

# Problem Set 18: 群论导引

提交截止时间: 5 月 13 日 10:00

## Problem 1

判断下列集合关于指定的运算是否构成半群, 么半群和群:

- (1)  $a$  是正实数,  $G = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$ , 运算是普通乘法.
- (2)  $\mathbb{Q}^+$  为正有理数, 运算是普通乘法.
- (3)  $\mathbb{Q}^+$  为正有理数, 运算是普通加法.
- (4) 一元实系数多项式的集合关于多项式的加法.
- (5) 一元实系数多项式的集合关于多项式的乘法.
- (6)  $U_n = \{x | x \in \mathbb{C} \wedge x^n = 1\}$ ,  $n$  为某个给定正整数,  $\mathbb{C}$  为复数集合, 运算是复数乘法.

注: (4) (5) 两小题中, 形如  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ , 只有  $x$  一个变元, 系数均为实数的多项式, 叫做一元实系数多项式.

## Problem 2

$S = \{a, b, c\}$ ,  $*$  是  $S$  上的二元运算, 且  $\forall x, y \in S, x * y = x$ .

- (1) 证明  $S$  关于  $*$  运算构成半群.
- (2) 试判断  $S$  成为么半群的条件.

## Problem 3

证明: 有单位元且满足消去律的有限半群一定是群。

## Problem 4

设  $G$  是一个群, 并且  $|G|$  为偶数, 证明  $G$  中必定存在一个元素  $g$  满足  $g \neq e$  且  $g = g^{-1}$

## Problem 5

证明: 设  $a$  是群  $\langle G, \circ \rangle$  的幂等元, 则  $a$  一定是单位元. (注:  $a$  为群  $\langle G, \circ \rangle$  的幂等元指  $a \circ a = a$ .)

## Problem 6

(结合律) 假定集合  $S$  上定义的二元操作  $\circ$  满足结合律. 我们知道二元操作只定义在两个元素上, 当参与运算的元素超过两个时, 会有很多种不同的顺序, 比如, 假定  $a, b, c, d \in S$ , 那么可能会有情况有

$$(a \circ b) \circ (c \circ d), (a \circ (b \circ c)) \circ d, a \circ ((b \circ c) \circ d)$$

等等, 注意到**每一步只进行一次运算**. 证明: 无论我们怎么放置括号, 这种嵌套运算的最终结果是不变的. 即证明对  $s_1 s_2 \dots s_n \in S$ , 任意括号嵌套顺序下的结果都等同于  $((\dots((s_1 \circ s_2) \circ s_3) \dots) \circ s_n)$ .

(提示: 使用数学归纳法, 基础情况是  $n = 2$ , 手动尝试一下从  $n = 4$  到  $n = 5$  的情况).

## Problem 7

(数论) 我们知道, 在整数集合  $\mathbb{Z}$  上的同余关系是一个等价关系. 我们用记号  $[a]_n$  表示  $a$  的模  $n$  同余类. 即

$$b \in [a]_n \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{n}.$$

模  $n$  同余类构成的集合是一个重要的概念, 有许多记法, 例如  $\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  等. 例如  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0]_2, [1]_2\}$ . 对于正整数  $n$ , 我们记扩展的加法为

$$[a]_n + [b]_n := [a + b]_n.$$

易证  $\mathbb{Z}_n$  在扩展加法下构成一个群. 类似地, 扩展乘法为

$$[a]_n \times [b]_n := [a \times b]_n.$$

现在令  $\mathbb{Z}_n^* := \{[m]_n \in \mathbb{Z}_n \mid \gcd(m, n) = 1\}$ . 证明:  $\mathbb{Z}_n^*$  在扩展乘法下构成一个群.

## Problem 8

对没有单位元的半群  $M$ , 是否一定能在其中加入一个新元素  $e$  使得  $M \cup \{e\}$  是含有单位元  $e$  的半群?

## Problem 9

设  $M$  是有单位元  $e$  的半群,  $a, b$  是  $M$  中的可逆元, 试证  $ab$  也是  $M$  的可逆元。