Problem Set 28-29: 树、根树与二叉树

提交截止时间：6 月 17 日 10:00
如无特意说明，以后各题只考虑有限个点的图。

Problem 1

计算下列各题：

1. 有多少非同构的 4 个顶点的树?

```
两种
```

2. 饱和碳氢化合物 C4 H10 有多少不同的同分异构体?

```
与1类似有正丁烷和异丁烷两种
```

3. 有多少由 4 个不可区分的顶点构成的二叉树?

```
14种
```

4. K4 有多少个不同的生成树? （假设各条边互不相同）

```
16种
```

Problem 2

二叉搜索树 (BST) 是节点带标号的有序二叉根树，其所有的子树都满足根节点标号大于左子树中所有节点的标号，而小于右子树中所有节点标号。记 Cn 为以 1,2,…,n 为各节点标号的不同的 BST 的个数。请利用基本计数原理给出 Cn 的递推公式. 这里我们约定 C0 =1。

```
以第i个元素作为根节点
根据二叉搜索树的性质，左子树和右子树也必须是二叉搜索树。
所以左子树的节点个数是 i−1，右子树的节点个数是 n−i
故此时Ci = Ci-1 * Cn-i
```

对1..n个元素的情况求和为 $\sum_{i=1}^{n}(Ci-1*Cn-i)$

Problem 3

令 D = (d1 , d2 , · · · , dn) 为一正整数序列，且 n ≥ 2。
a) 若 D 恰好是某个树 T 的各个顶点的度数序列，试证明
$\sum_{i=1}^{n} di = 2(n-1)$

```
由于对于有n各节点的树来说，有n-1条边，所以各顶点的度数之和为2(n - 1)
```

b) 反过来，试证明：若 D 满足上式，则存在一个树 T ，使得 D 恰好是 T 的各个顶点的度数序列。

```
即证明对于节点个数为n的树，其节点度数可以为{1, 2, 3, ... n - 1}
当某节点度数为1，只需将树中其他叶子节点移除插入此节点形成的新树对应的该节点度数即为2，
重复上述操作，当度数n - 1时此时为最大度数，该节点与任意节点的连接的边为桥。
```

Problem 4

试用 Kruskal 算法求所给带权图的最小生成树。（按顺序写出选取的边及 MST 的权值）

```
(e, f)
(a, d)
(h, i)
(b, d)
(c, f)
(e, h)
(b, c)
(d, g)
24
```

Problem 5

试求以下无向带权图的最小生成树 T （请直接将图中所求最小生成树的边加粗），并求此最小生成树的权值 W (T).

```
(h, b)
(a, b)
(b, e)
(e, d)
(d, f)
(f, g)
(f, c)
20
```

Problem 6

证明或反驳：每条边权重均不相同的带权图

1. 有唯一的最小生成树。

```
反证，记不同的最小生成树 T, T′ 边集按权重从小到大排序为 T = {e1, e2, . . . , en−1}, T′ = {e′1, e′2, ..., e′n−1}。
因为 T≠T′，必存在最小的 k < n 使得 ek≠e′k，不妨令 w(e′k) < w(ek)，将 e′k 加入 T，得到的 T + e′k 中有一个包含 e′k 的圈 C，
因为 {e1, e2, . . . , ek−1, e′k} = {e′1, e′2, . . . , e′k} ⊆ T′ 无环
所以存在 t > k.et ∈ c，删去 et得到 g 的另一个生成树
t +e′k −et，w(T +e′k −et) = w(T)+w(e′k)−w(et) < w(T)+w(e′k)−w(ek) < w(T)，与 T 是 G 上的最小生成树矛盾。
```

Problem 7

令 G 为一无向带权连通图，假设图中存在一个回路. 试证明：在此回路上若存在一条边 e 其权值严格大于此回路上的其它各边，则 e 不在 G 的任何最小生成树中。

```
将该回路中的这条边删去，得到一个通路，
1.若没有有最小生成树包含此通路，则符合题意
2.若有最小生成树包含此通路，此时尝试恢复该边，并删除任意该回路中的其他一边，
显然均大于各通路的权值，则此时e一定不再该通路中，所以e不再G的任何最小生成树中。
```