

微积分I期末试卷 2021.1.4

一、计算下列各题(6分 \times 3=18分)

1. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{5}{n^2} + \cos \frac{5}{n} \right)^{3n^2}$.
2. 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$.
3. 求函数 $y = (x + 3)e^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线.

二、计算下列各题 (6分 \times 3=18分)

1. $I_1 = \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x - \cos^4 x} dx$.
2. $I_2 = \int \frac{x^3}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$.
3. $I_3 = \int_{-1}^1 \frac{x^4 + x^7 \cos^{10} x}{1 + x^2} dx$.

三、计算下列各题 (6分 \times 2=12分)

1. 已知三个单位向量 \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , 且 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 求 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$.
2. 将直线的一般式方程 $\begin{cases} x - y + z + 5 = 0, \\ 5x - 8y + 4z + 36 = 0 \end{cases}$ 化为点向式方程.

四、(10分) 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin x)^{\sin x} - x^{\sin x}}{\sin^2 x \arcsin x}$.

五、(10分) 设 $f(x)$ 在 R 上可导且 $f(0) = 0$, $f'(x) \geq 0$. 证明 $\left(\int_0^x f(t) dt \right)^2 \leq 2 \int_0^x t f^2(t) dt$.

六、(10分) 求由曲线 $y = \ln x$ 在 $(e, 1)$ 处的切线与 $y = \ln x$ 以及 x 轴所围成的平面图形 D 的面积 S , D 分别绕 x 轴、 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V_x, V_y .

七、(14分) 讨论函数 $y = x \arctan x$ 的定义域, 单调区间, 极值, 凹凸区间, 拐点, 渐近线, 并作出函数图像.

八、(8分) 已知函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上具有连续的二阶导数, 且 $f'(a) = f'(b) = 0$.

求证: $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $\int_a^b f(x) dx = (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{1}{6} (b - a)^3 f''(\xi)$.

微积分I期末试卷 2022.1.4

一、计算下列各题 (6分 \times 3 = 18分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

2. 设 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 8}$, 求 $f^{(n)}(x)$.

3. 设 $f(x)$ 在 a 的一个邻域内二阶连续可导, $f'(a) = \sqrt{2}$, $f''(a) = 2$, 求

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{f(x) - f(a)} - \frac{1}{(x - a)f'(x)} \right).$$

二、计算下列各题 (6分 \times 3 = 18分)

1. 计算积分 $\int \frac{1}{\sqrt{1 + e^x}} dx$;

2. 计算积分 $\int x^2 (\ln x)^2 dx$.

3. 计算积分 $\int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$.

三、计算下列各题 (6分 \times 3 = 18分)

1. 求与直线 $L_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$ 及 $L_2: \frac{x+2}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$ 都平行且与它们等距的平面方程.

2. 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}}$.

3. 求心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$ 所围图形面积 S .

四、(6分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(x) > 0$, 求方程 $\int_a^x f(t) dt - \int_x^b \frac{1}{f(t)} dt = 0$ 在 (a, b) 内根的个数.

五、(12分) 讨论函数 $y = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$ 的定义域, 单调区间, 极值, 凹向与拐点, 渐近线, 并作出草图.

六、(10分) 1. 证明 $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$. 2. 计算 $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

七、(10分) 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上二次可微, 并且 $f''(x) > 0$. 设 L_t 为曲线 $C: y = f(x)$ 在点 $(t, f(t))$ 的切线, $A(t)$ 为曲线 C 与直线 L_t , $x = a$, $x = b$ 所围图形的面积. 问 $A(t)$ 在哪些点取到最小值? 说明你的理由.

八、(8分) 设函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上有三阶连续导数.

证明: 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left| k(f(\frac{1}{k}) - f(-\frac{1}{k})) - 2f'(0) \right|$ 存在.

微积分 I 期末试卷 2023.2.21

一、计算下列各题 (6 分 \times 3 = 18 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^{\frac{5}{x^2}}$.
2. 设 $f(x) = x^2 \ln(1-x)$, 求 $f^{(10)}(0)$.
3. 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = \int_{-\infty}^c te^{2t} dt$, 求 c 的值.

二、计算下列各题 (6 分 \times 3 = 18 分)

1. 计算 $\int_{-1}^1 \frac{1+x^3}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}} dx$;
2. 计算 $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$.
3. 计算 $\int \frac{x}{x^2+2x+3} dx$.

三、计算下列各题 (6 分 \times 3 = 18 分)

1. 设直线 L 的方程为 $\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{5}$, 平面 Π 的方程为 $3x+y+2z+20=0$, 求直线 L 与平面 Π 的夹角 θ 与交点 M .

2. 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \ln(n+i) - \ln n \right)$.

3. 计算由曲线 $y = \sin x, y = \cos x, x = \frac{\pi}{2}$ 所围的最小的平面图形的面积.

四、(10分) (1) 设 $f(x), g(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续, $g(x)$ 是偶函数, $f(x) + f(-x) \equiv A$ (A 为常数), 证明:

$$\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = A \int_0^a g(x)dx.$$

(2) 利用 (1) 的结论求 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \arctan(e^x) dx$.

五、(12分) 讨论函数 $y = (x-2)e^{-\frac{1}{x}}$ 的定义域, 单调区间, 极值, 凹向与拐点, 渐近线, 并作出草图.

六、(8分) 求曲线 $y = \ln x$ 的一条切线, 使得这条切线与原曲线, 以及直线 $x=1, x=e^2$ 所围成的图形面积最小.

七、(8分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上有连续的一阶导数, 证明 $\forall x \in [0, 1]$, 有

$$|f(x)| \leq \int_0^1 (|f(t)| + |f'(t)|) dt.$$

八、(8分) 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有二阶连续导数, 且 $\forall x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x) \geq 0, f'(x) \leq 0$. 又存在正数 M 使得 $|f''(x)| \leq M, (x \in (0, +\infty))$. 已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

(注: 此题中的条件 $|f''(x)| \leq M$ 与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在, 二者只需一个成立即可)

微积分I (第一层次) 期末试卷参考答案 2021.1.4

一、 1. $e^{-\frac{45}{2}}$; 2. e ; 3. $x = 0$ 是铅直渐近线, $y = x + 4$ 是斜渐近线.

二、 1. $I_1 = \frac{1}{4} \ln |\cos 2x| + C$. 2. $I_2 = \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C$; 3. $I_3 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$.

三、 1. $-\frac{3}{2}$. 2. $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-3}$. 四、 $-\frac{1}{6}$

五、 设 $F(x) = \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2 - 2 \int_0^x t f^2(t) dt$, 则

$$F'(x) = 2 \int_0^x f(t) dt \cdot f(x) - 2x f^2(x) = 2f(x) \cdot x \cdot f(\xi) - 2x f^2(x) = 2x f(x)(f(\xi) - f(x)),$$

其中 ξ 在 0 与 x 之间. 因为 $f'(x) \geq 0$, 所以 $f(x)$ 单调增加.

当 $x > 0$ 时, $f(x) \geq f(\xi) \geq f(0) = 0$, 故 $F'(x) \leq 0$, $F(x)$ 单调减少, 因此 $F(x) \leq F(0) = 0$;

当 $x < 0$ 时, $f(x) \leq f(\xi) \leq f(0) = 0$, 故 $F'(x) \geq 0$, $F(x)$ 单调增加, 因此 $F(x) \leq F(0) = 0$;

综上所述, $F(x) \leq 0$, 即 $\left(\int_0^x f(t) dt \right)^2 \leq 2 \int_0^x t f^2(t) dt$.

六、 $S = \int_0^1 (e^y - ey) dy = \left(e^y - \frac{ey^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{e}{2} - 1$.

$$V_x = \frac{1}{3} \pi e - \pi \int_1^e \ln^2 x dx = \frac{1}{3} \pi e - \pi (x \ln^2 x - 2x(\ln x - 1)) \Big|_1^e = 2\pi(1 - \frac{e}{3}).$$

$$V_y = \pi \int_0^1 (e^{2y} - e^2 y^2) dy = \pi \left(\frac{1}{2} e^{2y} - \frac{1}{3} e^2 y^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} (e^2 - 3).$$

七、 定义域 $(-\infty, +\infty)$; 偶函数;

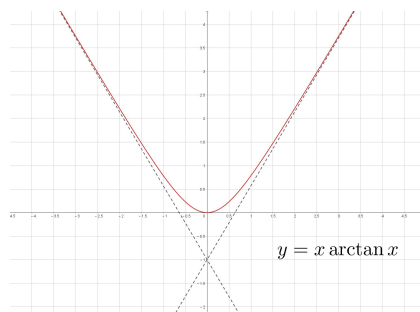
$$y' = \arctan x + \frac{x}{1+x^2},$$

单调增区间 $(0, +\infty)$, 单调减区间 $(-\infty, 0)$;

极小值 $y(0) = 0$;

$$y'' = \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0, \text{ 上凹区间 } (-\infty, +\infty); \text{ 无拐点};$$

渐近线 $y = \frac{\pi}{2}x - 1, y = -\frac{\pi}{2}x - 1$.



八、 令 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, 则 $F'(x) = f(x), F''(x) = f'(x), F'''(x) = f''(x)$, 且 $F(a) = 0, F''(a) = F''(b) = 0$.

函数 $F(x)$ 在 $x = a$ 处的 2 阶泰勒公式为

$$F(x) = F(a) + F'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} F''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!} F'''(\xi_1)(x-a)^3 = f(a)(x-a) + \frac{1}{6} f''(\xi_1)(x-a)^3$$

其中 $a < \xi_1 < x$. 令 $x = b$, 得 $\int_a^b f(x) dx = f(a)(b-a) + \frac{1}{6} f''(\xi_2)(b-a)^3, (a < \xi_2 < b), (1)$

函数 $F(x)$ 在 $x = b$ 处的 2 阶泰勒公式为

$$F(x) = F(b) + F'(b)(x-b) + \frac{1}{2!} F''(b)(x-b)^2 + \frac{1}{3!} F'''(\eta_1)(x-b)^3 = \int_a^b f(x) dx + f(b)(x-b) + \frac{1}{6} f''(\eta_1)(x-b)^3$$

其中 $x < \eta_1 < b$. 令 $x = a$, 得 $\int_a^b f(x) dx = f(b)(b-a) + \frac{1}{6} f''(\eta_2)(b-a)^3, (a < \eta_2 < b), (2)$

$$(1)+(2) \text{ 得 } \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(f(a)+f(b))(b-a) + \frac{1}{6}\left(\frac{f''(\xi_2)+f''(\eta_2)}{2}\right)(b-a)^3,$$

因为 $f''(x)$ 在区间 $[\xi_2, \eta_2]$ (或 $[\eta_2, \xi_2]$) 上连续, 由最值定理, $f''(x)$ 在区间 $[\xi_2, \eta_2]$ (或 $[\eta_2, \xi_2]$) 上有最大值 M 与最小值 m , 而 $m \leq \frac{f''(\xi_2)+f''(\eta_2)}{2} \leq M$, 则由介值定理, $\exists \xi \in [\xi_2, \eta_2] \subset (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = \frac{f''(\xi_2)+f''(\eta_2)}{2}$, 于是 $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(f(a)+f(b))(b-a) + \frac{1}{6}f''(\xi)(b-a)^3$.

微积分I (第一层次) 期末试卷参考答案 2022.1.4

一、 1. $e^{-1/2}$. 2. $(-1)^n \frac{n!}{6} \left(\frac{1}{(x-4)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{(n+1)}} \right)$. 3. $\frac{1}{2}$.

二、 1. $\ln \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C$; 2. $\frac{1}{3}x^3 \ln^2 x - \frac{2}{9}x^3 \ln x + \frac{2}{27}x^3 + C$. 3. $\ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1$.

三、 1. $5x + 2y + z + 1 = 0$. 2. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. 3. $\frac{3}{2}\pi a^2$.

四、 方程 $\int_a^x f(t)dt - \int_x^b \frac{1}{f(t)}dt = 0$ 在 (a, b) 内有并且只有一个根.

五、 定义域 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

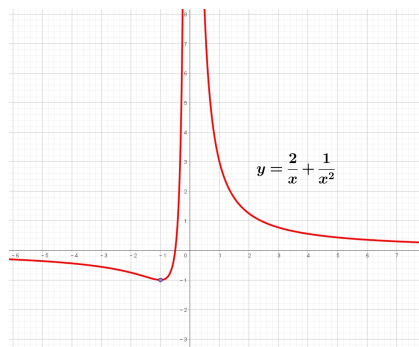
单调增区间 $(-1, 0)$, 单调减区间 $(-\infty, -1), (0, +\infty)$;

极小值 $f(-1) = -1$, 没有极大值;

下凹区间 $(-\infty, -\frac{3}{2})$, 上凹区间 $(-\frac{3}{2}, 0), (0, +\infty)$;

拐点 $(-\frac{3}{2}, -\frac{8}{9})$;

$x=0$ 是铅直渐近线, $y=0$ 是水平渐近线.



六、 2. $\frac{\pi^2}{4}$.

七、 $f''(x) > 0$, 曲线 C 是凹的,

$$A(t) = \int_a^b (f(x) - f(t) - f'(t)(x-t))dx = \int_a^b f(x)dx - (b-a)f(t) - \frac{b^2-a^2}{2}f'(t) + (b-a)tf'(t).$$

$$A'(t) = f''(t)(b-a)(t - \frac{a+b}{2}). \text{ 令 } A'(t) = 0, \text{ 得 } t = \frac{a+b}{2}.$$

$a < x < \frac{a+b}{2}$ 时, $A'(t) < 0$, $\frac{a+b}{2} < x < b$ 时, $A'(t) > 0$, 所以 $A(t)$ 在 $t = \frac{a+b}{2}$ 取到最小值.

八、 证明: $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(\zeta)}{6}x^3$.

$$|k(f(\frac{1}{k}) - f(-\frac{1}{k})) - 2f'(0)| = |k(\frac{2f'(0)}{k} + \frac{f^{(3)}(\alpha_k)}{6k^3} + \frac{f^{(3)}(\beta_k)}{6k^3}) - 2f'(0)| \leq \frac{M}{3k^2},$$

其中 $M = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(3)}(x)|$.

设 $x_n = \sum_{k=1}^n |k(f(\frac{1}{k}) - f(-\frac{1}{k})) - 2f'(0)|$, 显然 x_n 是单调增加数列, 又

$$x_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{M}{3k^2} < \frac{M}{3} \left(1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) \right) < M.$$

x_n 单调增加有上界, 因此收敛, 即极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |k(f(\frac{1}{k}) - f(-\frac{1}{k})) - 2f'(0)|$ 存在.

微积分I (第一层次) 期末试卷参考答案 2023.2.21

一、 1. e^{-10} ; 2. $90 \times 7!$; 3. $c = \frac{5}{2}$.

二、 1. $\frac{5\sqrt{2}}{6}$; 2. $\frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \sqrt{1-x^2} + C$; 3. $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 3) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$.

三、 1. $\theta = \frac{\pi}{3}, M(-5, 3, -4)$. 2. 原式 $= \int_0^1 \ln(1+x) dx = 2 \ln 2 - 1$. 3. $\sqrt{2} - 1$.

四、(2) $\cos x$ 是偶函数, $\arctan e^x + \arctan e^{-x} = \frac{\pi}{2}$, 所以原式 $= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{\pi}{2}$.

五、定义域 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

单调增区间 $(-\infty, -2), (1, +\infty)$,

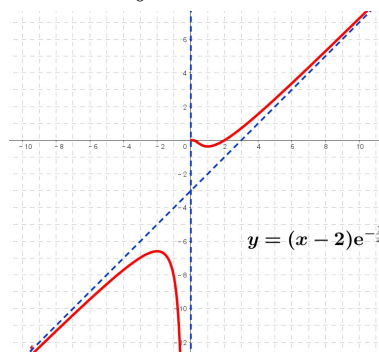
单调减区间 $(-2, 0), (0, 1)$;

极大值 $f(-2) = -4\sqrt{e}$, 极小值 $f(1) = -\frac{1}{e}$;

下凹区间 $(-\infty, 0), (0, \frac{2}{5})$, 上凹区间 $(\frac{2}{5}, +\infty)$;

拐点 $(\frac{2}{5}, -\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}})$;

$x = 0$ 是铅直渐近线, $y = x - 3$ 是斜渐近线.



六、所求切线方程为 $y = \frac{2}{e^2+1}x + \ln \frac{e^2+1}{2} - 1$.

七、方法一: $f(t)$ 连续, 则 $|f(t)|$ 也连续, 由积分中值定理, 存在 $\zeta \in (0, 1)$, 使得 $\int_0^1 |f(t)| dt = |f(\zeta)|$.

又 $f(x) = f(\zeta) + \int_{\zeta}^x f'(t) dt$, 所以 $|f(x)| \leq |f(\zeta)| + \int_0^1 |f'(t)| dt = \int_0^1 (|f(t)| + |f'(t)|) dt$.

八、方法一: 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在, 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = A$; 又 $f'(x) \leq 0$ 且 $f(x) \geq 0$, 所以 $f(x)$ 单调减少有下界, 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = B$. 由微分中值定理, 存在 $\xi \in (x, x+1)$, 使得 $f(x+1) - f(x) = f'(\xi)$, 上式两边令 $x \rightarrow +\infty$ 取极限可得 $B - B = A$, 所以 $A = 0$.

方法二: 由 $f'(x) \leq 0$ 且 $f(x) \geq 0$, 可知 $f(x)$ 单调减少有下界, 故极限存在, 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

对于任意给定的常数 $\delta > 0$, 有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} = \frac{A - A}{\delta} = 0$, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists G > 0$, 当 $x > G$ 时, 总有 $\left| \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ ($\forall \delta > 0$). 由泰勒公式, $f(x+\delta) = f(x) + f'(x)\delta + \frac{1}{2}f''(\xi)\delta^2$, 则 $\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} = f'(x) + \frac{1}{2}f''(\xi)\delta \Rightarrow |f'(x)| \leq \left| \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \right| + \frac{1}{2}\delta M$,

则 $\forall \varepsilon > 0, \exists G > 0$, 当 $|x| > G$ 时, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, 总有 $|f'(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, 即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.