

Problem Set 8: 集合的基数

Problem 1

计算下列集合的基数.

(1) $A = \{x, y, z\}$

1 3

(2) $B = \{x \mid x = n^2 \wedge n \in \mathbb{N}\}$
 \aleph_0

(3) $C = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}\}$
 \aleph_0

(4) 平面上所有的圆心在 x 轴上的单位圆的集合
 \aleph_0

(5) 复数集合
 \aleph_1

Problem 2

设集合 A, B, C, D 满足 $|A| = |C|, |B| = |D|$, 求证 $|A \times C| = |B \times D|$.

Problem 3

设 A, B 为可数集, 证明:

(1) $A \cup B$ 是可数集;

- 1 设 $|A| = m, |B| = n$
- 2 所以 $A \cup B \leq m + n$
- 3 所以 $A \cup B$ 是可数集;

(2) $A \times B$ 是可数集.

- 1 设 $|A| = m, |B| = n$
- 2 所以 $A \times B = m * n$
- 3 所以 $A \times B$ 是可数集;

Problem 4

确定下列各集合是否是有限的、可数无限的或不可数的。对那些可数无限集合，给出在自然数集合和该集合之间的一一对应。

a. 大于 10 的整数

- 1 可数无限

b. 奇负整数

- 1 可数无限

c. 绝对值小于 1 000 000 的整数

- 1 有限的

d. 0 和 2 之间的实数

- 1 不可数的

e. 集合 $A \times \mathbb{Z}^+$ 这里 $A = 2, 3$

- 1 可数无限的

f. 10 的整数倍

- 1 可数无限的

Problem 5

给出两个不可数集合 A 和 B 的例子使得 $A - B$ 是

a. 有限的

```
1 A = {x | 0 < x < 1}
2 B = {x | 0 < x <= 1}
```

b. 可数无限的

```
1 A = {x | x > 0 ∧ x ∈ N+ }
2 B = {x | x > 1 ∧ x ∈ N+ }
```

c. 不可数的

```
1 A = {x | 0 < x < 2}
2 B = {x | 0 < x < 1}
```

Problem 6

给出两个不可数集合 A 和 B 的例子使得 $A \cap B$ 是

a. 有限的

```
1 A = {x | 0 <= x < 2}
2 B = {x | -1 < x <= 0}
```

b. 可数无限的

```
1 A = {x | x % 2 == 0}
2 B = {x | x % 8 == 0}
```

c. 不可数的

```
1 A = {x | 0 < x < 2}
2 B = {x | 0 < x < 1}
```

Problem 7

假设 A 是可数集合。证明如果存在一个从 A 到 B 的满射函数 f ，则 B 也是可数的。
(注：“可数集合”包括可数无限集合和有穷集合的情况，下同。)

- 1 如果存在一个从 A 到 B 的满射函数 f
- 2 则 $|B| = |\{f(x) \mid x \in A\}| \leq |A|$
- 3 所以 B 是可数的

Problem 8

设 $A = \{a, b, c\}$ ， $B = \{0, 1\}^A$ ，由定义证明 $P(A) \approx \{0, 1\}^A$ 。

1

Problem 9

已知 $B, A - B$ 均为可数集合，证明 A 必为可数集合。

- 1 由 Problem 10 的结论可知， A 为可数集合。

Problem 10

证明：可数多个可数集的并集是可数的。

- 1 将多个可数集并排排列，其中每个元素一一对应，
- 2 1, 2, 3, 4, 5, 6...
- 3 2, 3, 4, 5, 6, 7...
- 4 4, 6, 8, 10, 12, 14...
- 5 我们可以由上到下地去数
- 6 1, 2, 4, 2, 3, 6, 4, 5, 10, ...
- 7 所以可数多个可数集的并集是可数的。

Problem 11

设 A, B, C 为集合，其满足 $A \cap B = A \cap C = \emptyset$ 且 $B \approx C$ ，试证明： $A \cup B \approx A \cup C$

1

Problem 12

令 $\{1, 2, 3\}^\omega$ 为所有仅由数字 1, 2 或 3 构成的无限长的序列的集合。证明该集合不可数。