

Problem Set 28-29: 树、根树与二叉树

提交截止时间：6 月 17 日 10:00

如无特意说明，以后各题只考虑有限个点的图。

Problem 1

计算下列各题：

- 1) 有多少非同构的 4 个顶点的树?
- 2) 饱和碳氢化合物 C_4H_{10} 有多少不同的同分异构体?
- 3) 有多少由 4 个不可区分的顶点构成的二叉树?
- 4) K_4 有多少个不同的生成树? (假设各条边互不相同)

Problem 2

二叉搜索树 (BST) 是节点带标号的有序二叉根树，其所有的子树都满足根节点标号大于左子树中所有节点的标号，而小于右子树中所有节点标号。记 C_n 为以 $1, 2, \dots, n$ 为各节点标号的不同的 BST 的个数。请利用基本计数原理给出 C_n 的递推公式。这里我们约定 $C_0=1$ 。

Problem 3

令 $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ 为一正整数序列，且 $n \geq 2$ 。

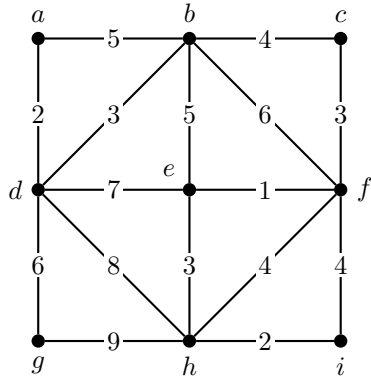
- a) 若 D 恰好是某个树 T 的各个顶点的度数序列，试证明

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$$

- b) 反过来，试证明：若 D 满足上式，则存在一个树 T ，使得 D 恰好是 T 的各个顶点的度数序列。

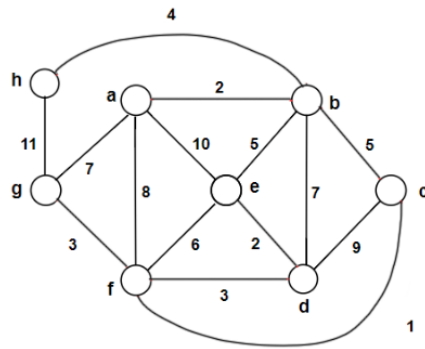
Problem 4

试用 Kruskal 算法求所给带权图的最小生成树。(按顺序写出选取的边及 MST 的权值)



Problem 5

试求以下无向带权图的最小生成树 T (请直接将图中所求最小生成树的边加粗), 并求此最小生成树的权值 $W(T)$.



Problem 6

证明或反驳: 每条边权重均不相同的带权图

- 1) 有唯一的最小生成树。
- 2) 有唯一的“次小生成树”满足, 存在一最小生成树的权值小于等于该树, 且其他生成树的权值均大于等于该树。

Problem 7

令 G 为一无向带权连通图, 假设图中存在一个回路. 试证明: 在此回路上若存在一条边 e 其权值严格大于此回路上的其它各边, 则 e 不在 G 的任何最小生成树中。

Problem 8

令 G 为一无向带权连通图，假设图中存在一个回路。试证明：在此回路上若存在一条边 e 其权值严格大于此回路上的其它各边，则 e 不在 G 的任何最小生成树中。