微积分II（第一层次）期末试卷 (2015.6.22)

一、计算下列各题(5分 × 11=55分)

1. 计算曲面积分 $\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\ (0<h<a)$ 截出的顶部.

2. 计算二重积分 $\iint\limits_D |y-x^2|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 为 $|x|\le 1, 0\le y\le 2$.

3. 求球面 $x^2+y^2+z^2+2z=5$ 上点 $(1,1,1)$ 处的切平面和法线.

4. 判别广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性, 若收敛，计算其值.

5. 求解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^2}{xy+x^2}$.

6. 计算曲线积分 $\oint_C \arctan\dfrac{y}{x}\,\mathrm{d}y-\mathrm{d}x$, 其中 C 为 $y=x^2$ 与 $y=x$ 所围区域的边界，取逆时针方向.

7. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3^n}-\dfrac{7}{10^n}\right)$ 是否收敛，如果收敛，求其和.

8. 计算曲线积分 $\int_l \dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中 l 为包含单位圆周 $x^2+y^2=1$ 在内的分段光滑的简单闭曲线，取逆时针方向.

9. 求解微分方程 $(e^x\sin y-2y\sin x)\mathrm{d}x+(e^x\cos y+2\cos x)\mathrm{d}y=0$.

10. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1}$ 的收敛域, 并求其和函数.

11. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}$ 的值.（提示：可利用上题结果）

二、(12分)　计算曲面积分 $\iint\limits_S \dfrac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2y(z+a)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 其中 $a>0$ 是一个常数, S 是曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧,

三、(12分)　设函数 $Q(x,y)$ 连续可微，曲线积分 $\int_C 3x^2y\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与积分路径无关，且对一切实数 t 都有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)}3x^2y\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}3x^2y\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$, 求函数 $Q(x,y)$.

四、(13分)　1. 求函数 $f(x)=x^2, (-\pi\le x\le\pi)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅立叶展开式；

2. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^2}$ 的和.　　3. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ 的和.

五、(8分) (本题非商学院的考生做)　设 $a_n>0, S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\ (n=1,2,\cdots)$,

证明：(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n^2}$ 收敛；　(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ 收敛当且仅当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

六、(8分) (本题商学院的考生做)　讨论当实数 p 为何值时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)^p$ 收敛, 实数 p 为何值时, 级数发散.

微积分II（第一层次）期末试卷 (2016.6.20)

一、计算下列各题(6分 $\times$ 5=30分)

1. 求二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{5xy}{3(x^2+y^2)}\right)^{x^2+y^2}$.

2. 设 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 由方程组 $\begin{cases} u^2-v+xy=0,\\ u+v^2+x-y=0\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

3. 求证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{3^n}$ 收敛，并求其和。

4. 求微分方程 $y'-y=xy^3$ 的通解.

5. 求微分方程 $yy''=(y')^2$ 满足初始条件 $y(0)=1,y'(0)=1$ 的特解.

二、(10分)　设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 讨论$f(x,y)$在$(0,0)$处的连续性，可偏导性与可微性。

三、(10分) 求第一类曲面积分 $I_1=\iint\limits_S x^2y^2\mathrm{d}S$, 其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}, x^2+y^2\leq R^2$.

四、(10分) 计算第二类曲面积分 $I_2=\iint\limits_S(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $a>0$ 是一个常数, S 是上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧. (提示：利用高斯公式)

五、(10分)　讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(-1)^n+n}$ 的敛散性。如果收敛，说明其是条件收敛还是绝对收敛.

六、(10分)　求 $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\arctan x-x$ 的马克劳林展式。

七、(10分) 将函数 $f(x)=x\ (0\leq x\leq\pi)$ 展开成余弦级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$, 以及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和。

八、(10分)　(1) 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的收敛域；

(2) 设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$, 建立 $S(x)$ 所满足的微分方程，并求 $S(x)$.

微积分II（第一层次）期末试卷 (2017.7.4)

一、计算下列各题(6分 $\times$ 5=30分)

1. 求函数 $f(x,y)=(1+e^y)\cos x - ye^y$ 的极值，并讨论是极大还是极小.

2. 讨论广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

3. 讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^p\ln\frac{n+2}{n+1}\quad(p\in\mathbb{R})$ 的敛散性.

4. 求微分方程 $(x^2y^3+xy)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1$ 的通积分.

5. 求微分方程 $y''=1+(y')^2$ 的通解.

二、(10分)　计算 $I_1=\displaystyle\oint_C\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中 C 取逆时针方向，分别取以下两种路径：

(1) 圆周 $x^2+y^2=2x+2y-1$;　　　(2) 闭曲线 $|x|+|y|=1$.

三、(10分)　计算 $I_2=\displaystyle\oint_C\frac{y^2}{2}\mathrm{d}x-xz\mathrm{d}y+\frac{y^2}{2}\mathrm{d}z$, 其中 C 是 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与 $x+y=R$ 的交线，从 y 轴正向看去是顺时针方向.

四、(10分)　计算第二类曲面积分 $I_3=\displaystyle\iint_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是下半球面 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$, 取下侧.

五、(10分)　(1) 证明 $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

(2) 讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 的敛散性。如果收敛，指明其是条件收敛还是绝对收敛，并说明理由.

六、(10分)　求数项级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}$ 的和。

七、(10分)　将函数 $f(x)=x\sin x$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内展开成傅里叶级数.

八、(10分)　(1)（非商学院学生做）设 $f(x)$ 二阶连续可微，$g(x)$ 一阶连续可微，且满足 $f'(x)=g(x)$, $g'(x)=2e^x-f(x)$, 且 $f(0)=0$, $g(0)=2$, 计算 $I_4=\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x$.

(2)（商学院学生做）设 $f(x)=x^3+1-x\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$, 求 $f(x)$ 满足的微分方程并求 $f(x)$.

微积分II（第一层次）期末试卷 (2018.7.3)

一、计算下列各题(6分 $\times$ 5=30分)

1. 设 $u=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$, 其中 $f(v)$ 具有二阶连续导数，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

2. 讨论广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt[n]{1+x}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

3. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{n5^n}$ 的收敛域.

4. 求微分方程 $(x-\sin y)\mathrm{d}y+\tan y\mathrm{d}x=0$ 满足初始条件 $y(1)=\dfrac{\pi}{6}$ 的特解.

5. 求微分方程 $\left(\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}+5\right)\mathrm{d}x+\left(-\dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}+\dfrac{6}{y^3}\right)\mathrm{d}y=0$ 的通积分.

二、(10分)　计算 $I_1=\displaystyle\iint_S(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 为曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(a>0)$ 的上侧.

三、(10分)　计算 $I_2=\displaystyle\oint_C(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$, 其中 C 是立方体 $0\le x\le a, 0\le y\le a, 0\le z\le a$ 的表面与平面 $x+y+z=\dfrac{3a}{2}$ 的交线，从 z 轴正向看去是逆时针方向.

四、(10分)　对常数 p, 讨论数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n^p}$ 何时绝对收敛，何时条件收敛，何时发散.

五、(10分)　试将函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4x+14}{(x-3)^2(2x+5)}$ 展成马克劳林级数，并写出其收敛域.

六、(10分)　将函数 $f(x)=\dfrac{x}{4}$ 在 $[0,\pi]$ 上展开成正弦级数，并求级数 $1+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}-\cdots$ 的和.

七、(10分)　求二阶微分方程 $y''-y=2x+e^{2x}\cos x$ 的通解.

八、(10分)　(1)（非商学院学生做）设函数 $f(x)$ 对定义域内任意两点 x,y 有等式 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}$, 且 $f'(0)=a$ $(a\neq 0)$, 求函数 $f(x)$.

(2)（商学院学生做）已知 $\displaystyle\int_0^1 f(ax)\mathrm{d}a=\frac{1}{2}f(x)+1$, 求 $f(x)$ 满足的微分方程并求 $f(x)$.

微积分II（第一层次）期末试卷 (2019.6.17)

一、计算下列各题(6分 × 5=30分)

1. 求平面 $x+4y-8z=18$ 被圆柱面 $x^2+y^2=6y$ 所截部分的面积.

2. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\arcsin\dfrac{\pi}{5^n}$ 的敛散性.

3. 讨论广义积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

4. 求微分方程 $2xy\cdot y'-y^2+x=0$ 的解.

5. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x^2-y+5}{x+y^2+2}$ 的通积分.

二、(10分) 求过直线 $L:\begin{cases}10x+2y-2z=27,\\ x+y-z=0\end{cases}$ 且与曲面 $S:3x^2+y^2-z^2=27$ 相切的切平面方程.

三、(10分) 设 $C: x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)\ (t\in[0,2\pi])$ 为旋轮线的一拱，方向由原点到$A(2\pi a,0)$, 计算 $I_1=\displaystyle\int_C[(x+y+1)e^x-e^y+y]\mathrm{d}x+[e^x-(x+y+1)e^y-x]\mathrm{d}y$.

四、(10分) 计算 $I_2=\displaystyle\iint_S 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 为曲面 $z=1-x^2-y^2\ (z\geq 0)$ 的上侧.

五、(10分) 设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$, 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性；若收敛，求其和.

六、(10分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的收敛域、和函数，并由此计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$ 的和.

七、(10分) 将函数 $f(x)=\pi^2-x^2$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上展开成余弦级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

八、(10分) 已知 $y_1=xe^x+e^{2x}$, $y_2=xe^x+e^{-x}$, $y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个解，求出此微分方程，写出其通解.