Problem Set 1:命题逻辑初步

Problem1

p	q	¬(p ∨ q)	¬p ∧ ¬q
T	T	⊥	⊥
T	⊥	⊥	⊥
⊥	T	⊥	⊥
⊥	⊥	T	T

Problem2

1. 2 + 2 = 5 当且仅当1 + 1 = 3

```
    (2 + 2 = 5) ↔ (1 + 1 = 3)
    = ⊥ ↔ ⊥
    = T
```

2. 如果 1 + 1 = 2，则 2 + 2 = 5

```
(1 + 1 = 2) → (2 + 2 = 5)
= T → ⊥
= ⊥
```

3. 如果 1 + 1 = 3，则 2 + 2 = 5

```
(1 + 1 = 3) → (2 + 2 = 5)
= ⊥ → ⊥
= T
```

4. 如果 0 > 1，则 2 > 1

```
(0 > 1) → (2 > 1)
= ⊥ → T
= T
```

Problem3

只有当你已经完成了专业要求，没有欠大学的钱，也没有图书馆的过期图书未还时，你才能从大学毕业。试用命题来表达前述复合命题。

g: “你可以从大学毕业”

m: “你欠大学的钱”

r: “你已经完成了你的专业要求”

b: “你有过期的图书馆图书未还”

```
g → ( r ∧ ¬m ∧ ¬b )
```

Problem4

证明 ¬p → (q → r) 和 q → (p ∨ r) 逻辑等价。

```
左式
  ¬p → (q → r)
= ¬p → (¬q ∨ r)
= p ∨ ¬q ∨ r

右式
  q → (p ∨ r)
= ¬q ∨ (p ∨ r)
= p ∨ ¬q ∨ r
```

Problem5

证明 p → (q → r) 和 p ∧ q → r 逻辑等价。

```
左式
  p → (q → r)
= ¬p ∨ (q → r)
= ¬p ∨ ¬q ∨ r

右式
  p ∧ q → r
= ¬(p ∧ q) ∨ r
= ¬p ∨ ¬q ∨ r
```

Problem6

证明 (p → q) → (r → s) 和 (p → r) → (q → s) 不是逻辑等价。

```
左式
  (p → q) → (r → s)
= (¬p ∨ q) → (¬r ∨ s)
= ¬(¬p ∨ q) ∨ (¬r ∨ s)
= (p ∧ ¬q) ∨ ¬r ∨ s
= ¬¬(p ∧ ¬q) ∨ ¬r ∨ s
= ¬(¬p ∨ q) ∨ ¬r ∨ s

右式
  (p → r) → (q → s)
= (¬p ∨ r) → (¬q ∨ s)
= ¬(¬p ∨ r) → (¬q ∨ s)
= (p ∧ ¬r) ∨ ¬q ∨ s
```

Problem 7

判断 (¬p ∧ (p → q)) → ¬q 是否为永真式。

```
当p ≡ ⊥, q ≡ T时
| p | q | p → q | (¬p ∧ (p → q)) | (¬p ∧ (p → q)) → ¬q |
| ⊥ | T | T     | T              |        ⊥            |
故该式不是永真式
```

Problem 8

证明 (p → q) ∧ (q → r) → (p → r) 是永真式。

```
  (p → q) ∧ (q → r) → (p → r)
= (¬p ∨ q) ∧ (¬q ∨ r) → (¬p ∨ r)
= ¬((¬p ∨ q) ∧ (¬q ∨ r)) ∨ (¬p ∨ r)
= (p ∧ ¬q) ∨ (q ∧ ¬r) ∨ (¬p ∨ r)
= (p ∧ ¬q) ∨ ((q ∨ ¬p ∨ r) ∧ (¬r ∨ ¬p ∨ r))
= (p ∧ ¬q) ∨ ((q ∨ ¬p ∨ r) ∧ T)
= (p ∧ ¬q) ∨ (q ∨ ¬p ∨ r)
= (p ∨ q ∨ ¬p ∨ r) ∧ (¬q ∨ q ∨ ¬p ∨ r)
= T ∧ T
= T
```

Problem9

给出下列事实及定义：

1. 假设给定一个有 n 个命题变元的真值表，那么可通过下面的方法构造一个与此表一致的复合命题：取各
   命题变元或其否定的合取式的析取式，其中的每个合取式对应一组真值组合，从而使得该复合命题为真。
   这样得到的复合命题称为析取范式。
2. 一组逻辑运算符称为是功能完备的，如果每个复合命题都逻辑等价于一个只含这些逻辑运算符的复合命题。
   请证明：

a. ¬、∧ 和 ∨ 构成一个逻辑运算符的功能完备集。

```
根据蕴含等价式(p → q ≡ ¬p ∨ q)
所以 ¬ ∧ ∨ 能表示的逻辑命题与 ¬ ∧ ∨ → 等价
故¬ ∧ ∨构成一个逻辑运算符的功能完备集。
```

b. ¬、∧ 构成一个逻辑运算符的功能完备集。

```
根据德摩根律¬(p ∧ q) ≡ (¬p ∨ ¬q)
所以 ¬ ∧ 能表示的逻辑命题与 ¬ ∧ ∨  等价
又因为 ¬ ∧ ∨ 能表示的逻辑命题与 ¬ ∧ ∨ → 等价
故¬ ∧ 构成一个逻辑运算符的功能完备集。
```

c. ¬、∨ 构成一个逻辑运算符的功能完备集。

```
根据德摩根律¬(p ∧ q) ≡ (¬p ∨ ¬q)
所以 ¬ ∨ 能表示的逻辑命题与 ¬ ∧ ∨  等价
又因为 ¬ ∧ ∨ 能表示的逻辑命题与 ¬ ∧ ∨ → 等价
故¬ ∨ 构成一个逻辑运算符的功能完备集。
```

Problem 10

证明: 如果 p、q 和 r 是复合命题，且 p 与 q 是逻辑等价的，q 与 r 是逻辑等价的，则 p 与 r 是逻辑等价的。

p	q	r
T	T	T
⊥	⊥	⊥

所以 $p \leftrightarrow r$

Problem 11

试判断下列复合命题是否是可满足的。

1. $(p \lor \neg q) \land (\neg p \lor q) \land (\neg p \lor \neg q)$

```
  (p ∨ ¬q) ∧ (¬p ∨ q) ∧ (¬p ∨ ¬q)
= ((p ∧ (¬p ∨ q)) ∨ (¬q ∨ (¬p ∧ q))) ∧ (¬p ∨ ¬q)
= ((p ∧ q) ∨ (¬p ∧ ¬q)) ∧ (¬p ∨ ¬q)
= ((p ∧ q) ∧ (¬p ∨ ¬q)) ∨ ((¬p ∧ ¬q) ∧ (¬p ∨ ¬q))
= ((p ∧ q) ∧ ¬p) ∨ ((p ∧ q) ∧ ¬q) ∨ ((¬p ∧ ¬q) ∧ (¬p ∨ ¬q))
= (¬p ∧ ¬q) ∧ (¬p ∨ ¬q)
= (¬p ∧ ¬q ∧ ¬p) ∨ (¬p ∧ ¬q ∧ ¬q)
= (¬p ∧ ¬q) ∨ (¬p ∧ ¬q)
= (¬p ∧ ¬q)
所以该命题可以满足
```

2. $(\neg p \lor \neg q \lor r) \land (\neg p \lor q \lor \neg s) \land (p \lor \neg q \lor \neg s) \land (\neg p \lor \neg r \lor \neg s) \land (p \lor q \lor \neg r) \land (p \lor \neg r \lor \neg s)$

p	**q**	**r**	**s**	**(¬p ∨ ¬q ∨ r)**	**(¬p ∨ q ∨ ¬s)**	**(p ∨ ¬q ∨ ¬s)**	**(¬p ∨ ¬r ∨ ¬s)**	**(p ∨ q ∨ ¬r)**	**(p ∨ ¬r ∨ ¬s)**
T	T	T	T	T	T	T	⊥	T	T
T	T	T	⊥	T	T	T	T	T	T
T	T	⊥	T	⊥	T	T	⊥	T	T
T	T	⊥	⊥	⊥	T	T	T	T	T
T	⊥	T	T	T	⊥	T	T	T	T
T	⊥	T	⊥	T	T	T	T	T	T

p	**q**	**r**	**s**	**(¬p ∨ ¬q ∨ r)**	**(¬p ∨ q ∨ ¬s)**	**(p ∨ ¬q ∨ ¬s)**	**(¬p ∨ ¬r ∨ ¬s)**	**(p ∨ q ∨ ¬r)**	**(p ∨ ¬r ∨ ¬s)**
T	⊥	⊥	T	T	⊥	T	T	T	T
T	⊥	⊥	⊥	T	T	T	T	T	T
⊥	T	T	T	T	T	⊥	T	T	⊥
⊥	T	T	⊥	T	T	T	T	T	T
⊥	T	⊥	T	T	T	⊥	T	T	T
⊥	T	⊥	⊥	T	T	T	T	T	T
⊥	⊥	T	T	T	T	T	T	⊥	⊥
⊥	⊥	T	⊥	T	T	T	T	⊥	T
⊥	⊥	⊥	T	T	T	T	T	T	T
⊥	⊥	⊥	⊥	T	T	T	T	T	T

故可以满足

3. (p ∨ q ∨ r) ∧ (p ∨ ¬q ∨ ¬s) ∧ (q ∨ ¬r ∨ s) ∧ (¬p ∨ r ∨ s) ∧ (¬p ∨ q ∨ ¬s) ∧ (p ∨ ¬q ∨ ¬r) ∧ (¬p ∨ ¬q ∨ s) ∧ (¬p ∨ ¬r ∨ ¬s)

p	**q**	**r**	**s**	**(p ∨ q ∨ r)**	**(p ∨ ¬q ∨ ¬s)**	**(q ∨ ¬r ∨ s)**	**(¬p ∨ r ∨ s)**	**(¬p ∨ q ∨ ¬s)**	**(p ∨ ¬q ∨ ¬r)**	**(¬p ∨ ¬q ∨ s)**	**(¬p ∨ ¬r ∨ ¬s)**
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	⊥
T	T	T	⊥	T	T	T	T	T	T	⊥	T
T	T	⊥	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	⊥	⊥	T	T	T	⊥	T	T	⊥	⊥
T	⊥	T	T	T	T	T	T	⊥	T	T	T
T	⊥	T	⊥	T	T	T	T	T	T	T	T
T	⊥	⊥	T	T	T	T	T	⊥	T	T	T
T	⊥	⊥	⊥	T	T	T	⊥	T	T	T	T
⊥	T	T	T	T	⊥	T	T	T	⊥	T	T
⊥	T	T	⊥	T	T	⊥	T	T	⊥	T	T
⊥	T	⊥	T	T	⊥	T	T	T	T	T	T
⊥	T	⊥	⊥	T	T	T	T	T	T	T	T

p	q	r	s	(p ∨ q ∨ r)	(p ∨ ¬q ∨ ¬s)	(q ∨ ¬r ∨ s)	(¬p ∨ r ∨ s)	(¬p ∨ q ∨ ¬s)	(p ∨ ¬q ∨ ¬r)	(¬p ∨ ¬q ∨ s)	(¬p ∨ ¬r ∨ ¬s)
⊥	⊥	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
⊥	⊥	T	⊥	T	T	⊥	T	T	T	T	T
⊥	⊥	⊥	T	⊥	T	T	T	T	T	T	T
⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	T	T	T	T	T	T	T

故可以满足