

Problem Set 23A: 图的基本概念

提交截止时间：5 月 27 日 10:00

如无特意说明，以后各题只考虑有限个顶点的图。

Problem 1

证明或反驳：若无向图 G 至少有两个顶点且各顶点度数均不相同，则 G 不是简单图。

- 1 对于一个简单图，其边数一定小于等于 $n(n-1)/2$ 。
- 2 如果一个图有 n 个顶点各顶点度数均不相同且度数没有 0，则它最少有 $(1 + 2 + 3 + \dots + n) = (1 + n) * (n) / 2$ 条边，超出简单图的最大边数。
- 3 注意到如果一个顶点的度数为 0，则边数恰好等于 $n(n-1)/2$ 条，是简单图。
- 4 所以，命题为假，但如果顶点度数中没有 0 度，则 G 可以是简单图。

Problem 2

度序列：一个图的度序列是由图的各个顶点度按非递增序排列的序列（详见【Rossen】P.561）

判断下列序列是否能作为简单图的度序列。如果是，请画出一个简单图使其具有给定的度序列；若否，请说明

理由。

a. 5,4,3,2,1,0

是，该图边数等于简单图最小边数，可以是简单图。

b. 2,2,2,2,2

是，该图边数等于简单图最小边数，可以是简单图。

c. 5,4,2,1,1,1

是，该图边数小于简单图最小边数，可以是简单图。

d. 5,3,3,3,3,3

不是，该图边数大于简单图最小边数

Problem 3

一个图的度序列是由该图的各个顶点的度按非递增顺序排列的序列。求下列各个图的度序列。

a. K_5

4,4,4,4,4

b. C_3

2,2,2

c. W_4

3,1,1,1

d. $K_{2,3}$

2,2,2,2,2,2

e. Q_3

3,3,3,3,3,3,3,3

Problem 4

设无向图 G 有 V 个顶点, E 条边, $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示 G 中度最小和度最大的顶点的度, 证明

$\delta(G) \leq 2E/V \leq \Delta(G)$ (其中 $2E/V$ 称为图的顶点平均度)

- 1 因为一条边连接了两个顶点, 所以对于一个有 E 条边的无向图, 他的各顶点的度数之和为 $2E$, 故顶点平均度为 $2E / V$
- 2 又因为 $\delta(G) * V \leq 2E \leq \Delta(G) * V$
- 3 所以 $\delta(G) \leq 2E/V \leq \Delta(G)$

Problem 5

令 G 是至少有两个顶点的无向图, 证明或反驳:

a. 从图中删去一个度最大的顶点不会使其顶点平均度增加。

设最大度数为 x , 平均度数为 e , 顶点数为 n

可以计算出减少的度数为 $(2x - en) / (n - 1) > 0$ 故不会增加

b. 从图中删去一个度最小的顶点不会使其顶点平均度减少。

假设一个三个顶点的完全图, 平均顶点度数为 (2) , 删去一个顶点后其余顶点的度数变为 1 , 故命题不成立

Problem 6

证明: 设 $G = (V, E)$ 是一个连通图, 且 $|V| = |E| + 1$, 则 G 中至少有一个度为 1 的顶点。

Problem 7

令 G 是一个顶点平均度为 a 的无自环的无向图。

a. 证明: G 删去一个顶点 x 后平均度至少为 a , 当且仅当 $\deg(x) \leq a^2$;

b. 证明或反驳: 如果 $a > 0$, 那么 G 有一个最小度大于 a^2 的子图。

Problem 8

证明: 不包含三角形 K_3 作为子图的 n 阶图, 其边数 m 必满足 $m \leq n^2/4$ 。