NOTES：
以下为两部分作业，请大家根据自身情况合理安排时间，在有限的时间内能够有效完成。完成多少都可以交上来，后续的再逐渐交亦可，不必要一定全部完成后再交。

2015 年 12 月 27 日　理论力学作业*

1. 推导哈密顿正则方程中涉及的勒让德变换不要求完全掌握，但需要记住哈密顿正则方程。
2. 写出基本形式的拉格朗日方程，和保守系的拉格朗日方程，以及哈密顿正则方程。
3. 有关哈密顿正则方程：教材（绿皮书）P307~312 例 6-6，例 6-7，例 6-8。请将这三个例题作为作业题，在作业纸上完成。需要明白整个过程。
4. 请复习一下转动参考系中速度，加速度，以及空间转动参考系的动力学方程（主要是各个惯性力）。
5. （绿皮书）P397，题目 5-2，5-3。（运动参考系）
6. （绿皮书）P185，例 4-6。将这个题目仔细完成。（刚体的平面平行运动，该题目为周衍柏 书 习题 3.24）
7. 下面这个图片是来自周衍柏书上的第四章（转动参考系），用红笔圈住的题目为本次作业题，即 4.5，4.6，4.10。要求必须运用转动参考系知识完成，尤其 4.10。

答：$a=\omega v'\sin\alpha\sqrt{\omega^2t^2+4}$

4.4 小环重 W,穿在曲线形 $y=f(x)$ 的光滑钢丝上,此曲线通过坐标原点,并绕竖直轴 Oy 以匀角速 ω 转动. 如欲使小环在曲线上任何位置均处于相对平衡状态,求此曲线的形状及曲线对小环的约束反作用力.

答：抛物线 $y=\dfrac{\omega^2}{2g}x^2$；$R=W\sqrt{1+\dfrac{2\omega^2}{g}y}$

4.5 在一光滑水平直管中有一质量为 m 的小球. 此管以匀角速 ω 绕通过其一端的竖直轴转动. 如开始时,球距转动轴的距离为 a,球相对于管的速率为零,而管的总长则为 $2a$. 求球刚要离开管口时的相对速度与绝对速度,并求小球从开始运动到离开管口所需的时间.

答：$v'=\sqrt{3}\,a\omega$，$v=\sqrt{7}\,a\omega$，$t=\dfrac{1}{\omega}\ln(2+\sqrt{3})$

4.6 一光滑细管可在竖直平面内绕通过其一端的水平轴以匀角速 ω 转动,管中有一质量为 m 的质点. 开始时,细管取水平方向,质点距转动轴的距离为 a,质点相对于管的速度为 v_0,试求质点相对于管的运动规律.

答：$x=\left[\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{v_0}{\omega}\right)-\dfrac{g}{4\omega^2}\right]e^{\omega t}+\left[\dfrac{1}{2}\left(a-\dfrac{v_0}{\omega}\right)+\dfrac{g}{4\omega^2}\right]e^{-\omega t}+\dfrac{g}{2\omega^2}\sin\omega t$ ✓

4.7 质量分别为 m 及 m' 的两个质点,用一固有长度为 a 的弹性绳相联,绳的劲度系数为 $k=\dfrac{2mm'\omega^2}{m+m'}$. 如将此系统放在光滑的水平管中,管子绕管上某点以匀角速 ω 转动,试求任一瞬时两质点间的距离 s. 设开始时,质点相对于管子是静止的.

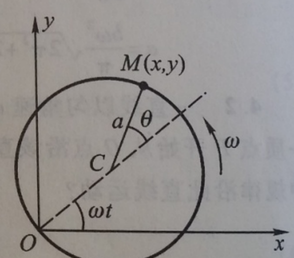
答：$s=a(2-\cos\omega t)$

4.8 轴为竖直而顶点向下的抛物线形金属丝,以匀角速 ω 绕竖直轴转动. 另有一质量为 m 的小环套在此金属丝上,并沿着金属丝滑动. 试求小环运动微分方程. 已知抛物线的方程为 $x^2=4ay$,式中 a 为常数. 计算时可忽略摩擦阻力.

答：$m\left(1+\dfrac{x^2}{4a^2}\right)\ddot{x}+m\dot{x}^2\dfrac{x}{4a^2}-m\omega^2x+mg\dfrac{x}{2a}=0$

4.9 在上题中,试用两种方法求小环相对平衡的条件.

答：$\omega^2=\dfrac{g}{2a}$



第 4.10 题图

4.10 质量为 m 的小环 M,套在半径为 a 的光滑圆圈上,并可沿着圆圈滑动. 如圆圈在水平面内以匀角速 ω 绕圈上某点 O 转动,试求小环沿圆圈切线方向的运动微分方程.

答：$\ddot{\theta}+\omega^2\sin\theta=0$

式中 θ 为 M 与圆心 C 的连线和通过 O 点的直径间所夹的角.

4.11 如自北纬为 λ 的地方,以仰角 α 自地面向东方发射一炮弹,炮弹的腔口速度为 V. 计及地球自转,试证此炮弹落地时的横向偏离为

$$d=\frac{4V^3}{g^2}\omega\sin\lambda\sin^2\alpha\cos\alpha$$

2015 年 12 月 27 日　理论力学作业**

一、选择题。找出所给四个答案中正确的一个，将字母填在括号中。

1. 以下绕太阳运行的某颗行星的四种可能运行轨道，即圆，椭圆，抛物线，双曲线，能量从小到大的排列为：(　　)(假设四种轨道的角动量 $\vec{J}$ 或速度矩 $\vec{h}$ 相同)

A 圆－椭圆－抛物线－双曲线　　B 圆－抛物线－椭圆－双曲线

C 椭圆－圆－抛物线－双曲线　　D 双曲线－抛物线－椭圆－圆

2. 如图 1，半径为 R 的圆盘在铅垂面内沿地面作纯滚动，圆心 O 的速度为 v_0。小球在圆盘上半径为 r 的圆槽内作匀速圆周运动，相对速度为 v_r。则小球在图示位置（OM 水平）M 点的绝对速度为：(　　　)

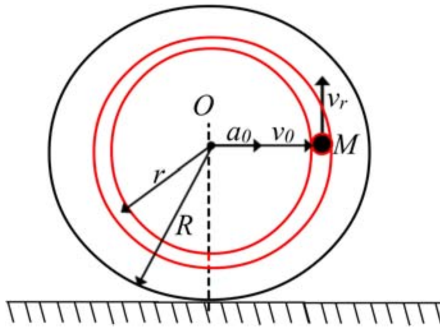
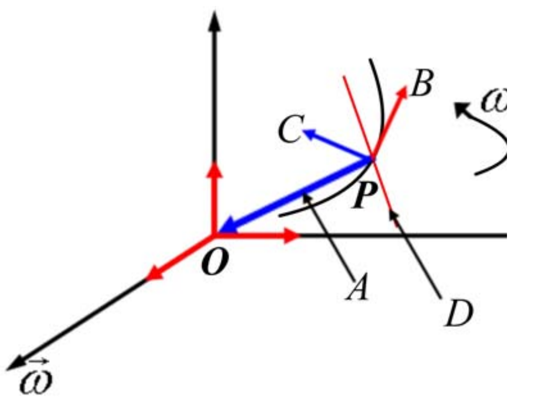


图 1

A $\sqrt{\left(v_r-\frac{r}{R}v_0\right)^2+v_0^2}$　　B $\sqrt{\left(v_r-v_0\right)^2+v_0^2}$

C $\sqrt{\left(v_r-\frac{R}{r}v_0\right)^2+v_0^2}$　　D $\sqrt{\left(v_r-\frac{r^2}{R^2}v_0\right)^2+v_0^2}$

3. 如图 2 所示，一个在平面转动参考系中运动的质点，参考系转动的角速度为 $\vec{\omega}$，那么在 P 点质点的科里奥利加速度的可能指向为（　　）(从图示的四个方向 A，B，C，D 中选择)



4. 重为 P、长为 l 的均质杆 AB 放置如图 3。设各处光滑，在 A 点处的水平力 F 作用下保持平衡，$\varphi=60^{\circ}$，今给 A 点一向右的虚位移 δx，则由虚位移原理所建立的虚功方程为：(　　)

A $\frac{\sqrt{3}}{6}P\delta x-F\delta x=0$　　B $\frac{\sqrt{3}}{2}P\delta x-F\delta x=0$

C $\sqrt{3}P\delta x-F\delta x=0$　　D $\frac{\sqrt{3}}{3}P\delta x-F\delta x=0$

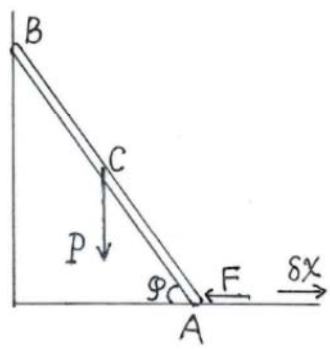


图 3

5. 如图 4 所示，均质杆 AB 在光滑水平面内绕其质心 C 转动的角速度为 ω_0，如果突然将其一端 B 固定，则杆绕 B 转动的角速度为：(　　)

A $\frac{\omega_0}{2}$　　B $\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$　　C $\frac{\omega_0}{3}$　　D $\frac{\omega_0}{4}$

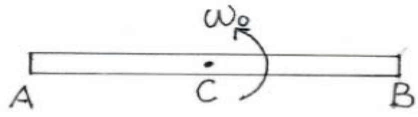
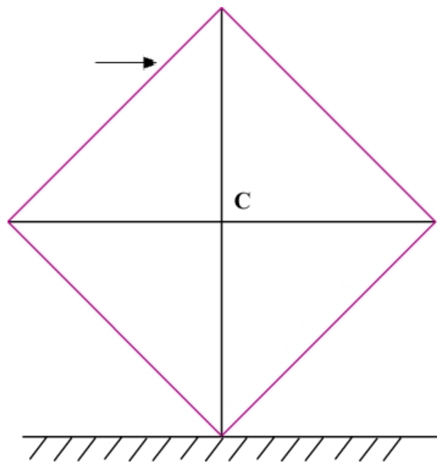


图 4

6. 边长为 L 的均质正方形平板，位于铅垂平面内并置光滑水平面上静止，若给平板一微小扰动，使其从图所示位置开始倾倒，平板在倾倒过程中，其质心 C 的运动轨迹是（　　）

A 抛物线的一部分　　B 圆的一部分

C 椭圆的一部分　　D 直线



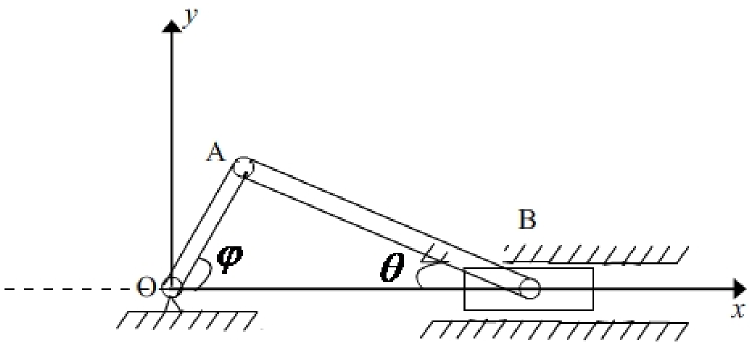
图

7. 在虚功原理中，力学体系受有理想约束是作为（　　）的。

A 充分必要条件　B 充分条件　C 必要条件　D 以上都不是

8. 图所示曲柄连杆机构的自由度为（　　）

A　1　　B　2　　C　3　　D　4



二、简答。

1. 地球绕太阳运动的轨道是一个椭圆，太阳在椭圆的一个焦点（如图 5）。“日行盈缩”的意思是：在冬至前后比夏至前后发现太阳走得快慢不同，即夏至慢冬至快。运用相关的理论解释这个现象。

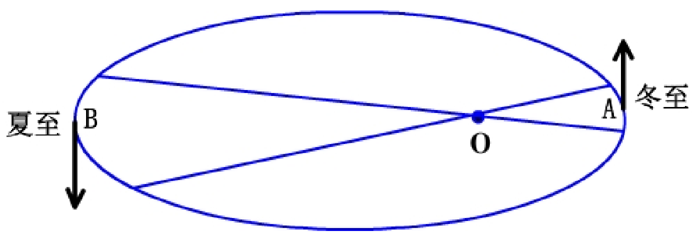


图 5

2. 如图 6 所示的系统不计摩擦，A 可在水平面上直线移动，B 在 A 上只滚不滑。请问该系统的自由度是多少，并选择描述运动的广义坐标。

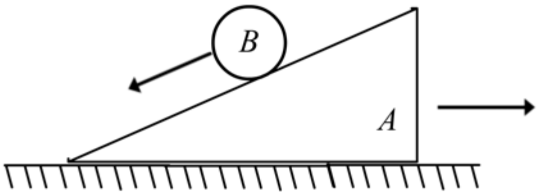


图 6

3. 简述质点组的柯尼希定理。
4. 如何理解“在质心坐标系中，质点组的惯性力的矢量和恰好通过质心，而且与质点组外力的矢量和抵消”这句话，并说明在质心系中，质点组的动量恒为零。

三、计算。

一个力学体系由 N 个质点组成，求这个体系的下列动量矩分量、动量分量之间的泊松括号：$\left[J_x, p_x\right]$，$\left[J_x, p_y\right]$，$\left[J_x, p_z\right]$,$\left[J_x, J_y\right]$。

四、计算。

正方形板边长 l=2cm，在图示平面内运动。已知在图示瞬时，A 点的加速度 $a_A = 2cm/s^2$，B 点的加速度为 $a_B = 4\sqrt{2}cm/s^2$，二者方向如图 7。试求该瞬时：

(1) 板的角速度大小和角加速度；
(2) C 点的加速度。(提示：可以运用基点法)

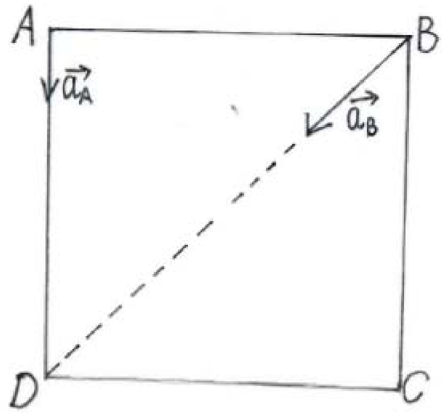


图 7

五、计算。

在图 8 所示系统中，半径 R、质量为 m 的均质轮 A 可在质量为 m 的板 B 上做纯滚动。板 B 置于光滑水平面上。细绳跨过质量不计的滑轮 D，其一端吊一质量为 m 的重物 G，另一端系于板 B 上。试求当重物下降 x 时，板 B 的加速度与轮 A 的角加速度。

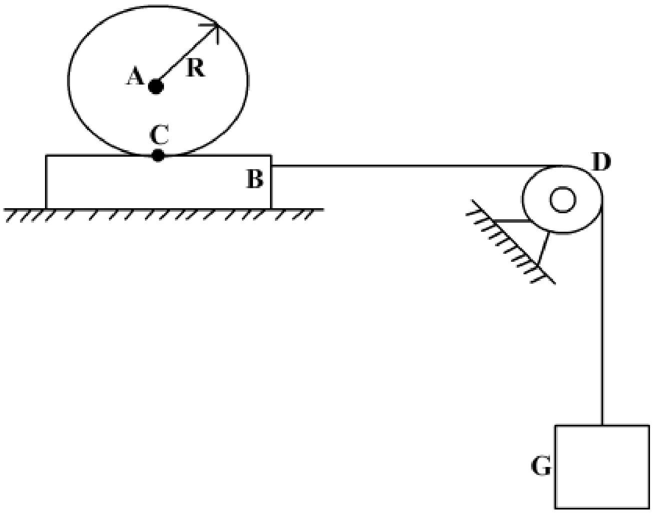


图 8

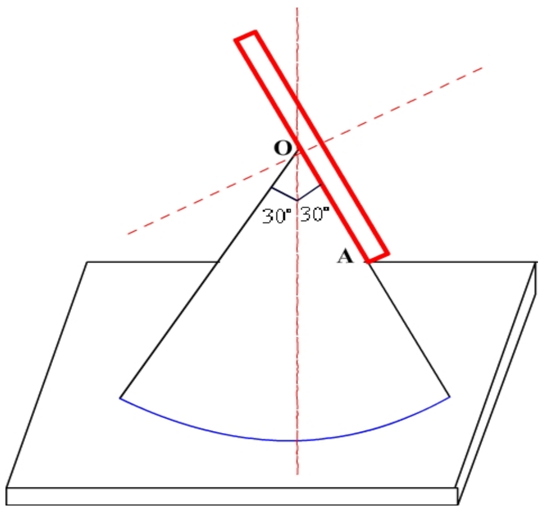
六、计算。

检验下面的力是否是保守力，如果是，则求其势能。

$F_x = 6abz^3y - 20bx^3y^2$，$F_y = 6abxz^3 - 10bx^4y$，$F_z = 18abxyz^2$（$a,b$ 为常数）

七计算题。

如图所示，半径 $R = 4\sqrt{3}mm$ 的圆盘在绕过中心 O 垂直的轴转动的同时还在顶角等于 60° 的固定圆锥上翻滚。圆盘上 A 点的加速度大小不变且等于 $48mm \cdot s^{-2}$，计算圆盘绕自身对称轴的转动角速度。（答案 圆盘绕自身对称轴的转动角速度为 2）



图

八计算题。

一个半径为 a、圆心为 A 的圆柱在一个水平面上做无滑滚动，圆心 A 以恒定速度 u 运动；另一半径为 b、圆心为 B 的第二个圆柱（它的轴与第一个圆柱的轴平行）在第一个圆柱上做无滑滚动，B 点相对于固连于第一个圆柱的坐标系以恒定的速率 v 运动。P 点是第二个圆柱边缘上的点。若时间 t=0 时，A、B、P 在同一铅垂线上。求 P 点的速度、加速度和时间的关系。（下图参考）（**本题过程较为麻烦，大家可以有选择性，即如果要用很多时间很多时间才行的话，请先放弃%>_<%**）