

Problem Set 16: 偏序与偏序格

提交截止时间：4 月 29 日 10:00

Problem 1

下面哪些是偏序集？

(a) $(\mathbb{Z}, =)$

- 1 自反性：显然存在自反性
- 2 反对称性：由于 $a = b$ 且 $b = a$ 则 $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R$ ，故非偏序集

(b) (\mathbb{Z}, \neq)

- 1 自反性：显然存在自反性
- 2 反对称性：由于 $a \neq b$ 且 $b \neq a$ 则 $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R$ ，故非偏序集

(c) (\mathbb{Z}, \geq)

- 1 自反性：显然存在自反性
- 2 反对称性： $(a \neq b \wedge a \geq b) \rightarrow a > b$ ，则 $(a, b) \in R \rightarrow (b, a) \notin R$ ，故存在反自反性
- 3 传递性： $\forall a, b, c, a \geq b \wedge b \geq c \rightarrow a \geq c$ ，则存在传递性
- 4 综上， (\mathbb{Z}, \geq) 为偏序集

(d) (\mathbb{Z}, \mid)

- 1 自反性：如果 $\exists a \in \mathbb{Z}, (a, a) \in R$ ，则 $a \bmod a \neq 0$ ，而 $a \bmod a = 0$ ，故不存在自反性

Problem 2

对偏序集

$(\{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}, \subseteq)$,

回答下述问题.

a. 求极大元素.

- 1 $\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}$

b. 求极小元素.

- 1 $\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{3, 4\}$

c. 存在最大元素吗? 如果存在请求出.

- 1 不存在

d. 存在最小元素吗? 如果存在请求出.

- 1 不存在

e. 求 $\{\{2\}, \{4\}\}$ 的所有上界.

1

$\{\{2, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$

f. 如果存在的话, 求 $\{\{2\}, \{4\}\}$ 的最小上界.

1

$\{2, 4\}$

g. 求 $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ 的所有下界.

1

$\{\{3, 4\}\}$

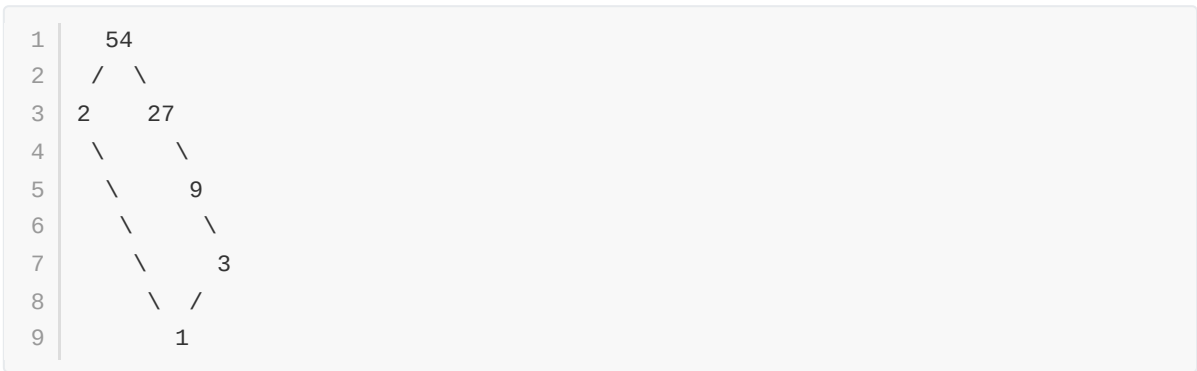
h. 如果存在的话, 求 $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ 的最大下界.

1

$\{3, 4\}$

Problem 3

已知 A 是由 54 的所有因子组成的集合, 设 $|$ 为 A 上的整除关系, 画出偏序集 $(A, |)$ 的哈斯图.



Problem 4

下图给出了 6 个偏序集的哈斯图. 判断其中哪些是格. 如果不是格, 请说明理由.

a.

1

是格

b.

1

不是格, $\{a, c\}$ 不存在一个最大下界

c.

1

是格

d.

1

是格

e.

1 | 不是格, $\{a, b\}$ 不存在一个最小下界

f.

1 | 是格