Problem Set 10: 数学归纳法与递归结构

提交截止时间：4 月 8 日 10:00

Problem 1

问题: 给出下述集合的递归定义:

a) 正奇数集合.

b) 整系数多项式的集合.

c) 3 的正整数次幂的集合.

Problem 2

当 n 为非负整数时, 证明: $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ 可被 9 整除.

Problem 3

用数学归纳法证明平面上过同一点的 n 条直线将平面分为 $2n$ 个区域.

Problem 4

正整数 n 的拆分是把 n 写成正整数之和的方式. 例如，$7 = 3 + 2 + 1 + 1$ 是 7 的拆分. 设 P_m 等于 m 的不同分拆的数目, 其中和式里项的顺序无关紧要, 并设 $P_{m,n}$ 是用不超过 n 的正整数之和来表示 m 的不同方式数.

a) 证明: $P_{m,n} = P_m$.

b) 证明: 下面的 $P_{m,n}$ 的递归定义是正确的.

$$P_{m,n} = \begin{cases} 1 & m = 1 \\ 1 & n = 1 \\ P_{m,m} & m < n \\ 1 + P_{m,m-1} & m = n > 1 \\ P_{m,n-1} + P_{m-n,n} & m > n > 1 \end{cases}$$

c) 用这个递归定义求出 5 和 6 的拆分数.

Problem 5

证明：当 n 是正整数时，有 $f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$，其中 f_n 是第 n 个斐波那契数。

Problem 6

证明算术基本定理. 即: 每个大于 1 的自然数, 要么本身就是质数, 要么可以写为 2 个或以上的质数的积. 并且这些质因子按大小排列之后, 写法仅有一种方式.

Problem 7

设 S 是一个正整数集合，定义如下：

基础步骤：$1 \in S$。

归纳步骤：如果 $n \in S$，则 $3n + 2 \in S$ 且 $n^2 \in S$。

a) 证明如果 $n \in S$，则 $n \equiv 1 (mod\ 4)$。

b) 证明存在一个正整数 m，$m \equiv 1 (mod\ 4)$ 不属于 S。

Problem 8

证明：在任意长度有限的 0/1 序列中，字符串 01 至多比字符串 10 多出现 1 次。

Problem 9

给出当 n 和 m 都是正整数时，求 $n!$ **mod** m 的递归算法

Problem 10

证明：对于任意正整数 n，我们一定能找到数 $1, 2, \ldots, n$ 的一个排列，使得在排列中这些数任何两个数的均值都不会出现在这两个数之间。