微积分II(第一层次)期末参考答案 (2015.6.22)

一、1. 曲面 S 的方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $(x,y)\in D$, $D:\ x^2+y^2\le a^2-h^2$,
原式$=\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D a\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi a(a^2-h^2)$.

2. 原式$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{2}(y-x^2)\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{x^2}(x^2-y)\mathrm{d}y=\dfrac{46}{15}$.

3. 记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2z-5$, 则 $\boldsymbol{n}=(F'_x(1,1,1),F'_y(1,1,1),F'_z(1,1,1))=(2,2,4)=2(1,1,2)$, 于是曲面在 $(1,1,1)$ 的切平面方程为 $(x-1)+(y-1)+2(z-1)=0$, 法线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$.

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}=\frac{1}{\sqrt2}\arctan\frac{(x-\frac1x)}{\sqrt2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt2}$

5. 原方程可化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}+1}$, 这是一个齐次微分方程. 令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则 $y=ux$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, 于是原方程变为 $u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{u^2}{u+1}$, 分离变量得 $\left(1+\dfrac1u\right)\mathrm{d}u=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$, 两边积分, 得 $u+\ln|u|+C=-\ln|x|$, 所以原方程的通积分为: $\dfrac{y}{x}+\ln|y|+C=0$. $y=0$ 为奇解. (通积分也可写成 $y=Ce^{-\frac{y}{x}}$.)

6. $\displaystyle\oint_C\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}y-\mathrm{d}x=\int_0^1[2x\arctan x-1]\mathrm{d}x+\int_1^0(\arctan1-1)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}-1.$

7. $S=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\frac13(1-(\frac13)^n)}{1-\frac13}-\dfrac{\frac{7}{10}(1-(\frac{1}{10})^n)}{1-\frac{1}{10}}\right)=-\dfrac{5}{18}$. 所以级数收敛，和为$-\dfrac{5}{18}$.

8. 记 $P=\dfrac{-y}{x^2+y^2},Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, 则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ 在 l 与单位圆周 $C:x^2+y^2=1$ 所围的区域内成立，故积分与路径无关，所以 $\displaystyle\int_l\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_C\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi.$

9. 记 $P=e^x\sin y-2y\sin x, Q=e^x\cos y+2\cos x$, 则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y-2\sin x$, 这是一个全微分方程，$u(x,y)=\displaystyle\int_0^x0\mathrm{d}x+\int_0^y(e^x\cos y+2\cos x)\mathrm{d}y=e^x\sin y+2y\cos x$, 所以原方程的通解为 $e^x\sin y+2y\cos x=C$.

10. 令 $u_n(x)=(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{2n+3}x^2=x^2$, 所以 $|x|<1$ 时级数收敛，$|x|>1$ 时级数发散，而 $x=\pm1$ 时，易知级数收敛，所以收敛域为 $[-1,1]$. 设 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$, 则 $S(0)=0$, $S'(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}=\frac{1}{1+x^2}$, 所以 $S(x)=S(0)+\displaystyle\int_0^xS'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x$, $x\in[-1,1]$.

11. 在上题中令 $x=1$ 得 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}=\arctan1=\frac{\pi}{4}$.

二、 设 $S_1:z=0\ (x^2+y^2\le a^2)$, 取下侧, 记 V 是 S 与 S_1 所围立体.

$$I=\iint\limits_S\frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2y(z+a)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\iint\limits_S\frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2y(z+a)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{a}$$

$$= \iint\limits_{S+S_1} \frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - 2y(z+a)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{a} - \iint\limits_{S_1} \frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - 2y(z+a)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{a}$$

$$= \iiint\limits_{V} \mathrm{d}V - \iint\limits_{S_1} \frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - 2y(z+a)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{a} = \frac{2}{3}\pi a^3 + \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{5}{3}\pi a^3.$$

三、 设 $P(x,y) = 3x^2y$, 因为积分与路径无关，所以 $P'_y(x,y) = Q'_x(x,y) = 3x^2$, 故 $Q(x,y) = x^3 + \varphi(y)$.

又因为 $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(t,1)} 3x^2y\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 Q(0,y)\mathrm{d}y + \int_0^t 3x^2\mathrm{d}x = \int_0^1 Q(0,y)\mathrm{d}y + t^3$,

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 3x^2y\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^t Q(0,y)\mathrm{d}y + \int_0^1 3x^2t\mathrm{d}x = \int_0^t Q(0,y)\mathrm{d}y + t,$$

所以 $\displaystyle\int_0^1 Q(0,y)\mathrm{d}y + t^3 = \int_0^t Q(0,y)\mathrm{d}y + t$, 两边对 t 求导得 $3t^2 = Q(0,t) + 1$, 即 $Q(0,t) = 3t^2 - 1$, 所以 $\varphi(y) = Q(0,y) = 3y^2 - 1$.　所以 $Q(x,y) = x^3 + 3y^2 - 1$.

四、 (1) 因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $b_n = 0$ $(n = 1,2,3\cdots)$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi^2}{3}. \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\mathrm{d}x = (-1)^n\frac{4}{n^2}, (n = 1,2,3,\cdots).$$

而 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，且 $f(-\pi) = f(\pi)$, 所以 $\displaystyle f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx$, $(-\pi \le x \le \pi)$.

(2) 在上式中令 $x = 0$, 得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

(3) 在(1)中令 $x = \pi$, 得 $\displaystyle\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, 与(2)式相加得 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

五、 (1) $\displaystyle\frac{a_n}{S_n^2} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^2} < \frac{S_n - S_{n-1}}{S_nS_{n-1}} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$, $(n \ge 2)$,

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{S_k^2} < \frac{1}{S_1} + \left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2}\right) + \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}\right) = \frac{2}{a_1} - \frac{1}{S_n} < \frac{2}{a_1},$$

而正项级数收敛的充要条件是其部分和数列有界，所以级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛.

(2) 设级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ 的部分和为 σ_n, 即 $\displaystyle\sigma_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{S_k}}$, $\displaystyle\sigma_n > \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{S_n}} > \sqrt{S_n}$, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ 收敛，则 σ_n 有上界，由上式可知 S_n 有上界，故级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. $\displaystyle\sigma_n < \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{S_1}} = \frac{S_n}{\sqrt{a_1}}$,　若级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 S_n 有上界，由上式可知 σ_n 有上界，故级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ 收敛.

六、 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e - (1+\frac{1}{x})^x}{\frac{1}{x}} = \frac{e}{2}$, 所以级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^p$ 与级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 敛散性相同，$p > 1$ 时收敛，$p \le 1$ 时发散.

微积分II(第一层次)期末试卷参考答案 (2016.6.20)

一、 1. $0<\left(\dfrac{5xy}{3(x^2+y^2)}\right)^{x^2+y^2}\le\left(\dfrac{5}{6}\right)^{x^2+y^2}$, 而 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{x^2+y^2}=0$, 由夹逼准则可知，原式=0.

2. 设 $F=u^2-v+xy, H=u+v^2+x-y$, 则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\frac{D(F,H)}{D(x,v)}}{\frac{D(F,H)}{D(u,v)}}=-\dfrac{2vy+1}{4uv+1}, \dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{\frac{D(F,H)}{D(u,y)}}{\frac{D(F,H)}{D(u,v)}}=\dfrac{2u+x}{4uv+1}$.

3. 方法1: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3^{n+1}}\cdot\dfrac{3^n}{2n-1}=\dfrac{1}{3}<1$, 由达朗贝尔判别法知原级数收敛。

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{k}{3^{k-1}}-\frac{k+1}{3^{k+1}}\Big)=\lim_{n\to\infty}\Big(1-\frac{n+1}{3}\Big)=1.$$

方法2：构造幂级数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{2n-2}$, 此幂级数的收敛域为(-1,1).

则 $\displaystyle\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^2)^{n-1}=\frac{x}{1-x^2},\quad S(x)=\Big(\frac{x}{1-x^2}\Big)'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2},\quad x\in(-1,1).$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)^{2n-2}=\frac{1}{3}S\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)=1.$$

4. 令 $y^{-2}=u$, 则原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+2u=-2x$, 通解为

$$u=y^{-2}=\mathrm{e}^{-\int 2\mathrm{d}x}\Big(C+\int(-2x)\mathrm{e}^{\int 2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\Big)=C\mathrm{e}^{-2x}-x+\frac{1}{2}.$$

5. 令 $y'=P(y)$, 则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 原方程化为 $y\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p$, 分离变量积分得 $p=cy$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=Cy$, 代入初值条件得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y$, 分离变量积分得 $y=C_1\mathrm{e}^x$, 代入初值条件得 $y=\mathrm{e}^x$.

二、 (1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{\rho^3\cos\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{\rho^2}=0=f(0,0)$,

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续；

(2) $f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x}=1,\quad f_y'(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{0}{y}=0$,

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导.

(3) 令 $f(x,y)-f(0,0)=f_x'(0,0)x+f_y'(0,0)y+\omega$, 则 $\omega=\dfrac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}-x=-2\rho\cos\theta\sin^2\theta$,

$\dfrac{\omega}{\rho}=-2\cos\theta\sin^2\theta\not\to0(\rho\to0)$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

三、 $$I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}x^2y^2\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\frac{Rx^2y^2}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{\rho^5\cos^2\theta\sin^2\theta}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^R\frac{\rho^5}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho$$

$$\xlongequal{(\rho=R\sin t)}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos4\theta}{8}\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^5\sin^5t\mathrm{d}t=\frac{2\pi R^6}{15}.$$

四、　设曲面$S_1: z=0,(x^2+y^2\le a^2)$, 取下侧，则

$$\iint\limits_{S+S_1}(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+3y^2+3z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{6\pi a^5}{5}.$$

$$\iint\limits_{S_1}(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}ay^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^3\sin^2\theta\mathrm{d}\rho=-\frac{\pi a^5}{4}.\qquad \text{原式}=\frac{6\pi a^5}{5}+\frac{\pi a^5}{4}=\frac{29\pi a^5}{20}.$$

五、　$|u_n|=\dfrac{1}{n+(-1)^n}\sim\dfrac{1}{n}$, $(n\to\infty)$, 而调和级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散, 所以原级数不绝对收敛；

$u_n=\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}=(-1)^n\dfrac{n}{n^2-1}-\dfrac{1}{n^2-1}$, 而级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n^2-1}$是莱布尼兹型的交错级数，收敛；　级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-1}$也收敛，所以原级数收敛且条件收敛.

六、　$f'(x)=\dfrac{1}{1-x^4}-1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{4n}\ \ (|x|<1)$, 所以 $f(x)=f(0)+\displaystyle\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1},\quad |x|<1.$

七、　将$f(x)$进行偶延拓，则$b_n=0\ \ (n=1,2,\cdots)$;　　$a_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\pi,$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi},\quad (n=2k-1,\quad k=1,2,\cdots)$$

所以 $x=\dfrac{\pi}{2}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x,\quad x\in[0,\pi].$　　$x=0$代入上式得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}.$

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}S,\ \text{所以}\ S=\frac{\pi^2}{6}.$$

八、　(1)　$u_n(x)=\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|^{3n+1}(3n)!}{|x|^{3n}(3n+3)!}=0$, 所以收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

(2) $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$, $S'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}$, $S''(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$, 可得微分方程 $\begin{cases}S''+S'+S=e^x,\\ S(0)=1,\ S'(0)=0.\end{cases}$

特征方程为$\lambda^2+\lambda+1=0$, $\lambda=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. 设特解为$y^*=Ae^x$, 代入原方程得 $y^*=\dfrac{1}{3}e^x$.

方程的通解为 $S=e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\dfrac{1}{3}e^x.$

由初始条件$S(0)=1,S'(0)=0$可得$C_1=\dfrac{2}{3},C_2=0$, 所以$S(x)=\dfrac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{3}e^x.$

($S(x)$满足的微分方程也可以是$S'''(x)-S(x)=0,S(0)=1,S'(0)=S''(0)=0.$)

微积分II(第一层次)期末试卷参考答案 (2017.7.4)

一、1. 由$\begin{cases} f'_x = -(1+e^y)\sin x = 0, \\ f'_y = e^y(\cos x - 1 - y) = 0 \end{cases}$ 得驻点 $P_1(2k\pi, 0)$, $P_2((2k-1)\pi, -2)$, $k \in \mathbb{Z}$.

$f''_{xx} = -(1+e^y)\cos x$, $f''_{xy} = -e^y \sin x$, $f''_{yy} = e^y(\cos x - y - 2)$,

对于 P_1, $A = -2, B = 0, C = -1, B^2 - AC < 0, A < 0$, 所以 $f(P_1) = 2$ 是极大值;

对于 P_2, $A = 1 + e^{-2}, B = 0, C = -e^{-2}, B^2 - AC > 0$, 所以 P_2 不是极值点.

2. $+\infty$ 是唯一奇点. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt[3]{x}} \cdot x^{\frac{4}{3}} = 1$, 所以原广义积分收敛。

3. $\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^p \ln\dfrac{n+2}{n+1} = \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n+1})}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^p} \sim \dfrac{1}{2^p n^{\frac{p}{2}+1}}$, 仅当 $\dfrac{p}{2} + 1 > 1$ 即 $p > 0$ 时原级数收敛.

4. 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - yx = y^3x^2$, 关于 x 是伯努利方程. 令 $x^{-1} = u$, 则方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} + yu = -y^3$, 解得 $u = e^{-\int y\mathrm{d}y}\Big(C - \displaystyle\int y^3 e^{\int y\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\Big) = e^{-\frac{y^2}{2}}\Big(C - 2e^{\frac{y^2}{2}}\big(\dfrac{y^2}{2} - 1\big)\Big)$, 故通积分为 $x\Big(Ce^{-\frac{y^2}{2}} - y^2 + 2\Big) = 1$.

5. 令 $y' = p(x)$, 则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$, 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 1 + p^2$, 分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{1+p^2} = \mathrm{d}x$, 两边积分得 $\arctan p = x + C_1$, 即 $y' = \tan(x + C_1)$, 解得通解为 $y = -\ln|\cos(x + C_1)| + C_2$.

二、 (1) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$, 由格林公式得 $I_1 = 0$.

(2) 设曲线 $C_1 : x^2 + y^2 = \varepsilon^2$, $0 < \varepsilon < 0.5$, 取顺时针方向, 则

$$I_1 = \oint_{C+C_1} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} - \oint_{C_1} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = 0 - \oint_{C_1} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = -2\pi.$$

三、 由斯托克斯公式, $I_2 = \displaystyle\iint_S (x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - (y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（其中 S 为 $x + y = R$, 取后侧）

$$= -\iint_S \frac{\sqrt{2}R}{2}\mathrm{d}S = -\frac{\sqrt{2}}{2}R \cdot \pi\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}R\Big)^2 = -\frac{\sqrt{2}\pi R^3}{4}.$$

四、 设曲面$S : z = 0, (x^2 + y^2 \le 1)$, 取上侧，则

$$\iint_{\Sigma+S_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_\Omega (2z+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 2r\cos\varphi \cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}.$$

$$I_3 = \frac{3\pi}{2} - \iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3\pi}{2} - \iint_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}.$$

五、证明: (1) 设 $a_n = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, 由不等式 $n^2 > (n+1)(n-1)$ 可得,

$$(a_n)^2 = \frac{1^2\cdot 3^2\cdots(2n-1)^2}{2^2\cdot 4^2\cdots(2n)^2} < \frac{1^2\cdot 3^2\cdots(2n-1)^2}{(1\cdot 3)(3\cdot 5)\cdots(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n+1}, \text{所以 } a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

(2) 由于 $0 < a_n < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$, 由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 且 $a_{n+1} = a_n \cdot \dfrac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} < a_n$,

由莱布尼茨判别法可得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 收敛.

又 $a_n=1\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 发散. 故原级数条件收敛.

六、方法一：考虑幂级数 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!}x^n$, 此幂级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

则 $\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=xe^x$, $S(x)=\Big(xe^x\Big)'=(x+1)e^x$. 令 $x=2$ 即得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}=3e^2$.

方法二：注意到 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $x\in(-\infty,+\infty)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=2e^2+e^2=3e^2.$$

七、 因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $b_n=0\ \ (n=1,2,\cdots)$;

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\big(-x\cos x+\sin x\big)\Big|_0^{\pi}=2,$$

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\big(-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x\big)\Big|_0^{\pi}=-\frac{1}{2},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\big(\sin(n+1)x-\sin(n-1)x\big)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\Big(-\frac{x}{n+1}\cos(n+1)x+\frac{1}{(n+1)^2}\sin(n+1)x+\frac{x}{n-1}\cos(n-1)x-\frac{1}{(n-1)^2}\sin(n-1)x\Big)\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1},\ (n=2,3,\cdots).$$

所以 $x\sin x=1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx,\qquad x\in(-\pi,\pi)$.

八、 (1) 由题意可得 $f(x)$ 满足的微分方程为 $f''(x)+f(x)=2e^x, f(0)=0, f'(0)=2$, 解这个微分方程得 $f(x)=-\cos x+\sin x+e^x$.

$$I_4=\int_0^{\pi}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}f(x)-\int_0^{\pi}\frac{f(x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\frac{f(x)}{1+x}\Big|_0^{\pi}=\frac{f(\pi)}{1+\pi}=\frac{1+e^{\pi}}{1+\pi}.$$

(2) $f(x)$ 满足的微分方程为 $f''(x)+f(x)=6x, f(0)=1, f'(0)=0$, 解得 $f(x)=\cos x-6\sin x+6x$.

微积分II（第一层次）期末试卷参考答案2018.7.3

一、1. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}f''(\sqrt{x^2+y^2+z^2})-\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})；$$

2. $+\infty$ 是唯一奇点. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt[n]{1+x}}\cdot x^{1+\frac{1}{n}}=1$, $1+\frac{1}{n}>1$, 所以原广义积分收敛。

3. 解法一： 令 $t=(x-3)^2$, 对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^n}{n5^n}$, $a_n=\dfrac{1}{n5^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot 5^n}{(n+1)5^{n+1}}=\dfrac{1}{5}$, 所以 $R=5$. $t=5$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, 发散; 所以 $0\le(x-3)^2<5$, 解得 $3-\sqrt{5}<x<3+\sqrt{5}$, 收敛域为 $(3-\sqrt{5},3+\sqrt{5})$.

解法二：令 $u_n=\dfrac{(x-3)^{2n}}{n5^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot 5^n(x-3)^2}{(n+1)5^{n+1}}=\dfrac{(x-3)^2}{5}$, 当 $\dfrac{(x-3)^2}{5}<1$ 时，原级数绝对收敛；当 $\dfrac{(x-3)^2}{5}>1$ 时，原级数发散；当 $\dfrac{(x-3)^2}{5}=1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, 发散; 所以 $\dfrac{(x-3)^2}{5}<1$, 解得 $3-\sqrt{5}<x<3+\sqrt{5}$, 收敛域为 $(3-\sqrt{5},3+\sqrt{5})$.

4. 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+x\cot y=\cos y$, 关于 x 是一阶线性方程，解得

$$x=e^{-\int\cot y\mathrm{d}y}(C+\int\cos y e^{\int\cot y\mathrm{d}y}\mathrm{d}y)=\frac{C}{\sin y}+\frac{\sin y}{2}.$$

$y(1)=\dfrac{\pi}{6}$ 代入得 $C=\dfrac{3}{8}$, 所以所求特解为 $8x\sin y=3+4\sin^2 y$.

5. (全微分方程，通解为 $\sin\dfrac{y}{x}-\cos\dfrac{x}{y}+5x-\dfrac{3}{y^2}=C$)

二、 设曲面 $S_1: z=0, (x^2+y^2\le a^2)$, 取下侧，则

$$\iint\limits_{S+S_1}(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+3y^2+3z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{6\pi a^5}{5}.$$

$$\iint\limits_{S_1}(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}ay^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^3\sin^2\theta\mathrm{d}\rho=-\frac{\pi a^5}{4}.\qquad \text{原式}=\frac{6\pi a^5}{5}+\frac{\pi a^5}{4}=\frac{29\pi a^5}{20}.$$

三、 设 C 所围的正六边形为 $S: x+y+z=\dfrac{3a}{2}$, 取上侧，则 S 的面积为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. 由斯托克斯公式，

$$I_2=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint\limits_S(x+y+z)\mathrm{d}S=-\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3a}{2}\iint\limits_S\mathrm{d}S=-\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3a}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2=-\frac{9}{2}a^3.$$

四、 $a_n=\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n^p}=\dfrac{2}{n^p(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}\sim\dfrac{1}{n^{p+1/2}}$,

所以 $p>\dfrac{1}{2}$ 时绝对收敛，$-\dfrac{1}{2}<p\le\dfrac{1}{2}$ 时，非绝对收敛。

$-\dfrac{1}{2}<p\le\dfrac{1}{2}$ 时，原级数是交错级数，用莱布尼茨判别法可得级数条件收敛；

$p\le-\dfrac{1}{2}$ 时，一般项不趋向于0，级数发散.

五、 $f(x)=\dfrac{x^2-4x+14}{(x-3)^2(2x+5)}=\dfrac{1}{2x+5}+\dfrac{1}{(x-3)^2}=\dfrac{1}{5}(1+\dfrac{2}{5}x)^{-1}+\dfrac{1}{9}(1-\dfrac{x}{3})^{-2}$

$(1+\dfrac{2}{5}x)^{-1}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)(-2)\cdots(-n)}{n!}(\dfrac{2}{5}x)^n=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^n}{5^n}x^n,\quad x\in(-\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{2})$,

$(1-\dfrac{x}{3})^{-2}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-2)(-3)\cdots(-n-1)}{n!}(-\dfrac{x}{3})^n=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{3^n}x^n,\quad x\in(-3,3)$,

所以 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\Big(\dfrac{n+1}{3^{n+2}}+(-1)^n\dfrac{2^n}{5^{n+1}}\Big)x^n,\ \ x\in\Big(-\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{2}\Big)$.

六、$f(x)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,\ \ x\in[0,\pi)$.

在上式中取 $x=\dfrac{\pi}{2}$, 得 $I=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}-\cdots=\dfrac{\pi}{4}$, 于是

$1+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}-\cdots=I+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{15}-\dfrac{1}{21}+\cdots=I+\dfrac{1}{3}I=\dfrac{\pi}{3}$.

七、$y=C_1e^x+C_2e^{-x}-2x+\dfrac{e^{2x}}{10}(\cos x+2\sin x)$.

八、(1) 在 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}$ 中令 $x=y=0$ 得 $f(0)=0$.

因为 $f'(0)$ 存在，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，即 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$.

且 $f'(0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(y)-f(0)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(y)}{y}$.

$\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\frac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}-f(x)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(y)}{y}(1+4f^2(x))=f'(0)(1+4f^2(x))$,

即 $f'(x)=a(1+4f^2(x))$, 这是一个可分离变量的方程，解得 $f(x)=\dfrac{1}{2}\tan(2ax+C)$,

由 $f(0)=0$ 得 $C=0$, 所以 $f(x)=\dfrac{1}{2}\tan(2ax)$.

(2) $f'(x)-\dfrac{1}{x}f(x)=-\dfrac{2}{x},\quad f(x)=2+Cx$.

微积分II（第一层次）期末试卷参考答案 (2019.6.17)

一、 1. 平面方程为 $z=\dfrac{1}{8}x+\dfrac{1}{2}y-\dfrac{9}{4}$, $(x,y)\in D$, 其中 $D: x^2+(y-3)^2\le 9$.

则所求面积 $S=\displaystyle\iint_D\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{9}{8}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{9}{8}\cdot 9\pi=\frac{81}{8}\pi.$

2. $a_n=n\arcsin\dfrac{\pi}{5^n}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot\arcsin\frac{\pi}{5^{n+1}}}{n\cdot\arcsin\frac{\pi}{5^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot\frac{\pi}{5^{n+1}}}{n\cdot\frac{\pi}{5^n}}=\frac{1}{5}<1$,

所以级数收敛.

3. $x=1$ 是奇点. $\displaystyle\lim_{x\to1^-}\frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\sqrt{1-x}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^3}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}=\frac{1}{2}$, 所以广义积分收敛.

4. 这是伯努利方程，令 $y^2=u$, 方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\dfrac{1}{x}u=-1$, 通积分为 $y^2=Cx-x\ln|x|$.

5. 方程化为 $(x^2-y+5)\mathrm{d}x-(x+y^2+2)\mathrm{d}y=0$, 这是全微分方程，通积分为 $\frac{x^3-y^3}{3}-xy+5x-2y=C$.

二、 解：直线 L 过点 $M_0(\frac{27}{8},-\frac{27}{8},0)$, 方向向量为 $(10,2,-2)\times(1,1,-1)=8(0,1,1)$.

设切点为 (x_0,y_0,z_0), 则法向量为 $(3x_0,y_0,-z_0)$, 切平面方程为 $3x_0x+y_0y-z_0z=27$.

所以 $\begin{cases}3x_0\cdot\frac{27}{8}+y_0\cdot(-\frac{27}{8})=27,\\(3x_0,y_0,-z_0)\cdot(0,1,1)=0,\\3x_0^2+y_0^2-z_0^2=27.\end{cases}$ 解得 $(x_0,y_0,z_0)=(3,1,1)$ 或 $(-3,-17,-17)$,

所以切平面方程为 $9x+y-z=27$ 或 $9x+17y-17z=-27$.

三、 记 $P(x,y)=(x+y+1)e^x-e^y+y$, $Q(x,y)=e^x-(x+y+1)e^y-x$, 则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=-2$

$$\int_{C+\overline{AO}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=-\iint_D(-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\qquad(\text{其中 } D \text{ 为旋轮线的一拱与 } x \text{ 轴所围的区域})$$

$$=2\int_0^{2\pi a}y\mathrm{d}x=2\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=6\pi a^2,$$

所以 $I_1=6\pi a^2+\displaystyle\int_0^{2\pi a}((x+1)e^x-1)\mathrm{d}x=6\pi a^2+2\pi a(e^{2\pi a}-1).$

四、方法一: 设 $S_1: z=0$, $(x^2+y^2\le 1)$, 取下侧, 则

$$\iint_{S+S_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_\Omega 6(x^2+y^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\qquad(\text{柱坐标})$$

$=6\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho^2}(\rho^3+\rho z)\mathrm{d}z=2\pi$, 所以

$$I_2=2\pi-\iint_{S_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi+\iint_{x^2+y^2\le1}(-3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi.$$

方法二: $S: z=1-x^2-y^2$, $(x,y)\in D$, $D: x^2+y^2\le 1$, 则

$$I_2=\iint_D\Big(2x^3(-z'_x)+2y^3(-z'_y)+3\big((1-x^2-y^2)^2-1\big)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D(7x^4+7y^4-6x^2-6y^2+6x^2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\qquad(\text{极坐标})$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(7\rho^5\cos^4\theta+7\rho^5\sin^4\theta-6\rho^3+6\rho^5\cos^2\theta\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\rho=-\pi.$$

五、(10分)　设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$, 判别级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性；若收敛，求其和.

解：$x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)$, 令 $x=\dfrac{1}{k}$, 则 $\dfrac{1}{k+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$, 取 $k=1,2,\cdots,n-1$,

再将各式相加可得 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}<\ln n+1<2\ln n\ (n\geq 3)$, 所以 $\dfrac{a_n}{(n+1)(n+2)}<\dfrac{2\ln n}{n^2}$.

而 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln n}{n^2}\cdot n^{\frac{3}{2}}=0$, 所以级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\ln n}{n^2}$ 收敛. 由比较判别法，级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ 收敛.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}a_k\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2-a_1}{3}+\cdots+\frac{a_n-a_{n-1}}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}$$

$=1-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{a_n}{n+2}$, 所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}S_n=1$.

六、　令 $t=x^2$, 对于级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}t^{n-1}$, $a_n=\dfrac{2n-1}{2^n}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\cdot 2^n}{(2n-1)2^{n+1}}=\frac{1}{2}$,

所以 $R=2$. $t=2$ 时，级数为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2}$ 发散; 所以 $0\leq x^2<2$, 收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

设 $\displaystyle S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$, 则 $\displaystyle\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n-1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n=\frac{\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}}{1-\frac{x^2}{2}}=\frac{x}{2-x^2}$,

所以 $S(x)=\left(\dfrac{x}{2-x^2}\right)'=\dfrac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$,　$x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.　　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=S(1)=3$.

七、 $f(x)$ 是偶函数，所以 $b_n=0,\ n=1,2,\cdots$.

$a_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4\pi^2}{3}$,　$a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}$, $n=1,2,\cdots$,

所以 $\pi^2-x^2=\dfrac{2}{3}\pi^2+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$,　$x\in[-\pi,\pi]$.

代入 $x=0$ 得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$,　代入 $x=\pi$ 得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi^2}{12}=\frac{\pi^2}{4}$, 所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

八、 $y_1-y_3=e^{-x}$ 是对应的齐次方程的一个解，则 $y_4=y_2-e^{-x}=xe^x$ 是非齐次方程的一个解，

$y_1-y_4=e^{2x}$ 是对应的齐次方程的另一个解。所以 $-1,2$ 是特征根。

二阶线性非齐次微分方程为 $y''-y'-2y=f(x)$, 将 $y_4=xe^x$ 带入方程可得 $f(x)=(1-2x)e^x$.

所以微分方程为 $y''-y'-2y=(1-2x)e^x$, 通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+xe^x$.