

Problem Set 25A: 欧拉图与哈密顿图

(欧拉图部分)

提交截止时间：6 月 3 日 10:00

Problem 1

试确定下方所示各图是否具有欧拉回路。若存在欧拉回路，则构造出一条欧拉回路。若不存在，试确定这个图是否具有欧拉通路。若存在欧拉通路，则构造出一条欧拉通路。

- | | |
|---|---------------------------------------|
| 1 | (1)中的所有结点都是偶度结点，故存在欧拉回路，fieabcdhjgf |
| 2 | (2)不存在欧拉回路，存在欧拉通路 如 ieaifebafgdchdjcb |
| 3 | |

Problem 2

对哪些 m 和 n 值来说，完全二部图 $K_{m,n}$ 具有

1. 欧拉回路？

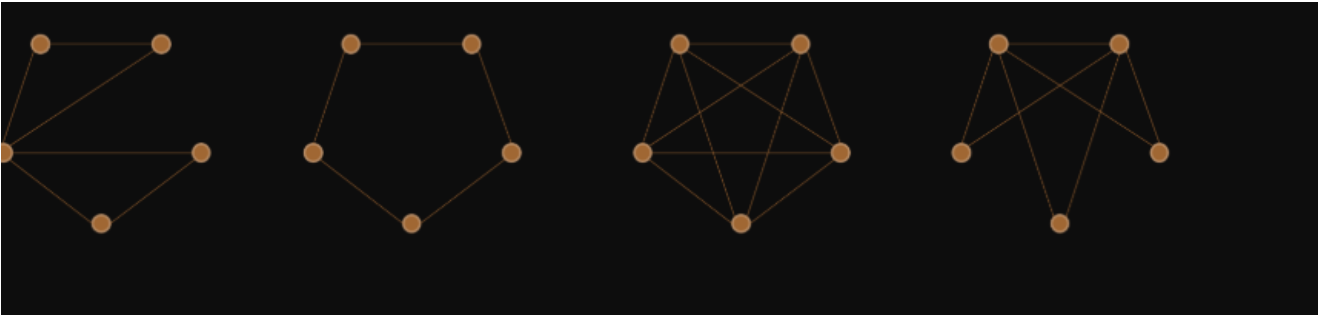
- | | |
|---|----------------|
| 1 | m 和 n 均为偶数 |
|---|----------------|

2. 欧拉通路？

- | | |
|---|--------------------------|
| 1 | m 和 n 均为偶数； |
| 2 | m 与 n 中一个为奇数，另一个为 2； |
| 3 | m 和 n 均为 1。 |

Problem 3

请找出所有互不同构的具有 5 个顶点的欧拉图（仅考虑无向简单图，画图示意即可）。



Problem 4

证明或反驳：若无向简单图 G_1 和 G_2 是顶点数、边数均相等的欧拉图，则 G_1 和 G_2 同构。

- 1 | G_1 为 C_3 和 C_5 共用一个顶点构成的图， G_2 为 C_4 和 C_4 共用一个顶点构成的图， G_1 和 G_2 均有 7 个顶点 8 条边且均为欧拉图，但不同构。

Problem 5

若无向简单图 G 有欧拉通路，证明或反驳：

1. 当 G 的顶点数是奇数时，若补图 \bar{G} 是连通的，则 \bar{G} 中存在欧拉通路。

- 1 | 当 G 有奇数个顶点时，若 G 有欧拉通路，则 G 有 2 个（或 0 个）奇数度顶点，其他顶点的度均为偶数。则补图 \bar{G} 中也只有 2 个（或 0 个）奇数度顶点，其他顶点度均为偶数。因此若 \bar{G} 是连通的，则 \bar{G} 存在欧拉通路。

2. 当 G 的顶点数是偶数时，若补图 \bar{G} 是连通的，则 \bar{G} 中不存在欧拉通路。

- 1 | 当 G 为 4 个顶点构成的简单通路时， G 和 \bar{G} 均存在欧拉通路。

Problem 7

友谊图：简单图 F 满足 $|V(F)| > 2$ 且对于任意 $u, v \in V(F)$ ， u, v 有且仅有一个共同的相邻节点（两个人只有唯一的朋友），则称 F 是友谊图。

试证明：友谊图一定是欧拉图。

- 1 | 图上任意的边 $e = (u, v)$ ， e 的两个端点 u, v 有唯一的共同相邻节点 w ，
- 2 | 所以 F 上的每个边 (u, v) 都唯一的对应相应的 $(u, v), (u, w), (v, w)$ 三条边构成的一个 K_3 子图。
- 3 | 由于每条边 e 对应的共同相邻节点只能有一个， $(u, w), (v, w)$ 对应的必然也只能是 $(u, v), (u, w), (v, w)$ 。
- 4 | 所有边对图上顶点度的和，等同于所有这样的 K_3 子图的贡献之和，而这样的三条边对所有点的度数贡献均为 0 或 2。
- 5 | 所有点的度必然是偶数，即 F 是欧拉图。