Problem Set 21: 偏序与代数格

提交截止时间：5 月 20 日 10:00

Problem 1

令 $(D12, |)$ 表示 12 的所有正因子组成的偏序集.

1. 证明 $(D12, |)$ 构成偏序格 $\langle D12, | \rangle$，并由此定义运算 $*$ 和 $\circ$，证明 $\langle D12, *, \circ \rangle$ 是对应的代数格；

```
a * b = gcd(a, b) , a ∘ b = lcm(a, b)
封闭性：存在封闭性，∀ a, b ∈ D12, a * b = a ∈ D12, a ∘ b = b ∈ D12
结合性：存在结合性，∀ a, b, c ∈ D12, (a * b) * c = a * (b * c)
幂等性：存在幂等性，∀ a ∈ D12, a ^ n = a * a * a ... a = a, 或 a ∘ a ∘ a ... a = a
吸收律：存在吸收律， ∀ a, b ∈ D12, a * (a ∘ b) = a
故<D12, *, ∘>为(D12, |)导出的代数格
```

2. 按照 (1) 的定义，说明 $\langle D12, *, \circ \rangle$ 是否是一个有补格；

```
该格为有界格，1和12分别为下界和上界，
但是取其中元素4, 6两个元素，显然二者无补元素，故该格不是一个有补格。
```

3. 按照 (1) 的定义，说明 $\langle D12, *, \circ \rangle$ 是否是一个分配格。

```
因为（1）中格哈斯图为链状图所以具有分配律
所以命题成立
```

Problem 2

下列各集合对于整除关系都构成偏序集，判断哪些偏序集是格.

1. $L = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
   是，$\forall x, y \in L, gcd(x, y) \in L, lcm(x, y) \in L$
2. $L = \{1, 2, 3, 6, 12\}$;
   是，$\forall x, y \in L, gcd(x, y) \in L, lcm(x, y) \in L$
3. $L = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$;
   是，$\forall x, y \in L, gcd(x, y) \in L, lcm(x, y) \in L$
4. $L = \{1, 2, 22, \cdots, 2n, \cdots\}$.
   不是，$lcm(2, 22) = 44 \notin L$

Problem 3

设 L 是格，并且 $a, b, c \in L$ 求以下公式的对偶式：

1. $a \wedge (a \vee b) \preceq a$;
   $a \preceq a \vee (a \wedge b)$
2. $a \vee (b \wedge c) \preceq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;
   $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \preceq a \wedge (b \vee c)$

3. b ∨ (c ∧ a) ≤ (b ∨ c) ∧ a.
   (b ∧ c) ∨ a ≤ b ∧ (c ∨ a)

Problem 4

设 ⟨L, ≤⟩ 是格，a, b, c, d ∈ L, 且 a ≤ b, c ≤ d, 证明 a ∧ c ≤ b ∧ d, a ∨ c ≤ b ∨ d.

```
不妨设 a ∧ c = a
(1) b ≤ c ≤ d
a ∧ c = a
b ∧ d = b
a ≤ b → a ∧ c ≤  b ∧ d

a ∨ c = c
b ∨ d = d
c ≤ d → a ∨ c ≤  b ∨ d
(2) c ≤ b ≤ d
与（1）同理，可以证明成立。
```

Problem 5

证明：具有三个或更多元素的链不是有补格

```
若具有三个或更多元素，则一定存在一个不为1也不为0的元素x只有1满足x ∨ 1 = 1, 或只有0 ∧ x = 0,
该元素与任意元素的上下界必有一个为本身，所以命题成立。
```

Problem 6

设 ⟨L, ≤⟩ 是格，任取 a ∈ L，令 S = {x|x ∈ L ∧ x ≤ a}, 证明 ⟨S, ≤⟩ 是 L 的子格。

```
由题意可知，∀ x ∈ ⟨S, ≤⟩
故∀ x, y ∈ ⟨S, ≤⟩, x ∘ y ≤ S ∧ x ∘ y ∈ ⟨S, ≤⟩
又因为 x ≤ S, 0 ∈ ⟨S, ≤⟩
故∀ x, y ∈ ⟨S, ≤⟩, 0 ≤  x · y ≤ S ∧  x · y ∈ ⟨S, ≤⟩
所以命题成立
```

Problem 7

定义：一个群的子群格是由其所有子群和子群间的包含关系所构成的二元组$(S, \subseteq)$。
令L为长度为n的链，$G =< a >$为p^t阶循环群，其中p为素数，$n = t + 1$，求证：L与G的子群格同构。

Problem 8

令 ⟨A, ≤⟩ 表示一个有限全序集。证明：

1. A 是一个格并且是有界格

```
因为∀ x, y ∈ A, x ∧ y ∈ A ∧ x ∨ y ∈ A
所以A是一个格，又因为有限，所以为有界格。
```

2. 若 A 的元素超过两个，那么它不可能是有补格。

```
若具有三个或更多元素，则一定存在一个不为1也不为0的元素x只有1满足x ∨ 1 = 1, 或只有0 ∧ x = 0,
该元素与任意元素的上下界必有一个为本身，所以命题成立。
```

3. A 是分配格

```
∀ a , b , c ∈ A。
因为 A 是全序的，∀ x , y ∈ A x,y ∈ A，存在唯一的 x ∧ y 和 x ∨ y。
(1) a ∧ ( b ∨ c ) 和 (a ∧ b ) ∨ (a ∧ c)
由于 b ∨ c 是 b 和 c 的最小上界，它与 a 的最大下界 a ∧ ( b ∨ c ) 小于或等于 a , b , c。
同理， ( a ∧ b ) ∨ (a ∧ c) 是 a ∧ b 和 a ∧ c 的最小上界，它也必须小于或等于 a, b, c。
在全序格中，由于 a ∧ ( b ∨ c)和 ( a ∧ b ) ∨ ( a ∧ c)都小于或等于 a, b, c，并且 A 中任意两个元素都有唯一的最大下界和最小上界，
所以 a ∧ ( b ∨ c) = ( a ∧ b) ∨ ( a ∧ c)
(2)
同理可证a ∨ ( b ∧ c) = ( a ∨ b) ∧ ( a ∨ c)
```

Problem 9

设 f 是格 (L, ≤ 1) 到格 (S, ≤ 2) 的满同态映射。证明：若 (L, ≤ 1) 是有界格，则格 (S, ≤ 2) 也是有界格。

```
设Max(X)为X的最小上界, Min(X)为X的最大下界, s = (S, ≤ 2)
若（L, ≤ 1）是有界格，f是满同态映射，则
f(Max(L)) ∈ s ∧ f(Min(L)) ∈ s
因为f为同态映射，所以∀ x, y ∈ L, f(x ∧ Min(L)) = f(x) ∘ f(Min(L)) = f(Min(L))
f(x ∧ Max(L)) = f(x) ∘ f(Max(L)) = f(Max(L))
故∀ a, b ∈ s, a ∘ f(Max(L)) = f(Max(L)) ∧ b · f(Min(L)) = f(Min(L))
所以s是有界格，命题成立
```