

Problem Set 26: 带权图与最短路

提交截止时间：6 月 10 日 10:00

Problem 1

以下是 *Dijkstra* 算法的一个实现：

Algorithm 1 Dijkstra 算法

```
1: procedure DIJKSTRA( $G$ : 所有权都为正数的带权连通简单图)  $\{G$  有顶点  $a = v_1, v_2, \dots, z = v_n$ , 相应边上  
   的权值为  $w(v_i, v_j)\}$   
2:   for  $i := 1$  to  $n$  do  
3:      $L(v_i) := \infty$   
4:    $L(a) := 0$   
5:    $S := \emptyset$   
6:   while  $z \notin S$  do  
7:      $u :=$  不属于  $S$  的  $L(u)$  最小的一个顶点  
8:      $S := S \cup \{u\}$   
9:     for 所有不属于  $S$  的且属于  $N(u)$  的顶点  $v$  do  
10:       $L(v) := \min\{L(v), L(u) + w(u, v)\}$   
      {向  $S$  中添加带最小标记的顶点, 并且更新不在  $S$  中的顶点的标记}  
11: return  $L(z)$   $\{L(z) =$  从  $a$  到  $z$  的最短通路的长度 $\}$ 
```

证明：*Dijkstra* 算法第 8 行每次更新 S 时，当前的 L 对于要加入的 u 都满足 $L(u)$ 等于 a 到 u 最短路的权值。

Problem 2

下面是 *Floyd* 算法的一个实现，它求出了任意点对间所有边权的和最小的通路的长度，请尝试修改该算法中相应的行，解决下问题（无需证明修改的正确性）：

- a) 对于任意边权大于 1 的图 G ，对于任意点对 a, z ，试求 a 到 z 的通路所有边的权值乘积最小可以是多少；，
下同）

Algorithm 2 Floyd 算法

```
1: procedure FLOYD( $G$ : 带权简单图)  $\{G$  有顶点  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , 相应边上的权值为  $w(v_i, v_j)\}$ 
2:   for  $i := 1$  to  $n$  do
3:     for  $j := 1$  to  $n$  do
4:       if  $(v_i, v_j) \in E(G)$  then
5:          $d(v_i, v_j) := w(v_i, v_j)$ 
6:       else
7:          $d(v_i, v_j) := \infty$ 
8:   for  $i := 1$  to  $n$  do
9:     for  $j := 1$  to  $n$  do
10:      for  $k := 1$  to  $n$  do
11:        if  $d(v_j, v_i) + d(v_i, v_k) < d(v_j, v_k)$  then
12:           $d(v_j, v_k) := d(v_j, v_i) + d(v_i, v_k)$ 
           $\{d(v_i, v_j)$  是在  $v_i$  与  $v_j$  之间的最短通路的长度, 为  $\infty$  时表示通路不存在 $\}$ 
```

- b) 定义一条通路的“强度”为通路上权最小的边的权值（例如，由权值依次为 3, 5, -2, 1 的边组成的通路强度为 -2），对于任意点对 a, z ，试求 a 到 z 的最强的通路的强度可以是多少。

Problem 3

若边的权可以为负数，*Dijkstra* 算法能否正确求出最短路？若可以，请给出证明；若不能，请举出一个反例并分析说明。

Problem 4

求下图中以 A 为源点到图中其他所有点的最短路径。

