

Problem Set 27: 二部图及其匹配

提交截止时间：6 月 12 日 10:00

Problem 1

G 的围长是指 G 中最短回路的长；若 G 没有回路，则定义 G 的围长为无穷大。证明：围长为 4 的 k 正则图至少有 $2k$ 个顶点，且恰有 $2k$ 个顶点的这样的图（在同构意义下）只有一个。

Problem 2

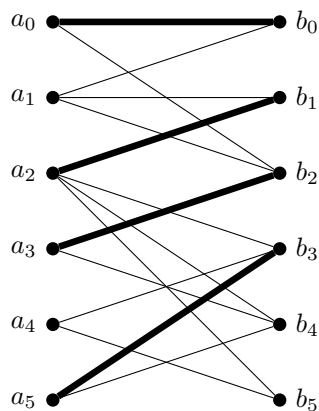
证明：二部图 G 是简单图且有 \mathcal{V} 个顶点 \mathcal{E} 条边，证明 $\mathcal{E} \leq \mathcal{V}^2/4$ 。

Problem 3

往 $2n$ 个孤立的顶点间加入 n 条边，试求总共能得到多少种不同的包含这 $2n$ 个顶点的完美匹配？

Problem 4

从下图 $G = (A, B, E)$ 中，找出相对于匹配 M (粗边的集合) 的任意三条交错路径 (alternating path) 和至少两条增广路径 (augmenting path)，然后利用增广路径扩大 M 来找到最大匹配。



Problem 5

对于哪些 n 值来说，下列图是存在完美匹配的二部图？

a) K_n

b) C_n

c) Q_n

Problem 6

令 k 为一整数。对于任意有限集合，证明对它的任意两个 k 划分都存在一个相同的代表集。

- 集合的 k 划分指划分为大小相同的互不想交的 k 个子集，为简便起见，设集合的大小为 k 的整数倍从而每个子集均有相同个元素。
- 一个划分的代表集指从每个子集中取出一个元素而构成的集合。

举例：集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的一个 2 划分为 $A: \{1, 2\}\{3, 4\}$ 。此划分的代表集有 $\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}$ ，但 $\{1, 2\}$ 不是其代表集。集合的另外一个划分为 $B: \{2, 3\}\{1, 4\}$ 。易见， A 与 B 存在相同的代表集 $\{1, 3\}$ 。

Problem 7

假设某校计算机系学生选导师时出现了这样的情况：对于每一位学生，至少对 k 名导师感兴趣；对于每一位导师，至多有 k 名学生对他感兴趣。假设每位导师只能指导 1 名学生，且每位学生也只能选择 1 名导师。试证明：存在这样的匹配，使得每位学生都能选到自己感兴趣的导师。

Problem 8

证明一个 6×6 的方格纸板挖去左上角和右下角后不能用剪刀裁剪成若干 1×2 的小矩形。

