Problem Set 10: 数学归纳法与递归结构

提交截止时间：4 月 8 日 10:00

Problem 1

问题: 给出下述集合的递归定义:
a. 正奇数集合.

```
K = 正奇数集合

1 ∈ k
n ∈ k, (n + 2) ∈ k
```

b. 整系数多项式的集合.

```
Z是Z(x) 的子集，其中任何整数 a 可以看作一个常数多项式 a∈Z(x)。

如果 f(x) 和 g(x) 是 Z[x] 中的多项式，则它们的和 f(x)+g(x) 也是 Z[x] 中的多项式。
如果 f(x) 和 g(x) 是 Z[x] 中的多项式，则它们的乘积 f(x)·g(x) 也是 Z[x] 中的多项式。
如果 f(x) 是 Z[x] 中的多项式，则其相反数-f(x) 也是 Z[x] 中的多项式。

```

c. 3 的正整数次幂的集合.

```
K = 正奇数集合
1 ∈ K
n ∈ k, (n * 3) ∈ K
```

Problem 2

当n为非负整数时, 证明 : $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$可被9整除
当n = 0时，原式成立
假设当$n = k$时，原式成立$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = m * 9, m \in Z$
当$n = k + 1$时，原式等于$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + 9n^2 + 27n + 27$
所以当n = k + 1时依然成立
因此原式成立。

Problem 3

用数学归纳法证明平面上过同一点的n条直线将平面分为2^n个区域.
当n = 0, 原式成立
假设当n = k 原式成立
当n = k + 1时，增加的一条直线可以使得平面上的区域增加2个
此时平面中区域为$2^n + 2个 = 2^{n+1}$
故原式成立

Problem 4

正整数 n 的拆分是把 n 写成正整数之和的方式. 例如，7 = 3 + 2 + 1 + 1 是 7 的拆分. 设 Pm 等于 m 的不同分拆的数
目, 其中和式里项的顺序无关紧要, 并设 Pm,n 是用不超过 n 的正整数之和来表示 m 的不同方式数.
a. 证明: Pm,n = Pm .

1b. 证明: 下面的 Pm,n 的递归定义是正确的.
c. 用这个递归定义求出 5 和 6 的拆分数.

Problem 5

证明：当n是正整数时，有$f_1^2+f_2^2+...+f_n^2=f_n*f_{n+1}$，其中$fn$是第$n$个斐波那契数。
当n = 1时，原式成立
假设当n = k时，原式成立
当n = k + 1时，
左式$=f_1^2+f_2^2+...+f_n^2+f_{n+1}^2$
$=f_n*f_{n+1}+f_{n+1}^2$
$=f_{n+1}*f_{n+2}^2$
所以原式成立

Problem 6

证明算术基本定理. 即: 每个大于 1 的自然数, 要么本身就是质数, 要么可以写为 2 个或以上的质数的积. 并且这些质
因子按大小排列之后, 写法仅有一种方式.
当n = 2, 3, 4时候，原式成立
假设当n = k时，原式成立
当n = k + 1

1. n 为质数，原式成立
2. n 不为质数，根据质数定义，
   $n=2^x*2^y*2^z*...*$
   所以原式成立

Problem 7

设 S 是一个正整数集合，定义如下：
基础步骤：1 ∈ S。
归纳步骤：如果$n\in S$，则$3n+2\in S$且$n^2\in S$。
a. 证明如果 n ∈ S，则 n ≡ 1(mod 4)。

当$n = 1$时，原式成立
假设$n = 3k + 2$时，原式成立
当 $n = k + 1$时， 左式 $= 3k + 5$
b. 证明存在一个正整数 m，$m \equiv 1 \pmod 4$ 不属于 S。

Problem 8

证明：在任意长度有限的 0/1 序列中，字符串 01 至多比字符串 10 多出现 1 次。
假设01比10出现多两次
则该序列中所有0的左侧要么是0要么是空，且这种情况下的01中的0左侧必须为0
所有0的右侧要么是0要么是1
现在选中其中一个01中的0，他的右侧是1，左侧是0
现在选中另一个01中的0，他的右侧是1，左侧是0
任意排列组合都无法满足题意
故假设不成立，命题成立

Problem 9

给出当 n 和 m 都是正整数时，求 $n! \bmod m$ 的递归算法

```
当 n = 1, n! mod m = 1
否则 n! mod m = (n mod m * ((n - 1)! mod m)) mod m
```

Problem 10

证明：对于任意正整数 n，我们一定能找到数 $1, 2, \ldots, n$ 的一个排列，使得在排列中这些数任何两个数的均值都不会
出现在这两个数之间。
当n为偶数