线性代数

任课教师：陈秦波

上节回顾: 三阶行列式

三元一次方程组:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

其系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

观察分析: 不妨设 $a_{11} \neq 0$。进行操作:

- 将第一行乘以 $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$, 加到第二行;
- 将第一行乘以 $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$, 加到第三行;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}} & \frac{a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21}}{a_{11}} \\ 0 & \frac{a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31}}{a_{11}} & \frac{a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

其中 2×2 子矩阵

$$B = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}} & \frac{a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21}}{a_{11}} \\ \frac{a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31}}{a_{11}} & \frac{a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

行列式 $\det B$ 等于

$$\frac{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}}{a_{11}}$$

- $\det B \neq 0$ 当且仅当" 分子 (红字体)$\neq 0$"。
- 回到原系数矩阵 A 上，其行列式 $\det A$ 的定义就采用分子（红字体）部分。

上节回顾：高斯消元法（三元情形）

- 目的：将三元一次方程组简化成形式更简单的**等价/同解**的方程组。
- 以下几种基本变换可保持**解集不变**：
  (1) 将任意两个方程位置对换.
  (2) 某方程乘以一个非 0 数 k.
  (3) 某方程乘以一个非 0 数 k，再加到另一个方程上.

例题

用高斯消元法计算

$$\begin{aligned} 2x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= -3 \end{aligned}$$

高斯消元法实际上是对增广矩阵做相应的初等行变换

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3+(-2)\times r_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3+(-\frac{3}{2})\times r_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{9}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-\frac{2}{3})\times r_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

继续做“行变换”

$$\xrightarrow{r_2+r_3}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}r_2]{r_1-r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1+r_2}\left[\begin{array}{ccc|c} \color{blue}{1} & 0 & 0 & \color{red}{-1} \\ 0 & \color{blue}{1} & 0 & \color{red}{2} \\ 0 & 0 & \color{blue}{1} & \color{red}{3} \end{array}\right]$$

最后一个矩阵意味着

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3$$

就是原方程的解。

例题

用高斯消元法解方程组

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + x_3 &= \frac{1}{2} \\
x_2 - 3x_3 &= 2 \\
4x_1 + x_2 + 5x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

特殊的 $n \times n$ 矩阵

- 对角矩阵：$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $a_{ij}=0$ 当 $i\neq j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{或者} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

也可用 $\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$ 表示。

- 单位矩阵：对角矩阵、主对角线上元素都是 1

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

常用 E 或 I 表示。

- **上三角形矩阵**: $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 满足当 $i > j$ 时，$a_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **下三角形矩阵**: $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 满足当 $i < j$ 时，$a_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- 对称矩阵: $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $a_{ij}=a_{ji}$, 对任意 i,j
- 反对称矩阵: $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $a_{ij}=-a_{ji}$ 对任意 i,j。显然，反对称矩阵的主对角线上的元素均为 0, 即 $a_{ii}=0$， $i=1,2,\cdots,n$

n 阶行列式

如何定义 n 阶行列式

- 对 n 阶方阵 $A \in M_n(\mathbb{R})$，行列式 $|A|$ 的值是一个实数。即
$$|\cdot| : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
是一个实值函数。
- 要使行列式具有研究价值，希望其满足以下基本性质：

(P1) 对单位矩阵 E，$|E|=1$.
(P2) A 中任意两行互换，行列式变号.
(P3) 多重线性：行列式对 A 的每一行都线性.

多重线性

对每一个行指标 $i = 1, 2, \cdots, n$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$\text{对 } \lambda \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

用行向量表示

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\qquad 其中\ \alpha_i=(a_{i1},\cdots,a_{in})\ 为\ n\ 维行向量$$

则性质（P3）可写成

$$\begin{vmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ t\alpha_i+s\beta_i\\ \vdots\\ \alpha_n\end{vmatrix}=t\begin{vmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_i\\ \vdots\\ \alpha_n\end{vmatrix}+s\begin{vmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \beta_i\\ \vdots\\ \alpha_n\end{vmatrix}$$

其中 $t,s\in\mathbb{R}$.

定义

n 阶行列式的值由 (P1)-(P3) 所唯一确定。

其余性质

(P1) 对单位矩阵 E，$|E|=1$.

(P2) A 中任意两行互换，行列式变号.

(P3) 多重线性：行列式对 A 的每一行都线性.

由（P1）-(P3) 可推出：

(P4) 对角矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(P5) 若 A 的某两行相等，则 $|A|=0$

(P6) 将某行乘以 k 加到另一行，行列式不变

(P7) 若 A 的某一行全是 0，则 $|A|=0$

(P8) 若 A 为三角形矩阵，则 $|A|=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.