数学物理方法

Methods in Mathematical Physics

第十四章 勒让德多项式

Legendre polynomial

武汉大学物理科学与技术学院

第十四章 勒让德多项式习题课

❖本章主要内容：

❖例题分析：

一、有关特殊函数性质

二、在球坐标中 $\Delta u = 0$ 的解

❖本章主要内容

$$1.\ \Delta u = 0 \xrightarrow{\text{令} u=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)}$$

$$\begin{cases} r^2R'' + 2rR' - l(l+1)R = 0 \to R(r) = c_l r^l + d_l r^{-(l+1)} \\ \Phi'' + m^2\Phi = 0 \to \Phi_m(\varphi) = A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi \\ (1-x^2)y'' - 2xy' + \left[l(l+1) - \dfrac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0 \to y(x) = p_l^{(m)}(x) \end{cases}$$

$$\downarrow m = 0$$

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0 \to y(x) = p_l(x)$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(A_l^m \cos m\varphi + B_l^m \sin m\varphi\right)(c_l r^l + d_l r^{-(l+1)}) p_l^m(\cos\theta) \\ &\overset{m=0}{=} \sum_{l=0}^{\infty}(c_l r^l + d_l r^{-(l+1)}) p_l(\cos\theta) \overset{m=0,r<a}{=} \sum_{l=0}^{\infty} c_l r^l p_l(\cos\theta) \end{aligned}}$$

❖本章主要内容

2. $p_l(x)$:

母函数关系式

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}p_l(x)t^l,|t|<1 \quad (1)$$

递推公式

$$\begin{cases}1.\ (l+1)p_{l+1}(x)-(2l+1)x\,p_l(x)+l\,p_{l-1}(x)=0 & (2)\\ 2.\ (2l+1)p_l(x)=p'_{l+1}(x)-p'_{l-1}(x) & (3)\end{cases}$$

正交性

$$\int_{-1}^{1}p_l(x)p_k(x)dx=\frac{2}{2l+1}\delta_{kl},k,l=0,1,2,\ldots,(6)$$

广义傅氏展开

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}C_l p_l(x),C_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)p_l(x)dx$$

$$p_l(x)=\sum_{n=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}\frac{(-1)^n(2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!}x^{l-2n}$$

$$p_0(x)=1,\quad p_1(x)=x,\quad p_l(1)\equiv 1$$

$$p_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\quad p_l(-1)\equiv(-1)^l$$

3. $p_l^m(x)$:

$$p_l^m(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}p_l^{(m)}(x)$$

$$\int_{-1}^{1}p_l^m(x)p_k^m(x)dx=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{kl}$$

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}C_l^m p_l^m(x),\quad C_l^m=\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)p_l^m(x)dx$$

❖例题分析

一、有关特殊函数性质

1、证明：$(x^2-1)p_l'(x)=l\,xp_l(x)-lp_{l-1}(x)$

证明：
$$\frac{d}{dx}\left[\left(x^2-1\right)p_l'(x)\right]=l(l+1)p_l(x)\qquad(1)$$

$\int_1^x(1)dx:$
$$\left[\left(x^2-1\right)p_l'(x)\right]=l(l+1)\int_1^x p_l(x)dx$$
$$=\frac{l(l+1)}{(2l+1)}\int_1^x[p_{l+1}'(x)-p_{l-1}'(x)]dx$$
$$=\frac{l(l+1)}{(2l+1)}[p_{l+1}(x)-p_{l+1}(1)-p_{l-1}(x)+p_{l-1}(1)]$$
$$=\frac{l}{(2l+1)}[(l+1)p_{l+1}(x)-(l+1)p_{l-1}(x)]$$
$$=\frac{l}{(2l+1)}[(2l+1)xp_l(x)-lp_{l-1}(x)-(l+1)p_{l-1}(x)]$$

❖例题分析

一、有关特殊函数性质

1、证明：$(x^2-1)p_l'(x)=l\,xp_l(x)-lp_{l-1}(x)$

知识点：

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)p_l'(x)\right]+l(l+1)p_l(x)=0}$$

$$\boxed{(2l+1)p_l(x)=p_{l+1}'(x)-p_{l-1}'(x)}\quad\boxed{p_l(1)\equiv 1}$$

$$\boxed{(l+1)p_{l+1}(x)-(2l+1)x\,p_l(x)+l\,p_{l-1}(x)=0}$$

❖例题分析

一、有关特殊函数性质

$p_0(x)=1$

$p_l(1)\equiv 1$ $p_l(-1)\equiv(-1)^l$

$2、\int_{-1}^{1} p_l(x)dx = ?$

$$\int_{-1}^{1} p_l(x)dx = \frac{1}{2l+1}\int_{-1}^{1}[P'_{l+1}(x)-P'_{l-1}(x)]dx$$

$$=\frac{1}{2l+1}[p_{l+1}(1)-p_{l+1}(-1)-p_{l-1}(1)+p_{l-1}(-1)]=0,\quad l\neq 0$$

法二：$\int_{-1}^{1} p_l(x)dx = \int_{-1}^{1} p_0(x)p_l(x)dx = \begin{cases} 0, & l\neq 0 \\ 2, & l=0 \end{cases}$

知识点：$(2l+1)p_l(x)=p'_{l+1}(x)-p'_{l-1}(x)$ $p_0(x)=1$

$$\int_{-1}^{1} p_l(x)p_k(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{kl}, k,l=0,1,2,\ldots$$

一、有关特殊函数性质

$$P_l(x)=\sum_{n=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}\frac{(-1)^n(2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!}x^{l-2n}$$

思考： $\int_0^1 p_l(x)dx=?$

$$p_{2m}(0)=\frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}$$

1) $l=2m$: $\boxed{\int_0^1 p_{2m}(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq 0\\ 1, & m=0\end{cases}}$

$$p_{2m+2}(0)=\frac{(-1)^{m+1}[2(m+1)]!}{2^{2m+2}[(m+1)!]^2}$$

2) $l=2m+1$: $\int_0^1 p_{2m+1}(x)dx=\frac{1}{2(2m+1)+1}\int_0^1[p'_{2m+2}(x)-p'_{2m}(x)]dx$

$$=\frac{1}{4m+3}[p_{2m}(0)-p_{2m+2}(0)]$$

$$\int_0^1 p_{2m+1}(x)dx=\frac{1}{2m+1}\frac{(-1)^m(2m+2)!}{2^{2m+2}[(m+1)!]^2}$$

$$\int_0^1 p_{2m-1}(x)dx=\frac{1}{2m-1}\frac{(-1)^{m-1}(2m)!}{2^{2m}[(m)!]^2}$$

一、有关特殊函

$$\int_0^1 p_{2m+1}(x)dx=\frac{1}{2m+1}\frac{(-1)^m(2m+2)!}{2^{2m+2}[(m+1)!]^2}$$

3、将$f(x)=|x|$按$p_l(x)$展开。

$$|x|=\sum_{l=0}^{\infty}C_l p_l(x) \qquad C_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}|x|p_l(x)dx$$

1) $l=2n+1$: $c_{2n+1}=0$

2) $l=2n$: $c_{2n}=\frac{2\cdot 2n+1}{2}\cdot 2\int_0^1 xp_{2n}(x)dx$

$$=(4n+1)\int_0^1 x\frac{p'_{2n+1}(x)-p'_{2n-1}(x)}{4n+1}dx$$

$$=\int_0^1 p_{2n-1}(x)dx-\int_0^1 p_{2n+1}(x)dx$$

$$=\frac{1}{2n-1}\frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{2^{2n}[(n)!]^2}-\frac{1}{2n+1}\frac{(-1)^n(2n+2)!}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2}$$

一、有

答:
$$f(x)=\sqrt{1-2xt+t^2}=\sum_{l=0}^{\infty}[\frac{t^{l+2}}{2l+3}-\frac{t^l}{2l-1}]p_l(x)$$

3、将$f(x)=\sqrt{1-2xt+t^2}$按$p_l(x)$展开。

$$f(x)=\frac{1-2xt+t^2}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=[1-2xt+t^2]\sum_{l=0}^{\infty}p_l(x)t^l$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}[t^l+t^{2+l}]p_l(x)-2\sum_{l=0}^{\infty}t^{l+1}xp_l(x)$$

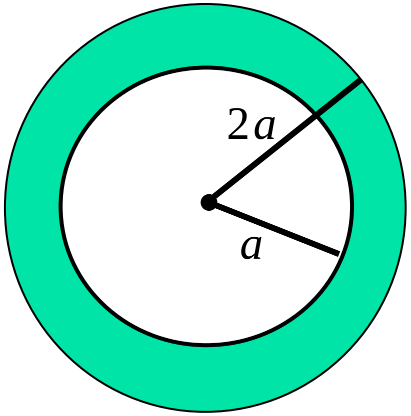
$$=\sum_{l=0}^{\infty}[t^l+t^{2+l}]p_l(x)-2\sum_{l=0}^{\infty}t^{l+1}[\frac{l+1}{2l+1}p_{l+1}(x)+\frac{l}{2l+1}p_{l-1}(x)]$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}t^{l+1}[\frac{l+1}{2l+1}p_{l+1}(x)\overset{l+1=k}{=}\sum_{k=1}^{\infty}t^k[\frac{k}{2k-1}p_k(x)]=\sum_{k=0}^{\infty}t^k[\frac{k}{2k-1}p_k(x)]$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}t^{l+1}[\frac{l}{2l+1}p_{l-1}(x)]\overset{k=l-1}{=}\sum_{k=-1}^{\infty}t^{k+2}[\frac{k+1}{2k+3}p_k(x)]=\sum_{k=0}^{\infty}t^{k+2}[\frac{k+1}{2k+3}p_k(x)]$$

二、在球坐标中$\Delta u=0$的解

1、设有一内半径为a外半径为$2a$的均匀球壳，其内外表面的温度分布分别保持为零和u_0，试求球壳的稳定温度分布。



解：法一：

$$\begin{cases}\Delta u=0, & a<r<2a \\ u\big|_{r=a}=0, u\big|_{r=2a}=u_0\end{cases}$$

$$u=\sum_{l=0}^{\infty}(c_l r^l+d_l r^{-(l+1)})p_l(\cos\theta)$$

$$\begin{cases}\sum_{l=0}^{\infty}[c_l a^l+d_l a^{-(l+1)}]p_l(\cos\theta)=0 \\ \sum_{l=0}^{\infty}[c_l (2a)^l+d_l (2a)^{-(l+1)}]p_l(\cos\theta)=u_0\end{cases}$$

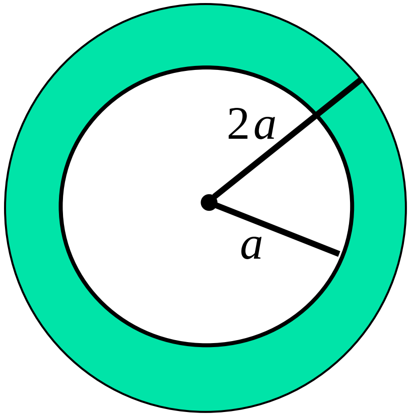
二、在球坐标中$\Delta u = ($

$$u=\sum_{l=0}^{\infty}(c_l r^l + d_l r^{-(l+1)})p_l(\cos\theta)$$

解：

法一：

$$\begin{cases} c_0 + d_0\dfrac{1}{a} = 0 \\ c_0 + d_0\dfrac{1}{2a} = u_0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} c_l a^l + d_l a^{-(l+1)} = 0 \\ c_l (2a)^l + d_l (2a)^{-(l+1)} = 0 \end{cases} \qquad l \neq 0$$

$$c_0 = 2u_0, \quad d_0 = -2au_0; \qquad c_l = d_l = 0, \quad l \neq 0$$

$$u = 2u_0(1-\frac{a}{r})p_0(\cos\theta) = 2u_0(1-\frac{a}{r})$$

二、在球坐标中$\Delta u=0$

$$u=\sum_{l=0}^{\infty}(c_l r^l+d_l r^{-(l+1)})p_l(\cos\theta)$$

解： **法二：**

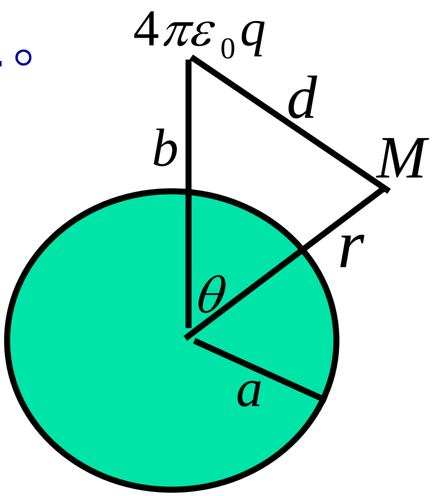
$$u(r,\theta,\varphi)=u(r), \qquad \rightarrow \Delta u(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{du}{dr})$$

$$\begin{cases}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{du}{dr})=0 \\ u\big|_{r=a}=0, u\big|_{r=2a}=u_0\end{cases} \qquad \begin{aligned}&\rightarrow u(r)=c_1+c_2\frac{1}{r}\\ &\rightarrow c_1=2u_0, c_2=-2au_0;\end{aligned}$$

$$\boxed{u=2u_0(1-\frac{a}{r})p_0(\cos\theta)=2u_0(1-\frac{a}{r})}$$

二、在球坐标中$\Delta u=0$的解

2、设有一半径为a的介质球，介电常数为ε，在与球心的距离为$b(b>a)$的地方放有一点电荷$4\pi\varepsilon_0 q$，求介质球内、外的电位。



解： 设球内外电位分别为v_i和v_e且

$$v_e = v_1 + \frac{q}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}}$$

$$\begin{cases} \Delta v_i = 0, r<a \\ v_i\big|_{r=0} \to \text{有限} \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} \Delta v_1 = 0, r>a \\ v_1\big|_{r\to\infty} \to \text{有限} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} v_i\big|_{r=a} = v_e\big|_{r=a} \\ \varepsilon \dfrac{\partial v_i}{\partial r}\bigg|_{r=a} = \dfrac{\partial v_e}{\partial r}\bigg|_{r=a} \end{cases} \quad (3)$$

（设真空中介电常数为 1。）

二、在球坐标中$\Delta u = 0$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l, |t|<1 \quad (1)$$

令 $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$, 则

$$(1) \to v_i = \sum_{l=0}^{\infty} c_l r^l p_l(\cos\theta) \quad (4)$$

$$(2) \to v_1 = \sum_{l=0}^{\infty} d_l r^{-(l+1)} p_l(\cos\theta),$$

于是 $$v_e = \sum_{l=0}^{\infty} d_l r^{-(l+1)} p_l(\cos\theta) + \frac{q}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}} \quad (5)$$

$\therefore$当$r<b$时: $$\frac{1}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}} = \frac{1}{b}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{r}{b})^2-2\frac{r}{b}\cos\theta}}$$

$$= \frac{1}{b}\sum_{l=0}^{\infty} p_l(\cos\theta)(\frac{r}{b})^l$$

$$v_i=\sum_{l=0}^{\infty}c_l r^l p_l(\cos\theta) \quad (4)$$

二、在球坐标中$\Delta u=0$的解

当$r<b$:

$$\therefore\ v_e=\sum_{l=0}^{\infty}d_l r^{-(l+1)}p_l(\cos\theta)+\frac{q}{b}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{b}\right)^l p_l(\cos\theta)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}c_l a^l p_l(\cos\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}d_l a^{-(l+1)}p_l(\cos\theta)+\frac{q}{b}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^l p_l(\cos\theta) \quad (7)$$

$$\varepsilon\sum_{l=0}^{\infty}c_l l a^{l-1}p_l(\cos\theta)=-\sum_{l=0}^{\infty}d_l(l+1)a^{-(l+2)}p_l(\cos\theta)+\frac{q}{b}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l}{b}\left(\frac{a}{b}\right)^{l-1}p_l(\cos\theta) \quad (8)$$

$$\rightarrow\begin{cases}\underline{c_l}a^l=\underline{d_l}a^{-(l+1)}+\dfrac{q}{b}\left(\dfrac{a}{b}\right)^l\\[2ex]\varepsilon\underline{c_l}la^{l-1}=-[\underline{d_l}(l+1)a^{-(l+2)}+\dfrac{ql}{b^2}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{l-1}\end{cases}$$

$$c_l=\frac{q(2l+1)}{[(\varepsilon+1)l+1]b^{l+1}},\qquad d_l=-q(\varepsilon-1)\frac{la^{2l+1}}{[(\varepsilon+1)l+1]b^{l+1}}$$

二、在球坐标中$\Delta u=0$的解

$$\begin{cases}\Delta v_i=0,\ r<a \\ v_i\big|_{r=0}\to \text{有限}\end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases}\Delta v_1=0,\ r>a \\ v_1\big|_{r\to\infty}\to \text{有限}\end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} v_i\big|_{r=a}=v_e\big|_{r=a} \\ \varepsilon\dfrac{\partial v_i}{\partial r}\bigg|_{r=a}=\dfrac{\partial v_e}{\partial r}\bigg|_{r=a}\end{cases} \quad (3)$$

$$\boxed{v_i=\frac{q}{b}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(2l+1)}{(\varepsilon+1)l+1}\left(\frac{r}{b}\right)^l p_l(\cos\theta)}$$

$$\boxed{v_e=\frac{q}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}}-\frac{q(\varepsilon-1)}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l}{(\varepsilon+1)l+1}\left(\frac{a^2}{br}\right)^{l+1} p_l(\cos\theta)}$$

二、在球坐标中$\Delta u=0$的解

2、有一均匀球体，球心在原点，在球面上的温度为$u\big|_{r=a}=(1+3\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi$
试在稳定状态下求球内的温度分布。

解：
$$\begin{cases}\Delta u=0, r<a\\ u\big|_{r=a}=(1+3\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi\end{cases}$$

法一：$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}r^l(A_l^m\cos m\varphi+B_l^m\sin m\varphi)p_l^m(\cos\theta)$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}(A_l^m a^l\cos m\varphi+B_l^m a^l\sin m\varphi)p_l^m(\cos\theta)=\sin\theta\cos\varphi+\frac{3}{2}\sin 2\theta\cos\varphi$$

$$\boxed{\because\ p_1^1(\cos\theta)=\sin\theta,\ p_2^1(\cos\theta)=\frac{3}{2}\sin 2\theta}$$

$$=\cos\varphi\, p_1^1(\cos\theta)+\cos\varphi\, p_2^1(\cos\theta)$$

$$\therefore A_1^1 a=1,\ A_2^1 a^2=1,\ A_l^m\equiv 0\big(m\neq 1, l\neq 1,2\big),\ B_l^m\equiv 0$$

$$\boxed{u(r,\theta,\varphi)=\frac{r}{a}\cos\varphi\, p_1^1(\cos\theta)+\frac{r^2}{a^2}\cos\varphi\, p_2^1(\cos\theta)}$$

答:
$$u(r,\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\frac{r}{a}[-Y_{1,1}(\theta,\varphi)+Y_{1,-1}(\theta,\varphi)]+\sqrt{\frac{6\pi}{5}}\frac{r^2}{a^2}[-Y_{2,1}(\theta,\varphi)+Y_{2,-1}(\theta,\varphi)]$$

法二: $$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}c_{l,m}r^l Y_{l,m}(\cos\theta)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}c_{l,m}a^l Y_{l,m}(\cos\theta)=(1+3\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi$$

$$=(1+3\cos\theta)\sin\theta\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}=\frac{1}{2}\sin\theta e^{\pm i\varphi}+\frac{3}{2}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\varphi}+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi}$$

$$=\sqrt{\frac{2\pi}{3}}[-Y_{1,1}(\theta,\varphi)+Y_{1,-1}(\theta,\varphi)]+\sqrt{\frac{6\pi}{5}}[-Y_{2,1}(\theta,\varphi)+Y_{2,-1}(\theta,\varphi)]$$

$$-c_{1,1}a=c_{1,-1}a=\sqrt{\frac{2\pi}{3}} \qquad -c_{2,1}a^2=c_{2,-1}a^2=\sqrt{\frac{6\pi}{5}}$$

$$c_{1,\pm 1}=\mp\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2\pi}{3}} \qquad c_{2,\pm 1}=\mp\frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{6\pi}{5}}$$

Good-by!