

微积分 II (第一层次) 期末试卷 (2020.8.18)

一、(8分) 设 $f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$ 讨论 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的连续性、可偏导性、可微性以及连续可微性.

二、计算下列各题 (7分 \times 3 = 21 分)

1. 求过直线 $L: \begin{cases} 10x + 2y - 2z = 27, \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ 且与曲面 $3x^2 + y^2 - z^2 = 27$ 相切的平面方程.
2. 求旋转抛物面 $x^2 + y^2 = 2az$ ($a > 0$) 与半球面 $z = \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}$ 所围立体的表面积.
3. 计算 $I = \iint_D \frac{1}{x^4 + y^2} dx dy$, 其中 $D: x \geq 1, y \geq x^2$.

三、计算下列各题 (7分 \times 3 = 21 分)

1. 计算 $I = \int_C 2x dx + z dy + (x + 2y - z) dz$, 其中 C 是曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ y = z \end{cases}$ 上从点 $A(1, 0, 0)$ 到 $B(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ 的位于第一卦限的一段曲线.

2. 计算 $I = \oint_C \frac{y^2}{2} dx - xz dy + \frac{y^2}{2} dz$, 其中 C 是曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x + y = R. \end{cases}$ 从 y 轴的正向看去是依顺时针方向.

3. 计算曲面积分 $I = \iint_S (x^3 + az^2) dy dz + (y^3 + ax^2) dz dx + (z^3 + ay^2) dx dy$, 其中 S 为 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的外侧.

四、计算下列各题 (7分 \times 4 = 28 分)

1. 考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n} \right)$ 的敛散性.
2. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 的敛散性. (提示: $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$)
3. 求 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n$ 的和函数, 并求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)^2 \frac{1}{3^n}$ 的和.
4. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在 $[-1, 1]$ 上的表达式为 $f(x) = x^2$. 将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 的和.

五、计算下列各题 (7分 \times 2 = 14 分)

1. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \sin(1+x+y)$, $y(0) = -1$ 的特解.
2. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{2(xy^2 - x^2)}$ 的通解.

六、(8分) 求微分方程 $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$ 的通解.

微积分 II (第一层次) 期末试卷 (2021.6.22)

一、计算下列各题 (6分×5 = 30 分)

1. 求空间曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ 3x + 2y + z = 10 \end{cases}$ 在点 $P(1, 2, 3)$ 处的法平面与切线方程.

2. 求柱面 $x^2 + y^2 = ay$ ($a > 0$) 位于球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 内部分曲面的面积.

3. 计算第二类曲线积分 $I_1 = \int_C \cos(x + y^2)dx + (2y \cos(x + y^2) - \sqrt{1 + y^4})dy$, 其中 C 为旋轮线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$, 由 $O(0, 0)$ 到 $A(2\pi a, 0)$, 其中 $a > 0$.

4. 计算第一类曲面积分 $I_2 = \iint_S (xy + yz + zx) dS$, 其中 S 为圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$ ($a > 0$) 所截下的部分.

5. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ 的敛散性.

二、计算下列各题 (8分×5 = 40 分)

1. 讨论数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2 + n + 1)^{\frac{n+1}{2}}}$ 的敛散性.

2. 讨论数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{6})}{\sqrt{n}}$ 的敛散性. 如果收敛, 是绝对收敛还是条件收敛?

3. 求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$ 的和.

4. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 2xy - y^2}{2xy - x^2}$ 的通积分.

5. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{x^4 + y^3}{xy^2}$ 的通积分.

三、(本题10分) 计算 $I_3 = \int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, 其中 C 是平面 $x + y + z = 1$ 的第一卦限部分与三个坐标面的交线, 从 z 周正向往 z 轴负向看去是逆时针方向.

四、(本题10分) 计算 $I_4 = \iint_S 4xz dy dz - 2yz dz dx + (1 - z^2) dx dy$, 其中 S 为曲线 $z = e^y$ ($0 \leq y \leq a$) 绕 z 轴旋转生成的旋转曲面, 取下侧.

五、(本题10分) 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)} x^{2(n+1)}$, $x \in (-1, 1)$. 求出 $f(x)$ 满足的微分方程, 并求解之. 计算 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!(n+1)}$.

微积分 II (第一层次) 期末试卷 (2022.6.13)

一、简答题 (8 分 \times 6 = 48 分)

1. 计算 $I = \iint_D x^2 dx dy$, 其中 D 是由曲线 $xy = 1$, $xy = 2$ 以及 $y = x$, $y = 2x$ 所围图形在第一象限的部分.

2. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\cos\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) \right)$ 绝对收敛.

3. 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ 的和函数及收敛域.

4. 求方程 $y'' + e^{y'} = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ 的解.

5. 求函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的马克劳林展式.

6. 求函数 $y = x$ ($x \in [0, \pi]$) 的余弦级数.

二、(10 分) 已知 $y = e^x$ 为方程 $y'' + \tan x y' - (1 + \tan x)y = 0$ 的一个解, 求方程的通解.

三、(10 分) 计算第二型曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} x dy dz + dz dx + \frac{1}{1+z} dx dy$, 其中 $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$, 取上侧.

四、(10 分) 已知第二型曲线积分 $I_L = \int_L (x + y^2 + e^z) dx + (2xy + yz) dy + R(x, y, z) dz$ 与路径无关, $R(0, 0, z) = z^2$. 求函数 $R(x, y, z)$ 的表达式以及当 L 的起点为 $(0, 0, 0)$, 终点为 $(1, 1, 1)$ 时 I_L 的值.

五、(10 分) 已知 $A = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^k} \iiint_{\Omega(t)} (e^{xy} - 1) dx dy dz$ 为非零常数, 求 A 及 k 的值, 其中 $\Omega(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2\}$.

六、(12 分) 设 $f(x)$ 为 \mathbb{R} 上的有界连续函数, 记 $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. 求方程 $y'' - y = f(x)$ ($-\infty < x < \infty$) 的有界解, 并证明对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 有 $|y(x)| \leq M$.

微积分 II (第一层次) 期末试卷参考答案 (2020.8.18)

一、 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续、可偏导、可微、不连续可微.

二、 1. $9x + y - z = 27$ 或 $9x + 17y - 17z + 27 = 0$. 2. $\frac{16}{3}\pi a^2$. 3. $\frac{\pi}{4}$.

三、 1. $\frac{\sqrt{2}\pi}{8} - \frac{1}{2}$. 2. $-\frac{\sqrt{2}\pi R^3}{4}$. 3. $\frac{29}{20}\pi a^5$

四、 1. 收敛. 2. 条件收敛.

$$3. S(x) = \frac{x+1}{(1-x)^3}, (-1 < x < 1). \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)^2 \frac{1}{3^n} = \frac{9}{32}.$$

$$4. x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \cos n\pi x, x \in (-\infty, +\infty), \text{ 取 } x=0 \text{ 即得 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

五、 1. $\tan(1+x+y) - \sec(1+x+y) = x-1$. 2. $y^2 = Ce^{\frac{y^2}{x}}$.

六、 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + \frac{1}{6}x^3 e^{-x}$.

微积分 II (第一层次) 期末试卷参考答案 (2021.6.22)

一、 1. 法平面方程为 $x-2y+z=0$, 切线方程为 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{1}$.

2. $4a^2$. 3. $\sin(2\pi a)$. 4. $\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$. 5. 仅当 $p > 0$ 时收敛;

二、 1. 收敛. 2. 条件收敛. 3. $\ln \frac{3}{2}$. 4. $x^3 + x^2 y - xy^2 = C$. 5. $y^3 = x^3(C+3x)$.

三、 -1 . 四、 $(e^{2a}-1)\pi a^2$.

五、 $f(x)$ 满足的微分方程为 $f''(x) - \frac{x}{1-x^2}f'(x) = \frac{8x^2}{1-x^2}$, 这是关于 $f'(x)$ 的一阶线性微分方程, 解得

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(C_1 + 4 \arcsin x - 4x\sqrt{1-x^2} \right), \text{ 由 } f'(0) = 0 \text{ 得 } C_1 = 0, \text{ 故 } f'(x) = 4 \left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - x \right),$$

两边再积分得 $f(x) = 2(\arcsin x)^2 - 2x^2 + C_2$, 由 $f(0) = 0$ 得 $C_2 = 0$, 所以 $f(x) = 2(\arcsin x)^2 - 2x^2$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!(n+1)} = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi^2-1}{8}.$$

微积分 II (第一层次) 期末试卷参考答案 (2022.6.13)

一、 1. $\frac{3}{8}$.

2. $\left| n \left(\cos\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) \right) \right| = 2n \sin \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ 收敛, 故原级数绝对收敛.

$$3. \text{ 收敛域为 } [-1, 1], \text{ 和函数 } S(x) = \begin{cases} -\ln(1-x) + 1 + \frac{\ln(1-x)}{x}, & x \in [-1, 1], x \neq 0, \\ 1, & x = 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$4. y = -x \ln(1+x) + x - \ln(1+x).$$

$$5. \sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^{2n}, \quad (|x| \leq 1).$$

$$6. x \text{ 的余弦级数为 } \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi} ((-1)^n - 1) \cos(nx), \quad x \in [0, \pi].$$

二. 通解为 $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} (\sin x - 2 \cos x)$, 其中 c_1, c_2 为任意常数.

$$三. \left(\frac{8}{3} - 2 \ln 2\right) \pi.$$

$$四. R(x, y, z) = x e^z + \frac{1}{2} y^2 + z^2. \quad \text{当 } L \text{ 的起点为 } (0, 0, 0), \text{ 终点为 } (1, 1, 1) \text{ 时, } I_L = e + \frac{7}{3}.$$

五. 解: 由泰勒公式可得, 当 $(x, y, z) \in \Omega(t)$ 时, $e^{xy} - 1 = xy + \frac{1}{2} x^2 y^2 + o(t^4)$.

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega(t)} (e^{xy} - 1) dx dy dz &= \frac{1}{2} \iiint_{\Omega(t)} x^2 y^2 dx dy dz + o(t^7) = \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} x^2 y^2 \sqrt{t^2 - x^2 - y^2} dx dy + o(t^7) \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \int_0^t \rho^5 \sqrt{t^2 - \rho^2} d\rho + o(t^7) \stackrel{(\sqrt{t^2 - \rho^2} = u)}{=} \frac{\pi}{4} \int_0^t u^2 (t^2 - u^2)^2 du + o(t^7) \\ &= \frac{2\pi}{105} t^7 + o(t^7). \quad \text{因此 } k = 7, A = \frac{2\pi}{105}. \end{aligned}$$

六. 解: 齐次方程的通解为 $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

利用常数变易法, 设非齐次方程的解为 $y = c_1(x) e^x + c_2(x) e^{-x}$, 则有

$$\begin{cases} c_1'(x) e^x + c_2'(x) e^{-x} = 0 \\ c_1'(x) e^x - c_2'(x) e^{-x} = f(x) \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} c_1'(x) = \frac{1}{2} f(x) e^{-x} \\ c_2'(x) = -\frac{1}{2} f(x) e^x \end{cases}$$

为了保证方程的解为有界解, 形式上需要 $c_1(+\infty) = 0, c_2(-\infty) = 0$.

$$\text{从而我们取 } c_1(x) = \frac{1}{2} \int_{+\infty}^x f(t) e^{-t} dt, \quad c_2(x) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^x f(t) e^t dt.$$

$$\text{因此形式上非齐次方程的解为 } y(x) = \frac{e^x}{2} \int_{+\infty}^x f(t) e^{-t} dt - \frac{e^{-x}}{2} \int_{-\infty}^x f(t) e^t dt.$$

同时由于对任意的 $t \in \mathbb{R}$, $|f(t)| \leq M$, 从而

$$|y(x)| \leq \frac{e^x}{2} \left| \int_{+\infty}^x f(t) e^{-t} dt \right| + \frac{e^{-x}}{2} \left| \int_{-\infty}^x f(t) e^t dt \right| \leq \frac{M e^x}{2} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt + \frac{M e^{-x}}{2} \int_{-\infty}^x e^t dt \leq M.$$