Problem Set 7: 函数

Problem 1

判断下面定义的几个 f (n) 是否是从 Z 到 R 的函数。
$a. f(n) = n^3$

```
⊥
```

$b. f(n) = \sqrt{n^2 - n + 1}$

```
T, f(2) = 3 ^ (1/2)
f(2) ∈ R
```

$c. f(n) = \frac{1}{n}$

```
T, f(2) = 1/2
f(2) ∈ R
```

Problem 2

判断下列各函数是否是从 R 到 R 的双射函数。
$a. f(x) = cosx$

```
F, f(0) = f(2π)
```

$b. f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

```
F, x不能满足 x = -1, 定义域 !=  R
```

$c. f(x) = x^3$

```
T,
domain(f) = R
range(f) = R
所以函数f为满射
```

$d. \ f(x) = e^x - 1$

```
F, range(f) != R
```

Problem 3

令f为从R到R的函数$f(x) = x^2 + 2 * x$。求
$a. \ f^{-1}(1)$
$\sqrt{2} - 1$或$-1 - \sqrt{2}$

$b. \ f^{-1}(x|0 < x < 1)$
$(-1 - \sqrt{2}, -2) \cup (0, \sqrt{2} - 1)$

$c. \ f^{-1}(x|x > 3)$
$(-3, 1)$

Problem 4

设 $f : R \times R \to R \times R$ 的解析式为 $f(x, y) = (x + y, x - y)$，试证明：f 是双射。

```
假设f不是单射或f不是满射
1. f不是单射
若f不是单射，则∃(a, b), (c, d) ∈ R, (f(a, b) = f(c, d) = (e, f))
所以a + b = c + d = e
所以a - b = c - d = f
可以解得a = c = (e + f) / 2
可以解得b = d = (e - f) / 2
与假设矛盾，故f是单射

2. f不是满射
若f不是满射, 则∃(a, b) ∈ R, (∀(x, y), f(x, y) != (a, b))
则方程组
x + y = a
x - y = b
无解
与证明1过程矛盾，故f是满射
```

```

综上，f是双射
```

Problem 5

求下列函数的定义域和值域。
a. 函数为每对正整数序偶指派这两个整数中的最大数。

```
domain: N+ ^ 2
range : N+
```

b. 函数为扑克牌（不含大小王）的花色。

```
domain: 扑克牌（不含大小王）
range : {红色, 黑色}
```

c. 函数为位串指派串中块 11 出现的次数。

```
domain: 所有位串
range : 非负整数
```

d. 函数为正整数除以 2 的余数。

```
domain: N+
range:  {0, 1, 2}
```

Problem 6

判断下列情况下 f : Z × Z → Z 是否是满射的?
$a.\ f(m,n) = 2m - n$

```
T
```

$b.\ f(m,n) = m + n + 1$

```
T
```

$c.\ f(m,n) = |m| - |n|$

```
T
```

$d. f(m,n) = m^2 + |n|$

```
⊥, -1 ∉ range(f)
```

$e. f(m,n) = m^2 - n^2$

```
⊥, 1 ∉ range(f)
```

Problem 7

设 f 是一个从集合 A 到集合 B 的函数，其中集合 A 和集合 B 是有限集，且 |A| = |B|。证明 f 是单射当且仅当它是满射。[提示：|A| ≥ |f(A)|]

```
若f是单射, |f(A)| = |A|
因为 |A|     = |B|
所以 |f(A)| = |B|
所以f为满射

若f是满射, 则 |f(A)| = B
因为 |A| = |B|
所以 |f(A)| = |A|
所以f为单射
```

Problem 8

假定 f 是从 X 到 Y 的函数，g 是从 Y 到 X 的函数。证明 f ◦ g = IY ，g ◦ f = IX 与 f^{−1} = g，g^{−1} = f 等价 其中 IX 和 IY 分别是 X 和 Y 上的恒等函数。

```
必要性: 若f g 互为反函数
则 f ◦ g = IY ∧  g ◦ f = IX

充分性: 若 f ◦ g 与 g ◦ f 分别是Y、X上的恒等函数
则 ∀ y ∈ Y, ∃ x, f(g(y)) = y ∧ g(y) = x
所以f是双射函数, 同理g是双射函数

综上命题成立
```

Problem 9

设 $f : A \to B$ 且 $g : B \to C$，若 $f \circ g$ 是单射，证明 f 是单射。

```
因为f ∘ g为单射所以

假设f不是单射
所以存在 a, b 使得 f(a) = f(b)
根据题设条件(f∘ g)(a) = (f∘ g)(b)
所以g(a) = g(b)
又因为g为单射,
所以a = b
与假设矛盾
所以f是单射
```

Problem 10

令f为从A到B的函数。S为B的子集。证明$f^{-1}(\overline{S}) = \overline{f^{-1}(S)}$。
设$x \in (B - S), g = f^{-1}$

```
所以g为从B到A的双射函数,
所以g(x) ∉ {g(a) | a ∈ S}
故g(x) ∈ g(a) - {g(a) | a ∈ S}
```

Problem 11

设 R1 , R2 是集合 A 上的关系，试说明：
a. 若 R1 , R2 满足自反性，则 $R2 \circ R1$ 是否满足自反性？

```
是
根据题意
R1(x) = x, R2(y) = y
所以R2(R1(y)) = R2(y) = y
所以R2 ∘ R1具有自反性
```

b. 若 R1 , R2 满足对称性，则 $R2 \circ R1$ 是否满足对称性？

```
不一定
根据题意
R1(x) = y, R1(y) = x
R2(a) = b, R2(b) = a

不妨设R1(x) = y, R2(y) = z, R2(R1(x)) = z
可得对称的表达式为R2(R1(z))
需证明R1(z) = z, 才可推导出R2(z) = y, R2(R1(z)) = y
而R1为对称函数，只有在R1为恒等函数时成立
故不一定满足对称性
```

c. 若 R1 , R2 满足传递性，则 R2 $\circ$ R1 是否满足传递性?

```
是
```

Problem 12

设f是从Y到Z的可逆函数，g是从X到Y的可逆函数。证明$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$。

又因为(f $\circ$ g) = f $\circ$ g
所以
$g^{-1} \circ f^{-1} \circ (f \circ g) = g^{-1} \circ f^{-1} \circ f \circ g$
所以
$g^{-1} \circ f^{-1} \circ (f \circ g) = IX$
所以
$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$