数学物理方法

Methods in Mathematical Physics

第十五章 贝塞尔函数

Bessel Function

武汉大学物理科学与技术学院

问题的引入：

由第二篇第八章分离变量法有：

$$\left.\begin{array}{r}\Delta u+\lambda u=0\\ \Delta u=0\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{令}u=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)}$$

$$\Phi''+n^2\Phi=0\to\Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi$$

$$Z''+\mu Z=0\to Z(z)=c_1e^{kz}+d_2e^{-kz}\ (\mu=-k^2)$$

$$\rho^2R''+\rho R'+(k^2\rho^2-n^2)R=0\to R(\rho)=?$$

$$\downarrow x=k\rho, R(\rho)=y(x), k^2=\lambda-\mu\geq 0$$

$$x^2y''(x)+xy'(x)+(x^2-n^2)y(x)=0\to y(x)=?$$

第十五章 贝塞尔函数
Bessel Function

中心：柱坐标系中的特殊函数问题

目的：1. 掌握Bessel方程的级数解，及常微分方程正则奇点邻域的级数解法。

2. 掌握Bessel函数的性质。

3. 在柱坐标中$\Delta u=0$的解u=?

第十五章 贝塞尔函数

Bessel Function

§15.1 Bessel函数

附：二阶线性常微分方程的级数解法2

对于： $$\boxed{W''(z)+p(z)W'(z)+q(z)W(z)=0 \qquad (*)}$$

若z_0是它的奇点，即在z_0点其系数$p(z)$和$q(z)$之一或均不解析，且z_0是$p(z)$不高于一阶的极点、$q(z)$不高于二阶的极点，则称z_0是方程的正则奇点。

在正则奇点$z=z_0$的邻域$0<|z-z_0|<R$内，方程至少有形式为

$$\boxed{W(z)=(z-z_0)^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}C_k(z-z_0)^k \qquad (**)}$$

的幂级数解。将形式解$(**)$代入方程$(*)$中通过比较方程两边最低次幂的系数，便可得到一关于ρ的二次方程。，称为指标方程。由此方程可求得两个指标：ρ_1,ρ_2

(设$\rho_1>\rho_2$)，那么，方程

附：二阶线性常微分方程的级数解法2

$$W''(z)+p(z)W'(z)+q(z)W(z)=0 \qquad (*)$$

的两线性无关的根为：

$$W_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$$

$$W_2(z)=\begin{cases}(z-z_0)^{\rho_2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}d_k(z-z_0)^k, & \rho_1-\rho_2\neq\text{整数}\\ aw_1(z)\ln(z-z_0)+(z-z_0)^{\rho_2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}d'_k(z-z_0)^k, & \rho_1-\rho_2=\text{整数}\end{cases}$$

一、 Bessel方程的级数解

$$x^2y''(x)+xy'(x)+(x^2-\nu^2)y(x)=0\quad(1)\rightarrow y(x)=?$$

$$p(x)=\frac{1}{x},\ q(x)=1-(\frac{\nu}{x})^2\qquad x=0-\text{方程的正则奇点。}$$

1、令 $y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+\rho}$, 则

$$y'=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(k+\rho)x^{k+\rho-1},y''=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(k+\rho)(k+\rho-1)x^{k+\rho-2}$$

$$(1)\rightarrow\sum_{k=0}^{\infty}[(k+\rho)^2-\nu^2]c_kx^{k+\rho}+\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+\rho+2}=0\quad(2)$$

2、比较最低次幂 x^ρ 的系数：

$$(\rho^2-\nu^2)c_0=0\quad(c_0\neq0)$$

$\rightarrow$判定方程：$\boxed{\rho^2-\nu^2=0\qquad\rightarrow\rho_1=\nu,\ \rho_2=-\nu}$ (设 $\nu>0$)

一、Bessel方程的级数解

$$x^2y''(x)+xy'(x)+(x^2-\nu^2)y(x)=0\quad(1)\rightarrow y(x)=?$$

3、令 $y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+\rho_1}=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+\nu}$

$$(1)\rightarrow\sum_{k=0}^{\infty}[(k+\nu)^2-\nu^2]c_kx^{k+\nu}+\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+\nu+2}=0$$

$$x^{\nu}:(\nu^2-\nu^2)c_0=0\quad(设c_0\neq 0)$$

$$x^{\nu+1}:[(\nu+1)^2-\nu^2)c_1=0\ \rightarrow\ c_1=0$$

系数递推公式：

$$x^{\nu+k}:[(\nu+k)^2-\nu^2]c_k+c_{k-2}=0\rightarrow \boxed{c_k=-\frac{c_{k-2}}{k(2\nu+k)}\qquad(3)}$$

$$c_2=-\frac{c_0}{2\cdot 2(\nu+1)},\quad c_3=-\frac{c_1}{3\cdot(3+2\nu)}=0$$

$$c_4=(-1)^2\frac{c_0}{2^4\cdot 2(\nu+2)(\nu+1)},\quad c_5=0$$

一、 Bessel方程的级数解

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0 \quad (1) \to y(x) = ?$$

3、令 $y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\rho_1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\nu}$

$$\to c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2^{2n} n!(\nu+n)(\nu+n-1)\cdots(\nu+1)}, \qquad c_{2n+1} = 0$$

$$\to c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0 \Gamma(\nu+1)}{2^{2n} n! \Gamma(\nu+n+1)}$$

$$\boxed{\to y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c_0 \Gamma(\nu+1)}{2^{2n} n! \Gamma(\nu+n+1)} x^{2n+\nu}}$$

4、取 $\rho = \rho_2 = -\nu$, 类似可得

$$\boxed{\to y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c_0 \Gamma(-\nu+1)}{2^{2n} n! \Gamma(-\nu+n+1)} x^{2n-\nu}}$$

二、解的敛散性

1、解的奇点少于或等于方程的奇点。

$$\boxed{W''(z)+p(z)W'(z)+q(z)W(z)=0 \qquad (*)}$$

2、贝塞尔方程的奇点为：0, ∞

$$\boxed{x^2y''(x)+xy'(x)+(x^2-\nu^2)y(x)=0 \quad (1)}$$

令 $x=\dfrac{1}{t}$

$$t^2y''(t)+ty'(t)+(\frac{1}{t^2}-\nu^2)y(t)=0 \quad (1)$$

3、$y_1(x), y_2(x)$均在$0<|x|<\infty$中收敛。

$y_1(x)$在$|x|<\infty$中收敛，而$y_2(x)$当$x\to 0$时发散。

三、贝塞尔函数

1、定义： 在 $y_1(x)$中，取 $c_0=\dfrac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}$,并记

$y_1(x)=J_{\nu}(x)$ 一称之为 ν 阶贝塞尔函数。

$$\boxed{y_1(x)=J_{\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}(\frac{x}{2})^{2k+\nu} \quad (4)}$$

在 $y_2(x)$中，取 $c_0=\dfrac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}$,并记

$$y_2(x)=J_{-\nu}(x)$$

$$\boxed{y_2(x)=J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-\nu+k+1)}(\frac{x}{2})^{2k-\nu} \quad (5)}$$

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt, x>0$$

三、贝塞尔函数

2、线性相关性：

(1) 当$\nu \neq n$时，$J_\nu(x)$与$J_{-\nu}(x)$是线性无关的。

$$x\to 0: J_\nu(x)\approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}(\frac{x}{2})^\nu,\ J_{-\nu}(x)\approx \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)}(\frac{x}{2})^{-\nu}$$

$$\frac{J_\nu(x)}{J_{-\nu}(x)}\approx \frac{\Gamma(-\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)}(\frac{x}{2})^{2\nu}$$ —随x的值而变。

通解： $$\boxed{y_c(x)=c_\nu J_\nu(x)+d_\nu J_{-\nu}(x)}$$

(2) 当$\nu=n$时，$\boxed{J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x)\quad (6)}$

问： $J_n(-x)=?$ $\boxed{=(-1)^n J_n(x)=J_{-n}(x)}$

四、本征值问题

$$\begin{cases}\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)+(k^2\rho^2-n^2)R(\rho)=0 & (7)\\ [\alpha R(\rho)+\beta R'(\rho)]_{\rho=a}=0 & (8)\end{cases}$$

1、
$$\begin{cases}\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)+(k^2\rho^2-n^2)R(\rho)=0 & (9)\\ R(a)=0 & (10)\end{cases}$$

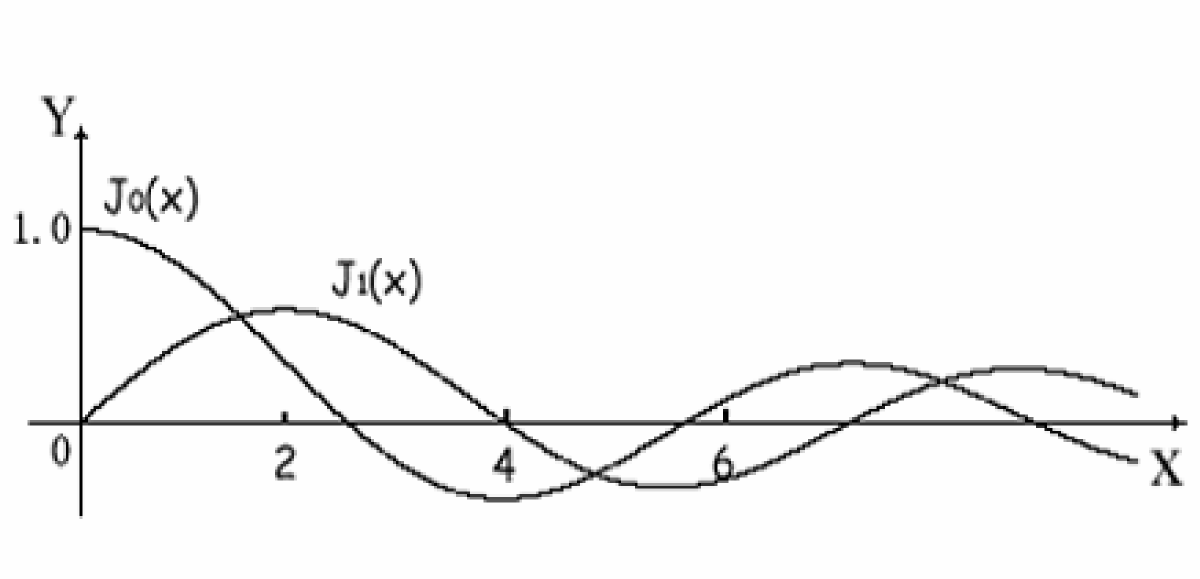
即：
$$\begin{cases}x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0 & (9)'\\ y\big|_{x=ka}=0 & (10)'\end{cases}$$

(1) $J_n(x)$是一振荡函数。

$$J_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}=1-\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\cdots$$

$$J_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}=\frac{x}{2}-\frac{1}{1!2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\cdots$$

四、本征值问题

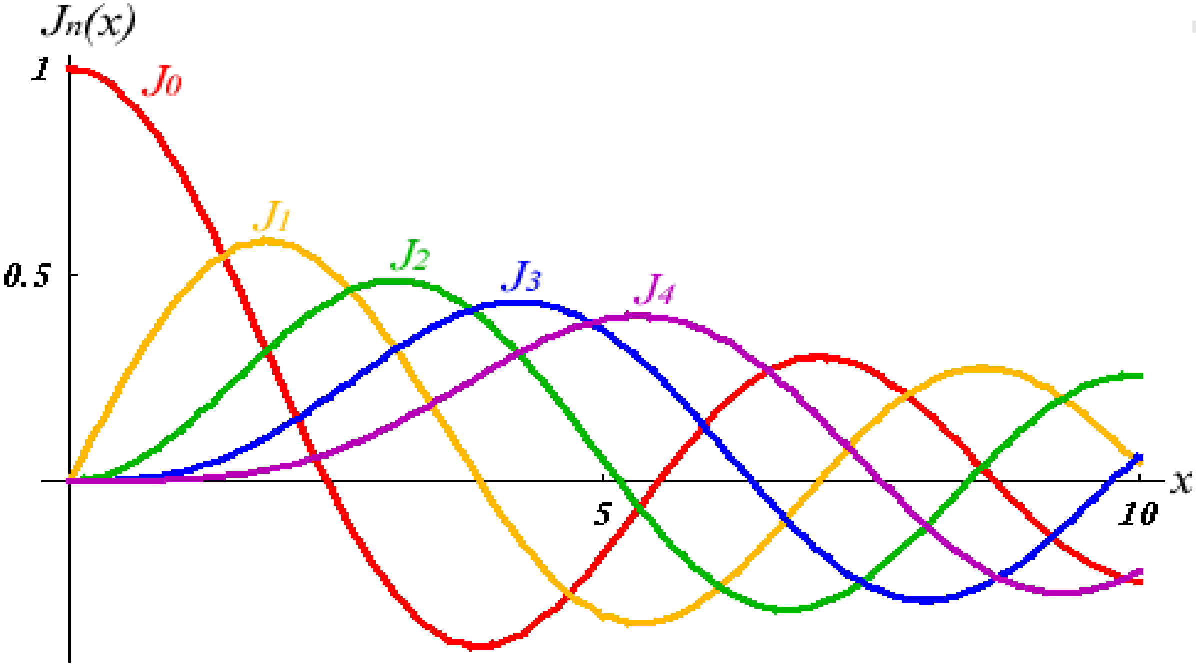


(1) $J_n(x)$是一振荡函数。

$$J_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}=1-\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\cdots$$

$$J_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}=\frac{x}{2}-\frac{1}{1!2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\cdots$$

四、本征值问题



(1) $J_n(x)$是一振荡函数。

$$J_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}=1-\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\cdots$$

$$J_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}=\frac{x}{2}-\frac{1}{1!2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\cdots$$

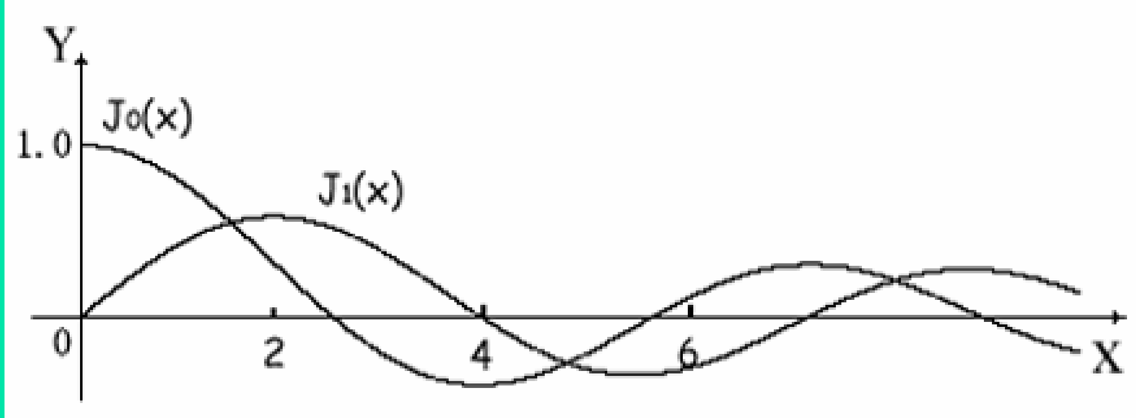
四、本征值问题

1、$\begin{cases} \rho^2 R''(\rho)+\rho R'(\rho)+(k^2\rho^2-n^2)R(\rho)=0, \rho<a & (9) \\ R(a)=0 & (10) \end{cases}$

即：$\begin{cases} x^2 y''+xy'+(x^2-n^2)y=0 & (9)' \\ y\big|_{x=ka}=0 & (10)' \end{cases}$

(2) $J_n(x)$与x轴有无穷个交点。

$J_n(x_m^n)=0 \ (m=1,2,\cdots) \to x_m^n$ —称为$J_n(x)$第m 个零点。



$x_1^0 \approx 2.4,$

$x_2^0 \approx 5.5;$

$x_1^1 = 0,$

$x_2^1 \approx 3.8,$

四、本征值问题

1、$$\begin{cases} \rho^2 R''(\rho)+\rho R'(\rho)+(k^2\rho^2-n^2)R(\rho)=0, \rho<a & (9) \\ R(a)=0 & (10) \end{cases}$$

即：$$\begin{cases} x^2 y''+xy'+(x^2-n^2)y=0 & (9)' \\ y\big|_{x=ka}=0 & (10)' \end{cases}$$

(3) 本征值问题(9)(10)或(9)′(10)′的

本征值： $$\boxed{k_m^n=\frac{x_m^n}{a}, m=1,2,\cdots}$$

本征函数： $$\boxed{y_m(k\rho)=J_n(\frac{x_m^n}{a}\rho), m=1,2,\cdots}$$

四、本征值问题

2、$\begin{cases} \rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + (k^2\rho^2 - n^2)R(\rho) = 0, \rho < a & (11) \\ R'(a) = 0 & (12) \end{cases}$

$$J_n'(\tilde{x}_m^n) = 0 \quad (m = 1,2,\cdots) \to \tilde{x}_m^n$$

—称为 $J_n'(x)$ 第 m 个零点。

本征值：$\boxed{\tilde{k}_m^n = \dfrac{\tilde{x}_m^n}{a}, m = 1,2,\cdots}$

本征函数：$\boxed{R_m(k\rho) = J_n(\dfrac{\tilde{x}_m^n}{a}\rho), m = 1,2,\cdots}$

五、小结

1、$x^2y''(x)+xy'(x)+(x^2-\nu^2)y(x)=0 \quad (1)$

$$\boxed{y_1(x)=J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \quad (4)}$$

$$\boxed{y_2(x)=J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu} \quad (5)}$$

当$\nu\neq n$时： $y_c(x)=c_\nu J_\nu(x)+d_\nu J_{-\nu}(x)$

当$\nu=n$时：$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x) \quad (6)$

五、小结

2、$$\begin{cases} \rho^2 R''(\rho)+\rho R'(\rho)+(k^2\rho^2-n^2)R(\rho)=0 & (9) \\ R(a)=0 & (10) \end{cases}$$

$J_n(x_m^n)=0\ \ (m=1,2,\cdots)\to x_m^n$ 一称为 $J_n(x)$ 第 m 个零点。

本征值： $$k_m^n=\frac{x_m^n}{a},m=1,2,\cdots$$

本征函数： $$R_m(k\rho)=J_n(\frac{x_m^n}{a}\rho),m=1,2,\cdots$$

$$\{J_n(k_m^n\rho)\}:J_n(k_1^n\rho),J_n(k_2^n\rho),J_n(k_3^n\rho),\cdots$$

一n阶贝塞尔函数系

五、小结

对于：

$$W''(z)+p(z)W'(z)+q(z)W(z)=0 \qquad (*)$$

在正则奇点$z=z_0$的邻域$0<|z-z_0|<R$内,方程至少有形式为

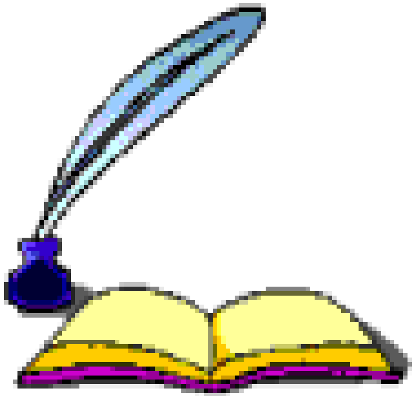
$$W(z)=(z-z_0)^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}C_k(z-z_0)^k \qquad (**)$$

若ρ的指标的两个指标为：ρ_1,ρ_2(设$\rho_1>\rho_2$),那么,方程(*)的两线性无关的根为：

$$W_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$$

$$W_2(z)=\begin{cases}(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}d_k(z-z_0)^k, & \rho_1-\rho_2\neq\text{整数}\\ aw_1(z)\ln(z-z_0)+(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}d'_k(z-z_0)^k, & \rho_1-\rho_2=\text{整数}\end{cases}$$

本节作业



习题15.1： 1

Good-by!