

# 第7章：粒子在电磁场中的运动

2017年5月23日 23:01

## 磁场中的Schrödinger 方程

- ☐ Schrödinger方程中的矢势和标势
- ☐ 正则动量和机械动量
- ☐ Landau能级
- ☐ 正常塞曼效应

### Schrödinger方程中的矢势和标势

Lorentz 力

$$\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right)$$

其中电磁场

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

于是

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} = -\frac{q}{c} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + c \nabla \phi - \dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right) = -\frac{q}{c} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + c \nabla \phi - \nabla(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) + \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla \mathbf{A} \right)$$

考虑到

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla \mathbf{A}$$

则有

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{p} + \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) = -\frac{q}{c} \nabla(\phi - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})$$

定义正则动量为  $\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{q}{c} \mathbf{A}$

于是有

$$\dot{\mathbf{P}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[ \frac{q}{c} (c\phi - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) \right]$$

又由动能项变为

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} = \frac{\left( \mathbf{P} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2}{2\mu}$$

可以假设

$$\hat{H} = \frac{\left( \mathbf{P} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2}{2\mu} + U(\phi)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}} = \frac{\left( \mathbf{P} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)}{\mu}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{P}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[ \frac{\left(\mathbf{P} - \frac{q}{c} \mathbf{A}\right)^2}{2\mu} + U(\phi) \right] \\ &= \frac{q}{c} \frac{\left(\mathbf{P} - \frac{q}{c} \mathbf{A}\right)}{\mu} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}} - \nabla U(\phi) = -\frac{q}{c} \nabla (c\phi - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})\end{aligned}$$

加上势  $V(\mathbf{r})$ , Hamiltonian 可写为

$$\hat{H} = \frac{\left(\mathbf{P} - \frac{q}{c} \mathbf{A}\right)^2}{2\mu} + V(\mathbf{r}) + q\phi$$

## □ 正则动量

满足正则方程的动量定义：

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}} = \frac{\left(\mathbf{P} - \frac{q}{c} \mathbf{A}\right)}{\mu} \Rightarrow \mathbf{P} = \mu \dot{\mathbf{r}} + \frac{q}{c} \mathbf{A} = \mu \mathbf{v} + \frac{q}{c} \mathbf{A}$$

## □ 机械动量

$$\mathbf{p} = \mu \dot{\mathbf{r}} = \mu \mathbf{v}$$

在有磁场的情况下，带电粒子的广义动量并不等于其机械动量

## ■ 局域概率守恒

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho - \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

## ■ 规范不变性

$$\begin{cases} \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi(\mathbf{r}, t) \\ \phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \chi(\mathbf{r}, t) \end{cases}$$

规范变化下电场和磁场强度不变，波函数

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{iq\chi/\hbar c} \psi$$

Schrödinger 方程形式不变。

## 矢势A的作用

现在我们来证明定态薛定谔方程

$$\frac{1}{2m} \left( -i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi + V\psi = E\psi \quad (6.1.13)$$

(假定  $\mathbf{A}$  和  $V$  都不随时间  $t$  而变) 的形式解可以写成

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi^{(0)}(\mathbf{x}) \exp \left[ \frac{iq}{\hbar c} \int_{\mathbf{x}'}^{\mathbf{x}} \mathbf{A}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{x}' \right] \quad (6.1.14)$$

其中线积分可相当任意地沿可连续变形的路径  $S(\mathbf{x})$  (端点在  $\mathbf{x}$  点) 来作，而  $\psi^{(0)}(\mathbf{x})$  满足方程

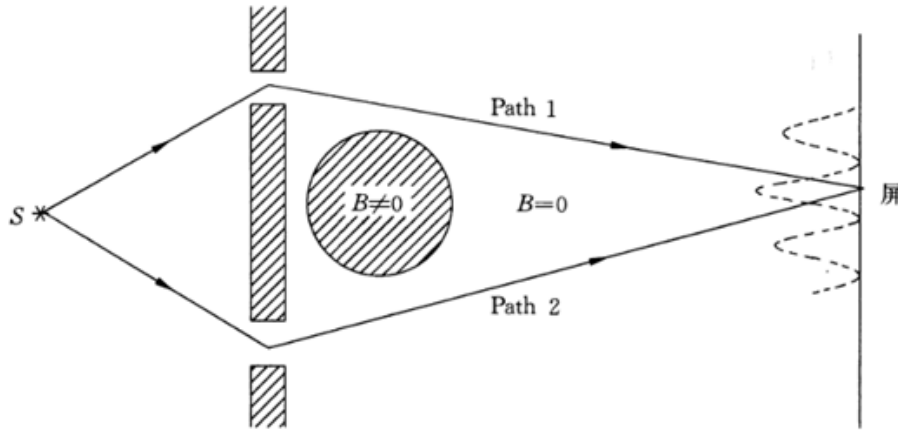
$$\frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla)^2 \psi^{(0)} + V\psi^{(0)} = E\psi^{(0)} \quad (6.1.15)$$

证明时只要用代入法并注意

$$\begin{aligned} \left(-i\hbar \nabla - \frac{q\mathbf{A}}{c}\right)\psi &= \exp\left(\frac{iq}{\hbar c} \int^{S(x)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}'\right) \left[ \left(-i\hbar \nabla - \frac{q\mathbf{A}}{c}\right)\psi^{(0)} \right. \\ &\quad \left. + \psi^{(0)} \left(-i\hbar\right) \left(\frac{iq}{\hbar c}\right) \mathbf{A}(\mathbf{x}) \right] \\ &= \exp\left(\frac{iq}{\hbar c} \int^{S(x)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}'\right) (-i\hbar \nabla \psi^{(0)}) \\ \left(-i\hbar \nabla - \frac{q\mathbf{A}}{c}\right)^2 \psi &= \exp\left(\frac{iq}{\hbar c} \int^{S(x)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}'\right) (-\hbar^2 \nabla^2 \psi^{(0)}) \end{aligned}$$

## Aharonov-Bohm效应 (没有磁场, 电子受不受作用)

半径为 $R$ 的圆形阴影部分是一个载有电流的长螺线管, 管内产生强度为 $B$ 沿 $z$ 轴(垂直纸面向上)的磁场。从电子枪 $S$ 出来的电子束经双缝后被分成两部分, 一部分沿路径(Path) 1运动, 另一部分沿路径(Path) 2运动, 然后又在屏幕处会发生干涉, 干涉条纹由两条路径上的电子波函数累积的相位差 $\delta$ 决定。



磁场

$$\vec{B} = \begin{cases} B\hat{z} & (r < R) \\ 0 & (r > R) \end{cases}$$

由 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 可知, 矢势 $\vec{A}$ 只有沿 $\phi$ 方向的分量

$$\vec{A} = \begin{cases} \frac{1}{2} Br \hat{\phi} & (r < R) \\ \frac{1}{2} B \frac{R^2}{r} \hat{\phi} = \frac{\Phi}{2\pi r} \hat{\phi} & (r > R) \end{cases}$$

其中 $\Phi = \pi R^2 B$ 是管内磁通量。两条路径波函数分别为

$$\begin{cases} \psi_1 = \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{Path1} \vec{p}_1 \cdot d\vec{l} - \frac{ie}{\hbar c} \int_{Path1} \vec{A}(\vec{l}) \cdot d\vec{l} \right] \\ \psi_2 = \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{Path2} \vec{p}_2 \cdot d\vec{l} - \frac{ie}{\hbar c} \int_{Path2} \vec{A}(\vec{l}) \cdot d\vec{l} \right] \end{cases}$$

因此上下路径对称, 所以 $\frac{i}{\hbar} \int_{Path1} \vec{p}_1 \cdot d\vec{l} - \int_{Path2} \vec{p}_2 \cdot d\vec{l} = 0$ . 于是相位差为

$$\begin{aligned} \delta &= -\frac{e}{\hbar c} \int_{Path1} \vec{A}(\vec{l}) \cdot d\vec{l} + \frac{e}{\hbar c} \int_{Path2} \vec{A}(\vec{l}) \cdot d\vec{l} \\ &= -\frac{e}{\hbar c} \oint \vec{A}(\vec{l}) \cdot d\vec{l} = -\frac{e}{\hbar c} \oint (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

$$= -\frac{e}{\hbar c} \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{e}{\hbar c} \Phi$$

## Laundau能级：自由电子在稳恒磁场中的运动

假设磁场沿z方向： $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ ，则矢势 $\mathbf{A}$ 可取为 $(-By, 0, 0)$

此时系统 Hamiltonian 为

$$\hat{H} = \frac{\left(\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2}{2\mu} = \frac{1}{2\mu} \left[ \left(\hat{p}_x + \frac{q}{c}By\right)^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 \right]$$

力学量完全集： $[\hat{H}, \hat{p}_x, \hat{p}_z]$

Schrödinger 方程

$$\hat{H}\psi(x, y, z) = E_n\psi(x, y, z)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\mu} \left[ \left(\hat{p}_x + \frac{q}{c}By\right)^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 \right] \psi(x, y, z) = E_n\psi(x, y, z)$$

共同本征函数

$$\psi(x, y, z) = e^{i(p_1x + p_3z)/\hbar} \chi(y)$$

$\hat{p}_x, \hat{p}_z$  本征值分别为  $p_1, p_3$

于是有

$$\frac{1}{2\mu} \left[ \left(p_1 + \frac{q}{c}By\right)^2 + \hat{p}_y^2 + p_3^2 \right] \chi(y) = E_n\chi(y)$$

即

$$\left[ \frac{\hat{p}_y^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu \left(\frac{qB}{c\mu}\right)^2 \left(y + \frac{cp_1}{qB}\right)^2 \right] \chi(y) = \left(E_n - \frac{p_3^2}{2\mu}\right) \chi(y)$$

这正是平衡位置为  $y_0 = -cp_1/qB$ ，频率为  $\omega = |qb|/c\mu$  (回旋角频率)的谐振子

$$\left[ \frac{\hat{p}_y^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2(y - y_0)^2 \right] \chi_n(y) = \left(E_n - \frac{p_3^2}{2\mu}\right) \chi_n(y)$$

其本征值和本征态分别为

$$\varepsilon_n = E_n - \frac{p_3^2}{2\mu} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$$

$$\chi_n(y) = N e^{-\alpha^2(y-y_0)^2/2} H_n[\alpha(y-y_0)] \quad \alpha = \sqrt{m\omega/\hbar}$$

所以能量本征值和本征态为

$$E_n = \frac{p_3^2}{2\mu} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{|qB|\hbar}{cu}$$

$$\psi_n(x, y, z) = N e^{i(p_1x + p_3z)/\hbar} e^{-\alpha^2(y-y_0)^2/2} H_n[\alpha(y-y_0)]$$

★ 从本征函数可以看出，粒子一方面以平面波形式

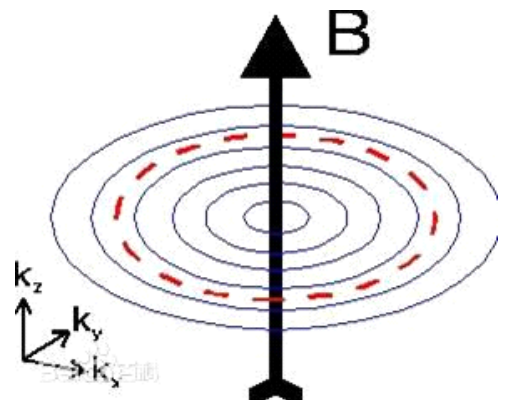
在  $xz$  平面内移动，另一方面则绕着平衡面  $y = y_0$  振动。而能量则是连续背景上的分离谱。由于能级中不含  $p_x$ ，所以能级是无穷简并的。

💡 对称规范： $\mathbf{A} = \left(-\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx, 0\right)$

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2\mu} \left[ \left(\hat{p}_x + \frac{q}{2c}By\right)^2 + \left(\hat{p}_y - \frac{q}{2c}Bx\right)^2 + \hat{p}_z^2 \right] \\ &= \frac{1}{2\mu} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{1}{2}\mu \left(\frac{qB}{2c\mu}\right)^2 (x^2 + y^2) - \frac{qB}{2\mu c} \hat{L}_z + \frac{\hat{p}_z^2}{2\mu} \end{aligned}$$

$$\psi_n(x, y, z) = N R_{nl}(\rho) e^{im\varphi}$$

$R_{nl}(\rho) \sim \rho^{|m|} F(-n_\rho, |m| + 1, \alpha'^2 \rho^2) e^{-\alpha'^2 \rho^2/2}$ , ( $\alpha' = \sqrt{(\mu\omega_L)/\hbar} = \alpha/\sqrt{2}$ ) 是二维各向同



性谐振子本征函数,  $\omega_L = eB/2\mu c$  是Lamor频率

## 扩展阅读：量子霍尔效应

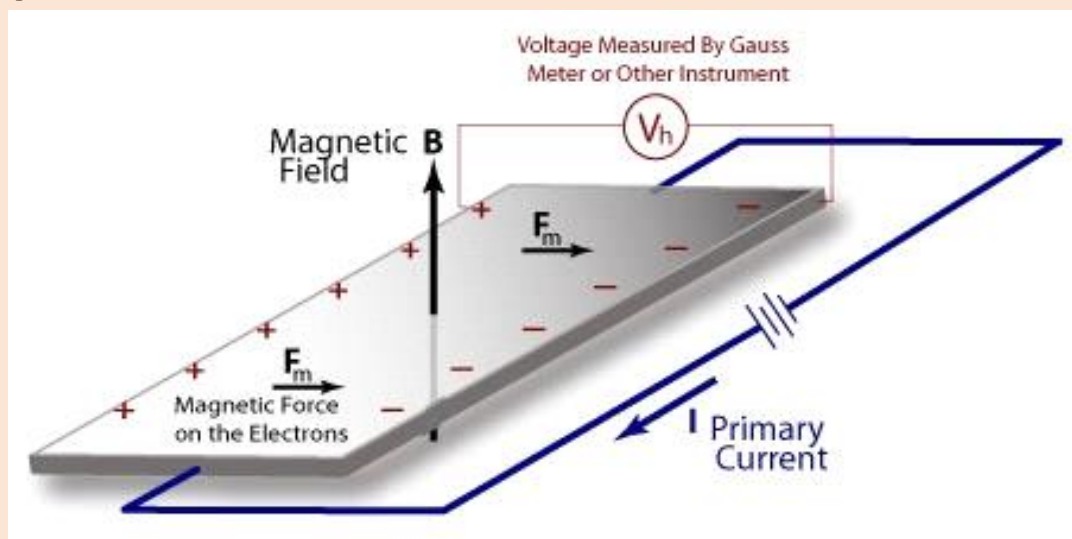
作者：振鹭于飞

链接：<https://www.zhihu.com/question/47547396/answer/106574249>

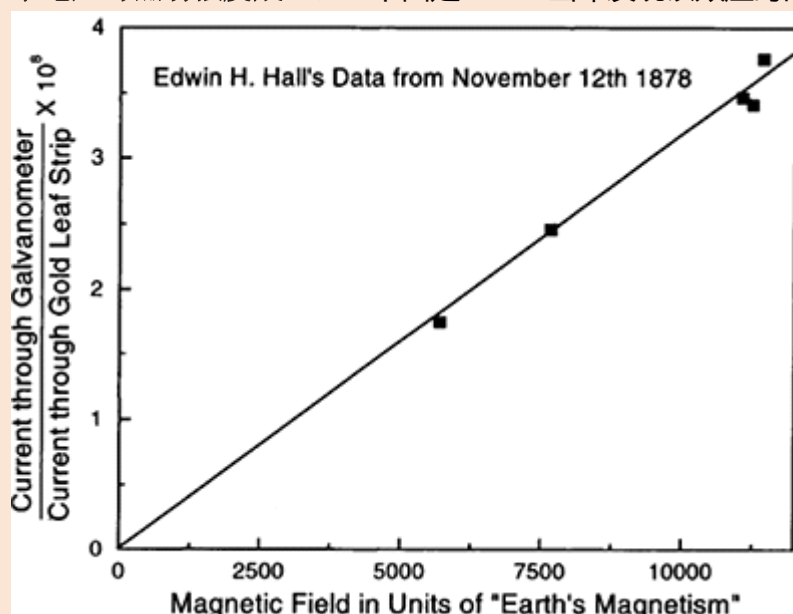
来源：知乎

### 霍尔效应

高中物理课上想必大家都学过霍尔效应：将一块导体(半导体也可以)放置在一个磁场内，然后通电流。在垂直于磁场和电流的方向会产生电压。这个效应最早是1878年由美国物理学家 Hall 在读 PhD 时发现的。这个效应非常有用，比如我们可以基于此方便而又准确地测量空间中某处磁场的大小；



造成这个现象的原因大家是熟知的：电子在磁场中受到 Lorentz 力而偏转，在导体两端积累，在导体中建立起电场从而产生电势差。这个电压被称为霍尔电压。霍尔效应一个显著的特征是霍尔电压与磁场强度成正比。下面是 Hall 当年发现该效应时的原始数据：



造成这个现象的原因大家是熟知的：电子在磁场中受到 Lorentz 力而偏转，在导体两端积累，在导体中建立起电场从而产生电势差。这个电压被称为霍尔电压。霍尔效应一个显著的特征是霍尔

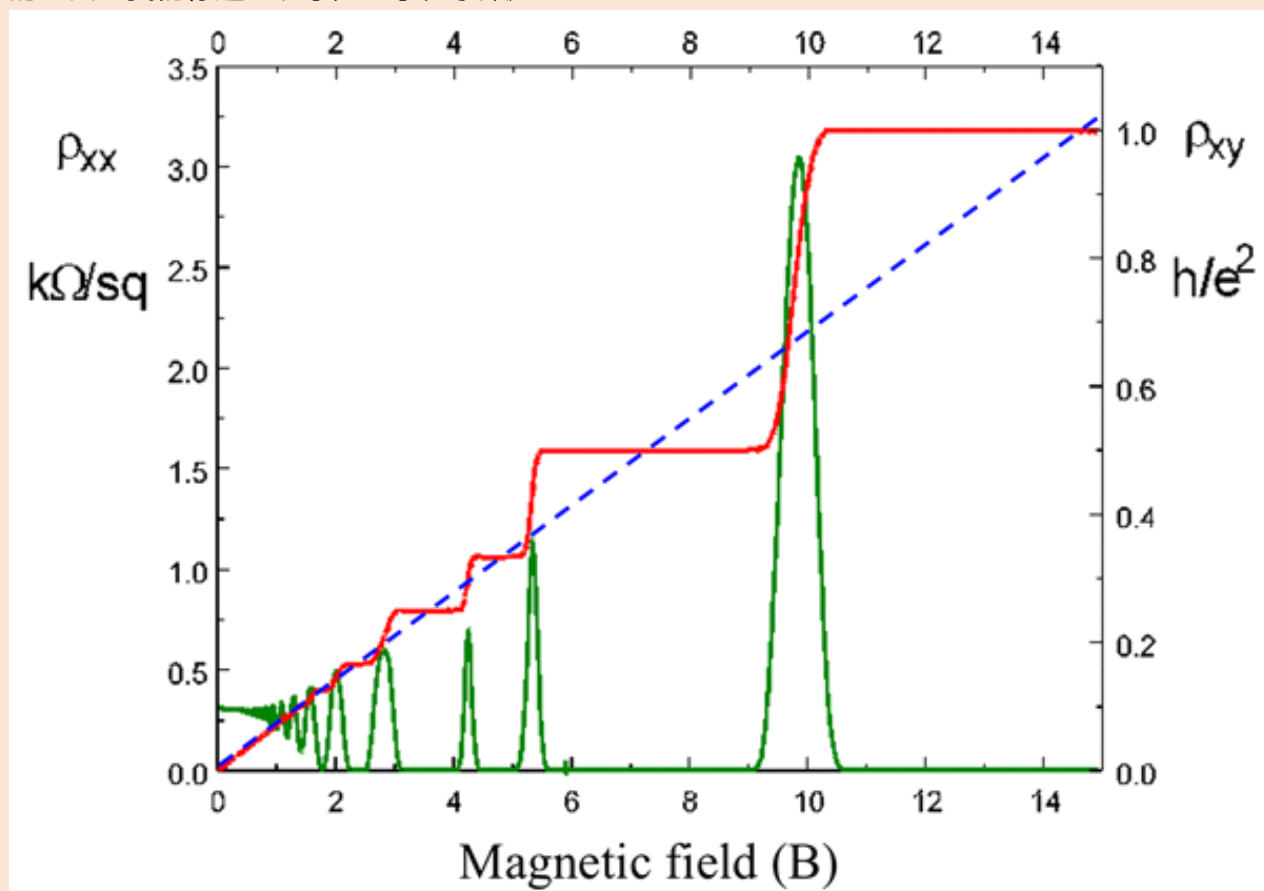
**电压与磁场强度成正比。** 下面是 Hall 当年发现该效应时的原始数据：

### • 量子霍尔效应

霍尔效应是在三维的导体中实现的，电子可以在导体中自由运动。如果通过某种手段将电子限制在二维平面内，在垂直于平面的方向施加磁场，沿二维电子气的一个方向通电流，则在另一个方向也可以测量到电压，这和霍尔效应很类似。

在整整一百多年后的1980年，德国物理学家 von Klitzing 发现了所谓的量子霍尔效应。之所以要等这么久才能实现这一效应，主要是由于理想的二维电子气难以实现。在半导体技术高度发展之后，人们才能在“金属-氧化物-半导体场效应晶体管”（MOSFET）中实现比较理想的二维电子气。除此之外，观察到这一效应还需要极低温（1.5K）和强磁场（18T）。von Klitzing 因此获得了1985年诺贝尔物理学奖。

量子霍尔效应与霍尔效应最大的不同之处在于横向电压对磁场的响应明显不同。横向电阻是量子化的，由此我们称这一现象为量子霍尔效应：



尽管从整体趋势上看，横向电阻（图中红线，电阻的定义为电压/电流，实验时电流恒定，因此横向电阻就相当于横向电压）随着磁场强度增大而线性增大，但在这一过程中却形成了若干横向电阻不变的平台。这些平台所对应的电阻是“量子电阻”

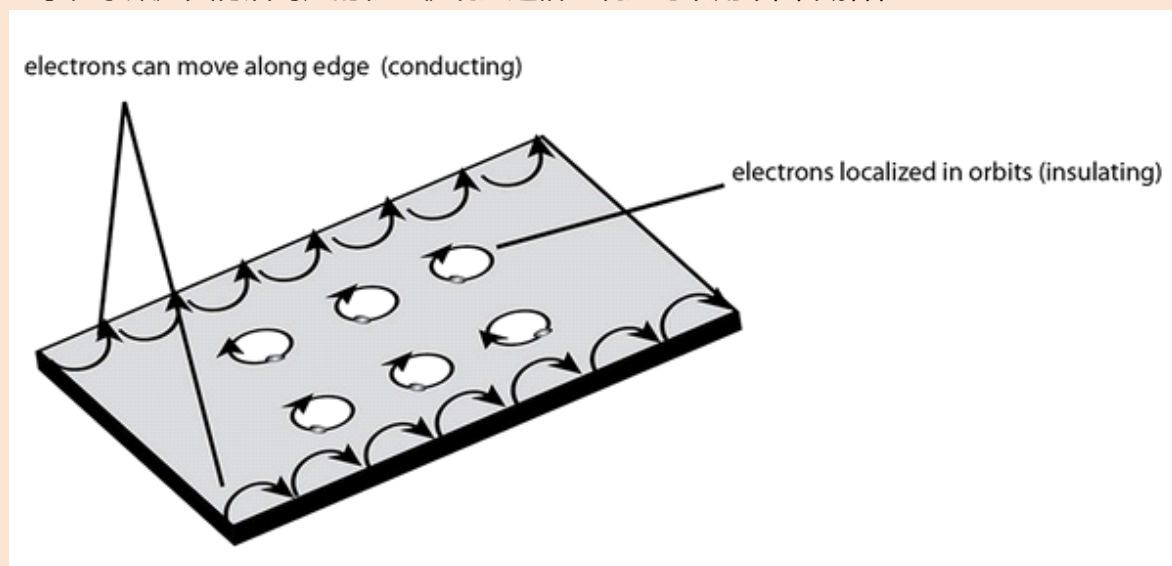
尽管从整体趋势上看，横向电阻（图中红线，电阻的定义为电压/电流，实验时电流恒定，因此横向电阻就相当于横向电压）随着磁场强度增大而线性增大，但在这一过程中却形成了若干横向电阻不变的平台。这些平台所对应的电阻是“量子电阻”  $h/e^2$  除以一个整数  $n$ ，对应图中平台的“1, 0.5, 0.33, 0.25, 0.2”等位置。量子霍尔效应也称作整数量子霍尔效应（Integer Quantum Hall Effect ~ IQH）。原始霍尔效应所对应的区域是磁场强度  $B$  很小区域。从图中可以看见磁场强度很小时横向电阻与磁场强度确实成线性关系。

除此之外，量子霍尔效应中的纵向电阻（图中绿线）的随磁场的变化也很奇特：在横向电阻达到平台



时，纵向电阻竟然为零！在原始霍尔效应时，纵向电阻随磁场几乎是不变化的，这对应图中磁场强度很小时纵向电阻确实近似是一个常数。

量子霍尔效应其背后对应的物理机制，通俗地说，可以用下图来解释：



在强磁场下，导体内部的电子受 Lorentz 力作用不断沿着等能面转圈 (Lorentz 力不做功!)。如果导体中存在杂质，尤其是带电荷的杂质，将会影响等能面的形状。实际上，导体内部的电子只能在导体内部闭合的等能面上做周期运动，而不能参与导电。（因此在很纯净的样品中反而观察不到量子霍尔效应!）

在量子霍尔效应中，真正参与导电的实际上是电子气边缘的电子。而边缘的电子转圈转到一半就会打到边界，受到反弹，再次做半圆运动，由此不断前进。这种在边界运动的电子，与通常在导体内部运动的电子不同，它不是通过不断碰撞，类似扩散的方式前进的。而是几乎不与其他电子碰撞，直接到达目的地，像一颗子弹。因此这种现象在物理学中被称为弹道运输 (ballistic transport)。显然在这种运输机制中产生的电阻不与具体材料有关，只与电子本身所具有的性质有关。因此横向电阻总是  $\frac{h}{nc^2}$ ，其中  $n$  是一个正整数。之所以与  $n$  有关，粗略地说，是因为磁场小到一定的程度，就会同时使更多的电子进行弹道运输。进行的电子越多，横向电阻越小。

## ✍ 正常 Zeeman 效应

假设磁场沿  $z$  方向  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$  则矢势  $\mathbf{A}$  可取为

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \left( -\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx, 0 \right) \\ \hat{H} &= \frac{1}{2\mu} \left[ \left( \hat{p}_x - \frac{e}{2c}By \right)^2 + \left( \hat{p}_y + \frac{e}{2c}Bx \right)^2 + \hat{p}_z^2 \right] + V(r) \\ &= \frac{1}{2\mu} \hat{\mathbf{p}}^2 + V(r) + \frac{1}{2}\mu \left( \frac{qB}{c\mu} \right)^2 (x^2 + y^2) + \frac{eB}{2\mu c} \hat{L}_z\end{aligned}$$

在原子中  $(x^2 + y^2) \sim (10^{-10}m)^2$ ，实验室磁场强度  $B < 10T$ 。所以  $B^2$  项很小可以忽略

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu} \hat{\mathbf{p}}^2 + V(r) + \frac{eB}{2\mu c} \hat{L}_z = \hat{H}_0 + \frac{eB}{2\mu c} \hat{L}_z$$

力学量完全集  $\{\hat{H}_0, \hat{L}^2, \hat{L}_z\}$  与氢原子相同

能量本征函数不变

$$\text{能量本征值 } E_{n_r l m} = E_{n_r l} + m\hbar\omega_L$$