Problem Set 20: 循环群与群同构

提交截止时间：5 月 20 日 10:00

Problem 1

对以下各小题给定的群 G1 和 G2 ，以及 f : G1 → G2 ，说明 f 是否为群 G1 到 G2 的同态，如果是，说明是否为单同态、满同态和同构。求同态像 f (G1)

1. G1 = <Z, +> , G2 = <R∗ , ·> , 其中 R∗ 为非零实数集合，+ 和 · 分别表示数的加法和乘法。

$$f : Z \to R^*, f(x) = \begin{cases} 1 & x\text{是偶数} \\ -1 & x\text{是奇数} \end{cases}$$

∀ a, b ∈ Z,

ab/expr	f(a + b)	f(a)	f(b)	f(a) * f(b)
奇奇	1	-1	-1	1
奇偶	-1	-1	1	-1
偶奇	-1	1	-1	-1
偶偶	1	1	1	1

由图可知，f是群G1到G2的同态，且|Z| < |R*| 所以f既不是单同态也不是满同态。
f(G1) = <{1, -1}, *>

2. G1 = <Z, + >, G2 = <A, · >, 其中 + 和 · 分别表示数的加法和乘法, A = {x|x ∈ C ∧ |x| = 1}, 其中 C 为复数 集合。

$$f : Z \to A, f(x) = cosx + i * sinx$$

$\forall a, b \in Z,$
$f(a+b) = cos(a+b) + i * sin(a+b) = (cos(x) * cos(y) - sin(x) * sin(y)) + i * (sin(x) * cos(y) + cos(x) * sin(y))$
$f(a) \cdot f(b) = (cos(a) + i * sin(b)) * (cos(b) + i * sin(b)) = (cos(x) * cos(y) - sin(x) * sin(y)) + i * (sin(x) * cos(y) + cos(x) * sin($
所以f是群Z到A的同态映射
又因为
$\forall a, b \in Z, f(a) == f(b) \to a == b$
$\forall x \in A,$ 据欧拉定理，$\exists y \in Z, f(y) == x$
所以f是群Z到A的同构映射

Problem 2

令 G, G' 为群，函数 f : G → G' 是一个群同态。证明：

1. ker f = {x ∈ G | f (x) = e} 是 G 的子群。
   令C = {x ∈ G | f (x) = e}
   封闭性：由于f是一个群同态，所以$\forall a, b \in C, f(a \circ b) = f(a) \cdot f(b) = e \cdot e = e$，所以$(a \circ b) \in C$
   单位元：由于f是一个群同态，所以$f(e) = e'$, 所以$e \in C$
   可逆元：由于f是一个群同态，所以$\forall a \in C, f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$
   故ker f为G的一个子群

2. Img f = {x ∈ G' | ∃g ∈ G, f (g) = x} 是 G' 的子群
   封闭性：由于f是一个群同态，所以$\forall a, b \in G, f(a) \cdot f(b) = f(a \circ b) \in Imgf$单位元：由于f是一个群同态，所以f(e) = e', 所以e' ∈ C$$
   $$可逆元：由于f是一个群同态，所以∀ a ∈ G, f(a) ^ {-1} = f(a ^ {-1})$$

Problem 3

设 G1 为循环群，f 是群 G1 到 G2 的同态，证明 f (G1) 也是循环群。
设x为$G1$的n阶生成元，$x^n = e$
又因为f是群$G1$到$G2$的同态
所以$f(x^n) = f(e) = f(x) \cdot f(x) \cdot f(x) \ldots f(x) = e'$
如果$f(x) = e'$, 则$x == e$，故$f(G1)$一定是循环群

Problem 4

设 ϕ 是群 G 到 G 的同构映射，a ∈ G，证明：a 的阶和 ϕ(a) 的阶相等。
根据同构的性质$\phi(e) = e, \phi(e) = e$，
所以$\phi(a)^n = e\phi(a)^n = e, n$是$\phi(a)\phi(a)$的一个阶。
假设$\exists m < n, \phi(a)^m = e$，

由于同构映射可逆，所以$\phi(a)^m=\phi^{-1}(\phi^{-1}(\phi(a)^m))=e$
与题意矛盾，故n为$\phi(a)$的最小阶

Problem 5

证明：三阶群必为循环群.
设该群为$<e,a,b,\circ>$
根据群元素的可逆性和集合的排他性，$a^{-1}=b,$
所以$a\circ b=e,a\circ a=e,b\circ b=a$
或$a\circ b=e,b\circ b=a,a\circ a=e$
以上两种情况b、a分别为该群的三阶生成元，故命题成立

Problem 6

设 p 是素数，证明每一个 p 阶群都是循环群，且以每一个非单位元的元素作为它的生成元。
据拉格朗日定理，该群中的任意元素的阶必须可以整除p，所以群中元素阶只能是1或p
故除了单位元外，其他元素的阶为p，所以一定可以作为这个群的生成元。

Problem 7

请简述对以下评论的理解：“对数概念的产生本质上是人们认识到正实数的乘法群和实数的加法群同构。”
设$f(x)=log_n(x)$，群A、B分别为$<R+,*>,<R,+>$
f为$R+\rightarrow R$上的同构映射
封闭性*：*由于f是一个群同构，所以$\forall a,b\in A,f(a)+f(b)=log_n(a)+log_n(b)=log_n(a*b)=f(a*b)\in Imgf$单位元：由于f是一个群同构，所以f(e) = f(1) = log_{m}(1) = e'
可逆元*：*由于f是一个群同构，所以$\forall a\in G,f(a)^{-1}=f(a^{-1})$

Problem 8

设映射$C^1[0,1]$是$[0,1]$上的一阶连续可微函数按加法构成的群。是否存在$C^1[0,1]$到自身的群同态ψ使得ψ的核同构于实数加法群*？*是否存在$C^1[0,1]$到自身的群同态ψ使得ψ的象同构于实数加法群*？*

不存在这样的同态ψ。
因为$C^1[0,1]C^1[0,1]$是一个无限集合，任何从$C^1[0,1]C^1[0,1]$到自身的同态的核至多是$C^1[0,1]C^1[0,1]$的一个真子群。
由于$C^1[0,1]C^1[0,1]$中的加法单位元是常函数$f(x)=0f(x)=0$，核至少包含这个单位元。
由于$C^1[0,1]C^1[0,1]$中存在无限多个不同的连续可微函数，核不能同构于整个实数加法群，因为实数加法群是无限阶的，
而$C^1[0,1]C^1[0,1]$与实数加法群的结构不匹配。故不存在。