Problem Set 25B: 欧拉图与哈密顿图（哈密顿图部分）

提交截止时间：6 月 10 日 10:00

Problem 1

证明：奇数个顶点的二部图没有哈密顿回路。

```
据题意，设该二部图两个分区大小为x, y,且由于为奇数图
所以x != y,不妨设x > y
考虑大小为x的分区，在其补充边之后形成的完全二部图任选两个不相邻的顶点，的度数之和一定小于等于2y
，又因为2y <= s - 1，根据哈密顿回路的充要条件，该图一定不能形成哈密顿回路。
```

Problem 2

若简单图 G 满足 $|V(G)| \geq 3$ 且 $\delta(G) \geq (|V(G)|-1)/2$ ，证明或反驳：
a. G 一定存在哈密顿回路。

```
根据题意，任意两个不相邻的点的度数之和大于等于|V(G)| - 1，不满足形成哈密顿图的条件。不一定存在哈密顿回路。
```

b. G 一定存在哈密顿通路。

```
根据题意，任意两个不相邻的点的度数之和大于等于|V(G)| - 1，满足形成半哈密顿图的条件。故一定存在哈密顿通路。
```

Problem 3

所谓 “子图同构”(Subgraph isomorphism) 问题是指：对于任意的图 $G=(V,E)$ 和图 $H=(V',E')$，判定是否存在 G 的一个子图 $G_0=(V_0,E_0)$: $V_0 \subseteq V$， $E_0 \subseteq E \cap (V_0 \times V_0)$ 使得 G_0 与 H 同构（记作 $G_0 \cong H$）。试说明，“判断一个图是否是哈密顿图” 这一问题可以作为上述子图同构问题的一个特例。

Problem 4

对哪些 m 和 n 值来说，完全二部图 $K_{m,n}$ 具有哈密尔顿回路？

```
根据第一题的讨论，当m == n的时候 δ(G) == (m + n) / 2
故此时 Km n具有哈密顿回路。
```

Problem 5

证明或反驳: 若 G 不是 2− 连通图，则 G 不是哈密顿图。

```
若G不是2-连通图，那G一定是1-连通图，存在一个结点删去后连通分支增加。
若G是哈密顿图，则删去一个节点至少为半哈密顿图，连通分支不会增加，则一定是2-连通图，推出矛盾，
故G不是哈密顿图。
```

Problem 6

证明或反驳: 如果二部图 G 是 H− 图，那么必有偶数个顶点。

```
根据第一题的讨论，若G有奇数个顶点，则一定不为哈密顿图，命题得证
```

Problem 7

考虑在 11 天安排 11 门课程的考试（每天考 1 门课），使得同一位老师所任的任意两门课程考试不排在接连的两天中，试证明如果没有老师担任多于 6 门课程，则符合上述要求的考试安排总是可能的。

```
1. 若有老师的课程为6门，则将其他5门课程分别插入这六门课程的两两之间，则一定满足题意。
2. 若没有老师的课程为6门，若恰好有两位老师课程和为6，则可视为同一组，并使用1时的情况安排。
3. 若没有老师的课程为6门，也恰好没有两位老师课程和为6，则将多位老师的课程尽量不拆的情况下合并视为一组，被拆分的课程需首先插入，确保不会重复。
其余课程则按照1中情况安排即可。
```

Problem 8

简单图G满足$|G| > 2$，令m为G的边数，n为G的顶点数。试证明：如果$m > \binom{n-1}{2} + 1$，则G一定存在哈密顿回路。（提示：可使用数学归纳法证明；组合数 k = k!(n−k)! ，可对比 ## Problem Set 24Problem 9)

假设不存在哈密顿回路，

$mG + \neg mG = \binom{n}{2}$

所以$mG < \binom{n}{2} - \binom{n-1}{2} = n - 2$

故至少存在两个节点度数小于$n/2$，故$\neg G$不是哈密顿回路，则G一定是哈密顿回路，与假设矛盾

故假设不成立，命题得证。