

# Problem Set 23A: 图的基本概念

提交截止时间：5 月 27 日 10:00

如无特意说明，以后各题只考虑有限个顶点的图。

## Problem 1

证明或反驳：若无向图  $G$  至少有两个顶点且各顶点度数均不相同，则  $G$  不是简单图。

## Problem 2

**度序列：**一个图的度序列是由图的各个顶点度按非递增序排列的序列（详见【Rossen】P.561）

判断下列序列是否能作为简单图的度序列。如果是，请画出一个简单图使其具有给定的度序列；若否，请说明理由。

a) 5,4,3,2,1,0

b) 2,2,2,2,2

c) 5,4,2,1,1,1

d) 5,3,3,3,3,3

## Problem 3

一个图的**度序列**是由该图的各个顶点的度按**非递增顺序**排列的序列。求下列各个图的度序列。

a)  $K_5$

d)  $K_{2,3}$

b)  $C_3$

e)  $Q_3$

c)  $W_4$

## Problem 4

设无向图  $G$  有  $\mathcal{V}$  个顶点,  $\mathcal{E}$  条边,  $\delta(G)$  和  $\Delta(G)$  分别表示  $G$  中度最小和度最大的顶点的度, 证明  $\delta(G) \leq \frac{2\mathcal{E}}{\mathcal{V}} \leq \Delta(G)$ 。(其中  $\frac{2\mathcal{E}}{\mathcal{V}}$  称为图的**顶点平均度**)

## Problem 5

令  $G$  是至少有两个顶点的无向图, 证明或反驳:

- (a) 从图中删去一个度最大的顶点不会使其顶点平均度增加。
- (b) 从图中删去一个度最小的顶点不会使其顶点平均度减少。

## Problem 6

证明: 设  $G = \langle V, E \rangle$  是一个连通图, 且  $|V| = |E| + 1$ , 则  $G$  中至少有一个度为 1 的顶点。

## Problem 7

令  $G$  是一个顶点平均度为  $a$  的无自环的无向图。

- a) 证明:  $G$  删去一个顶点  $x$  后平均度至少为  $a$ , 当且仅当  $\deg(x) \leq \frac{a}{2}$ ;
- b) 证明或反驳: 如果  $a > 0$ , 那么  $G$  有一个最小度大于  $\frac{a}{2}$  的子图。

## Problem 8

证明: 不包含三角形  $K_3$  作为子图的  $n$  阶图, 其边数  $m$  必满足  $m \leq \frac{n^2}{4}$ 。