第三次作业

Problem 1

令 C(x) 为语句“x 有一只猫作为宠物”，D(x) 为语句“x 有一只狗作为宠物”，F (x) 为语句“x 有一只雪貂作为宠物”。用 C(x)、D(x)、F (x)、量词和逻辑联结词表达下列语句。令论域为你班上的所有学生。

a. 班上的一个学生有一只猫和一只狗和一只雪貂。

```
∃ x  C(x) ∧ D(X) ∧ F(x)
```

b. 班上的所有学生有一只猫或一只狗或一只雪貂。

```
∀ x  C(x) ∨ D(X) ∨ F(x)
```

c. 班上的一些学生有一只猫和一只雪貂，但没有狗。

```
∃ x  (C(x) ∨ F(x)) ∧ ¬D(x)
```

d. 班上没有学生同时有一只猫和一只狗和一只雪貂。

```

∀ x  ¬(C(x) ∧ F(x) ∧ ¬D(x))
```

e. 对猫、狗和雪貂这三种动物的任意一种，班上都有学生将其作为宠物。

```
∃ x  D(x)
∃ x  F(x)
∃ x  C(x)
```

Problem 2

如果每个变量的论域都为实数集合, 判断下列各语句的真值。
a. $\exists x(x^2 = 2)$

```
T
```

c. $\forall x (x^2 + 2 \geq 1)$

```
T
```

b. $\exists x (x^2 = -1)$

```
⊥
```

d. $\forall x (x^2 \neq x)$

```
⊥
```

Problem 3

求下列命题的真值 (其中 ∃! 表示量词：存在且唯一的)。
a. ∃ !xP (x) → ∃ xP (x)

```
T
```

b. ∀ xP (x) → ∃ !xP (x)

```
⊥
```

c. ∃ !x¬P (x) → ¬∀ xP (x)

```
T
```

Problem 4

离散数学班上有 1 个数学专业的新生, 12 个数学专业的二年级学生, 15 个计算机科学专业的二年级学生, 2 个数
学专业的三年级学生, 2 个计算机科学专业的三年级学生, 和 1 个计算机科学专业的四年级学生。用量词表达下
列语句, 再给出其真值。
a. 班上有一个三年级学生。

```
令论域为离散数学班的学生
∃ x （x为三年级）
T
```

b. 班上每个学生都是计算机科学专业的。

```
令论域为离散数学班的学生
∀x （x为计算机科学专业）
⊥
```

c. 班上有个学生既不是数学专业的, 也不是三年级学生。

```
令论域为离散数学班的学生
∃x （x不是数学专业 ∧ x不是三年级学生）
T
```

d. 班上每个学生要么是二年级学生, 要么是计算机科学专业的。

```
令论域为离散数学班的学生
∀ x （x是二年级学生 ∨ x是计算机专业）
⊥
```

e. 存在这样一个专业使得该班级有这个专业每一个年级的学生。

```
令论域为离散数学班的学生
∃ C ∈ {课程集合} (∀ Y ∈ {1, 2, 3, 4} (∃ x (x是C专业) ∧ (x是Y年级)))
⊥
```

Problem 5

使用谓语、量词、逻辑联结词和数学运算符表达语句“有一个正整数不是三个整数的平方和”。

```
∃ x (∀ a, b, c ∈ N (x ≠ a ^ 2 + b ^ 2 + c ^ 2))
```

Problem 6

找出变元 x、y 和 z 的一个公共论域, 使语句 ∀ x ∀y((x ≠ y) → ∀z((z = x) ∨ (z = y))) 为真, 再找出另外一个
论域使其为假。

```
当论域为{1}时为真
当论域为{1, 2}时为假
```

Problem 7

证明两个语句 ¬∃x∀yP (x, y) 和 ∀x∃y¬P (x, y) 是逻辑等价的, 这里两个 P (x, y) 第一个变元的量词具有相同的
论域, 两个 P (x, y) 第二个变元的量词也具有相同的论域。

```
证明:
    ¬∃x∀yP (x, y)
≡ ∀(¬∀y P(x, y))
≡ ∀(∃y ¬P(x, y))
原题得证
```

Problem 8

用推理规则证明：如果 ∀x(P (x) → (Q(x) ∧ S(x))) 和 ∀x(P (x) ∧ R(x)) 为真，则 ∀x(R(x) ∧ S(x)) 为真。

```
∀x(P(x) ∧ R(x))
______________________
∀xP(x) ≡ ∀xR(x) ≡ T

∀x(P(x) → (Q(x) ∧ S(x)))
∀xP(x)
______________________
(∀x(Q(x) ∧ S(x)))
______________________
∀x(Q(x)) ===  ∀x(S(x)) ≡ T

∀x(S(x)) ≡ ∀x(P(x)) ≡ T
________________________
```

```
∀x(S(x) ∧ P(x))
```

Problem 9

用推理规则证明: 如果 ∀x(P (x) ∨ Q(x)) 和 ∀x(¬Q(x) ∨ S(x)), ∀x(R(x) → ¬S(x)) 和 ∃x¬P (x) 为真, 则 ∃x¬R(x)
为真。

```
∀x(P (x) ∨ Q(x))
∃x¬P (x)
_________________
∀x(P (x) ∨ Q(x))
∀xP(x) ≡ ⊥
_________________
∀x(Q(x) ≡ T
∀x(¬Q(x) ∨ S(x))
_________________
∀x(S(x)) ≡ T
∀x(R(x) → ¬S(x))
_________________
∀x(R(x)) ≡ ⊥
________________
¬∀x(R(x)) ≡ T
∃x(R(x)) ≡ T
```