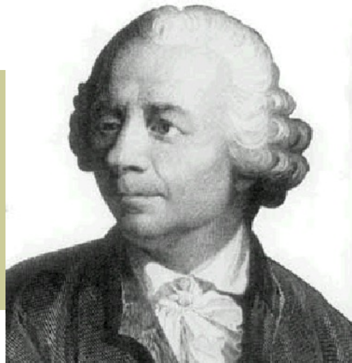
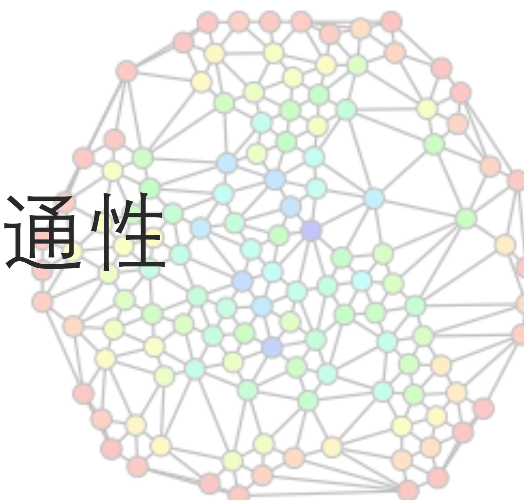


离 散 数 学
Discrete Mathematics



第二十四讲：图的连通性

吴 楠
南京大学计算机科学与技术系

2024 年 5 月 22 日

Model: GPT-4

在图论中有哪些典型的证明方法?

3 / 3

图论是数学的一个分支，专注于图和网络的性质。有许多典型的图论证明方法，以下是一些常见的：

1. **归纳法（Induction）**：这是一种广泛应用于图论的证明方法，尤其是在证明关于图的规模（节点或边的数量）的性质时。基本思想是首先证明基础情况（如一个节点或一条边的图），然后证明如果该性质对一个较小的图成立，那么它也应该对一个稍大的图成立。
2. **反证法（Contradiction）**：反证法是一种常用的证明策略，其中我们假设我们想要证明的语句是假的，然后寻找一个矛盾，这就表明原来的假设必须是真的。在图论中，反证法常常用于证明某些性质对所有图都成立。
3. **构造法（Construction）**：这种证明方法通常需要构造一个特定的图，以证明某个性质是可能的，或者构造一个序列的图来证明某个性质是必然的。例如，你可能需要构造一个图，以证明存在具有某个特性的图，或者构造一系列图，以证明无论图的大小如何，都可以找到具有特定性质的图。
4. **图的同构和归结（Isomorphism and Reduction）**：这些证明方法涉及到证明两个或更多的图在某种意义上是"相同的"（即，它们是同构的），或者一个图问题可以归结为另一个已知的图问题（即，它是可归结的）。这种方法常常用于证明图的性质，或者证明一个图问题的复杂性。
5. **图的分解（Decomposition）**：这种方法涉及将一个图分解成更小或更简单的部分，然后单独研究这些部分。这可以使问题变得更简单，也使得我们可以使用归纳法。

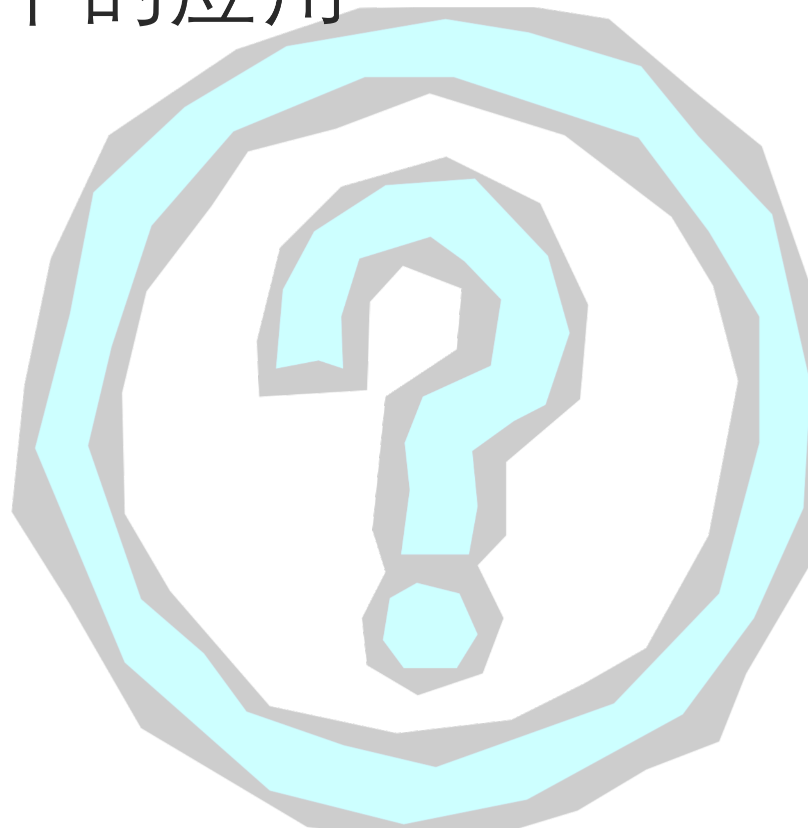
以上只是一些图论证明方法的例子，实际上还有很多其他的方法和策略可以使用

Regenerate response

Send a message.

前情提要

- 图论在计算机科学中的应用
- 图的定义与表示
- 图的术语
- 子图与图同构
- 图的基本运算
- 图模型及其应用
- 图的通路与回路



本讲主要内容

- 无向图的连通性
- 连通的度量
- 点连通度与边连通度
- 点连通度与边连通度的关系
- 点连通度与边连通度的上限*

无向图的连通性（connectivity）

- **定义（无向图顶点间的连通关系）**：设$G = \langle V, E\rangle$为无向图，$v_i, v_j \in V(G)$，定义关系~：$v_i \sim v_j$若v_i与v_j之间存在通路。易见，~为V上的等价关系

- **定义（无向图的连通性）**：若$\forall u, v \in V(G), u \sim v$，称无向图$G$连通（connected）

- **定义（连通分支）**：商集$V(G)/\sim = \{V_1, V_2, \cdots, V_k\}$，称$G[V_1], G[V_2], \cdots, G[V_k]$为图$G$的连通分支（connected component），其计数为$p(G) = k$

无向图的连通性（续）

- 定义（**连通图**）：若无向图G是平凡图或任何两顶点均连通，称G为连通图（connected graph），否则称G是非连通图（disconnected graph）或分离图（separated graph）。显然，完全图$K_n(n \geq 1)$是连通图，零图$N_n(n \geq 2)$是分离图且其连通分支最多，为$p(N_n) = n$
- 对连通图，$p(G) = 1$；对非连通图，$p(G) \geq 2$

图的连通性（续）

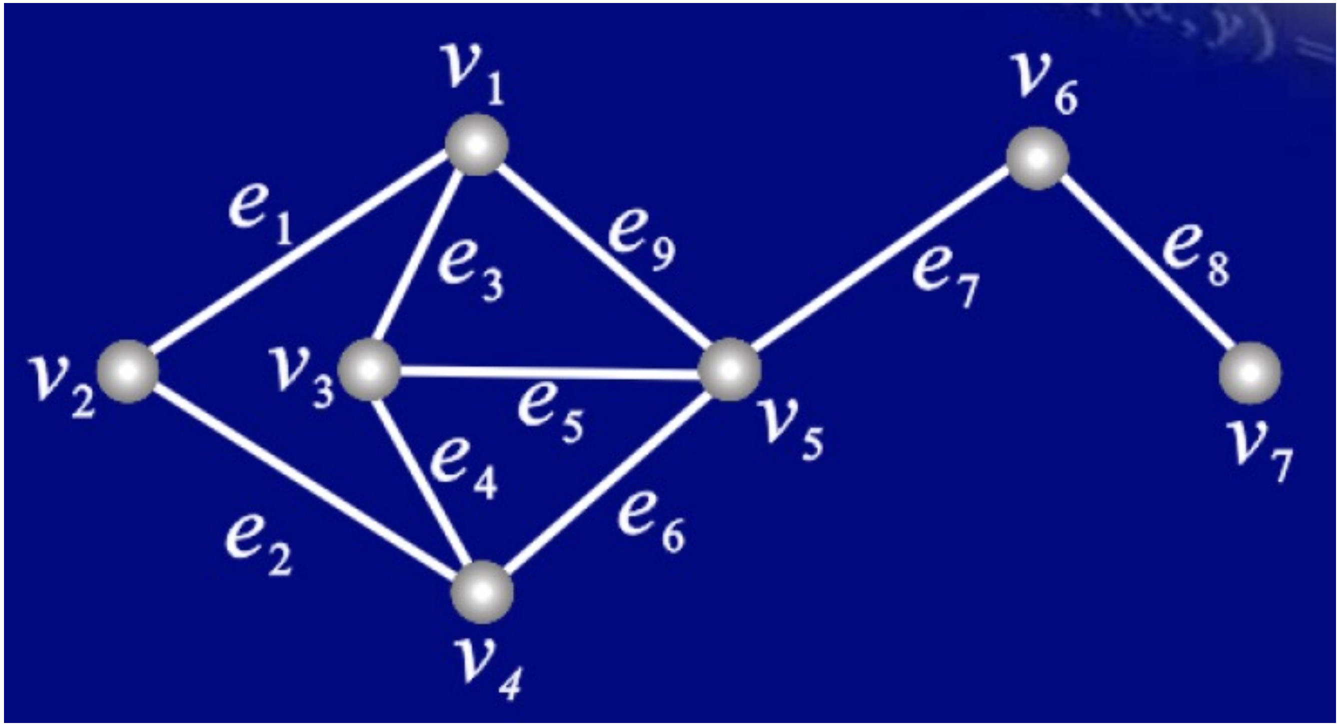
- 命题：若G不连通，则G的补图$\bar{G}$连通
- 证明：

假设G不连通。任给$u, v \in \bar{G}$：

- 如果$uv \notin E(G)$，则u与v在$\bar{G}$中相邻；
- 如果$uv \in E(G)$，因为G是非连通图，一定存在顶点w与u, v在不同的连通分支中，于是$uw \notin E(G), vw \notin E(G)$。所以$uw \in E(\bar{G}), vw \in E(\bar{G})$，因此$(u, w, v)$是$\bar{G}$中的$(u, v)$−通路，$\bar{G}$是连通图. □

连通性的度量

- 讨论：对图G进行哪些基本操作，会影响G的连通分支数$p(G)$？



连通性的度量（续）

- 讨论：对图G进行哪些基本操作，会影响G的连通分支数$p(G)$?

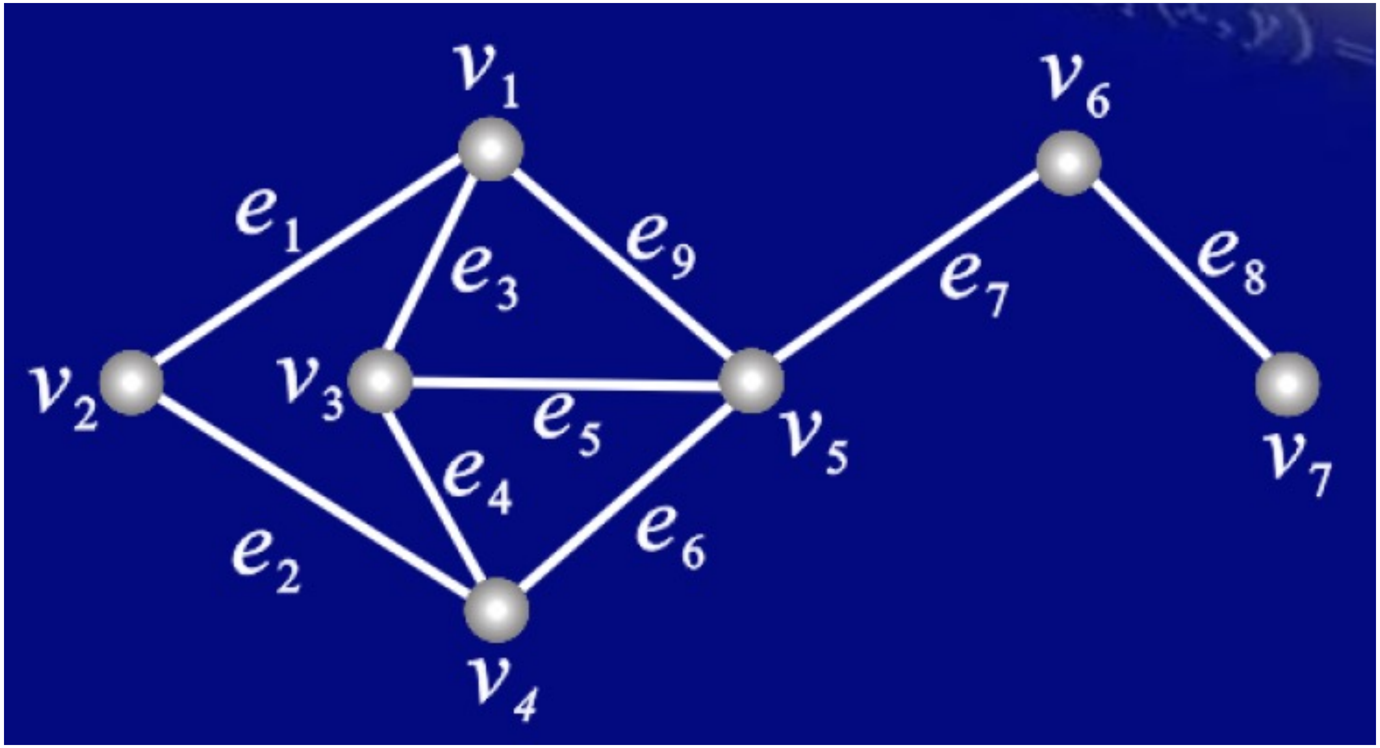
- (1) 边的删除可能导致连通分支数的增加：

$$p(G) \le p(G-\{e\}) \le p(G)+1$$

  - 第一个“不大于”显然成立(删除边e只会影响e所在的那一个连通分支)
  - 第二个“不大于”：注意在图中任意两点之间加一条边，最多只能将两个连通分支连成一个。因此删除某条边不会使连通分支增加多于一个

连通性的度量（续）

- 讨论：对图G进行哪些基本操作，会影响G的连通分支数$p(G)$?



连通性的度量（续）

- 讨论：对图G进行哪些基本操作，会影响G的连通分支数$p(G)$?

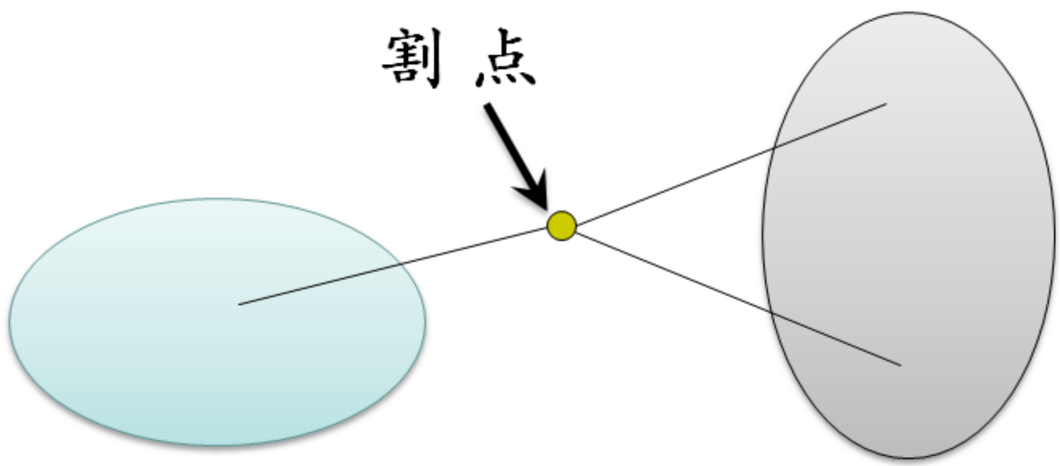
- (2) 点的删除可能导致连通分支数的增加或减少：

$$p(G)\ ?\ p(G-\{v\})$$

  - $p(G) > p(G-\{v\})$ ：删除孤立顶点连通分支数会减少
  - $p(G) = p(G-\{v\})$ ：删除悬挂顶点连通分支数不变
  - $p(G) < p(G-\{v\})$ ：删除星图中间顶点会导致连通分支数增加任意有限多个

连通性的度量（续）

- 定义（点割集与割点）：设无向图$G = \langle V, E\rangle$，若存在非空的$V' \subset V$使得$\boldsymbol{p(G-V') > p(G)}$而对于任意的$V'' \subset V'$，均有$\boldsymbol{p(G-V'') = p(G)}$，则称集合$V'$是$G$的点割集，若$V' = \{v\}$，称$v$为割点



连通性的度量（续）

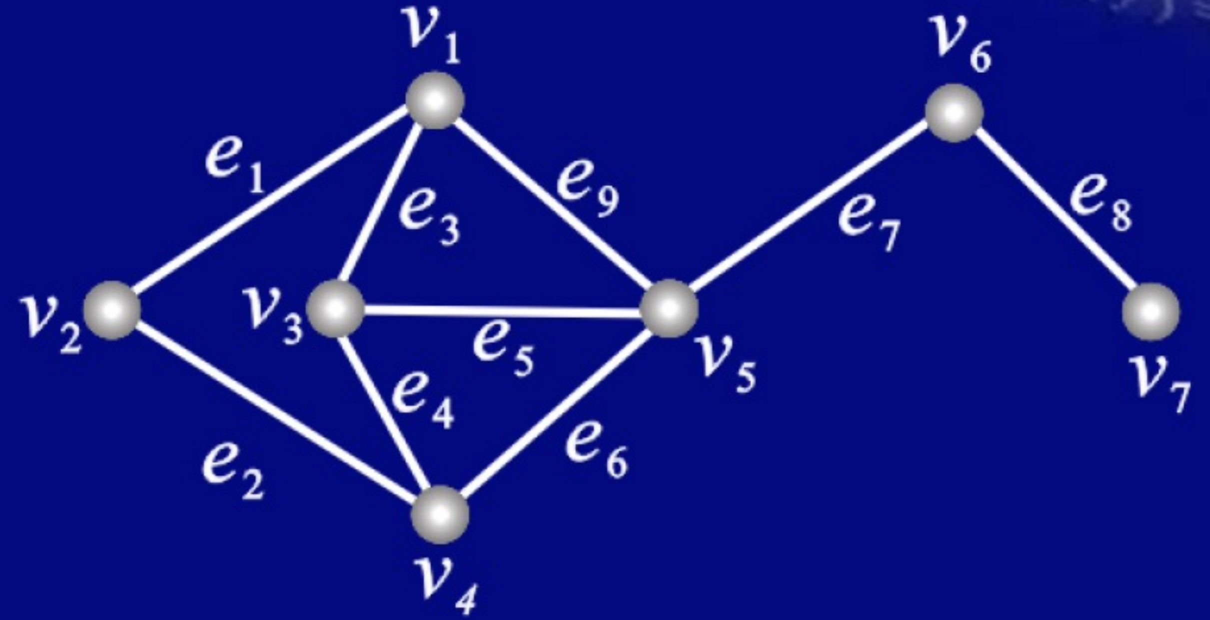
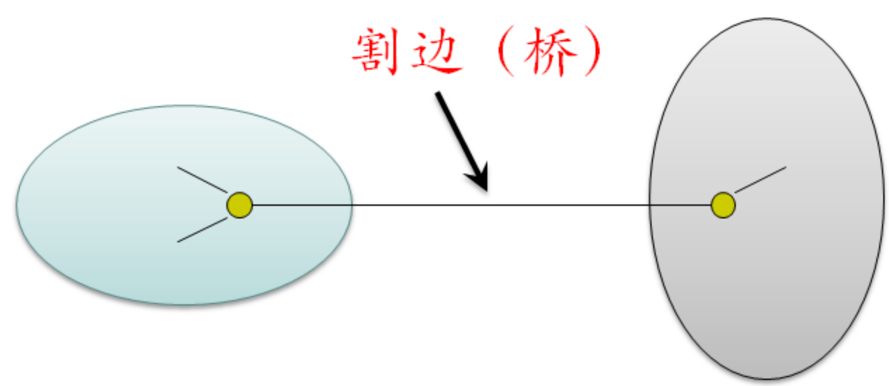


图 7

图 7 中，$\{v_1,v_4\}$，$\{v_6\}$是点割集，v_6是割点. $\{v_2,v_5\}$是点割集吗?

连通性的度量（续）

- 定义（边割集与割边）：设无向图$G=\langle V,E\rangle$，若存在非空的$E'\subset E$使得$p(G-E')>p(G)$而对于任意的$E''\subset E'$，均有$p(G-E'')=p(G)$，则称集合E'是G的边割集，或简称割集，若$E'=\{e\}$，称e为割边或桥



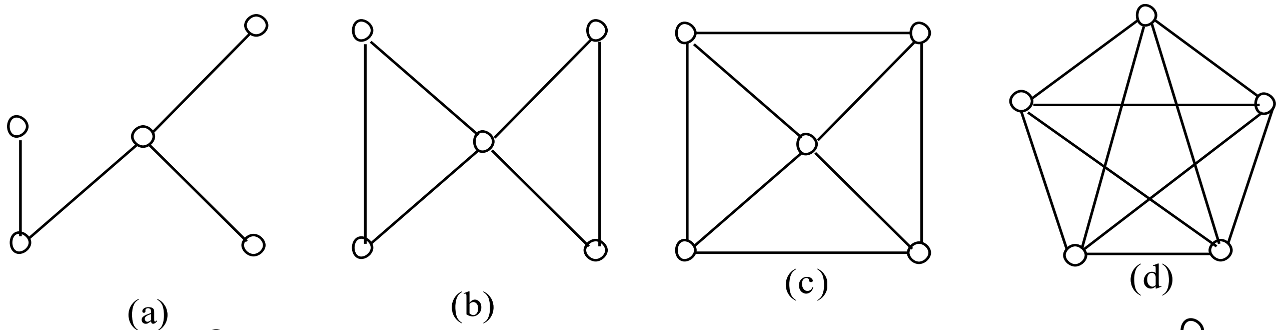
连通性的度量（续）

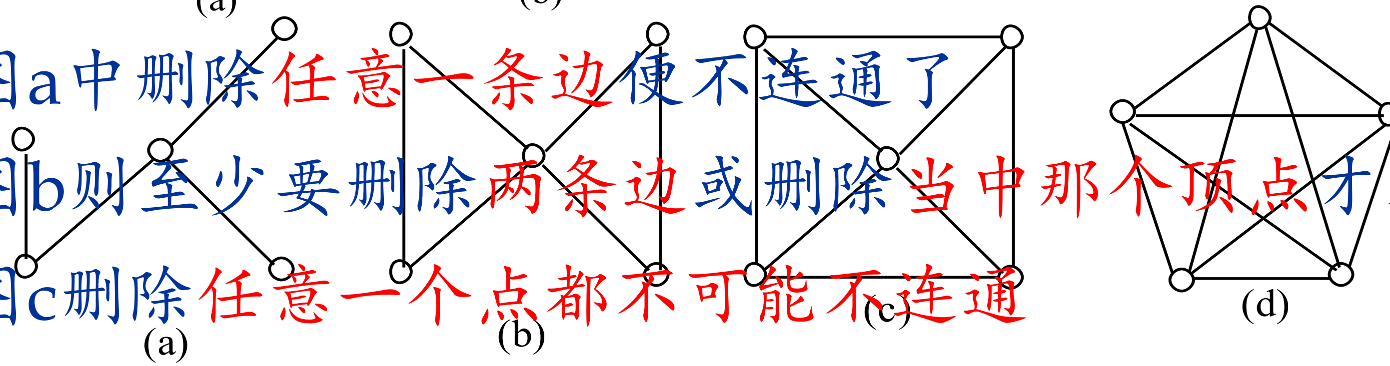
- **命题：** e是割边当且仅当e不在G的任一简单回路上（注意：对割点则没有相应结论）
  - **证明：** $\Rightarrow$：假设C是包含$e=(x,y)$的简单回路，令$C-\{e\}=P$，P是不含e的$(x,y)-$简单通路。对G中任意顶点u,v，若$(u,v)-$通路中不含e，则该通路也是$G-\{e\}$中的$(u,v)-$通路；若$(u,v)-$通路中含e，则将所有的e均替换为P，得到$G-\{e\}$中的$(u,v)-$通路，$\therefore G-\{e\}$仍连通，与e是割边矛盾；

    $\Leftarrow$：假设$e=(x,y)$不是割边。则$G-\{e\}$仍连通，设P是$G-\{e\}$中的$(x,y)-$路径，P中不含e，则：$P+\{e\}$是G中的简单回路，矛盾. □

图的连通性的度量

- 试观察以下4图中连通的“强度”或“牢度”





- 图a中删除任意一条边使不连通了
- 图b则至少要删除两条边或删除当中那个顶点才不连通
- 图c删除任意一个点都不可能不连通
- 图d至少要删除四条边才可能不连通，且不可能通过删除顶点使其不连通

图的连通性的度量（续）

- 如何来衡量图中连通的程度？一个科学的方法是看图中有多少“关键”的顶点或边，去除这些顶点或边可导致连通分支数的变化；因此可考虑用点割集和边割集的大小来度量连通性
- 那么，应该选取最小的点（边）割集还是最大的点（边）割集之大小来衡量呢？

图的连通性的度量（续）

图的连通性的度量（续）


性能信息和工具
控制面板 › 所有控制面板项 › 性能信息和工具
搜索控制面板
下一张
控制面板主页
调整视觉效果
调整索引选项
调整电源设置
打开磁盘清理
为计算机评分并提高其性能
Windows 体验指数可评估主要系统组件，分数范围从 1.0 到 9.9。
组件 评分的项目 子分数 基本分数
处理器: 每秒计算速度 7.1
内存(RAM): 每秒内存运行速度 7.1
图形: 桌面图形性能 4.8
游戏图形: 3D 商务和游戏图形性能 5.8
主硬盘: 磁盘数据传输速率 6.8
4.8
由最低子分数决定
查看和打印详细的性能和系统信息
你的分数是最新的
上次更新: 2013/9/5 20:58:21
重新运行评估

图的点连通度

- 定义（点连通度）：使非平凡连通图G成为不连通图或者平凡图需要删除的最少顶点数称为图G的点连通度（或连通度），记为$\kappa(G)$:

$$\kappa(G) = \min\{|T| \mid T\text{为}G\text{的点割集}\}$$

（注意：这不意味着任意删除$\kappa(G)$个点就一定会使该图不连通）

- 约定：非连通图或者平凡图的连通度为0

图的点连通度（续）

- 定义（k-连通图）：若图G的（点）连通度不小于k，称G是k-(点)连通图
  - 也就是说：k-连通图同样是$1-$，$2-$，$3-$，…，$(k-1)$-连通图，或者说：对k-连通图，如果删除少于k个顶点，它一定依然连通

图的边连通度

- 定义（边连通度）：使非平凡连通图G成为不连通图或者平凡图需要删除的最少边数称为图G的边连通度，记为$\lambda(G)$：

$$\lambda(G) = \min\{|S| \mid S\text{为}G\text{的边割集}\}$$

（注意：这不意味着任意删除$\lambda(G)$条边就一定会使该图不连通）

- 约定：非连通图或者平凡图的边连通度为0

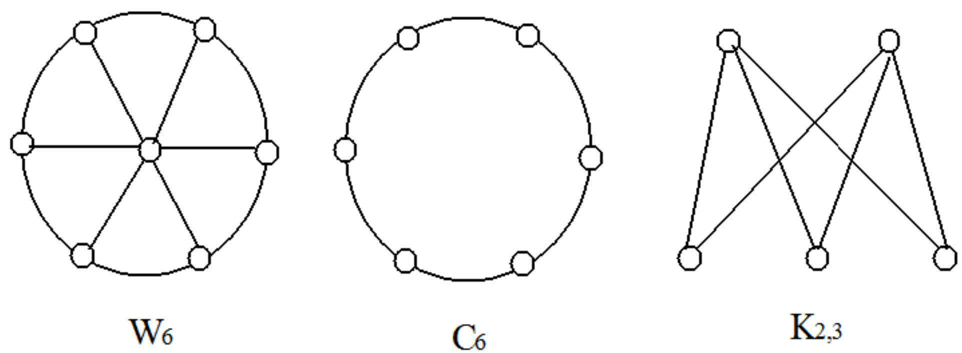
图的边连通度（续）

- **定义（k –边连通图）**：若图G的边连通度不小于k，称G是k –边连通图
  - 也就是说：k –边连通图同样是1 –，2 –，3 –，…，$(k-1)$ –边连通图，或者说：对k –边连通图，如果删除少于k条边，它一定依然连通

点连通度与边连通度的关系

- 对6阶轮图W_6：$\kappa(W_6) = \lambda(W_6) = 3 = \delta(W_6)$
- 对6阶圈图C_6：$\kappa(C_6) = \lambda(C_6) = 2 = \delta(C_6)$
- 对完全二部图$K_{2,3}$：$\kappa(K_{2,3}) = \lambda(K_{2,3}) = 2 = \delta(K_{2,3})$

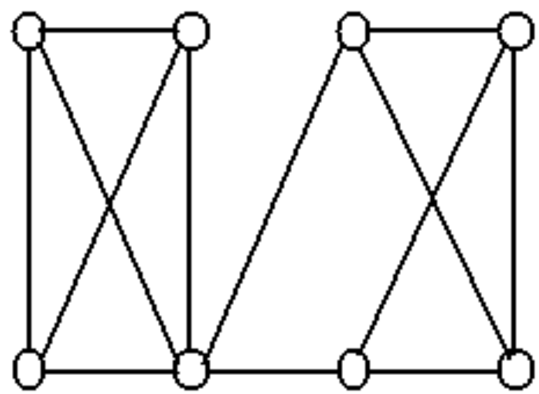
$$\kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G)\,?$$



点连通度与边连通度的关系（续）

$\cancel{\kappa = \lambda = \delta}$?

- ✓ $\kappa(G) = 1$
- ✓ $\lambda(G) = 2$
- ✓ $\delta(G) = 3$



G

- 我们猜想：$\boldsymbol{\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)}$

点连通度与边连通度的关系（续）

猜想：$\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$

- 证明：（1）$\kappa(G) \le \lambda(G)$，对边连通度λ进行归纳：
- Basis：$\lambda = 0$时，G为N_1或分离图，从而$\kappa = 0$；

  $\lambda = 1$时，设e为G之桥，u与v为e之端点，从而$G - \{u\}$不连通或为N_1，故$\kappa = 1$；故当$\lambda = 0,1$时，有$\kappa \le \lambda$；

点连通度与边连通度的关系（续）

- **证明：**（1） $\boldsymbol{\kappa(G) \leq \lambda(G)}$（续）
- I.H.：对任意图G，$\lambda(G) = k$，有$\kappa(G) \leq \lambda(G) = k$
- Ind. Step：设H为无向图且$\lambda(H) = k + 1$，设$S = \{e_0, e_1, \cdots, e_k\}$为$H$之最小边割集，从而易见：$\lambda(H - \{e_0\}) = k$，由I. H.知，$H - \{e_0\}$有点割集$T$且$|T| \leq k$，设$u$为$e_0$的一个端点，从而$T \cup \{u\}$为$H$的点割集，故$\kappa(H) \leq k + 1 = \lambda(H)$，归纳完成．$\square$

点连通度与边连通度的关系（续）

猜想：$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$

- 证明：（2）$\lambda(G) \leq \delta(G)$

设$v \in V(G)$且$d(v) = \delta(G)$，且S为与v关联的边的集合，有$|S| = \delta(G)$。$\because$ $G - S$为N_1或分离图，$\therefore \lambda(G) \leq \delta(G)$. □

- 故猜想成立（Whitney，1932）

点连通度与边连通度的关系（续）

- 定理(Chartrand, 1966)：G是n阶简单图且$\delta(G) \geq \lfloor n/2 \rfloor$，则 $\lambda(G) = \delta(G)$
- 定理(留作思考)：G是n阶简单图且$\delta(G) \geq n-2$，试证明：$\kappa(G) = \delta(G)$
- 上述情况下，图之点（边）连通度可达到上限

点连通度与边连通度的关系（续）

- **证明（反证法）：** 由于对于任意简单图G，有$\lambda(G) \le \delta(G)$，假设已知条件下$\lambda(G) = p < \delta(G)$，则存在最小边割集$S \subseteq E(G)$使得$|S| = p$且$G - S$含两个连通分支（回忆$p(G-\{e\}) \le p(G)+1$）$G_1$与$G_2$；不妨设$|G_1| \le |G_2|$，则$|G_1| \le \lfloor n/2 \rfloor$；由于$G$是简单图，故$G_1$中各顶点在原图$G$中的度数之和不大于$K_{|G_1|}$的顶点度数之和加之上已被删除的边数$p$，即：$\sum_{v \in V(G_1)} d(v) \le |G_1|(|G_1|-1) + p < |G_1|(|G_1|-1) + \delta(G)$；注意$|G_1| \le \lfloor n/2 \rfloor \le \delta(G)$（已知条件），故有：$\sum_{v \in V(G_1)} d(v) < \delta(G)(|G_1|-1) + \delta(G) = |G_1| \cdot \delta(G)$，即$G_1$子图的度数和小于$G_1$的度数下限，这显然不可能，故假设错误，$\lambda(G) = \delta(G)$. $\square$

点连通度与边连通度的上限*

- 定理（Whitney, 1933）：对任意图G，

$$\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G) \le \left\lfloor \frac{2|E_G|}{|V_G|} \right\rfloor$$

（只需再证明$\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{G}) \le \left\lfloor \frac{2|E_G|}{|V_G|} \right\rfloor$）

- 定理（Harary, 1962）：对任意图G，

$$\kappa(G)，\lambda(G) \le \left\lfloor \frac{2|E_G|}{|V_G|} \right\rfloor$$

（不依赖上述结论，证明超出范围）

连通度与点(边)不相交的通路*

- **定理***（Whitney, 1935）：图G是f－连通图当且仅当G中任意两点被至少f条内部（即除端点外）顶点不相交的路径连通

  （证明超出范围）

- **定理***（Menger, 1927）：图G是f－边连通图当且仅当G中任意两点至少由f条内部边不相交的路径连通

  （证明超出范围）

本次课后作业

- 教材内容：[Rosen] 10.4.3 节
- 课后习题：
  - Problem Set 24
- 提交时间： 6月3日 10:00 前