

数学物理方法

Mathematical Methods in Physics

武汉大学

物理科学与技术学院

第一篇 复变函数论

Theory of Complex Variable Functions

第一章 解析函数论

Theory of Analytic Functions

§ 1.4 初等解析函数

一、初等单值函数

1. 幂函数

(1) 定义 $w = z^n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

(2) 解析区域 除了 $z=0$ 的复平面。

(3) 与实函数相同的性质 $z^m \cdot z^n = z^{m+n} ; \dots$

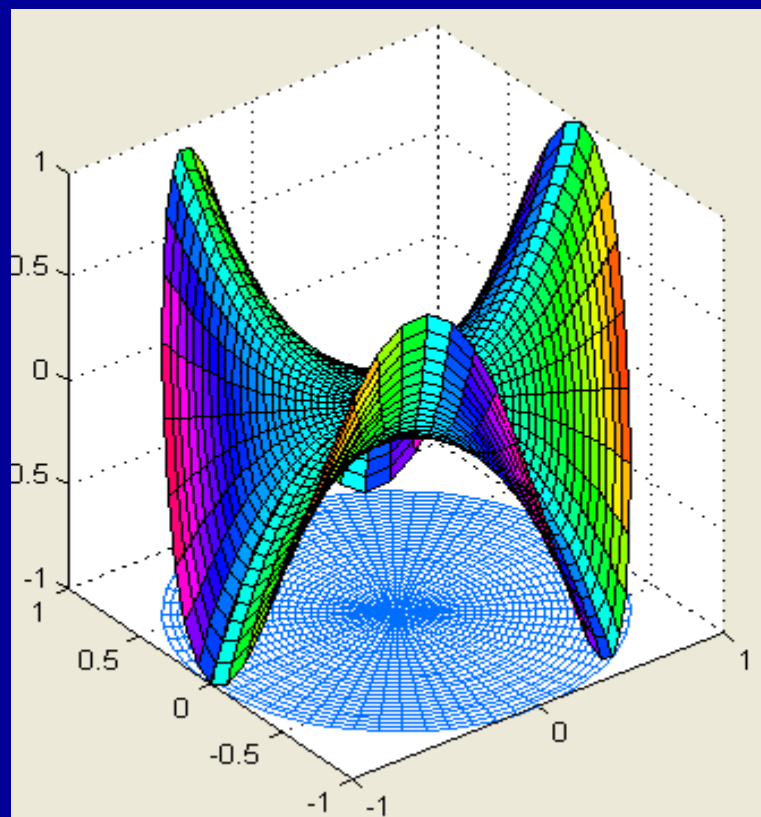
(4) 新性质

$$w = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_m z^m} \quad \begin{matrix} (a_n, b_m \neq 0) \\ (Q(z) \neq 0) \end{matrix}$$

一、初等单值函数

1. 幂函数 (图)

$$w = z^3$$



一、初等单值函数

2. 指数函数

(1) 定义 $w = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$

(2) 解析区域 复平面

(3) 与实函数相同的性质

$$e^z \neq 0; \quad e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}; \quad \dots$$

(4) 新性质

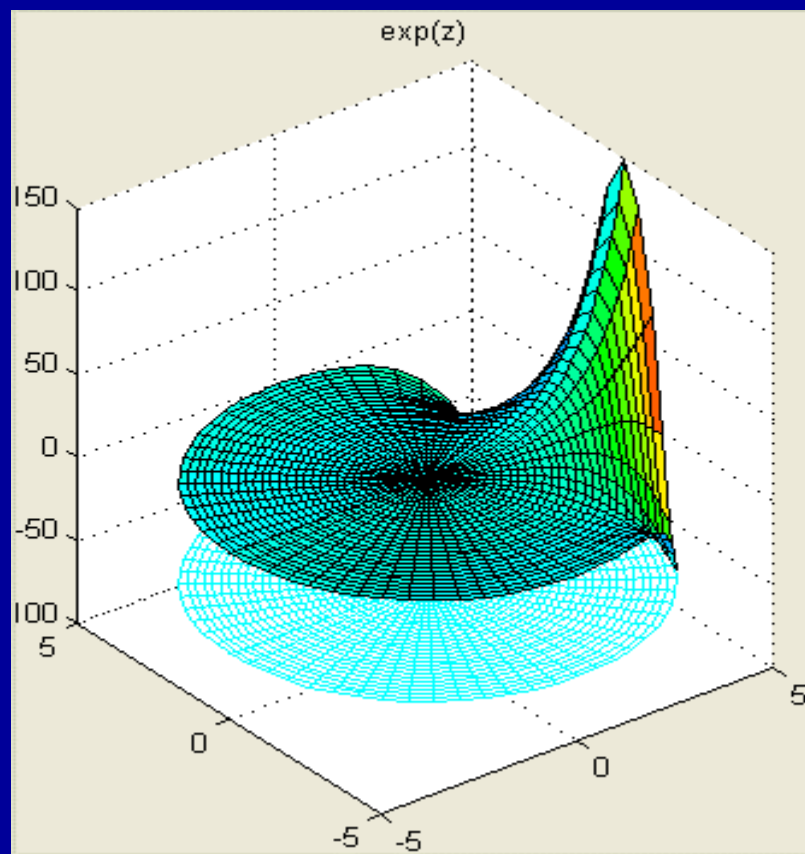
$$e^{z+i2k\pi} = e^z (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$e^z \text{ 不一定大于 } 0 \quad \#$$

一、初等单值函数

2. 指数函数 (图)

$$w = e^z$$



一、初等单值函数

3. 三角函数

(1) 定义 $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \sec = \frac{1}{\cos z}, \csc = \frac{1}{\sin z}$$

(2) 解析区域 复平面 (除分母为0外)

(3) 与实函数相同性质

$$(\sin z)' = \cos z, (\cos z)' = -\sin z$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$$

⋮

(4) 新性质

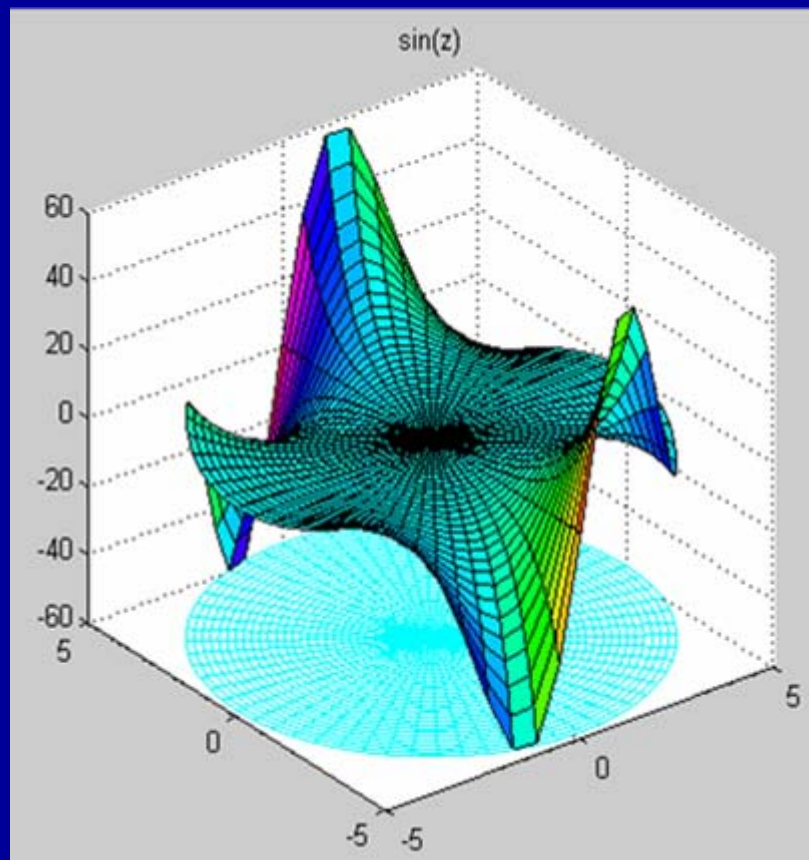
$|\sin z|$ 和 $|\cos z|$ 可大于任何正数

#

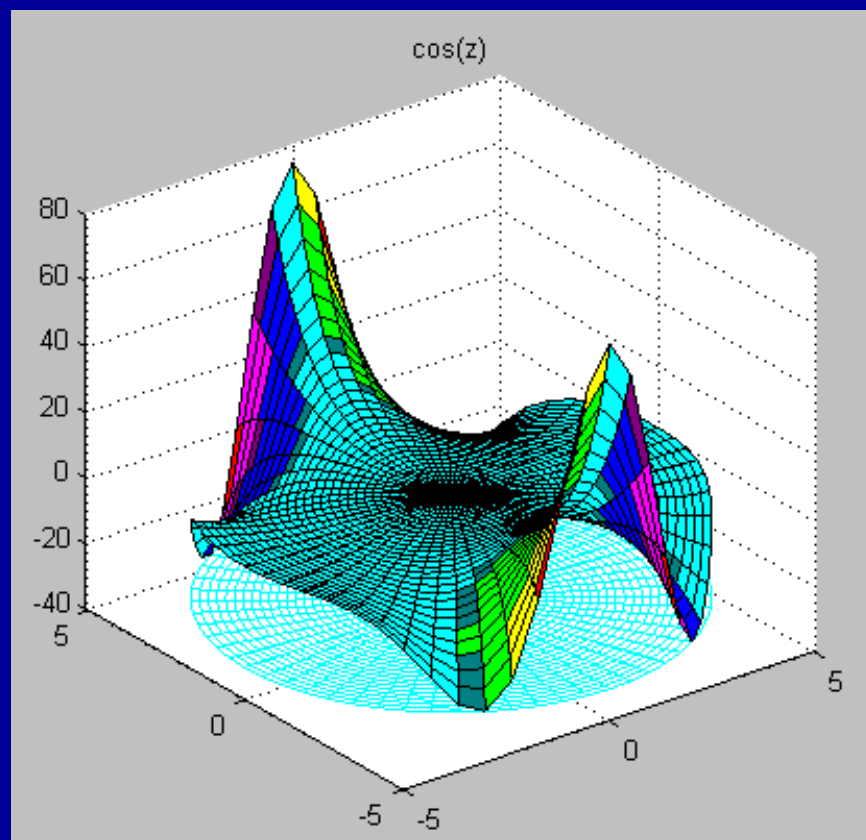
一、初等单值函数

3. 三角函数（图）

$$w = \sin z$$



$$w = \cos z$$



一、初等单值函数

4. 双曲函数

(1) 定义 $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z},$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \quad \operatorname{csc} h z = \frac{1}{\sinh z}$$

(2) 解析区域 复平面

(3) 与实函数相同的性质 $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1; \dots$

(4) 新性质

一、初等单值函数

- 初等单值函数与相应实函数的定义在形式上相同；
- 在其定义域内均解析；
- 除具有某些新性质外具有与相应实函数所具有的性质。

二、初等多值函数

1. 根式函数

$w = \sqrt{z}$: 支点为 $z = 0, \infty$; 一阶。

(1) 定义 若 $w^n = z$ 则记 $w = \sqrt[n]{z}$ 称根式函数

(2) 多值性的体现 $\#$ ($n = 2, 3, \dots$)

体现在 z 的幅角与 w 的幅角的对应关系上

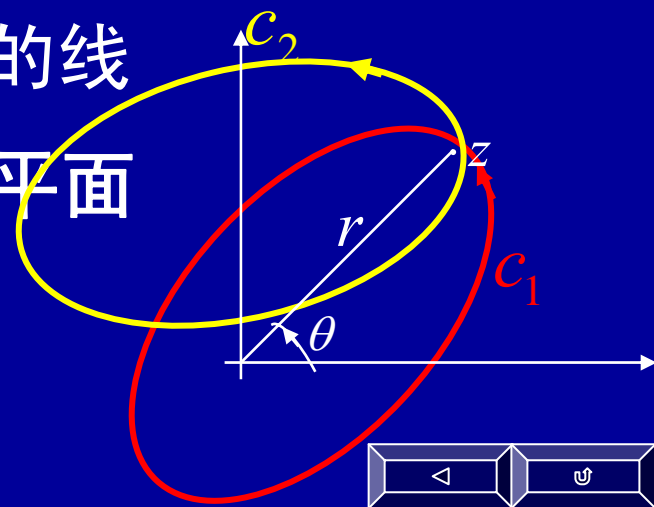
(3) 支点 当变量绕其一周时函数值会改变的点;
绕其 n 周后函数值还原的支点为 $n-1$ 阶支点

(4) 单值分支 限制 z 的变化范围得到的若干单值函数

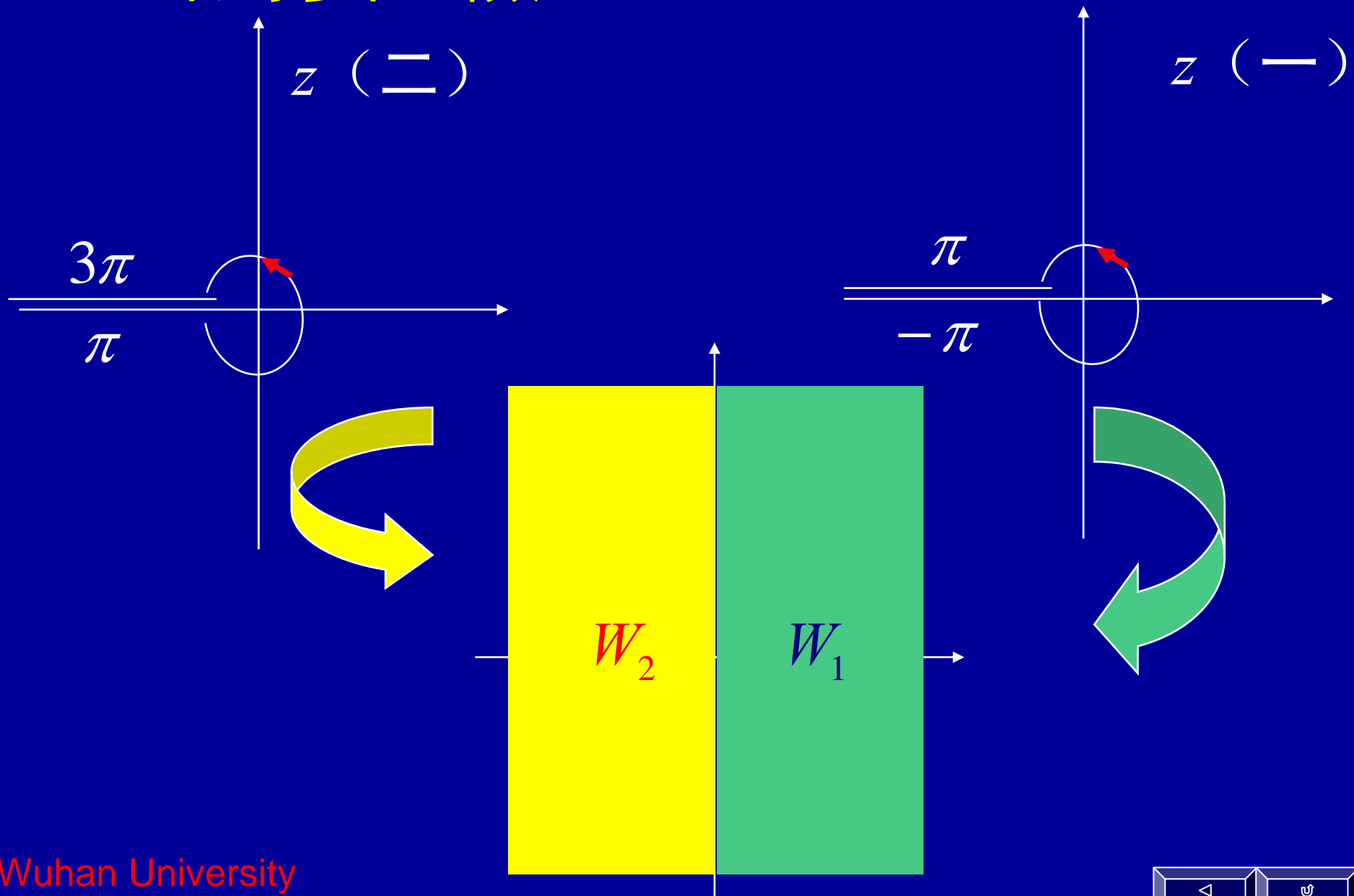
(5) 支割线 连接支点割开 z 平面的线

(6) 里曼面 互相交叠的若干叶 z 平面

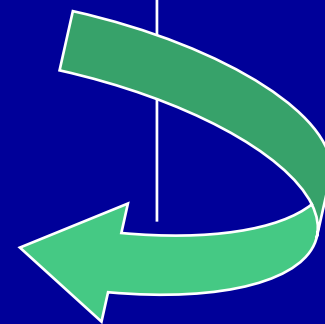
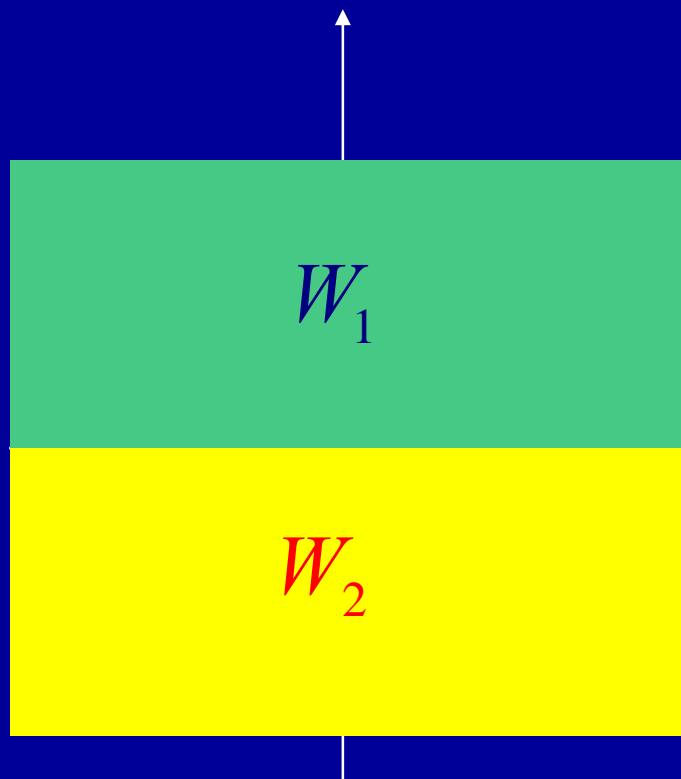
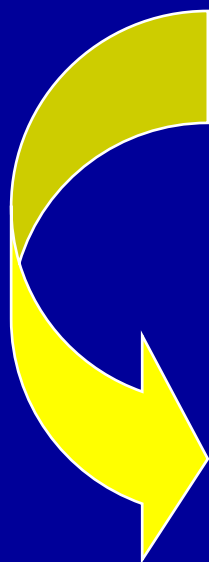
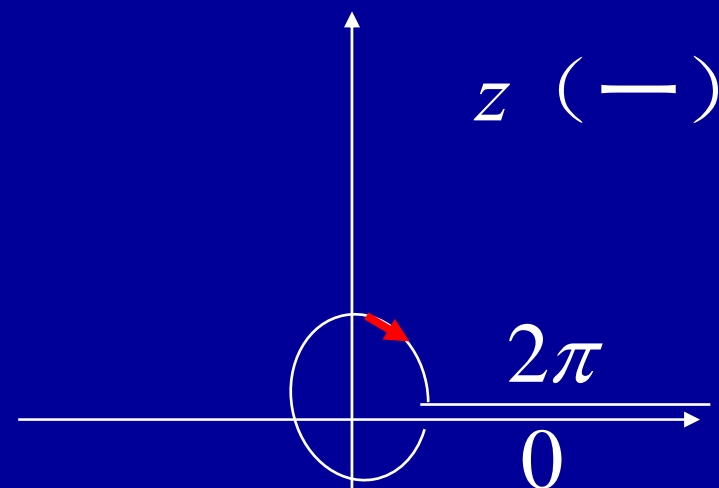
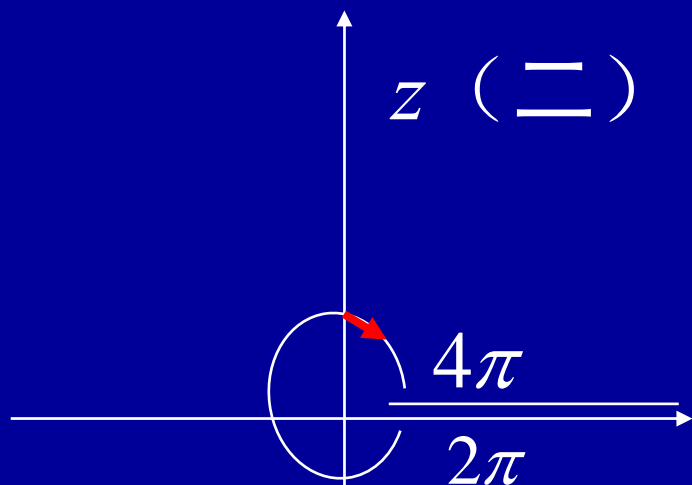
(7) 解析性 每一单值支均解析



二、初等多值函数



二、初等多值函数

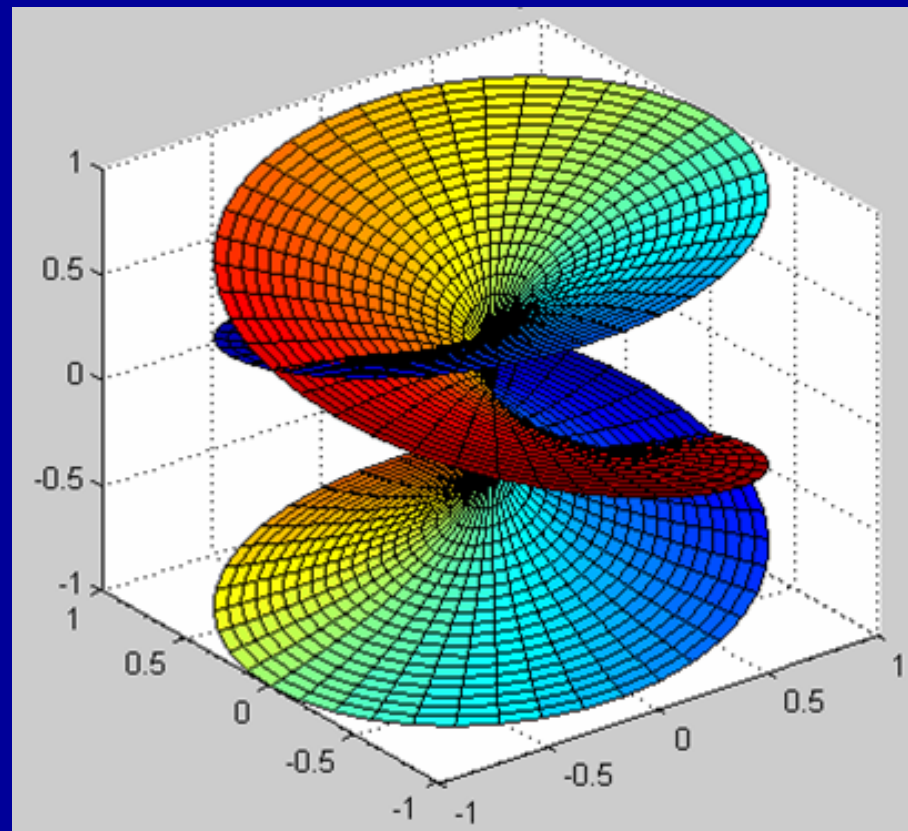


W_1

二、初等多值函数

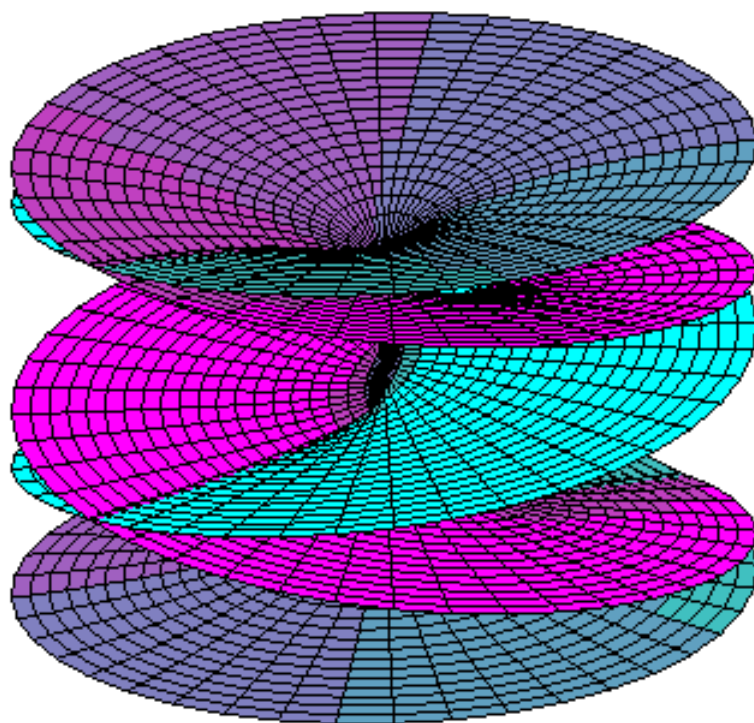
根式函数（图）

$$w = \sqrt[3]{z} :$$



二、初等多值函数

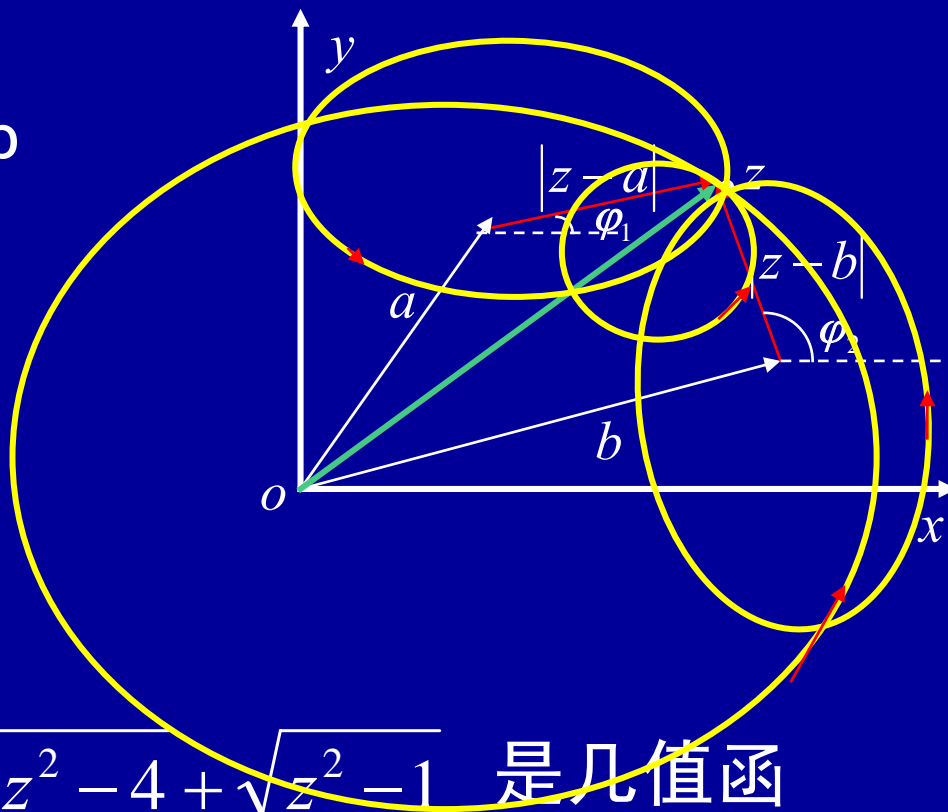
里曼面



二、初等多值函数

例1 讨论 $w = \sqrt{(z-a)(z-b)}$ 的支点

答：支点为 a, b



思考：函数 $w = \sqrt[3]{z^2 - 4} + \sqrt{z^2 - 1}$ 是几值函数？有何支点？

答：6值，支点 $\pm 1, \pm 2, \infty$

二、初等多值函数

2.对数函数

主值支: $\ln z = \ln|z| + i \arg z, 0 < \arg z \leq 2\pi$

- (1) 定义 若 $z = e^w$ 则 $w = \operatorname{Ln} z$
- (2) 多值性的体现 z 的幅角和 w 的虚部的对应关系
- (3) 支点 $0, \infty$
- (4) 单值分支 $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- (5) 支割线 连接 $0, \infty$ 割开 z 平面的线
- (6) 里曼面 无穷多叶
- (7) 解析性 每一单值支均解析
- (8) 性质

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$$

$$\operatorname{Ln}(z_1 / z_2) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$$

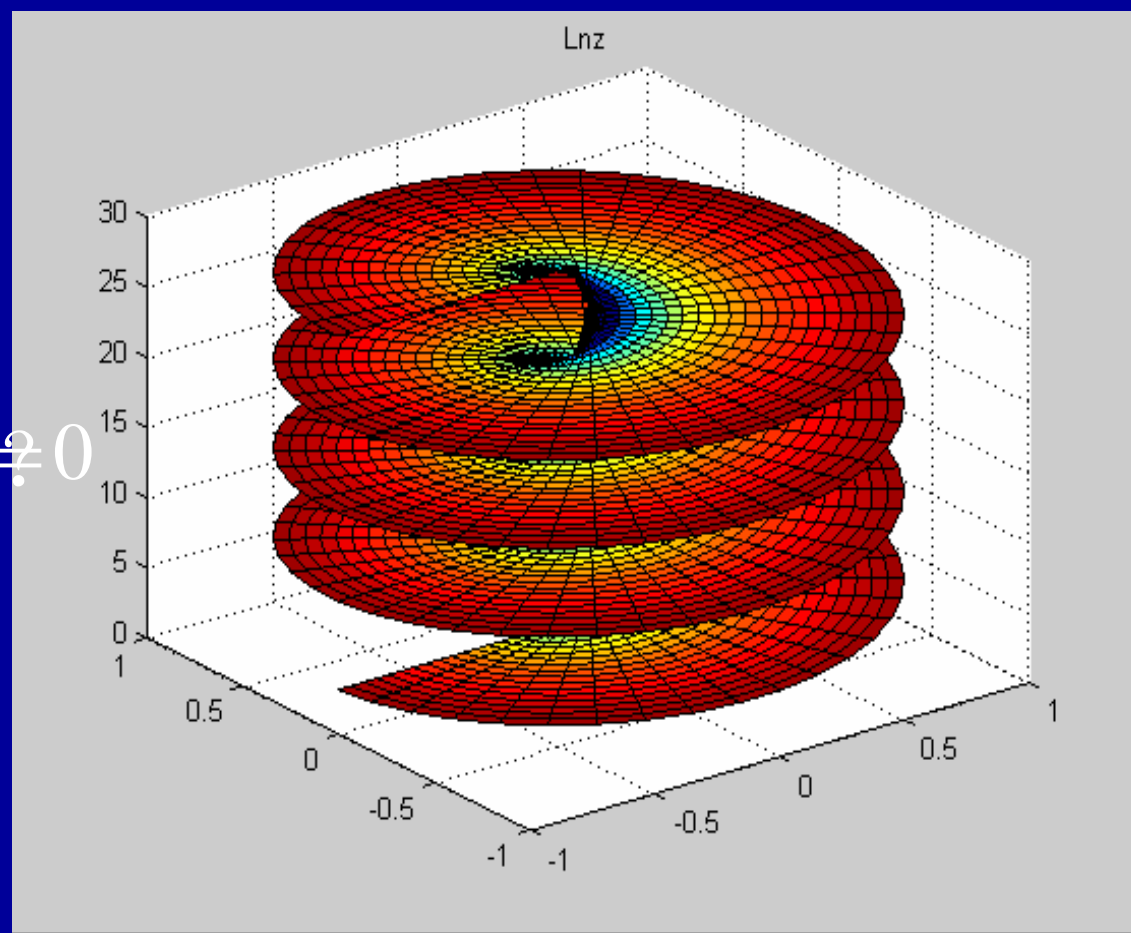
二、初等多值函数

2.对数函数（图）

问：

$$\operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} z \stackrel{?}{=} 2\operatorname{Ln} z$$

$$\operatorname{Ln}(z/z) \stackrel{?}{=} \operatorname{Ln} z - \operatorname{Ln} z \stackrel{?}{=} 0$$



一、初等单值函数

$$w = z^n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z},$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}$$

小结

二、初等多值函数

1. 根式函数 若 $w^n = z$ 则记 $w = \sqrt[n]{z}$ 称根式函数

2. 对数函数 若 $z = e^w$ 则 $w = \operatorname{Ln} z$

主值支: $\ln z = \ln|z| + i \arg z, 0 < \arg z \leq 2\pi$

概念:

- (1) 支点 当变量绕其一周时函数值会改变的点
绕其 n 周后函数值还原的支点为 $n-1$ 阶支点
- (2) 单值分枝 限制 z 的变化范围得到的若干单值函数
- (3) 支割线 连接支点割开 z 平面的线
- (4) 里曼面 互相交叠的若干叶 z 平面
- (5) 解析性 每一单值支均解析

本节作业



1.4 初等解析函数

习题1.4: 4; 6 (2) ;
 7 (2) , (4) ; 8;

Good-bye!

