



# 数学物理方法

Mathematical Methods in Physics

武汉大学

物理科学与技术学院



# 第一篇 复变函数论

Theory of Complex Variable Functions

## 第一章 解析函数论

Theory of Analytic Functions

武汉大学

物理科学与技术学院



## § 1.2 复变函数

### 一、复变函数的概念

#### 1、定义：

设 $E$ 为一点集，若按一定的规律，使

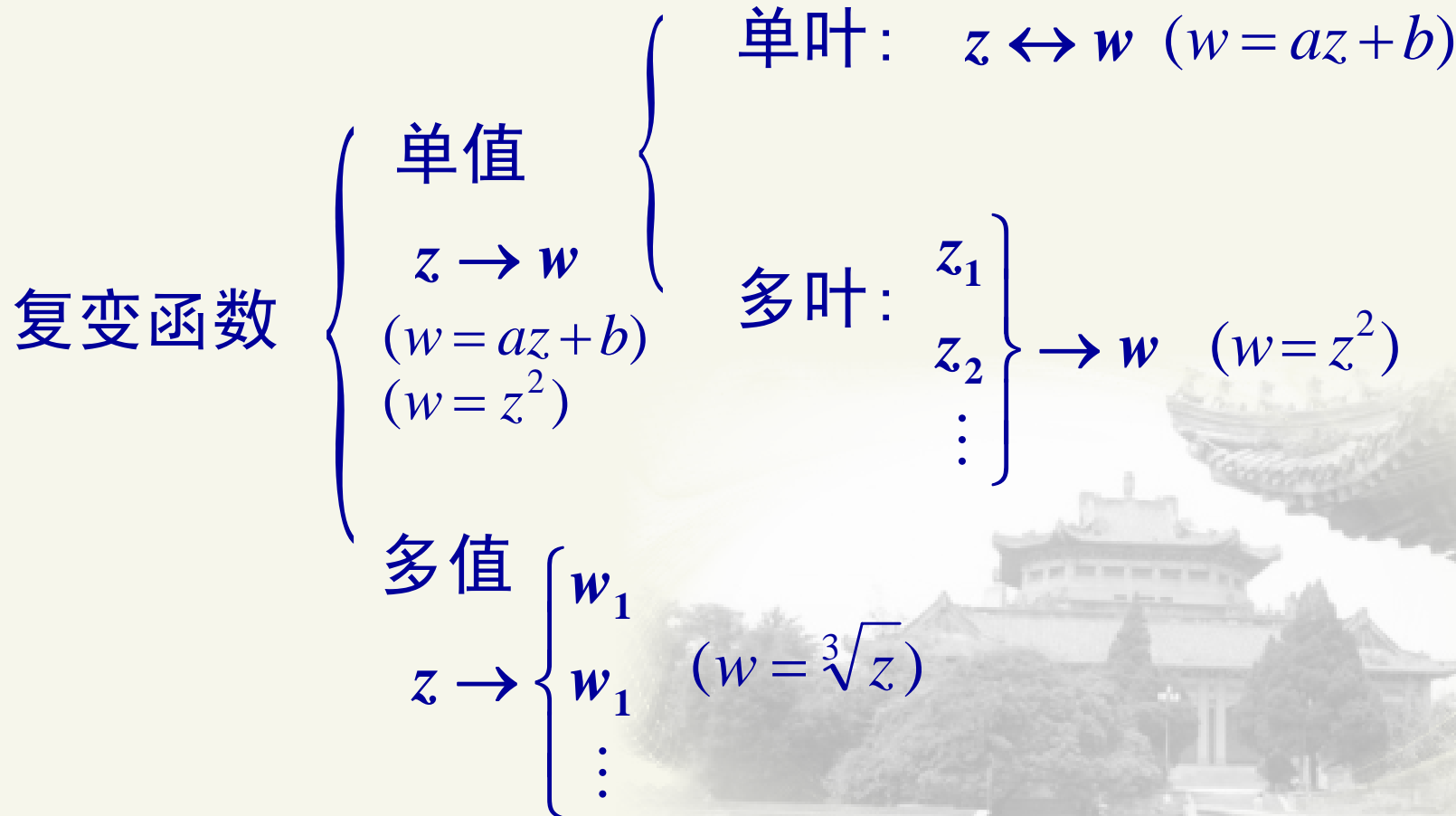
$$z \in E \xrightarrow{f(z)} w = u(x, y) + iv(x, y),$$

其中, $u$ 、 $v$ 为实函数,则称:  $w = f(z)$

为复变函数,  $E$ 为定义域,  $W$ 为值域



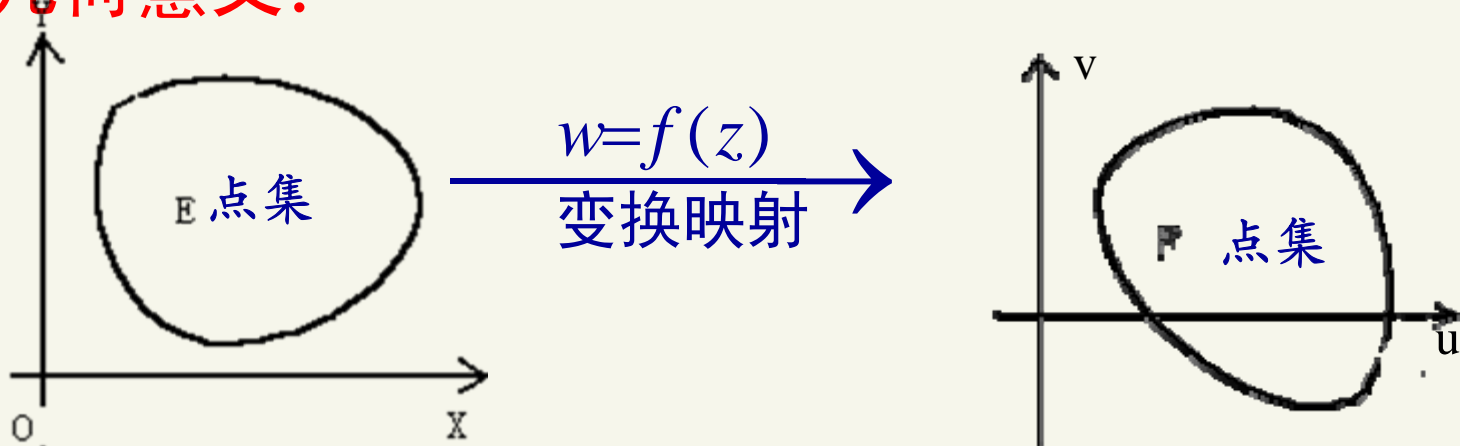
# 一、复变函数的概念





# 一、复变函数的概念

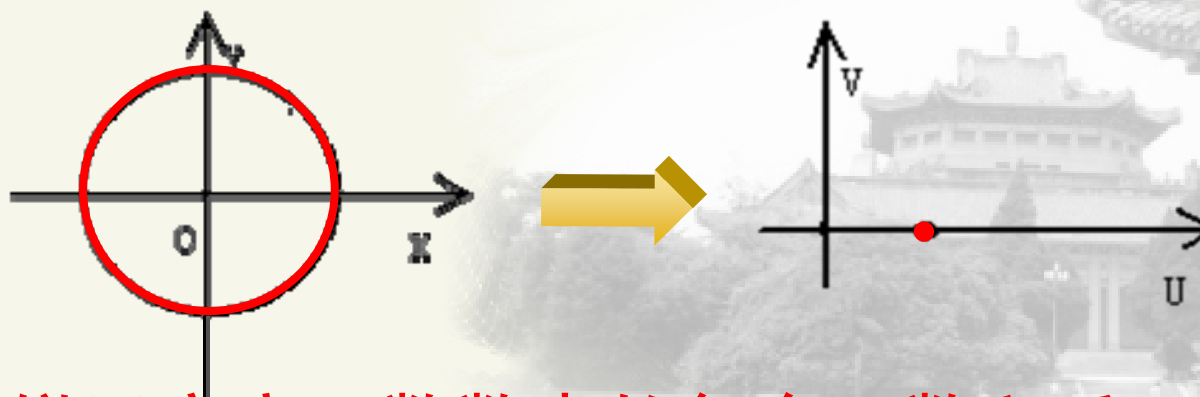
## 2、几何意义:



$$\langle z \rangle: |z|=1 \xrightarrow{w=|z|^2}$$

$$\langle w \rangle: ?$$

答:



## 3、有类似于实变函数数中的复合函数和反函数



## 二、有关区域:

1、邻域:  $\forall z \in |z - z_0| < \varepsilon$  的点集称为  $z_0$  的  $\varepsilon$  邻域。

问:  $0 < |z - z_0| < \varepsilon$  表示什么?

答: 表示无心邻域

2、内点:

若  $z_0$  总有一个邻域  $N(z_0, \varepsilon)$  全含于点集  $\sigma$  内, 则称  $z_0$  为  $\sigma$  的内点。

问:  $1^\circ$  求  $|z + 1| = \frac{1}{2}$  的内点。

$2^\circ$  求  $|z + 1| \leq 1$  的内点。





## 二、有关区域:

3、区域: 若点集 $\sigma$

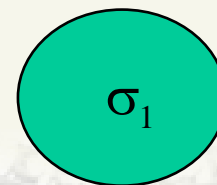
- 1<sup>0</sup>.全由内点组成;
- 2<sup>0</sup>.设 $z_1 \in \sigma$ ,  $z_2 \in \sigma$ , 且 $z_1$ 和 $z_2$ 可用全 $\in \sigma$ 的线连接;

问题: 判断下列表示和绿色部分是否为区域

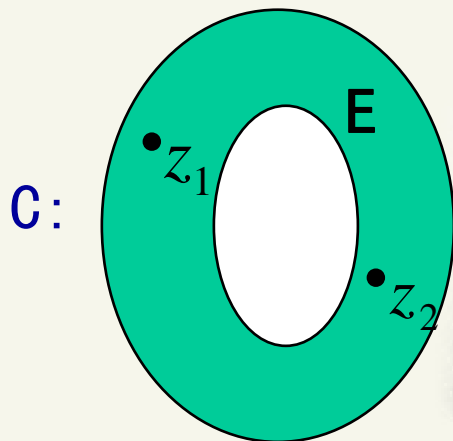
$a: |z| \leq 1$

NO !

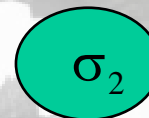
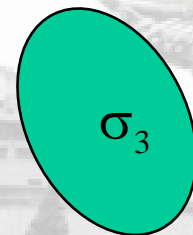
$b:$



NO !



Yes !

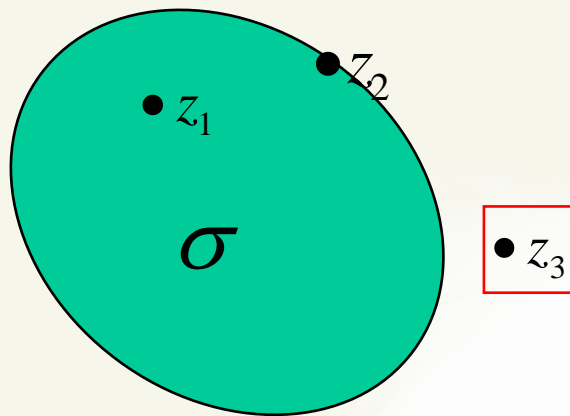




## 二、有关区域:

4、外点:  $\begin{cases} \text{不属于区域 } \sigma \\ \text{总有一个 } N(z_0, \varepsilon) \text{ 有 } \notin \sigma \text{ 的点} \end{cases}$   
 $\rightarrow$  称  $z_0$  是  $\sigma$  的外点

例1:



例2:  $|z| < 1$  的外点?





## 二、有关区域:

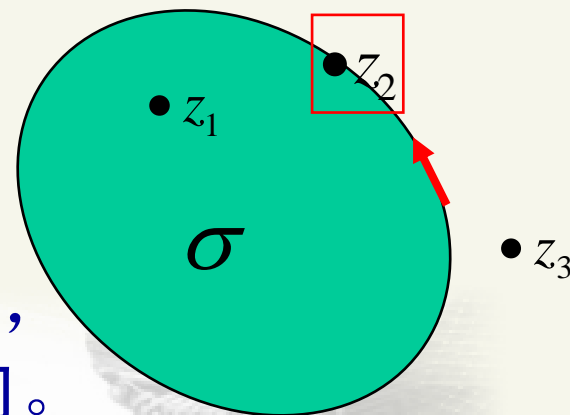
### 5、界点

若  $z_0$  不属于区域  $\sigma$ , 且没有一个邻域不含有  $\sigma$  的点, 则称  $z_0$  为  $\sigma$  的界点.

**边界:** 全体界点构成区域边界

**边界正向:** 沿着边界走, 区域总在左方, 则此走向称为边界的正方向.

**闭区域:**  $\bar{\sigma} = \sigma + l$ , 其中  $l$  为边界.

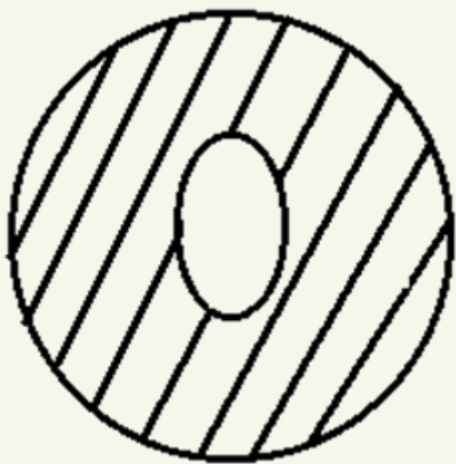




## 二、有关区域：

### 6、单连通区域：

若在区域内作任何简单的闭曲线，区域内的点都是属于此区域的，则称该区域为单连通区域。

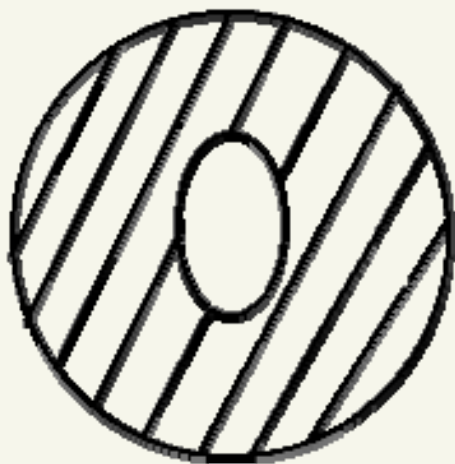
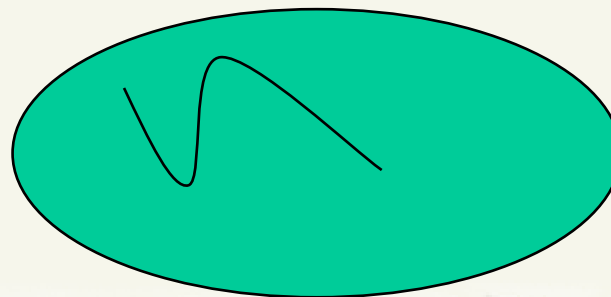
 $\sigma_1$  $\sigma_2$  $\sigma_3$



## 二、有关区域:

### 7、复连通区域

一个区域，如果不是单连通区域，就是复连通区域。

 $\sigma_1$  $\sigma_2$ 

问:

$1 < |z - 1 - i| < 3$  表示什么图形?



### 三、极限、连续性:

#### 1、定义:

$w = f(z): \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \ni$  当  $0 < |z - z_0| < \delta$  时有  
 $|f(z) - w_0| < \varepsilon$  则  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$  为极限

若  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ , 则  $f(z)$  在  $z_0$  点连续

#### 注意:

- (1) 实函数与复变函数定义的差异
- (2) 性质 具有与实函数相应的性质



# 内容小结

## § 1.1 复数及其运算

### 一、复数概念：

1. 定义 ; 2. 性质

### 二、复数的表示：

1、几何表示：

a. 点; b. 向量; c. 极坐标; d. 复球表示。

2、代数表示：

a.代数式; b.三角式; c.指数式



# 内容小结

## § 1.2 复变函数

### 一、复变函数的概念

1、定义：

2、几何意义：

3、有类似于实数中的复合函数和反函数

### 二、有关区域：

1、邻域； 2、内点； 3、区域； 4、外点；

5、界点； 6、单连通区域； 7、复通区域；

### 三、极限、连续性：



## 本节作业



习题1.2:

1(1); 2(1);

习题1.5:

3(3)





# Good-bye!

