刚体平面平行运动最简单的例子

例 试讨论一匀质实心圆柱体在斜面上作无滑动的滚动 (或称纯滚动).

解一 图表示圆柱体的纯滚动，这时作用在刚体上有三个力：重力 mg，斜面的反作用力 N 和摩擦力 $\langle f \rangle$. 取 x 轴沿斜面向下，y 轴垂直于斜面向上. 因为它是平面运动，故可把它看作是 ⟨ 随质心的平动和绕通过质心的中心线为轴的转动的复合运动 ⟩

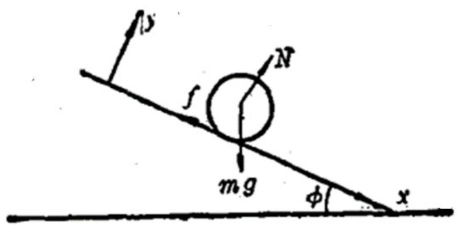
静摩擦力的方向如何判定？

这是最一般的处理方式，采用质心运动定律与绕过质心的轴的转动定律.

$$\begin{cases} mg\sin\phi - f = ma_{cx} \\ N - mg\cos\phi = ma_{cy} \\ \langle fR = J_c\alpha \rangle \end{cases} \tag{1}$$

选择垂直于直纸面向里为正，这也与生活经验相符.

因为是纯滚动，故有



$$\langle a_{cx} = R\alpha \rangle \tag{2}$$

处理纯滚动必不可少的关系式，实际上，这是由约束关系得到的.

解式 (1) 和 (2)，即得

$$a_{cx} = \frac{g\sin\phi}{1 + \frac{J_c}{mR^2}} \tag{3}$$

将 $J_c = \frac{1}{2}mR^2$ 代入，得

$$a_{cx} = \frac{2}{3}g\sin\phi \tag{4}$$

如果圆柱体从静止滚下竖直距离 h，那么此时质心的速度为

$$v_{cx} = \sqrt{2a_{cx}x} = \sqrt{\frac{4}{3}g\sin\phi x} = \sqrt{\frac{4}{3}gh} \tag{5}$$

可见，纯滚动和纯滑动情形下的加速度之比为

$$\frac{2}{3}g\sin\phi/g\sin\phi = \frac{2}{3} \tag{6}$$

速度之比为

$$\sqrt{\frac{4}{3}gh}/\sqrt{2gh} = \sqrt{\frac{2}{3}} \tag{7}$$

解二　因为没有滑动，所以圆柱体与斜面接触的点的速度必为零．我们把滚动看作以圆柱体与斜面相接触的直线为瞬时轴的转动，由转动定律

$$\langle M = J\alpha \rangle$$

这里，惯性力的力矩实际上为零，怎么判断的？这一点需要清楚！

$$mg\sin\phi R = J\alpha \tag{8}$$

这里 J 由平行轴定理求得

$$J = J_c + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

又由纯滚动条件

$$\langle a_{cx} = R\alpha \rangle$$

又一次使用纯滚动的约束条件．

联立以上三式，解得

$$a_{cx} = \frac{2}{3}g\sin\phi. \tag{9}$$

解三　作用于圆柱体上的三个力中，重力是保守力，而正压力和〈 摩擦力 〉的作用点的速度为零，即它们不作功，所以可以应用机械能守恒定律．

静摩擦力，接触点无相对位移，做功之和为零，但这里静摩擦力的作用非常重要．请问是什么作用？
柯尼希定理！

用复合运动处理时，

$$mgh = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J_c\omega^2 \tag{10}$$

上式右端〈 第一项为刚体随质心平动的动能，第二项为绕质心轴的转动动能 〉.

将 $J_c = \frac{1}{2}mR^2$ 和 $\omega = v_c/R$ 代入，〈 即得 〉

最简单应该是 (10) 式对时间求导！

$$\begin{aligned} v_c^2 &= \frac{4}{3}gh \qquad (11)\\ a_c &= \frac{v_c^2}{2x} = \frac{4}{3}gh/x = \frac{2}{3}g\sin\phi \qquad (12) \end{aligned}$$

其结果与前面完全一致．

若〈 以转动瞬心为基点 〉，机械能守恒定律应表示为

实际上以瞬心和质心为轴，各列一次转动定律，两式相除，即可得到摩擦力，所有问题都解决了，这样最简单！

$$mgh = \frac{1}{2}J\omega^2 \tag{13}$$

将 $J = J_c + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$ 代入上式，可得完全相同的结果．