

Problem Set 7: 函数

提交截止时间：4 月 1 日 10:00

Problem 1

判断下面定义的几个 $f(n)$ 是否是从 \mathbf{Z} 到 \mathbf{R} 的函数。

a) $f(n) = n^3$

b) $f(n) = \sqrt{n^2 - n + 1}$

c) $f(n) = \frac{1}{n}$

Problem 2

判断下列各函数是否是从 \mathbf{R} 到 \mathbf{R} 的双射函数。

a) $f(x) = \cos x$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

c) $f(x) = x^3$

d) $f(x) = e^x - 1$

Problem 3

令 f 为从 \mathbf{R} 到 \mathbf{R} 的函数 $f(x) = x^2 + 2x$ 。求

a) $f^{-1}(\{1\})$

b) $f^{-1}(\{x | 0 < x < 1\})$

c) $f^{-1}(\{x | x > 3\})$

Problem 4

设 $f: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 的解析式为 $f(x, y) = (x + y, x - y)$ ，试证明： f 是双射。

Problem 5

求下列函数的定义域和值域。

- a) 函数为每对正整数序偶指派这两个整数中的最大数。
- b) 函数为扑克牌（不含大小王）的花色。
- c) 函数为位串指派串中块 11 出现的次数。
- d) 函数为正整数除以 2 的余数。

Problem 6

判断下列情况下 $f: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ 是否是满射的？

- a) $f(m, n) = 2m - n$
- b) $f(m, n) = m + n + 1$
- c) $f(m, n) = |m| - |n|$
- d) $f(m, n) = m^2 + |n|$
- e) $f(m, n) = m^2 - n^2$

Problem 7

设 f 是一个从集合 A 到集合 B 的函数，其中集合 A 和集合 B 是有限集，且 $|A| = |B|$ 。证明 f 是单射当且仅当它是满射。[提示： $|A| \geq |f(A)|$]

Problem 8

假定 f 是从 X 到 Y 的函数， g 是从 Y 到 X 的函数。证明 $f \circ g = I_Y$, $g \circ f = I_X$ 与 $f^{-1} = g$, $g^{-1} = f$ 等价。其中 I_X 和 I_Y 分别是 X 和 Y 上的恒等函数。

Problem 9

设 $f: A \rightarrow B$ 且 $g: B \rightarrow C$ ，若 $f \circ g$ 是单射，证明 f 是单射。

Problem 10

令 f 为从 A 到 B 的函数。 S 为 B 的子集。证明 $f^{-1}(\bar{S}) = \overline{f^{-1}(S)}$ 。

Problem 11

设 R_1, R_2 是集合 A 上的关系，试说明：

- a) 若 R_1, R_2 满足自反性，则 $R_2 \circ R_1$ 是否满足自反性？

b) 若 R_1, R_2 满足对称性, 则 $R_2 \circ R_1$ 是否满足对称性?

c) 若 R_1, R_2 满足传递性, 则 $R_2 \circ R_1$ 是否满足传递性?

Problem 12

设 f 是从 Y 到 Z 的可逆函数, g 是从 X 到 Y 的可逆函数。证明 $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ 。