

Problem Set 19: 子群与群分解

提交截止时间: 5 月 13 日 10:00

Problem 1

设 H 是 G 的子群, 证明 H 在 G 中的所有左陪集中有且只有一个是 G 的子群, 即 $\exists! K \in \{aH \mid a \in G\}$ 使得 K 是 G 的子群。

Problem 2

设 G 是有限群, A 与 B 是 G 的两个非空子集, 且 $|A| + |B| > |G|$, 求证 $G = AB$

Problem 3

设 H 是群 G 的子群, $x \in G$, 令 $xHx^{-1} = \{xhx^{-1} \mid h \in H\}$, 证明 xHx^{-1} 是 G 的子群, 称为 H 的共轭子群。

Problem 4

设 H 和 K 分别为群 G 的 r, s 阶子群, 若 r 与 s 互素, 证明 $H \cap K = \{e\}$.

Problem 5

证明: 若 G 中只有一个 2 阶元, 则这个 2 阶元一定与 G 中所有元素可交换。

Problem 6

证明：在群 G 中，如果 $g, h \in G$ 满足 $gh = hg$ ，并且 $\gcd(|g|, |h|) = 1$ ，那么 $|gh| = |g||h|$

(提示：令 $N = |gh||g|$ ，使用阶的性质和交换律)

Problem 7

设群 G 有子群 H ， H 是正规子群当且仅当

$$\forall g \in G, \forall h \in H : ghg^{-1} \in H$$

证明：如果群 G 有且只有一个 d 阶子群，那么这个子群是正规的。

Problem 8

证明：使用阶的概念证明费马小定理。即对素数 p 和任意整数 a ，均有 $a^p \equiv a \pmod{p}$ 。

(提示：考虑集合 $\mathbb{Z}_n^* := \{[m]_n \in \mathbb{Z}_n \mid \gcd(m, n) = 1\}$ 在乘法下构成的群。使用拉格朗日定理的拓展：元素的阶和群的阶之间的关系)