

# 第1章：量子力学的诞生

- ☐ 黑体辐射，Planck 公式
- ☐ 光电效应，光子
- ☐ Bohr 的量子论
- ☐ De Broglie 的物质波

问题似乎并不在于判定X光的两种理论何者更为正确，而在于去寻求一种理论，它能同时把握这两个方面。

——布拉格(W. H. Bragg)

## 世纪之交的物理学

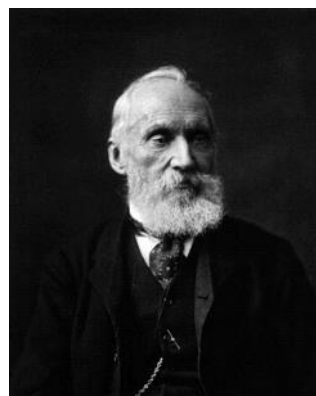
十九世纪末，随着第二次工业革命的进行，人类社会跨入了飞速发展的时代。此刻的物理学也达到了一个辉煌的巅峰：牛顿力学历经两百多年愈发显现出它的精确和伟大；电动力学也在Maxwell的电磁理论的框架下趋于完善，其中Maxwell方程组更被认为是数学与物理相结合的完美典范，它所表现出的深刻、对称、优美甚至使得Boltzmann情不自禁地引用歌德的诗句说：“难道是上帝写的这些吗”；而随着热力学三大定律的基本确立，以及分子运动论的提出，热力学与统计力学也被成功地建立起来了。更令人振奋的是，这三套理论彼此相符并相互包容，形成了一个大的理论框架，几乎解释了当时一切所知的物理现象。

## 两朵乌云

*“动力学理论断言，热和光都是运动的方式。但现在这一理论的优美性和明晰性却被两朵乌云遮蔽，显得黯然失色了……”*

*(The beauty and clearness of the dynamical theory, which asserts heat and light to be modes of motion, is at present obscured by two clouds.)*

——Lord Kelvin



这两朵著名的乌云，分别指的是经典物理在光以太和Maxwell - Boltzmann能量均分学说上遇到的难题。具体指的是Michelson-Morley 实验的“失败”，以及黑体辐射中的“紫外灾难”。第一朵乌云导致了相对论的提出，而第二朵乌云则促成了量子力学的诞生。

## 黑体辐射

### ？ 为什么要研究热辐射（物体受热会发出电磁波）

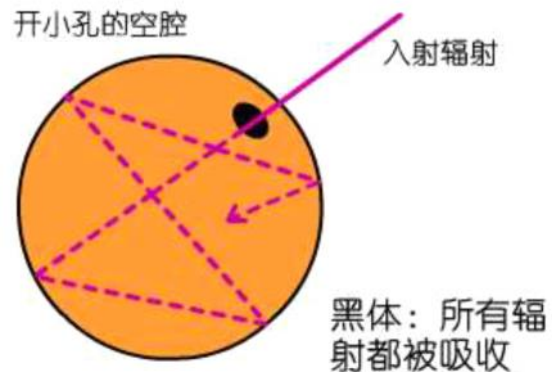
- 能量与频率的关系（如何使灯泡尽可能多的发出可见光，能量利用效率问题）
- 火焰，灯泡的颜色

## 为什么要研究黑体

- Kirchhoff：热平衡时，物体发射和吸收热辐射之比为常数，与物体本身无关。
- 黑体 (理想的研究对象)：一个物体能够全部吸收到达其表面的热 (电磁) 辐射。

## 关于黑体的研究

对于不同的物体，热和辐射似乎有一定的对应关联。比如把一块铁放在火上加热，那么到了一定温度的时候，它会变得暗红起来（其实在这之前有不可见的红外线辐射），温度再高些，它会变得橙黄，到了极度高温的时候，如果能想办法不使它汽化了，我们可以看到铁块将呈现蓝白色。由此，我们可以将问题首先归结于辐射能量密度和电磁波频率（波长）之间的关系。

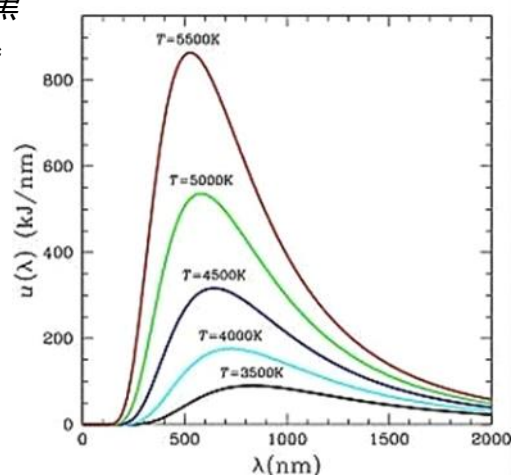


在单位体积下，频率在  $\nu \sim \nu + d\nu$  的热辐射强度（能量密度）可表示为  $\rho d\nu$

💡 **Kirchhoff 定律**：在平衡条件下，除频率外，黑体辐射只与温度有关，与材料，大小，形状无关。能量密度（谱密度）只是温度和频率的函数： $\rho = \rho(T, \nu)$ 。

Wien 位移律：每一个温度  $T$  下的谱密度曲线峰值对应的波长  $\lambda_{\max}$  与  $T$  成反比

Sterfan-Boltzmann 定律： $\int \rho d\nu \sim T^4$



💡 **Wien 公式**：Wein 根据上述热力学原理结合实验得到了一个半经验公式：

$$\rho d\nu = C_1 \nu^3 e^{-(C_2 \nu)/T} d\nu$$

其中  $C_1, C_2$  可由实验给定。这个公式与高频处实验数据符合很好而在低频处偏差较大

💡 **Rayleigh-Jeans 公式**：Rayleigh 和 Jeans 则从另一个角度来看这一问题。既然热辐射是电磁波。假设每个电磁波是由一个小振子发出，那么如果我们计算出振子在频率  $\nu \sim \nu + d\nu$  内的数目再乘以每个振子的能量，就可以得到其能量密度

$$\rho d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT d\nu$$

它在长波方面虽然符合了实验数据，但在短波方面的失败却是显而易见的。当波长  $\lambda$

趋于0，能量辐射也将不可避免地趋向无穷大（紫外灾难）。显然也无法给出正确的黑体辐射分布。

## ■ Rayleigh-Jeans公式的推导

为了研究电磁波，我们从最简单的平面电磁波出发，由真空中 Maxwell 方程

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

以及  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  可得

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

如果电磁波是单色波（时谐电磁波，单频率），那么强度中的时间和坐标可以分离变量写为

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}(x) e^{-i\omega t}$$

电场强方程则可写为

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0,$$

其中  $k = \omega/c$ . 考虑电磁波只沿  $x$  方向传播，那么其场强只在与  $x$  正交的平面传播，这种电磁波称为平面波，于是有

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + k^2 \mathbf{E} = 0,$$

所以场强的总表达式可写为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

在任意方向则可写为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

Rayleigh 和 Jeans 假设黑体为一个边长  $L$  的立方腔，那么在立方腔里形成驻波的条件为

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x + L, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y + L, z, t) = \mathbf{E}(x, y, z + L, t)$$

也就是说， $e^{ik_x x} = e^{ik_x(x+L)}, e^{ik_y y} = e^{ik_y(y+L)}, e^{ik_z z} = e^{ik_z(z+L)}$ . 于是有

$$k_x L = 2n_x \pi, k_y L = 2n_y \pi, k_z L = 2n_z \pi \quad (n_x, n_y, n_z = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

转换为频率，则可写为

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{ck}{2\pi} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

于是驻波条件变为

$$n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \left(\frac{L\nu}{c}\right)^2$$

每一组整数解  $(n_x, n_y, n_z)$  代表一个驻波模式。我们可以算出频率在  $\nu \sim \nu + d\nu$  的电磁波的驻波模式数：

$$4\pi n^2 dn = \frac{4\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu$$

其中， $V = L^3$  为腔的体积。考虑到电磁波是横波有两个偏振，于是空腔内单位体积内频率在  $\nu \sim \nu + d\nu$  的电磁波的驻波模式数（运动自由度）等于

$$N d\nu = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} d\nu$$

由此我们可得黑体辐射的谱密度分布为

$$\rho d\nu = n d\nu \bar{\epsilon} = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \bar{\epsilon} d\nu$$

其中,  $\bar{\varepsilon}$  为单自由度平均能量。

从经典统计物理知道, 热平衡时的能量分布是麦克斯韦-玻尔兹曼分布, 即能量为  $\varepsilon$  的粒子数比例于  $\exp(-\varepsilon/kT)$ ,  $k = 1.3806505 \times 10^{-23} \text{ J/K}$  是玻尔兹曼常量。于是我们可以计算平均能量 ( $\int x e^{-x} dx = -e^{-x}(1+x)$ )

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\varepsilon}{\int_0^\infty e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\varepsilon} = kT$$

这就可以得到

$$\rho dv = \frac{8\pi v^2}{c^3} kT dv$$

这就是Rayleigh-Jeans公式。

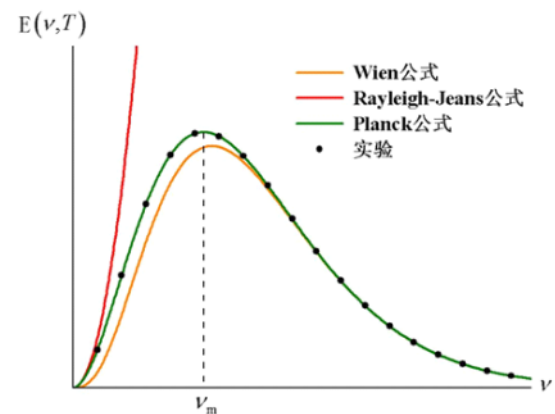
### 💡 Planck公式

1900年10月19日, Kirchhoff的学生Planck, 在德国物理学会会议上提出了一个黑体辐射能量分布公式

$$\rho dv = \frac{C_1}{c^3} \frac{dv}{e^{C_2 v/T} - 1}$$

这个公式是普朗克为了凑实验数据而猜出来的。

在提出这公式的当天, 鲁本斯 (H. Rubens) 立刻把它与卢默 (O. Lummer) 和普林斯海默 (E. Pringsheim) 当时测到的最精确的实验结果进行核对, 结果发现, 两者以惊人的精确性相符合。



- ✓ Planck:  $\rho dv = \frac{8\pi h v^3}{c^3} \frac{dv}{e^{hv/kT} - 1}$
- ✓  $v \rightarrow \infty$  时,  $\rho dv = \frac{8\pi h v^3}{c^3} e^{-hv/kT} dv$
- ✓ Wien:  $\rho dv = C_1 v^3 e^{-\frac{C_2 v}{T}} dv$
- ✓  $v \rightarrow 0$ , ( $e^x \approx 1 + x, x \rightarrow 0$ )
- ✓ Rayleigh-Jeans:  $E(v, T) dv = \frac{8\pi}{c^3} kT v^2 dv$

### Planck's "act of despair"

☹ 我现在所做的事, 或者毫无意义, 或者可能成为牛顿以后物理学上最大的发现。

☹ “一个纯公式的假说, 我其实并没有为此思考很多。”

☹ “即使这个新的辐射公式竟然被证明是绝对精确的, 但是如果把它仅仅看做是一个侥幸揣测出来的内插公式, 那末它的价值也只是有限的。”

☹ : “我生性喜欢平和, 不愿进行任何吉凶未卜的冒险。然而到那时为止, 我已经为辐



射和物质之间的平衡问题徒劳地奋斗了六年。我知道这个问题对于物理学是至关重要的；因此，一个理论上的解释必须以任何代价非把它找出不可，不管这代价有多高。我非常清楚，经典物理是不能解决这个问题的。……摆在我面前的……是维持热力学的两条定律。我认为，这两条定律必须在任何情况下都保持成立。至于别的一些，我就准备牺牲我以前对物理定律所抱的任何一个信念。”

— Planck

## 量子假论与 Planck 常数

Planck 在12月14日在德国物理学会提出：电磁辐射的能量交换只能是量子化的，即吸收或发出辐射只能以“量子”方式进行，每个“量子”能量为

$$\star E = h\nu$$

这里的h后来称为普朗克常数。Planck发表的常数

$$\star h = 6.55 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$$

只比现代值低1%；同时导出的玻耳兹曼常数  $k = 1.346 \times 10^{-23} \text{J/K}$  比现代值低约2.5%。

## Planck公式与能量量子化

$$E(\nu, T) d\nu = \frac{C_1}{c^3} \frac{d\nu}{e^{C_2\nu/T} - 1}$$

通过调节  $C_1, C_2$  两个参量，公式可以很好的拟合实验曲线。

通过与Rayleigh-Jeans公式比较可以发现这里不能用能量均分定律导出的平均值  $kT$ ，而需要引入  $kT \times P(x)$ ，其中  $x = C_2\nu/T$ ，并且有

$$P(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

只有这么定义才能即满足Planck公式，又保证  $x \rightarrow 0$  时，保证  $P(x) = 1$ ，回到平均值  $kT$ 。

为了能够得到这一  $P(x)$  的形式，Planck假定在做上述Rayleigh-Jeans公式推导时，运动能量  $\varepsilon$  不能任意连续取值，而只能是某个量的倍数：

$$\varepsilon = n\varepsilon_0, \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

其中  $\varepsilon_0$  为一个少量。而如果能量不连续求平均值的时候就不能算积分，而必须算求和

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon_0 e^{-\frac{n\varepsilon_0}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\varepsilon_0}{kT}}} = \frac{\varepsilon_0}{e^{\varepsilon_0/kT} - 1}$$

利用公式

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a + kd) q^k = \frac{a - [a + (n-1)d]q^n}{1-q} + \frac{dq(1-q^{n-1})}{(1-q)^2} \quad (n \geq 1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a + kd) q^k = \frac{a}{1-q} + \frac{dq}{(1-q)^2} \quad (|q| < 1)$$

代入前面公式可得

$$\rho d\nu = n d\nu \bar{\varepsilon} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{\varepsilon_0 d\nu}{e^{\varepsilon_0/kT} - 1}$$

与Wien公式

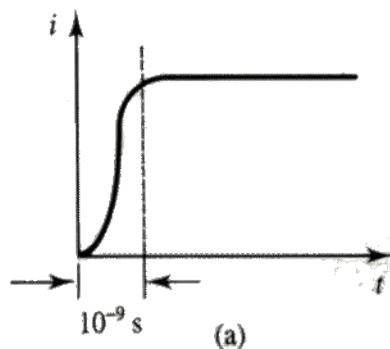
$$\rho d\nu = C_1 \nu^3 e^{-\frac{C_2\nu}{T}} d\nu$$

比较则必须有

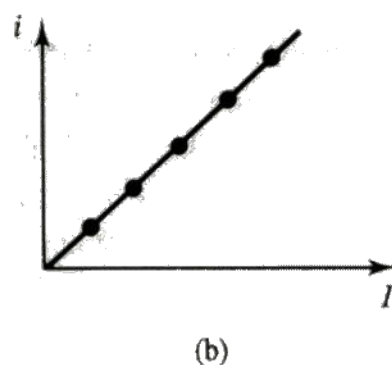
$$\varepsilon_0 = h\nu$$

常数 $h$ 被称作Planck常数。

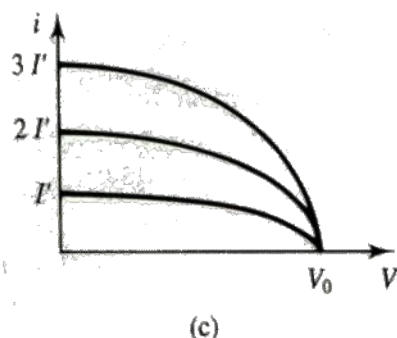
## 光电效应



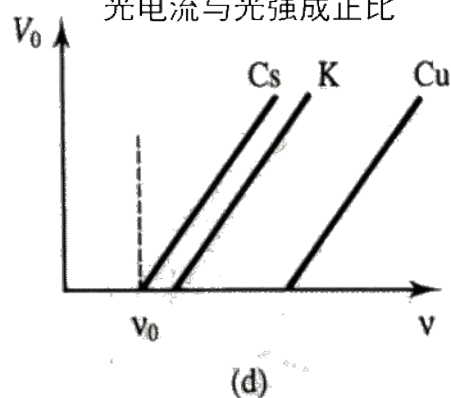
光照到金属表面，电流几乎同时产生



光电流与光强成正比



光电流随减速势增大而减小  
对不同光强遏止电压相同



遏止电压依赖频率而非光强

### ? 经典解释的困难

光电效应的响应时间快 ( $\tau < 10^{-9} \text{ s}$ )。1 m<sup>2</sup>的钠金属板上，每个原子每秒钟接受到的能量约0.1 μeV, 即使每个原子中只有一个电子接受能量，要使这个电子获得1 eV的能量，还需要10<sup>7</sup> s！这与实验事实发生严重的矛盾。

电子能量与光频率的关系。依照经典理论，决定电子能量的是光强，而不是光的频率。但实验事实却是：暗淡的蓝光照出的电子的能量居然比强烈的红光照出的电子的能量大。

### 💡 光电效应的量子解释

普朗克在解释黑体辐射时假定，物质振子的能量是量子化的，光以不连续方式从光源发出，但仍以波的方式传播。

1905年，爱因斯坦发展了普朗克的量子说。光在空间的传播正象粒子那样运动，这种粒子后来被称为光量子或光子。爱因斯坦用光量子假说成功地解释了光电效应。

当光射到金属表面时，能量为 $h\nu$ 的光子被电子吸收，一部分用来克服金属表面对它的束



缚，另一部分就是电子离开金属表面后的动能。这一能量关系可以写成：

$$E_k = \frac{1}{2}mv_m^2 = h\nu - \phi$$

## ? 光是什么？

- ✓ 每个人见得最多的东西
- ✓ 无数神话中生命，活力和希望的象征



光是粒子

- 光的反射、折射——阿尔·哈桑 (al-Haytham)，欧几里得 (Euclid)，托勒密(Ptolemy)，开普勒(Kepler)
- 光路最短——费马(Fermat)
- 1672，光是微粒——牛顿，色散，引入振动，周期的力学体系。**光无法绕开障碍物**
- 1905，光量子假说——爱因斯坦，**光量子假说**
- 1923，X射线散射——康普顿

光是波

- 1655，光的衍射——格里马第(Grimaldi)，**以太**
- 1678，光是纵向波动——惠更斯(Huygens)，波前（直线，反射，折射，双折射）**光学战争开始**
- 1807，光的双缝干涉——托马斯·杨(Thomas Young)
- 1819，光的衍射——菲涅耳(Fresnel)，泊松亮斑，横波解释偏振
- 1821，光的单缝衍射——夫琅和费(Fraunhofer)
- 1887，光是电磁波——赫兹，麦克斯韦

## ? 粒子还是波？

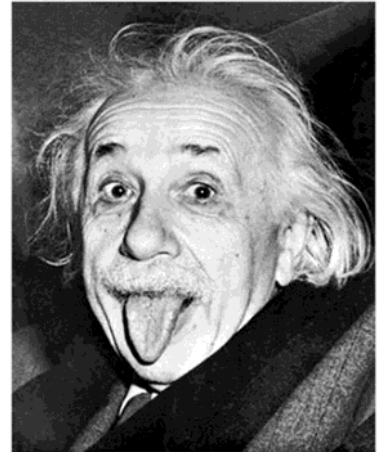
1905，光电效应：光子能量为  $E = h\nu$  (电磁波)；

1917，光子不仅有能量还有动量  $p = h/\lambda$  (**粒子**)；

**光是粒子性和波动性的矛盾统一体。**

光在传播时显示出波动性，而在转移能量时显示出粒子性！

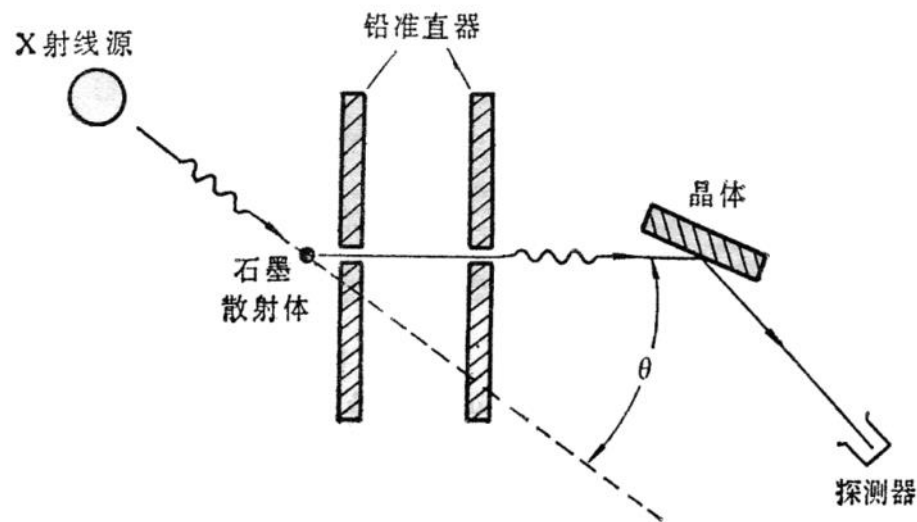
光既有波动性又有粒子性，但在一个特定事例中，只能二选一，两者不会同时出现！



## 康普顿散射 (Compton Scattering)

- 1923年，美国物理学家康普顿 (A.H.Compton 1892~1962) 在研究X射线与物质散射的实验里，证明了**X射线的粒子性**。
- 光子的**能量**和**动量**同时起作用，继爱因斯坦用光量子说解释光电效应（只涉及光子的能量）之后，对光的量子说作了进一步的肯定。

- 第一次从实验上证明了爱因斯坦在1917年提出的、关于光子具有动量的假设。
- 康普顿散射的实验得到光量子说的圆满解释之后，彻底打消了人们对光量子说的质疑。



- ✓ 用晶体谱仪测x射线波长，根据波动的衍射现象；散射对波长的影响只能把x射线当粒子来解释。

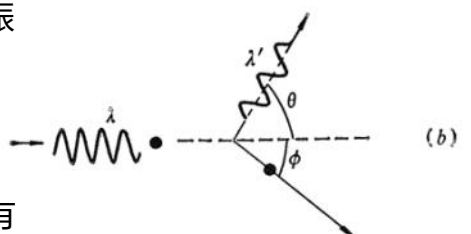
?  $\Delta\lambda = 0$ ?

- 经典电磁理论，当电磁辐射通过物质时，被散射的辐射应与入射辐射具有相同波长。

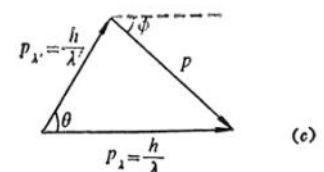


- 入射的电磁辐射使原子的电子受到一个周期变化的作用力，迫使电子以入射波的频率振荡。振荡着的电子必然要在四面八方发射出电磁波，其频率与振荡频率相同

- 例如，蓝色的衣服在镜子里决不会看到是红色的。



- ✓ 实验发现，被散射的x射线中除了与入射x射线具有相同波长的成分外，还有波长增长的部分出现。增长的数量随散射角 $\theta$ 的不同而有所不同。被称为康普顿效应。



- ✓ 量子解释：康普顿把观察到的现象理解为光子与自由电子碰撞的结果。

- ✓ 他首先假定：x射线由光子组成，x射线的波长 $\lambda$  (或频率 $\nu$ ) 与光子的能量满足 $E_\lambda = h\nu$  (Einstein 1905)，而光子的动量满足 $p_\lambda = h/\lambda$  (Einstein 1917)。



## 💡 Compton公式

当波长为 $\lambda$ 的光子与原子中质量为 $m_0$ 的、自由而静止的电子碰撞，碰撞后，在与入射方向成 $\theta$ 角的方向测到波长为 $\lambda'$ 的散射波；电子在碰撞中受到反冲，它以能量 $E$ 在入射波的方向成 $\varphi$ 角的方向上射出。按体系的能量和动量守恒，即有

$$\begin{cases} h\nu + E_0 = h\nu' + E \\ p_\lambda^2 + p_{\lambda'}^2 - 2p_\lambda p_{\lambda'} \cos \theta = p^2 \end{cases}$$

$E$ 和 $p$ 分别是反冲电子的能量和动量， $E_0 = m_0 c^2$ 是电子的静止能量， $p_\lambda = h/\lambda$ 及 $p_{\lambda'} = h/\lambda'$ 分别是光子碰撞前后的动量。

由电子的相对论质壳关系

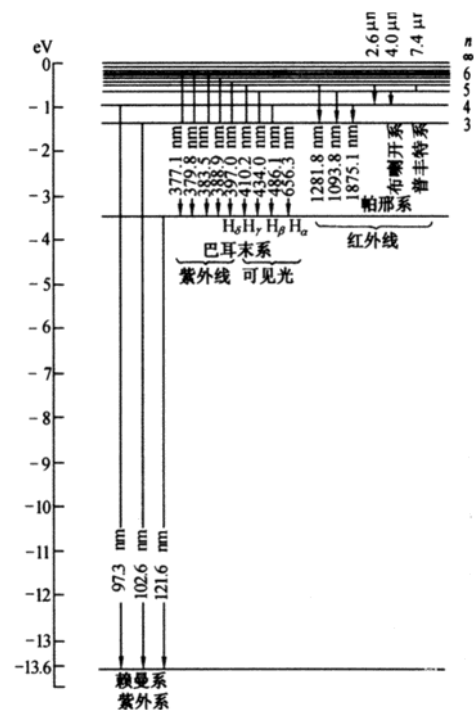
$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 = p^2 c^2 + E_0^2$$

可得Compton散射公式

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta)$$

## 氢原子光谱及其经验规律

- Balmer 公式
- $\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{4}{B} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), n = 3, 4, 5, \dots$
- $B = 3645.6 \text{ \AA}$
- Rydberg公式
- $\nu = \frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right),$   
 $n = 1, 2, 3, \dots; n' = n + 1, n + 2, n + 3$
- $R_h = 4/B = 1.0967758 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$



氢原子能级图与发射的光谱

## 💡 玻尔的氢原子理论

- 为了卢瑟福，放弃麦克斯韦！
- 在原子层次，经典理论将不再成立
- 新的革命性思想必须被引入——量子及Planck常数
- 1913年初，汉森(Hans Marius Hansen)请教玻尔(Niels Bohr),量子化模型里如何解释原子的光谱线问题
- 玻尔：光谱太陌生了，成千条谱线各种奇怪效应杂乱无章  
汉森：你太out了，连巴耳末公式都不知道
- ★ **定态条件**：电子只能处于一些分立的轨道上，它只能在这些轨道上绕核转动，且不产生电磁辐射。
- ★ **频率条件**：当电子从一个定态轨道跃迁到另一个时，以电磁波形式放出（吸收）

能量  $h\nu$

$$\star h\nu = E_{n'} - E_n$$

- ★ **角动量子化 (对应原理)** : 在原子范畴内的现象与宏观范围内的现象可以各自遵循本范围内的规律, 但当把微观范围内的规律延伸到经典范围时, 则它所得到的数值结果应该与经典规律所得到的相一致。

$$\star J = n\hbar, n = 0, 1, 2, \dots$$

🔒 **Sommerfeld推广的量子化条件**

$$? \oint p_k dq_k = n_k \hbar, n_k = 0, 1, 2, \dots$$

💡 能级:  $E_n = -\frac{2\pi e^4}{h^2 n^2}, n = 1, 2, 3, \dots$

💡 Rydberg常量:  $R = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3 c}$

## de Broglie's wave-particle duality

- 💡 19世纪以来, 只注重了光的波动性的研究, 而忽略了粒子性的研究, 在实物粒子的研究方面, 是否犯了相反的错误呢?
- 💡 “一方面, 并不能认为光的量子论是令人满意的, 因方它依照方程  $E = h\nu$  定义了光粒子的能量, 而这个方程中却包含着频率  $\nu$ . 在一个单纯的微粒理论中, 没有什么东西可以使我们定义一个频率; 单单这一点就迫使我们在光的情形中必须同时引入微粒的观念和周期性的观念.
- 💡 另一方面, 在原子中电子稳定运动的确立, 引入了整数; 到目前为止, 在物理学中涉及整数的现象只有干涉和振动的简正模式. 这一事实使我产生了这样的想法: 不能把电子简单地视为微粒, 必须同时赋予它们以周期性”

——De Broglie

💡 de Broglie公式

$$\star \lambda = h/p, E = h\nu$$



🔪 **量子力学两个最重要的公式:**

$$\lambda = h/p \text{ 和 } E = h\nu$$

通过  $h$  把粒子性和波动性联系在一起

$$\text{光子 } p = mc \Rightarrow E = mc^2$$

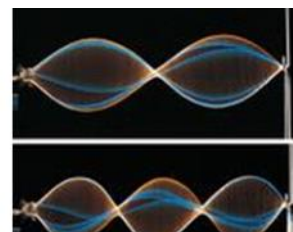
通过  $c$  把质量和能量联系在一起

## 例一: 氢原子

角动量子化  $L = n\hbar$

德布罗意波  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$ , 如果一个电子绕核运动能稳定

存在 与电子相应的波必须是驻波



德布罗意波  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$ , 如果一个电子绕核运动能稳定存在, 与电子相应的波必须是驻波

驻波的波形无法前进, 因此无法传播能量。由于节点静止不动, 所以波形没有传播。能量以动能和势能的形式交换储存, 亦传播不出去

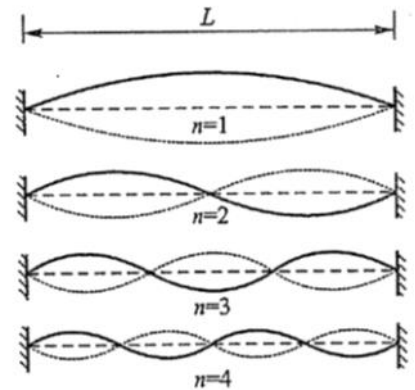
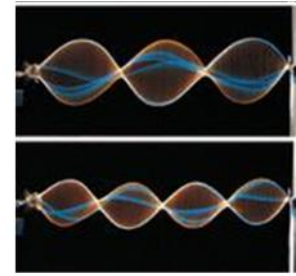
要是电子稳定运动, 绕核一圈的周长必须是相应波长整数倍

$$2\pi r = n\lambda = n \frac{h}{mv}, n = 1, 2, \dots$$

$$\text{即 } rmv = \frac{nh}{2\pi} \Rightarrow L = n\hbar \text{ 角动量量子化条件}$$

第一玻尔速度  $v_1 = \alpha c$

$$\lambda = \frac{h}{mac} = 2\pi \frac{\hbar}{amc} = 2\pi a_1$$



## 例二：刚性匣子中的粒子

设想一个粒子处于壁为刚性的匣子中作一维运动, 如图所示

由经典理论知, 这个粒子在匣子中的动能恒为  $\frac{1}{2}mv^2$   
周期  $T = \frac{2d}{v}$

德布罗意物质波观点, 粒子要想在匣子中, 其对应的德布罗意波必须穿不出匣子的壁——驻波

$$n \frac{\lambda}{2} = d, n = 1, 2, \dots$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{nh}{2d} \Rightarrow E_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{n^2 h^2}{8md^2}$$

能量和动量都是量子化的, 且不存在能量为0的状态——绝对静止是不存在的

禁闭的波必然导出量子化条件

