

Problem Set 24: 图的连通性

提交截止时间：6 月 3 日 10:00

Problem 1

G 的围长是指 G 中最短回路的长；若 G 没有回路，则定义 G 的围长为无穷大。

证明：围长为 4 的 k 正则图至少有 $2k$ 个顶点，且恰有 $2k$ 个顶点的这样的图（在同构意义下）只有一个。

如无特意说明，以后各题只考虑有限个点的图。

Problem 2

证明：简单图 G 是二部图，当且仅当 G 没有包含奇数条边的简单回路。

Problem 3

证明： $\kappa(G) = 1$ 的 r -正则图 G ，若 $r > 1$ ，总满足 $\lambda(G) \leq \frac{r}{2}$ 。（ $\lambda(G)$ 表示 G 的边连通度）

Problem 4

若无向图 G 中恰有两个奇数度的结点，则这两结点间必有一条路。

Problem 5

给定一个顶点个数有限的简单图 G ，假定我们只可以通过如下方式逐步删除 G 中的顶点：每一步可以删除度数小于 2 的顶点。试证明：如果 G 中的所有顶点能被删除当且仅当 G 中没有回路。

Problem 6

证明： G 是 2-边连通图当且仅当 G 中任意两个顶点之间至少有两条不含公共边的通路。

（提示：证明过程中可使用 Whitney 定理，但需注意和本题的差异）

Problem 7

假设 P 是连通图 G 中的一条最长的初级通路 (路径), 且 P 不是回路。试证明 P 的端点不是图 G 的割点。

Problem 8

证明: 设 G 是一个简单图, k 是一个自然数, 若 $\delta(G) \geq \frac{v+k-2}{2}$, 则 G 是 k -连通的。

Problem 9

设 n 阶图 G 的边数为 m , 试证明: 若 $m > C_{n-1}^2$ (即组合数 $\binom{n-1}{2}$), 则 G 为连通图。