线性代数

任课教师：陈秦波

2023.09.18

上节回顾:n 阶行列式

(P1) 对单位矩阵 E, $|E|=1$.

(P2) A 中任意两行互换，行列式变号.

(P3) 多重线性：行列式对 A 的每一行都线性.

由（P1）-(P3) 可推出:

(P4) 对角矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(P5) 若 A 的某两行相等，则 $|A|=0$

(P6) 将某行乘以 k 加到另一行，行列式不变

(P7) 若 A 的某一行全是 0，则 $|A|=0$

(P8) 若 A 为三角形矩阵，则 $|A|=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

基于逆序数的 n 阶行列式定义

为了方便，矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 可写成

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\qquad \text{其中第 } i \text{ 行向量 } \alpha_i=(a_{i1},\cdots,a_{in})=a_{i1}\mathbf{e}_1+\cdots a_{in}\mathbf{e}_n$$

这儿的 $\mathbf{e}_1=(1,0,\cdots,0),\mathbf{e}_2=(0,1,\cdots,0)\cdots,\mathbf{e}_n=(0,0,\cdots,1)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的标准单位向量。

利用多重线性 (P3) 可推出

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{vmatrix} = \sum_{j_n=1}^{n} \cdots \sum_{j_2=1}^{n} \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{j_1} \\ \mathbf{e}_{j_2} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{j_n} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j_1,\cdots,j_n\text{是}1,\cdots,n\text{的排列，共 }n!\text{ 种}} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{j_1} \\ \mathbf{e}_{j_2} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{j_n} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j_1,\cdots,j_n\text{是}1,\cdots,n\text{的排列，共 }n!\text{ 种}} (-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ 是逆序数（书中定义 1.2.1）。实际上，τ 是使 $j_1, j_2 \cdots, j_n$ 变成 $1, 2, \cdots, n$最少需要的相邻交换的次数。

矩阵的转置及其行列式

定义 (转置矩阵)

对于 $m \times n$ 阶矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，将其 <u>行与列</u> 互换后得到一个新的 $n \times m$ 矩阵，称为 A 的转置矩阵。一般用符号 A^{T} 或 A' 表示。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

注记

- $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = A.$
- n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是对称矩阵 $\iff A^{\mathrm{T}} = A.$
- n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是反对称矩阵 $\iff A^{\mathrm{T}} = -A.$

定理

对于 n 阶方阵 A，其行列式满足

$$|A^{\mathrm{T}}| = |A|.$$

Proof.

利用基于逆序数的行列式定义去证明。 $\square$

行列式的“行”与“列”具有等价地位

推论

行列式对“行”所具有的性质同样适用于“列”。

- A 中任意两行（列）互换，行列式变号.
- 多重线性：行列式对 A 的每一行（列）都线性.
- 若 A 的某两行（列）相等，则 $|A| = 0$.
- 若将某行（列）乘以 k 加到另一行（列），则行列式不变.
- 若 A 的某一行（列）全是 0，则 $|A| = 0$.

例题 (箭形行列式)

计算 $n+1$ 阶行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} c & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

例题 (反对称矩阵)

一切奇数阶的反对称矩阵，其行列式都是 0.

例题

计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

例题

计算 4 阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & x \\ x & a_2 & x & x \\ x & x & a_3 & x \\ x & x & x & a_4 \end{vmatrix}$$

其中 $x \neq a_i, i = 1, 2, 3, 4.$

余子式、行列式的展开

我们首先来看一个简单的例子。

例题

证明以下等式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注记

上述 $(n-1)$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 a_{11} 的余子式。用符号 M_{11} 表示。

定义 (余子式)

在 n 阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中删掉 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列，所剩下 $(n-1)^2$ 个元素按照原来排法构成一个 $\underline{(n-1) \text{ 阶行列式}}$，称为元素 a_{ij} 的**余子式**。记为 M_{ij}。

$$
M_{ij} = \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

定义 (代数余子式)

a_{ij} 的**代数余子式**指的是

$$
A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.
$$

基于代数余子式的行列式定义

对于 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，我们可以证明:

定理

$$
\begin{aligned}
|A| = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} &= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\,A_{1j} \\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\,M_{1j}.
\end{aligned}
$$

行列式的按行展开

实际上，行列式可以按任意一行进行展开

定理 (按第 i 行展开)

$$
\begin{aligned}
|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, A_{ij} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\, M_{ij}.
\end{aligned}
$$

行列式的按列展开

因为行列式与它的转置行列式的值相等，所以不难证明

定理 (按第 j 列展开)

$$
\begin{aligned}
|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, A_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\, M_{ij}.
\end{aligned}
$$

小结：行列式的三种等价定义

定义 (公理化)

行列式由以下三条性质唯一确定

(P1) 对单位矩阵 E，$|E|=1$.

(P2) A 中任意两行互换，行列式变号.

(P3) 多重线性：行列式对 A 的每一行都线性.

定义 (基于逆序数)

$$|A| = \sum_{j_1,\cdots,j_n} (-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = \sum_{j_1,\cdots,j_n} (-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}$$

其中，$j_1, \cdots, j_n$ 取遍 $1, \cdots, n$ 的所有 n 元排列，共 $n!$ 种.

定义 (基于代数余子式)

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad (\text{或 } |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}).$$