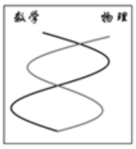
物理	数学
牛顿力学	微积分
相对论	闵可夫斯基空间
量子力学	特殊函数、微分方程
对称性	群论
广义相对论	黎曼几何
规范场	微分几何、拓扑
……	……

物理与数学

杨振宁先生观点



陈省身先生观点

葛墨林，《大学物理》，2013 年9 月

2016-09-02

普通物理A:力学

数学预备知识A 微积分初步

本部分内容可参阅

- 赵凯华、罗蔚茵，《新概念物理教程 力学》“ 附录A 微积分初步”，高教社，2004年7月第2版
- 漆安慎、杜婵英，《普通物理教程 力学》“附录 数学知识”，高教社，2005年6月第2版

2016年秋季学期 东北师范大学

A.1 函数及其图形

- **函数 变量和常量**

有两个变量x和y，如果每当变量x取定了某个数值后，按照一定的规律就可以确定y的对应值，则称y是x的函数，记作

$$y = f(x) \quad \text{或} \quad y = y(x)$$

x为**自变量**，y为**因变量**，f为**函数记号**。

例如 $y = f(x) = 3 + 2x,\ ax + \frac{1}{2}bx^2,\ \sin x,\ e^x \ldots$

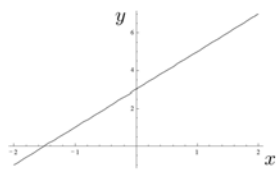
绝对常量：在一切问题中数值都是确定不变的量，如 $2,\ \pi,\ e\ldots$

任意常量：数值需要在具体问题中具体给定的量，如 $a,\ b,\ c\ldots$

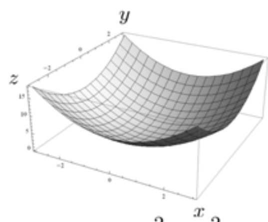
A.1 函数及其图形

- **函数的图形**

在物理学中经常用二（三）维曲线来表示两（三）个变量之间的函数关系，以直观地了解一个函数的特征。



$y = 3 + 2x$



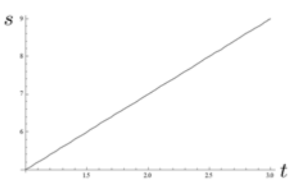
$z = x^2 + y^2$

A.1 函数及其图形

- **物理学中函数的实例**

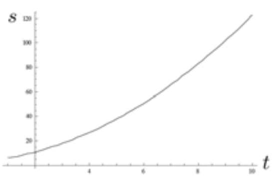
每个物理公式都反映了一些物理量之间的函数关系

- 匀速直线运动公式



$s = s(t) = s_0 + vt$

- 匀加速直线运动公式

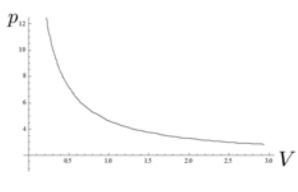


$s = s(t) = s_0 + vt + \frac{1}{2}at^2$

A.1 函数及其图形

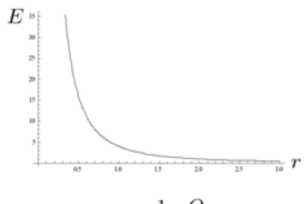
- **物理学中函数的实例**

- 玻意耳定律



$pV = C$

- 点电荷的电场



$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$

❍ 极限

在自变量 x 与某一定值x_0的差为无穷小量时， 函数 $f(x)$与数a的差也为无穷小量，则 a是$f(x)$在 x 趋于x_0时的极限。

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$$

❍无穷小量的性质

- ❍限个无穷小量的和是无穷小量；
- ❍有限量与无穷小量的积是无穷小量。

例如

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

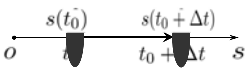
$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2 - x - 2}{x-1} = 5$$

❍极限的运算法则

- ❍一个有限的函数与常数积的极限，等于该函数极限与常数之积
- ❍有限个极限的函数的积（商）的极限，等于它们的极限的积（商）
- ❍有限个有极限的函数的和（差）的极限等于它们极限的和（差）

❍物理学中的几个实例

❍直线运动的瞬时速度



设描述质点运动位置的函数为 $s = s(t)$

则从$t = t_0$ 时刻到$t = t_0 + \Delta t$时刻间的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \frac{s(t_0+\Delta t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

例如：匀加速直线运动 $s = s(t) = s_0 + vt + \frac{1}{2}at^2$

$$\bar{v} = v_0 + at_0 + \frac{1}{2}a\Delta t$$

在 $t = t_0$ 时刻的瞬时速度应为$\Delta t\to 0$时平均速度的极限

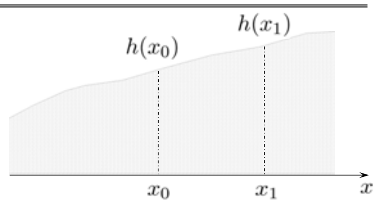
$$v = \lim_{t\to t_0}\frac{s(t_0+\Delta t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

例如：匀加速直线运动

$$s = s(t) = s_0 + vt + \frac{1}{2}at^2$$

$$v = \lim_{t\to t_0}(v_0 + at_0 + \frac{1}{2}a\Delta t) = v_0 + at_0$$

❍ 水渠的坡度



设各处渠底的高度为

$$h = h(x)$$

则从x_0 到$x_1 = x_0 + \Delta x$两地水渠的平均坡度为

$$\bar{\kappa} = \frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{h(x_0+\Delta x) - h(x_0)}{\Delta x}$$

在$x = x_0$点的坡度应为$\Delta x\to 0$时平均坡度的极限，即

$$\kappa = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta h}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x_0+\Delta x) - h(x_0)}{\Delta x}$$

❍函数的变化率 —— 导数

设函数 $y = f(x)$ 的自变量x 在点$x = x_0$ 处有增量

$$\Delta x = x - x_0$$

相应地函数有增量

$$\Delta y = y - y_0 = f(x_0+\Delta x) - f(x)$$

则定义函数在$x = x_0$ 到$x = x_0 + \Delta x$ 区间内的平均变化率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

A.2 导数

❍ **导数**

若当 $\Delta x \to 0$ 时 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限存在，则称 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，该极限值称为函数 $y=f(x)$ 对 x 的**导数**或**微商**，记作

$$y'\big|_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

导数与增量不同，它代表函数在一点的性质，即在该点的变化率。

导数还可以表示为 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right|_{x=x_0}$

A.2 导数

函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 本身也是 x 的一个函数，因此我们可以再取它对 x 的导数，称为函数 $y=f(x)$ 的二阶导数，记作

$$y''=f''(x)=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f'(x)$$

在物理学中，对空间和时间的导数习惯如下表示，**不能混用**

$y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ $\quad y''=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 表示对空间求导

$\dot{y}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ $\quad \ddot{y}=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$ 表示对时间求导

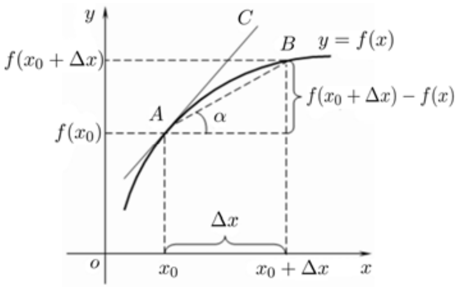
A.2 导数

❍ **导数的几何意义**

如图，过曲线上两点 A、B 的割线的斜率为

$$\tan\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，割线成为过 A 点的切线



故导数 $y'=f'(x)$ 表示曲线在 x 处切线的斜率。

A.3 导数的运算

❍ **基本函数的导数公式**

(1) $y=f(x)=C$(常数)

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=0$$

(2) $y=f(x)=x$

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=1$$

A.3 导数的运算

(3) $y=f(x)=x^2$

$$\begin{aligned}y' &= f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x\end{aligned}$$

(4) $y=f(x)=x^3$

$$\begin{aligned}y' &= f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2]\\ &=3x^2\end{aligned}$$

A.3 导数的运算

(5) $y=f(x)=\dfrac{1}{x}$

$$\begin{aligned}y' &= f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x-(x+\Delta x)}{(x+\Delta x)x\Delta x}\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{(x+\Delta x)x}=\frac{-1}{x^2}\end{aligned}$$

A.3 导数的运算

(6) $y = f(x) = \sqrt{x}$

$$
\begin{aligned}
y' &= f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\cdot\frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x})^2-(\sqrt{x})^2}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

A.3 导数的运算

❍ **有关导数运算的几个定理**

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[u(x)\pm v(x)] = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\pm\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[u(x)\cdot v(x)] = v(x)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u(x)\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\dfrac{u(x)}{v(x)}] = \dfrac{v(x)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u(x)\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}}{[v(x)]^2}$

(4) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u[v(x)] = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$

A.3 导数的运算

❍ **基本导数公式**

$C' = 0$	$(a^x)' = a^x\ln a$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
$(\tan x)' = \sec^2 x$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\cot x)' = -\csc^2 x$	……

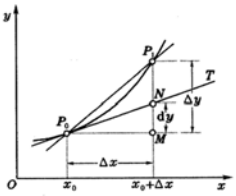
A.4 微分和函数的幂级数展开

❍ **微分**

自变量 x 无限小的增量 $\mathrm{d}x$ 称为 x 的微分

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$$

为函数 $y = f(x)$ 的微分。



几何意义

$$\tan\angle NP_0M = \frac{\overline{MN}}{\overline{P_0M}} = \frac{\overline{MN}}{\Delta x}$$

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\mathrm{d}x = \tan\angle NP_0M\cdot\Delta x = \overline{MN} \neq \Delta y$$

微分是对函数的局部变化率的一种**线性描述**

A.4 微分和函数的幂级数展开

❍ **泰勒级数**

将函数展开为幂级数的形式，在理论上和应用中都是十分重要的。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

泰勒展开式

$$f^{(n)}(x_0) = \left.\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}f(x)\right|_{x=x_0}$$

$f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的 n 阶导数

A.4 微分和函数的幂级数展开

常见函数的幂级数展开式

函数	展开式	收敛范围
$(1\pm x)^{1/2}$	$1\pm\frac{1}{2}x-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2\pm\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4\pm\cdots$	$\lvert x\rvert\leqslant 1$
$(1\pm x)^{3/2}$	$1\pm\frac{3}{2}x+\frac{3\cdot 1}{2\cdot 4}x^2\mp\frac{3\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{3\cdot 1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4\mp\cdots$	$\lvert x\rvert\leqslant 1$
$(1\pm x)^{5/2}$	$1\pm\frac{5}{2}x+\frac{5\cdot 3}{2\cdot 4}x^2\pm\frac{5\cdot 3\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{5\cdot 3\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4\mp\cdots$	$\lvert x\rvert\leqslant 1$
$(1\pm x)^{-1/2}$	$1\mp\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2\mp\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4\mp\cdots$	$\lvert x\rvert< 1$
$(1\pm x)^{-3/2}$	$1\mp\frac{3}{2}x+\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}x^2\mp\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4\mp\cdots$	$\lvert x\rvert< 1$
$(1\pm x)^{-5/2}$	$1\mp\frac{5}{2}x+\frac{5\cdot 7}{2\cdot 4}x^2\mp\frac{5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4\mp\cdots$	$\lvert x\rvert< 1$

A.4 微分和函数的幂级数展开

常见函数的幂级数展开式

函数	展开式	收敛范围
$(1\pm x)^{-1}$	$1\mp x+x^2\mp x^3+x^4\mp\cdots$	$\lvert x\rvert<1$
$(1\pm x)^{-2}$	$1\mp 2x+3x^2\mp 4x^3+5x^4\mp\cdots$	$\lvert x\rvert<1$
$\sin x$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\cos x$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\tan x$	$x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\cdots$	$\lvert x\rvert<\infty$
e^x	$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\ln(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$	$-1<x\leqslant 1$
$\ln(1-x)$	$-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\right)$	$-1\leqslant x<1$

A.5 积分

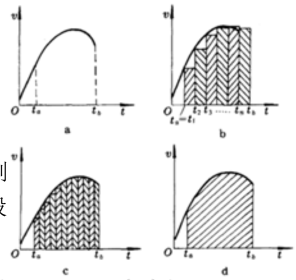
❍ **几个物理中的实例**

❍ **变速直线运动的路程**

物体的速率是时间的函数

$$v=v(t)$$

把$t=t_a$到$t=t_b$这段时间间隔分割成许多小段，当小段足够短时，每段可以近似地看成匀速运动，则有

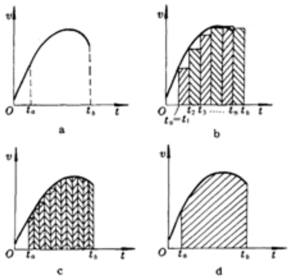


$$\begin{aligned} s &= v(t_1)\Delta t+v(t_2)\Delta t+\cdots+v(t_n)\Delta t \\ &= \sum_{i=1}^{n} v(t_i)\Delta t \end{aligned}$$

A.5 积分

Δt越短，把各小段里的运动看成匀速运动也就越接近实际情况，故应对求和取$n\to\infty$，$\Delta t\to 0$时的极限，即

$$s=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta t\to 0}}\sum_{i=1}^{n} v(t_i)\Delta t$$



几何意义

$t=t_a$到$t=t_b$区间内$v=v(t)$曲线下的面积

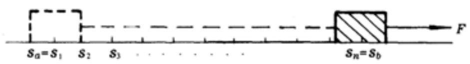
A.5 积分

❍ **变力的功**

考虑力是位置的函数，即

$$F=F(s)$$

物体由$s=s_a$运动到$s=s_b$的过程中，力F对它所做的功为

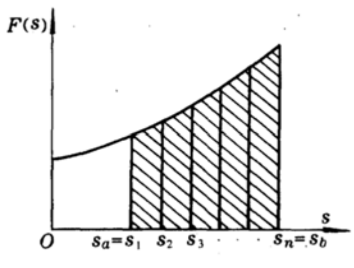


$$\begin{aligned} A &= F(s_1)\Delta s+F(s_2)\Delta s+\cdots+F(s_n)\Delta s \\ &= \sum_{i=1}^{n} F(s_i)\Delta s \end{aligned}$$

A.5 积分

要精确求解，就需要对求和取$n\to\infty$，$\Delta t\to 0$时的极限，即

$$A=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta s\to 0}}\sum_{i=1}^{n} F(s_i)\Delta s$$



几何意义

$s=s_a$到$s=s_b$区间内$F=F(s)$曲线下的面积

A.5 积分

❍ **定积分**

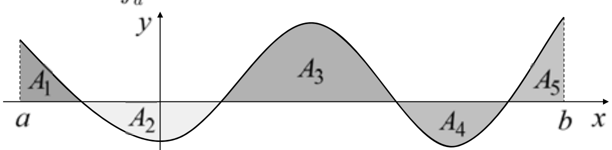
给定一个函数$f(x)$，用$x=x_0(=a)$，x_1，x_2，$\cdots$，$x_n(=b)$ 把自变量x在$[a,\ b]$区间内的数值分成 n小段，设每小段的大小为Δx，若当$n\to\infty$，$\Delta x\to 0$时$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$的极限存在，则将该极限称为函数$f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$内对x的**定积分**，记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x\to 0}}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

定积分的几何意义

$f(x)>0,\ \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$ 曲边梯形面积

$f(x)<0,\ \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -A$ 曲边梯形面积的负值



$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$ 各部分面积的代数和

如果被积函数$f(x)$是某个函数$\Phi(x)$的导数，即

$$f(x) = \Phi'(x)$$

则在$x=a$到$x=b$区间内$f(x)$对x的定积分等于$\Phi(x)$在这区间内的增量，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \Phi(x)\big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$$

❍ **不定积分**

❍ **原函数**

如果$f(x)$是$\Phi(x)$的导数，则称$\Phi(x)$是$f(x)$的逆导数或**原函数**

$$\Phi'(x) = f(x)$$

求$f(x)$的定积分就可以归结为求它的逆导数或原函数。

❍ **不定积分**

一般说来，在函数$f(x)$的某个逆导数$\Phi(x)$上加一任意常量C，仍旧是$f(x)$的逆导数。通常把一个函数$f(x)$的逆导数的通式

$$\Phi(x) + C$$

称为它的**不定积分**，并记作$\int f(x)\mathrm{d}x$， 即

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \Phi(x) + C$$

不定积分代表一组函数。

❍ **几个有关积分运算的定理**

✍定理一　如果 $f(x) = au(x)$(a是常量)，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = a\int u(x)\mathrm{d}x$$

✍定理二　如果 $f(x) = u(x) \pm v(x)$，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int u(x)\mathrm{d}x \pm \int u(x)\mathrm{d}x$$

✍定理三　如果 $f(x) = u(x)v'(x)$，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}v$$

❍ **常用函数的不定积分**

$$\int x^n\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C \qquad \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$$

$$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C \qquad \ldots\ldots$$