

# Problem Set 8: 集合的基数

提交截止时间: 4 月 1 日 10:00

## Problem 1

计算下列集合的基数.

- (1)  $A = \{x, y, z\}$
- (2)  $B = \{x | x = n^2 \wedge n \in \mathbb{N}\}$
- (3)  $C = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}\}$
- (4) 平面上所有的圆心在  $x$  轴上的单位圆的集合
- (5) 复数集合

## Problem 2

设集合  $A, B, C, D$  满足  $|A| = |C|, |B| = |D|$ , 求证  $|A \times C| = |B \times D|$ .

## Problem 3

设  $A, B$  为可数集, 证明:

- (1)  $A \cup B$  是可数集;
- (2)  $A \times B$  是可数集.

## Problem 4

确定下列各集合是否是有限的、可数无限的或不可数的。对那些可数无限集合, 给出在自然数集合和该集合之间的一一对应。

- a) 大于 10 的整数

- b) 奇负整数
- c) 绝对值小于 1 000 000 的整数
- d) 0 和 2 之间的实数
- e) 集合  $A \times \mathbb{Z}^+$  这里  $A = \{2, 3\}$
- f) 10 的整数倍

## Problem 5

给出两个不可数集合  $A$  和  $B$  的例子使得  $A - B$  是

- a) 有限的
- b) 可数无限的
- c) 不可数的

## Problem 6

给出两个不可数集合  $A$  和  $B$  的例子使得  $A \cap B$  是

- a) 有限的
- b) 可数无限的
- c) 不可数的

## Problem 7

假设  $A$  是可数集合。证明如果存在一个从  $A$  到  $B$  的满射函数  $f$ ，则  $B$  也是可数的。  
(注：“可数集合”包括可数无限集合和有穷集合的情况，下同。)

## Problem 8

设  $A = \{a, b, c\}$ ， $B = \{0, 1\}^A$ ，由定义证明  $\mathcal{P}(A) \approx \{0, 1\}^A$ 。

## Problem 9

已知  $B, A - B$  均为可数集合，证明  $A$  必为可数集合。

## Problem 10

证明：可数多个可数集的并集是可数的。

## Problem 11

设  $A, B, C$  为集合，其满足  $A \cap B = A \cap C = \emptyset$  且  $B \approx C$ ，试证明： $A \cup B \approx A \cup C$

## Problem 12

令  $\{1, 2, 3\}^\omega$  为所有仅由数字 1, 2 或 3 构成的无限长的序列的集合。证明该集合不可数。