Problem Set 13&14: 离散概率初步、离散随机变量及其数学期望

提交截止时间：4 月 15 日 10:00

Problem 1

设 E1 和 E2 是两个事件, 如果 P (E1 ∩ E2) = P (E1) × P (E2)，就称 E1 和 E2 是独立的. 如果把一枚硬币被抛掷 3 次
时所有可能的结果构成一个集合, 把这个集合的子集看做事件, 确定下面的每一对事件是否是独立的.
a. E1 : 第一次硬币头像向下; E2 : 第二次硬币头像向上.

```
p(E1) = 1 / 2
p(E2) = 1 / 2
p(E1∩E2) = 1 / 4
所以E1 E2 独立
```

b. E1 : 第一次硬币头像向下; E2 : 在连续 3 次中有 2 次但不是 3 次头像向上.

```
p(E1) = 1/2
p(E2) = 3/8
p(E1∩E2) = 1/8
所以E1 E2不独立
```

c. E1 : 第二次硬币头像向下; E2 : 在连续 3 次中有 2 次但不是 3 次头像向上.

```
p(E1) = 1/2
p(E2) = 1/4
p(E1∩E2) = 0
所以E1 E2不独立
```

Problem 2

设 p 和 q 是素数且 n = pq。随机选择小于 n 的正整数，该正整数不被 p 或 q 整除的概率是多少?

```
显然，能被q或p整除的数可以写成 m = p * n (0 < n < q)或 m = n * q (0 < n < p)
所以该正整数出现的概率为 (q - 1) + (p - 1) / (n - 1)
故符合题意的概率为 1 - ((q - 1) + (p - 1) / (n - 1)) = (n + 1 - q - p) / (n - 1)
```

Problem 3

设离散型随机变量 X ∈ {1, 2, 3}, Y ∈ {1, 2, 3} 的联合概率 P (X ∩ Y) 分布为:

(X,Y)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)
Pr	1/6	1/9	1/18	1/3	a	b

若 X, Y 相互独立, 求 a, b.

```
a = 2/9, b = 1/9
```

Problem 4

随机产生 3 位比特串，设 E 是这个串含有奇数个 1 的事件，F 是这个串以 1 开始的事件。E 和 F 是独立的吗?

```
p(E) = 1/2
p(F) = 1/2
p(E∩F) = 1/4
所以E和F为独立事件
```

Problem 5

设 E1 , E2 , . . . , En 是 n 个事件满足 p(Ei) > 0, i = 1, 2, . . . , n。证明：P (E1 ∩E2 ∩. . .∩En) = P (E1)P (E2 |E1)P (E3 |E1 ∩ E2) . . . P (En |E1 ∩ E2 ∩ . . . ∩ En−1)

```
因为p(A ∩ B) = p(A B) = p(A) * p(A|B)
又因为等式右边 = p(E1 * E2 ... * En) = p(E1 ∩ E2 ... ∩ En)
```

Problem 6

假如某诊所对病人的检测中有 4% 的人感染了禽流感病毒。此外, 假定对给定的禽流感血液检测 (检测结果为阳性不等
价于感染病毒, 即感染了禽流感的人也可能呈阴性, 没有感染的人也可能呈阳性), 感染了禽流感的人中有 97% 的人禽
流感检测呈阳性, 没感染禽流感的人中有 2% 的人禽流感检测呈阳性. 那么, 下列概率是多少?

```
可知
A：一个人感染了禽流感病毒。
B：禽流感检测呈阳性。
p(A)      = 4%
p(¬A)     = 96%
p(B|A)    = 97%
p(¬B|A)   = 3%
p(B|¬A)   = 2%
p(¬B|¬A) = 98%

p(B) = p(B|A) + p(B|¬A) = 97% * 4% + 2% * 96%
```

a. 禽流感检测呈阳性的人真的感染了禽流感病毒.

```
p(A|B) = (p(B|A) * p(A)) / p(B) = 4% * 97% / (97% * 4% + 2% * 96%)
```

b. 禽流感检测呈阳性的人没有感染禽流感病毒.

```
p(¬A|B) = p(B/¬A) * p(¬A) / p(B)  = (96% * 2%) / (97% * 4% + 2% * 96%)
```

c. 禽流感检测呈阴性的人感染了禽流感病毒.

```
p(A|¬B) = p(¬B/A) * p(A) / p(¬B) = (3% * 4%) / [1 - (97% * 4% + 2% * 96%)]
```

d. 禽流感检测呈阴性的人没有感染禽流感病毒.

```
p(¬A/¬B) = (p(¬B|¬A) * p(¬A)) / p(¬B) =  (98% * 96%) / [1 - (97% * 4% + 2% * 96%)]
```

Problem 7

如果我们有关于一条随机信息是不是垃圾邮件的先验知识。特别地，假定经过一段时期，我们发现收到了 s 条垃圾邮
件信息和 h 条非垃圾邮件信息。
a. 利用这一信息估计所收到的信息是垃圾邮件的概率 p(S) 和所收到的信息不是垃圾邮件的概率 p(¬S̄)。

```
p(S)  = s / (s + h)
p(¬S) = h / (s + h)
```

b. 利用贝叶斯定理和 a. 估计收到的含有字 w 的信息是垃圾邮件的概率，其中 p(w) 是 w 出现在垃圾邮件信息中
的概率，q(w) 是 w 出现在非垃圾邮件信息中的概率。

```
R =  p(w) * p(S) / (p(S) * p(w) ＋ p(¬S) * q(w))
```

Problem 8

当一个均匀的骰子被掷 10 次时，出现偶数点的次数的方差是多少?

```
期望=10 * 1/2 = 5
出现偶数点的次数事件服从二项分布，所以方差为10 * 1/2 * (1 - 1/2) = 2.5
```

Problem 9

设 X 和 Y 是随机变量，并且对于样本空间 S 的所有点，X 和 Y 是非负的。设 Z 是如下定义的随机变量：对所有的
元素 s ∈ S, Z(s) = max(X(s), Y (s))。证明 E(Z) ≤ E(X) + E(Y)。

```
设F(s) = min(X(s), Y(s))
显然 E(F) ＋ E(Z) = E(X) ＋ E(Y)
又因为对于样本空间 S 的所有点，X 和 Y 是非负
所以E(Z) ≤ E(X) + E(Y )
```

Problem 10

证明如果事件 A 和 B 独立，那么事件 ¬A 和 ¬B 也独立。

```
  p(¬A·¬B)
= p(¬A) - p(¬A/B) · p(B)
= p(¬A) - p(¬A·B)
= p(¬A)(1 - p(B))
= p(¬A)p(¬B)

所以事件¬A 与 ¬B独立
```

Problem 11

某人爱说谎, 三句只能信两句. 他扔了一个骰子, 报告说是“四点”. 问这个骰子真是四点的概率是多少?

```

  P
= P(骰子真是四点) / P(某人说是四点)
= (P(扔到四点)  *  P(没有说谎)) / (P(不是四点)  *  P(说谎是四点) + P(扔到四点)  *  P(没有说谎))
= (2/3 * 1/6)/(5/6 * 1/3 * 1/5 + 2/3 * 1/6)
= 2/3
```

Problem 12

假设现在有 100 个座位, 从 1 号到 100 号, 从其中随机选择 25 个座位, 所选的连续座位对的期望是多少? (譬如 {1, 2} 就是一个连续座位对).

```
一共有 99 个连续座位对: {1, 2}, {2, 3}, ..., {99, 100}, 每个连续座位对被选择的概率是座
位对的期望是 99 * 25/100 * 24/99 = 6.
```