Problem Set 20: 循环群与群同构

提交截止时间：5 月 20 日 10:00

Problem 1

对以下各小题给定的群 G_1 和 G_2，以及 $f: G_1 \to G_2$，说明 f 是否为群 G_1 到 G_2 的同态，如果是，说明是否为单同态、满同态和同构。求同态像 $f(G_1)$。

(1) $G_1 = \langle Z, + \rangle$, $G_2 = \langle R^*, \cdot \rangle$, 其中 R^* 为非零实数集合，$+$ 和 $\cdot$ 分别表示数的加法和乘法。

$$f: Z \to R^*, f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 是偶数} \\ -1 & x \text{ 是奇数} \end{cases}$$

(2) $G_1 = \langle Z, + \rangle$, $G_2 = \langle A, \cdot \rangle$, 其中 $+$ 和 $\cdot$ 分别表示数的加法和乘法, $A = \{x | x \in C \wedge |x| = 1\}$, 其中 C 为复数集合。

$$f: Z \to A, f(x) = \cos x + i \sin x$$

Problem 2

令 G, G' 为群，函数 $f: G \to G'$ 是一个群同态。证明：

(1) $\ker f = \{x \in G \mid f(x) = e\}$ 是 G 的子群。

(2) $\mathrm{Img}\ f = \{x \in G' \mid \exists g \in G, f(g) = x\}$ 是 G' 的子群

Problem 3

设 G_1 为循环群，f 是群 G_1 到 G_2 的同态，证明 $f(G_1)$ 也是循环群。

Problem 4

设 ϕ 是群 G 到 $G^{'}$ 的同构映射，$a \in G$，证明：a 的阶和 $\phi(a)$ 的阶相等。

Problem 5

证明：三阶群必为循环群.

Problem 6

设 p 是素数，证明每一个 p 阶群都是循环群，且以每一个非单位元的元素作为它的生成元。

Problem 7

请简述对以下评论的理解："对数概念的产生本质上是人们认识到正实数的乘法群和实数的加法群同构。"

Problem 8

设映射 $C^1[0,1]$ 是 $[0,1]$ 上的一阶连续可微函数按加法构成的群。是否存在 $C^1[0,1]$ 到自身的群同态 ψ 使得 ψ 的核同构于实数加法群？是否存在 $C^1[0,1]$ 到自身的群同态 ψ 使得 ψ 的象同构于实数加法群？