Problem Set 22: 布尔代数引论

提交截止时间：5 月 27 日 10:00

Problem 1

设 B 是布尔代数，B 中的表达式 f 是 (a ∧ b) ∨ (a ∧ b ∧ c) ∨ (b ∧ c).

1. 化简 f ;

a	b	c	(a ∧ b)	(a ∧ b ∧ c)	(b ∧ c)	(a ∧ b) ∨ (a ∧ b ∧ c) ∨ (b ∧ c)
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

$f = (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c)$
$= (a \wedge b) \vee (b \wedge c)$
$= b \wedge (a \vee c)$

2. 求 f 的对偶式 f ∗ .
   f * = (a ∨ b) ∧ (a ∨ b ∨ c) ∧ (b ∨ c)

Problem 2

设 < b, ∧, ∨, ', 0, 1 > 是布尔代数, 证明 ∀a, b ∈ b 有以下命题成立

1. a ∨ (a' ∧ b) = a ∨ b
   $a \vee (a' \wedge b)$
   $= (a \vee a') \wedge (a \vee b)$
   $= 1 \wedge (a \wedge b)$
   $= (a \wedge b)$
2. a ∧ b' = 0 ⇔ a' ∨ b = 1 ⇔ a ≤ b
   根据德摩根律
   (a ∧ b')' = 0' ↔ a' ∨ b = 1
   逆向同理可证 a ∧ b' = 0

ab\expr	a ∧ b	a ∨ b
00	a	b
01	a	b
11	a	b
10	b	a

根据真值表，当ab符合前三组时a ≤ b，同时当a≤ b时，符合前三组数据。

Problem 3

设 B 是布尔代数，∀a, b, c ∈ B，若 a ≤ c，则 a ∨ (b ∧ c) = (a ∨ b) ∧ c，称这个等式为模律。证明布尔代数适合模律。

ac\expr	a ∨ (b ∧ c)	(a ∨ b) ∧ c
00	0	0
01	b	b
11	1	1
10	1	0
根据真值表，当a ≤ c, 则a ∨ (b ∧ c) = (a ∨ b) ∧ c		

Problem 4

设 B 是布尔代数, a1 , a2 , · · · , an ∈ B, 证明:

1. (a1 ∨ a2 ∨ · · · ∨ an)' = a'1 ∧ a'2 ∧ · · · ∧ a'n

```
当n = 2时，显然成立
假设当n = k时，原式成立。
根据结合律,
原式= ((a1 ∨ a2) ∨ (a3 ... ak + 2))'
= (a1 ∨ a2)' ∧ (a3 ... ak + 2)'
= a'1 ∧ a'2 ∧ (a3 ... ak + 2)'
根据假设，(a3 .. ak + 2)' = a'3 ∧ a'4 .. a'k+2
所以，原式最终可化为a'1 ∧ a'2 ∧ · · · ∧ a'k+2
故原命题得证
```

2. (a1 ∧ a2 ∧ · · · ∧ an)' = a'1 ∨ a'2 ∨ · · · ∨ a'n

```
当n = 2时，显然成立
假设当n = k时，原式成立。
根据结合律,
原式= ((a1 ∧ a2) ∧ (a3 ... ak + 2))'
= (a1 ∧ a2)' ∨ (a3 ... ak + 2)'
= a'1 ∨ a'2 ∨ (a3 ... ak + 2)'
根据假设，(a3 ... ak + 2)' = a'3 ∨ a'4 .. a'k+2
所以，原式最终可化为a'1 ∨ a'2 ∨ ... ∨ a'k+2
故原命题得证
```

Problem5

设 (B, ∨, ∧, −, 0, 1) 和 (S, +, ∗, ¬, 0̃, 1̃) 是两个布尔代数，f 是 B 到 S 的映射。
证明：如果对于任意的 a, b ∈ B, 有

1. f (a ∧ b) = f (a) ∗ f (b)
2. f (ā) = ¬f (a)
   则 f 是一个同态映射。

```
f(a' ∨ b') = f((a ∧ b)') = ¬f(a ∧ b) = ¬(f(a) * f(b)) = ¬f(a) + ¬f(b) = f(a') + f(b')
f(0) = f(1') = ¬f(1) = ¬f(a ∨ a') = ¬(f(a) * f(a')) = ¬f(a) + f(a) = 0^
f(1) = f(a ∨ a') = f(a) * ¬f(a) = 1^
所以f是一个同态映射。
```

Problem 6

设 < B, ∧, ∨, ', 0, 1 > 是布尔代数, 在 B 上定义二元运算 ⊕, ∀x, y ∈ B 有
$x \oplus y = (x \wedge y\prime) \vee (x\prime \wedge y)$
证明 < B, ⊕ > 是交换群, 并且 ∀x, y, z ∈ B 有
$x \oplus y. \wedge z = (x \wedge z) \oplus (y \wedge z)$
$x \wedge (y \oplus z) = (x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$
注记: 这个练习给出了布尔代数上的环结构。

Problem 7

设 S 是命题逻辑中的全体公式，在其上定义定价关系 ∼ 如下：称 ϕ ∼ ψ, 如果 ϕ ↔ ψ 是重言式。
记 S 在 ∼ 下的全体等价类为 S/ ∼, 试在 S/ ∼ 上定义 ∧, ∨, ' , 0, 1 使其成为一个布尔代数。

```
∀ a, b ∈ S, [a] ∧ [b] = [a ∧ b]
∀ a, b ∈ S, [a] ∨ [b] = [a ∨ b]
∀ a ∈ S, ¬[a] = [¬a]
0 = [⊥]
1 = [T]
```

Problem 8

设 (B, ∨, ∧, −, 0, 1) 是一个布尔代数，n 元集合 A ⊆ B。记 A^{∗} = ∩ {X | A ⊆ X ⊆ B X是B的子布尔代数} 证明 A∗ 的基数不超过 2^{2^{n}}
。

$A*$是所有包含A的子布尔代数的交集。这意味着$A*$包含了所有子布尔代数共有的元素。由于每个子布尔代数至少包含A中元素的补元素，$A*$也必须包

所以，除了A本身的n个元素外，$A*$还可能包含最多n个补元素。这意味着$A*$的基数最多是2^{2n}。

又因为2^2n总是小于2^{2^n}，因为2^{2n}是多项式级别的增长，而2^{2^n}是指数级别的增长。所以$A*$的基数不超过2^{2^n}。