

2022年第六题:

设  $f(x)$  为  $\mathbb{R}$  上的有界连续函数, 记  $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ . 求方程  $y'' - y = f(x)$  ( $-\infty < x < \infty$ ) 的有界解, 并证明对任意的  $x \in \mathbb{R}$ , 有  $|y(x)| \leq M$ .

解: 齐次方程的通解为  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ .

利用常数变易法, 设非齐次方程的解为  $y = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x}$ , 则有

$$\begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{-x} = 0 \\ c_1'(x)e^x - c_2'(x)e^{-x} = f(x) \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} c_1'(x) = \frac{1}{2}f(x)e^{-x} \\ c_2'(x) = -\frac{1}{2}f(x)e^x \end{cases}$$

为了保证方程的解为有界解, 形式上需要  $c_1(+\infty) = 0, c_2(-\infty) = 0$ .

$$\text{从而我们取 } c_1(x) = \frac{1}{2} \int_{+\infty}^x f(t)e^{-t} dt, \quad c_2(x) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^x f(t)e^t dt.$$

$$\text{因此形式上非齐次方程的解为 } y(x) = \frac{e^x}{2} \int_{+\infty}^x f(t)e^{-t} dt - \frac{e^{-x}}{2} \int_{-\infty}^x f(t)e^t dt.$$

同时由于对任意的  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|f(t)| \leq M$ , 从而

$$|y(x)| \leq \frac{e^x}{2} \left| \int_{+\infty}^x f(t)e^{-t} dt \right| + \frac{e^{-x}}{2} \left| \int_{-\infty}^x f(t)e^t dt \right| \leq \frac{Me^x}{2} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt + \frac{Me^{-x}}{2} \int_{-\infty}^x e^t dt \leq M.$$

补充证明: 为了保证方程的解为有界解, 形式上需要  $c_1(+\infty) = 0, c_2(-\infty) = 0$ .

$$c_1'(x) = \frac{1}{2}f(x)e^{-x}, \text{ 则 } c_1(x) = c_1(a) + \frac{1}{2} \int_a^x f(x)e^{-x} dx$$

$$c_2'(x) = -\frac{1}{2}f(x)e^x, \text{ 则 } c_2(x) = c_2(a) - \frac{1}{2} \int_a^x f(x)e^x dx.$$

广义积分  $\int_a^{+\infty} f(x)e^{-x} dx$  收敛, 所以  $\lim_{x \rightarrow +\infty} c_1(x)$  存在. 同理,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} c_2(x)$  存在.

$$|c_2(x)| \leq |c_2(a)| + \frac{1}{2} \int_a^x |f(x)|e^x dx \leq |c_2(a)| + \frac{M}{2}(e^x - e^a) \leq |c_2(a)| + \frac{M}{2}e^x \leq Me^x \quad (x \text{ 充分大})$$

要使  $y = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x}$  有界, 即存在常数  $N$ , 使得  $|y| \leq N$ ,

$$\text{而 } c_1(x)e^x = y - c_2(x)e^{-x}, |c_1(x)e^x| \leq |y| + |c_2(x)|e^{-x} \leq N + Me^xe^{-x} = N + M,$$

$$\text{所以 } |c_1(x)| \leq (N + M)e^{-x}. \text{ 所以 } \lim_{x \rightarrow +\infty} c_1(x) = 0.$$

类似地,

$$|c_1(x)| \leq |c_1(a)| + \frac{1}{2} \int_x^a |f(x)|e^{-x} dx \leq |c_1(a)| + \frac{M}{2}(e^{-x} - e^{-a}) \leq |c_1(a)| + \frac{M}{2}e^{-x} \leq Me^{-x},$$

( $x < 0$  且  $|x|$  充分大)

$$c_2(x)e^{-x} = y - c_1(x)e^x, |c_2(x)e^{-x}| \leq |y| + |c_1(x)|e^x \leq N + Me^xe^{-x} = N + M,$$

$$\text{所以 } |c_2(x)| \leq (N + M)e^x. \text{ 所以 } \lim_{x \rightarrow -\infty} c_2(x) = 0.$$