Problem Set 4：证明方法概论
(提交截止时间：3月18日 10:00)

Problem 1（本题与Problem Set 3中第8题相同，做过的可忽略）

用推理规则证明：如果 $\forall x(P(x) \to (Q(x) \land S(x)))$ 和 $\forall x(P(x) \land R(x))$ 为真，则 $\forall x(R(x) \land S(x))$ 为真。

Problem 2（本题与Problem Set 3中第9题相同，做过的可忽略）

用推理规则证明：如果 $\forall x(P(x) \lor Q(x))$ 和 $\forall x(\neg Q(x) \lor S(x))$，$\forall x(R(x) \to \neg S(x))$ 和 $\exists x \neg P(x)$ 为真，则 $\exists x \neg R(x)$ 为真。

Problem 3

证明所有正整数 $n = 4m + 3$（m 为自然数）都不能写成两个整数的平方和。

Problem 4

证明方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 有无穷多个正整数解 x,y,z。

Problem 5

两个实数 x 和 y 的平方均值是 $\sqrt{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}$。通过计算不同正实数对的算术均值和平方均值，构造一个关于这两种均值的相对大小的猜想并证明之。

Problem 6

在黑板上写下数字 1，2，3 ... $2n$, 其中 n 是奇数。从中任意挑出两个数 j 和 k，在黑板上写下 $|j - k|$ 并擦掉 j 和 k。继续这个过程，直到黑板上只剩下一个整数为止。证明这个整数必为奇数。

Problem 7

用归谬法证明不存在有理数 r 使得 $r^3 + r + 1 = 0$。

Problem 8

证明任一个有理数和任一个无理数之间都有一个无理数。

Problem 9

证明三角不等式：假设 x, y 都是实数，则 $|x| + |y| \geq |x + y|$。

Problem 10

证明 $\sqrt[3]{2}$ 是无理数。

Problem 11

a) 证明或驳斥如果 a 和 b 是有理数，那么 a^b 也是有理数。

b) 是否存在有理数 x 和无理数 y，使得 x^y 是无理数。

c) 是否存在无理数 x 和 y，使得 x^y 是有理数。