数理方法 CH2 作业解答

P33.习题 2.1

3.利用积分不等式，证明

（1） $|\int_{-i}^{i}(x^2+iy^2)dz| \le 2$　　积分路径是直线段；

（2） $|\int_{-i}^{i}(x^2+iy^2)dz| \le p$　　积分路径是连接 $-i$ 到 i 的右半圆周.

证明：

（1）积分路径是从 $-i$ 到 i 的直线段，那么积分路径的长度为 $s=2$，在该路径上，

$x=0$，则 $|f(z)|=y^2$，而 $|y|\le 1$，　所以 $|f(z)|\le 1$　　即 $|f(z)|$ 的最大值为 $M=1$

$$|\int_{-i}^{i}(x^2+iy^2)dz| \le Ms = 1\cdot 2 = 2$$

（2）积分路径是连接 $-i$ 到 i 的右半圆周，该圆周半径 $r=1$，那么积分路径的长

度为 $s=pr=p$．　在该路径上，　$x=r\cos q$，　$y=r\sin q$，　则

$$|f(z)|=\sqrt{x^4+y^4}=\sqrt{r^4(\cos^4 q+\sin^4 q)}=r^2\sqrt{(\sin^2 q+\cos^2 q)^2-2\sin^2 q\cos^2 q}$$

$$=r^2\sqrt{(\sin^2 q+\cos^2 q)^2-\frac{1}{2}\sin^2 2q}=r^2\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 2q}\le 1$$

即 $|f(z)|$ 的最大值为 $M=1$

所以 $|\int_{-i}^{i}(x^2+iy^2)dz| \le Ms = 1\cdot p = p$

5. 计算 $I=\int_l \frac{dz}{(z-a)^n}$，其中 n 为整数，l 为以 a 为中心，r 为半径的上半圆周.

解：记 $z-a=re^{iq}$　　　　　则 $dz=rie^{iq}dq$

当 $n=1$ 时，$\int_l \frac{dz}{z-a}=\int_0^p \frac{rie^{iq}dq}{re^{iq}}=\int_0^p idq=ip$

当 n 为 $\ne 1$ 的整数时，$\int_l \frac{dz}{(z-a)^n}=\int_0^p \frac{rie^{iq}dq}{r^n e^{inq}}=r^{1-n}i\int_0^p e^{-i(n-1)q}dq$

$$=r^{1-n}i\int_0^p[\cos(n-1)q-i\sin(n-1)q]dq=r^{1-n}i[\frac{\sin(n-1)q}{n-1}+i\frac{\cos(n-1)q}{n-1}]|_0^p$$

$$=-r^{1-n}\cdot[\frac{\cos(n-1)q}{n-1}]_0^p=\frac{r^{1-n}}{1-n}[\cos(n-1)p-1]=\begin{cases}\frac{2r^{1-n}}{n-1}\Leftarrow n\text{为偶数时}\\ 0\Leftarrow n\text{为奇数时}\end{cases}$$

上式也可表达为$\frac{r^{1-n}}{1-n}[\cos(n-1)p-1]=\frac{r^{1-n}}{1-n}[(-1)^{n-1}-1]$

P38 习题 2.2：

1.计算积分：

$\oint_l \frac{dz}{(z-a)(z-b)}$　　l是包围a、b两点的围线。

解法之一：

$\frac{1}{(z-a)(z-b)}$在l内有两个奇点，$z=a$和$z=b$。在l内作小圆l_1包围a，作小圆l_2包围b，则由复通区域的柯西定理知：

$$\oint_l \frac{dz}{(z-a)(z-b)}=\oint_{l_1}\frac{dz}{(z-a)(z-b)}+\oint_{l_2}\frac{dz}{(z-a)(z-b)}$$

$$\oint_{l_1}\frac{dz}{(z-a)(z-b)}=\frac{1}{a-b}\left(\oint_{l_1}\frac{dz}{z-a}-\oint_{l_1}\frac{dz}{z-b}\right)=\frac{1}{a-b}(2pi-0)=\frac{2pi}{a-b}$$

$$\oint_{l_2}\frac{dz}{(z-a)(z-b)}=\frac{1}{a-b}\left(\oint_{l_2}\frac{dz}{z-a}-\oint_{l_2}\frac{dz}{z-b}\right)=\frac{1}{a-b}(0-2pi)=-\frac{2pi}{a-b}$$

所以，$\oint_l \frac{dz}{(z-a)(z-b)}=0$

解法之二：也可以简单地这样处理：

$$\oint_{l_1}\frac{dz}{(z-a)(z-b)}=\frac{1}{a-b}\left(\oint_l\frac{dz}{z-a}-\oint_l\frac{dz}{z-b}\right)=\frac{1}{a-b}(2pi-2pi)=0$$

解法之三：学了第 3 节后，可以用柯西公式：

在l内作小圆l_1包围a，作小圆l_2包围b，则由复通区域的柯西定理知：

$$\oint_l \frac{dz}{(z-a)(z-b)}=\oint_{l_1}\frac{dz}{(z-a)(z-b)}+\oint_{l_2}\frac{dz}{(z-a)(z-b)}$$

其中，

$$\oint_{l_1}\frac{dz}{(z-a)(z-b)}=\oint_{l_1}\frac{\frac{1}{z-b}}{z-a}dz=2pi\frac{1}{z-b}\Big|_{z=a}=\frac{2pi}{a-b}$$

$$\oint_{l_2}\frac{dz}{(z-a)(z-b)}=\oint_{l_2}\frac{\frac{1}{z-a}}{z-b}dz=2pi\cdot\frac{1}{z-a}|_{z=b}=\frac{2pi}{b-a}$$

则 $\oint_{l}\frac{dz}{(z-a)(z-b)}=\oint_{l_1}\frac{dz}{(z-a)(z-b)}+\oint_{l_2}\frac{dz}{(z-a)(z-b)}=\frac{2pi}{a-b}+\frac{2pi}{b-a}=0$

2．计算积分

（1）$\int_{-2}^{-2+i}(z+2)^2dz$　　　　　　　　　　（3）$\int_{1}^{1+\frac{p}{2}i}ze^zdz$

（说明：此题是用找原函数的方法，　与实变函数积分的方法是一样的）

解：（1）$\int_{-2}^{-2+i}(z+2)^2dz=\frac{1}{3}(z+2)^3|_{-2}^{-2+i}=-\frac{i}{3}$

（3）由分部积分法得：

$$\int ze^zdz=\int zde^z=ze^z-\int e^zdz=ze^z-e^z$$

则　$\int_{1}^{1+\frac{p}{2}i}ze^zdz=(z-1)e^z|_{1}^{1+\frac{p}{2}i}=-\frac{p}{2}e$

P44 习题 2.3

1. 计算下列积分，其中 l 为 $|z|=2$

（3）$\oint_{l}\frac{z+2}{(z+1)z}dz$

解法之一：被积函数有两个奇点，$z=-1$ 和 $z=0$；这两个奇点都包含在围道内，分别以 $z=-1$ 和 $z=0$ 为圆心作小圆，分别记为 l_{-1} 和 l_0．由复连通区域的柯西定理，有：

$$\oint_{l}\frac{z+2}{(z+1)z}dz=\oint_{l_{-1}}\frac{z+2}{(z+1)z}dz+\oint_{l_0}\frac{z+2}{(z+1)z}dz$$

其中，$\oint_{l_{-1}}\frac{z+2}{(z+1)z}dz=\oint_{l_{-1}}\frac{\frac{z+2}{z}}{(z+1)}dz=2pi\cdot\frac{z+2}{z}|_{z=-1}=-2pi$

$$\oint_{l_0}\frac{z+2}{(z+1)z}dz=\oint_{l_0}\frac{\frac{z+2}{z+1}}{z}dz=2pi\cdot\frac{z+2}{z+1}|_{z=0}=4pi$$

则$\oint_{l}\frac{z+2}{(z+1)z}dz=-2pi+4pi=2pi$

2. 计算积分$\oint_{l}\frac{dz}{z^2+9}$ ，其中围道l：

（1） 包围$3i$，不包围$-3i$　　（2）包围$-3i$，不包围$3i$　　（3）包围$\pm 3i$

解：（1）$\oint_{l}\frac{dz}{z^2+9}=\oint_{l}\frac{dz}{(z+3i)(z-3i)}=\oint_{l}\frac{\frac{1}{(z+3i)}}{(z-3i)}dz=2pi\cdot\frac{1}{(z+3i)}|_{z=3i}=\frac{p}{3}$

(2) $\oint_{l}\frac{dz}{z^2+9}=\oint_{l}\frac{dz}{(z+3i)(z-3i)}=\oint_{l}\frac{\frac{1}{(z-3i)}}{(z+3i)}dz=2pi\cdot\frac{1}{(z-3i)}|_{z=-3i}=-\frac{p}{3}$

(3) 两个奇点都包含在围道内，则分别以两个奇点为圆心作两个小圆，分别记为l_1和l_2（l_1以$z=-3i$为圆心；l_2以$z=3i$为圆心），则由复连通区域的柯西定理，有$\oint_{l}\frac{dz}{z^2+9}=\oint_{l_1}\frac{dz}{z^2+9}+\oint_{l_2}\frac{dz}{z^2+9}$

其中，

$$\oint_{l_1}\frac{dz}{z^2+9}=\oint_{l_1}\frac{\frac{1}{(z-3i)}}{(z+3i)}dz=2pi\cdot\frac{1}{(z-3i)}|_{z=-3i}=-\frac{p}{3}$$

$$\oint_{l_2}\frac{dz}{z^2+9}=\oint_{l_2}\frac{dz}{(z+3i)(z-3i)}=\oint_{l_2}\frac{\frac{1}{(z+3i)}}{(z-3i)}dz=2pi\cdot\frac{1}{(z+3i)}|_{z=3i}=\frac{p}{3}$$

则$\oint_{l}\frac{dz}{z^2+9}=\oint_{l_1}\frac{dz}{z^2+9}+\oint_{l_2}\frac{dz}{z^2+9}=0$

3. 计算下列积分

（1）$\oint_{l}\frac{\cos pz}{(z-1)^5}dz$

解：$\oint_{l}\frac{\cos pz}{(z-1)^5}dz=\frac{2pi}{4!}\frac{d^4}{dz^4}(\cos pz)|_{z=1}=-\frac{p^5}{12}i$

5. 求积分$\oint_l \frac{e^z}{z}dz \quad (l:|z|=1)$

从而证明： $\int_0^p e^{\cos q}\cos(\sin q)dq = p$

解：$\oint_l \frac{e^z}{z}dz = 2pi \cdot e^0 = 2pi$

证明：因积分的围线为以$z=0$为圆心，以 1 为半径的圆，故可令$z=e^{iq}$

$dz = ie^{iq}dq$

则

$$\oint_l \frac{e^z}{z}dz = \int_0^{2p}\frac{e^{e^{iq}}}{e^{iq}}e^{iq}\cdot idq = \int_0^{2p} ie^{(\cos q + i\sin q)}dq = \int_0^{2p} ie^{\cos q}e^{i\sin q}dq = \int_0^{2p} ie^{\cos q}[\cos(\sin q) + i\sin(\sin q)]dq$$

$$= \int_0^{2p} ie^{\cos q}\cos(\sin q)dq - \int_0^{2p} e^{\cos q}\sin(\sin q)dq$$

上式等于$2pi$，说明;

$\int_0^{2p} ie^{\cos q}\cos(\sin q)dq = 2p$， 则$\int_0^{p} e^{\cos q}\cos(\sin q)dq = p$

而$\int_0^{2p} e^{\cos q}\sin(\sin q)dq = 0$

6. 计算积分$\frac{1}{2pi}\oint_l \frac{e^z}{z(1-z)^3}$ ，若

（1） $z=0$ 在l内， $z=1$在l外； (2) $z=1$在l内， $z=0$ 在l外；

（3） $z=0$， $z=1$均在l内

解：（1） $z=0$ 在l内， $z=1$在l外；

$$\frac{1}{2pi}\oint_l \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz = \frac{1}{2pi}\oint_l \frac{\frac{e^z}{(1-z)^3}}{z}dz = \frac{e^z}{(1-z)^3}|_{z=0} = 1$$

(2) $z=1$在l内， $z=0$ 在l外；

$$\frac{1}{2pi}\oint_l \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz = -\frac{1}{2pi}\oint_l \frac{\frac{e^z}{z}}{(z-1)^3}dz = -\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}(\frac{e^z}{z})|_{z=1} = -\frac{e}{2}$$

（3） $z=0$， $z=1$均在l内

这时，围道内有两个奇点，分别以$z=0$和$z=1$为圆心作两个小圆，分别记为l_0和

l_1. 由复连通区域的柯西定理，有：

$$\frac{1}{2pi}\oint_l \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz = \frac{1}{2pi}\oint_{l_0} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz + \frac{1}{2pi}\oint_{l_1} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$$

其中，

$$\frac{1}{2pi}\oint_{l_0} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz = \frac{1}{2pi}\oint_{l_0} \frac{\frac{e^z}{(1-z)^3}}{z}dz = \frac{e^z}{(1-z)^3}\Big|_{z=0} = 1$$

$$\frac{1}{2pi}\oint_{l_1} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz = -\frac{1}{2pi}\oint_{l_1} \frac{\frac{e^z}{z}}{(z-1)^3}dz = -\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^z}{z}\right)\Big|_{z=1} = -\frac{e}{2}$$

则 $\frac{1}{2pi}\oint_l \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz = \frac{1}{2pi}\oint_{l_0} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz + \frac{1}{2pi}\oint_{l_1} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz = 1 - \frac{e}{2}$