}$.　　四、$\dfrac{32\pi}{5}$.

五、$p>1$ 时绝对收敛；$\dfrac{1}{2}<p\le 1$ 时条件收敛；$0<p\le\dfrac{1}{2}$ 时发散.

六、$f(x)=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2}{1-4n^2}x^{2n}$, $x\in[-1,1]$;　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{f(1)-1}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

七、1. $f(x)=\dfrac{5}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^2}$;　2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$;　3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

八、$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{2}-x\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\ln(1+\mathrm{e}^x)-\dfrac{1}{2}\cos x$.