题型　解三角形

例：在斜$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且$a\sin 2B+\sqrt{2}b\cos A=\sqrt{2}c$，$\cos A=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

(1)求$\cos C$的值；

(2)点D是边AB的中点，连接CD，且$CD=2$，求$\triangle ABC$的面积.

【详解】(1) 由正弦定理可知

$\sin A\sin 2B+\sqrt{2}\sin B\cos A=\sqrt{2}\sin C=\sqrt{2}\sin\left(A+B\right)=\sqrt{2}\left(\sin A\cos B+\cos A\sin B\right)$，

所以$\sin A\sin 2B=\sqrt{2}\sin A\cos B$，于是$2\sin A\sin B\cos B=\sqrt{2}\sin A\cos B$，

因为$\triangle ABC$是斜三角形，所以$\sin A>0$，$\cos B\neq 0$，于是$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因为$B\in\left(0,\pi\right)$，所以$B=\frac{\pi}{4}$或$B=\frac{3\pi}{4}$，

因为$\cos A=\frac{\sqrt{10}}{10}<\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\frac{\pi}{4}<A<\frac{\pi}{2}$，因此$B=\frac{\pi}{4}$，

因为$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-(\frac{\sqrt{10}}{10})^2}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

于是$\cos C=-\cos\left(A+B\right)=-\left(\cos A\cos B-\sin A\sin B\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{10}}{10}-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}$；

(2) 由条件知$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$，两边同时平方得

$\overrightarrow{CD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{CA}^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}^2\right)$，即$4=\frac{1}{4}\left(b^2+a^2+2ab\cos C\right)(*)$，

根据正弦定理得$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\frac{3\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$，

即$a=\frac{3}{\sqrt{5}}b$，代入$(*)$，得$b^2=4$，解得$b=2$，$a=\frac{6\sqrt{5}}{5}$，

又$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-(\frac{\sqrt{5}}{5})^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\frac{6\sqrt{5}}{5}\times 2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{12}{5}$.