# Problem Set 27: 二部图及其匹配

提交截止时间：6 月 12 日 10:00

## Problem 1

G 的围长是指 G 中最短回路的长；若 G 没有回路，则定义 G 的围长为无穷大。证明：围长为 4 的 k 正则图至少有 2k 个顶点，且恰有 2k 个顶点的这样的图（在同构意义下）只有一个。

```
设x, y为G中的两个相邻顶点，N 为顶点的相邻顶点的集合。由于G中围长为4,则N(x) ∩ N(y) = ∅,
所以，G中至少有2(k - 1) + 2 = 2k个顶点。
又由于{N(x), y}, {x, N(y)}为完全偶图，所以G图唯一
```

## Problem 2

证明：二部图 G 是简单图且有 V 个顶点 E 条边，证明 E <= V^{2} / 4

```
设二部集的顶点可以根据有无对应边分为m, n两个顶点集，
在二部图中，每个顶点集 U 中的顶点可以连接到顶点集 W 中的所有顶点
因此，最大可能的边数是 m×n。即 E <= m×n。
又因为m + n = E, (m + n) / 2 >= (m × n) ^ (1/2)
所以(v^2)/4 >= m × b
```

## Problem 3

往 2n 个孤立的顶点间加入 n 条边，试求总共能得到多少种不同的包含这 2n 个顶点的完美匹配?

```
对于第一个顶点，有（2n - 1）个顶点可与之完美匹配，第二个则有（2n - 3）个顶点，...
所以在不考虑顶点位置调换的情况下，总共可以有(2n - 1)!!个完美匹配包含这2n个顶点。
```

## Problem 4

从下图 G = (A, B, E) 中，找出相对于匹配 M (粗边的集合) 的任意三条交错路径 (alternating path) 和至少两条增广路径 (augmenting path)，然后利用增广路径扩大 M 来找到最大匹配。

a0b0

a1b1

a2b2

a3b3

a4b4

a5b5

# Problem 5

对于哪些 n 值来说，下列图是存在完美匹配的二部图?

a. Kn

```
对于任意n，都存在完美匹配的二部图
```

b. Cn

```
当n为奇数时，显然不存在完美匹配，
当n为偶数时，可从环中任意选取不相邻的n/2个边，恰好使得图中n/2个顶点一一对应，
所以n为偶数时，可存在完美匹配
```

c. Qn

```
顶点可以分成两部分，一个部分包含所有二进制字符串中 0 的个数为偶数的顶点，另一部分包含 0 的个数为奇数的顶点，每条边都连接两个不同部分的顶点。
所以对于任意n，超立方体图都存在完美匹配的二部图
```

# Problem 6

令 k 为一整数。对于任意有限集合，证明对它的任意两个 k 划分都存在一个相同的代表集。

• 集合的 k 划分指划分为大小相同的互不想交的 k 个子集，为简便起见，设集合的大小为 k 的整数倍从而每个子集均有相同个元素。

• 一个划分的代表集指从每个子集中取出一个元素而构成的集合。

举例：集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的一个 2 划分为 $A : \{1, 2\}\{3, 4\}$。此划分的代表集有 $\{1, 3\}$,$\{2, 3\}$,$\{1, 4\}$,$\{2, 4\}$，但 $\{1, 2\}$ 不是其代表集。集合的另外一个划分为 $B : \{2, 3\}\{1, 4\}$。易见，A 与 B 存在相同的代表集 $\{1, 3\}$。

```
当k = 1，
  则每个划分一定为其代表集，故一定相同。
假设当k = n，命题成立
当k = n + 1，
由于k = n时命题成立，所以存在一组满足代表集相同的k划分，设这两个划分为{a, b, c, ...z}, {a1, b1, c1, ...z1}
将a..z，a1...z1中各集合的第一个元素组成一个新集合并将剩余集合与该集合作为一个(n + 1)的划分，
由于假设条件，该新集合与剩余集合中的一个元素可产生相同的代表集，故命题成立。
```

# Problem 7

假设某校计算机系学生选导师时出现了这样的情况：对于每一位学生，至少对 k 名导师感兴趣；对于每一位导师，至多有 k 名学生对他感兴趣。假设每位导师只能指导 1 名学生，且每位学生也只能选择 1 名导师。试证明：存在这样的匹配，使得每位学生都能选到自己感兴趣的导师。

```
对于学生集合中x个学生，任取其中s个学生作为一个子集
S 中的每个学生至少有k 个邻居，
所以S 中所有学生的度数总和至少为 |k||S|。
导师集合 N(S) 中的每个导师的度数最多为 k。
由于每个导师最多和k名学生相连，所以N(S)中所有导师总度数不超过k|N(S)|
所以|N(s)| < |S|, k|S|大于k|N(S)|
矛盾，故命题成立
```