数学物理方法

Mathematical Methods in Physics

武汉大学

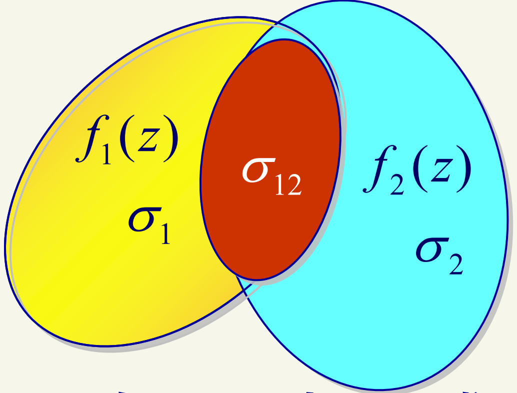
物理科学与技术学院

第四章 解析延拓· Γ 函数

Extending analytical function

Γ function

一. 解析延拓



1. 解析延拓定义

设$f_1(z)$在区域σ_1中解析，若$f_2(z)$在另一与区域σ_1有重叠部分σ_{12}的区域σ_2中解析，且在σ_{12}中$f_2(z)\equiv f_1(z)$，则称$f_2(z)$为$f_1(z)$在σ_2中的解析延拓。同样亦称$f_1(z)$为$f_2(z)$在σ_1中的解析延拓。

例如：$f_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^k,\quad |z|<1 \qquad f_2(z)=\dfrac{1}{1-z},\quad z\neq 1$

$$|z|<1:\quad f_1(z)\equiv f_2(z)$$

简单地说，解析延拓，就是把已知区域内解析的函数推广到更大的区域上去。或者说解析延拓就是将解析函数的定义域加以扩大。

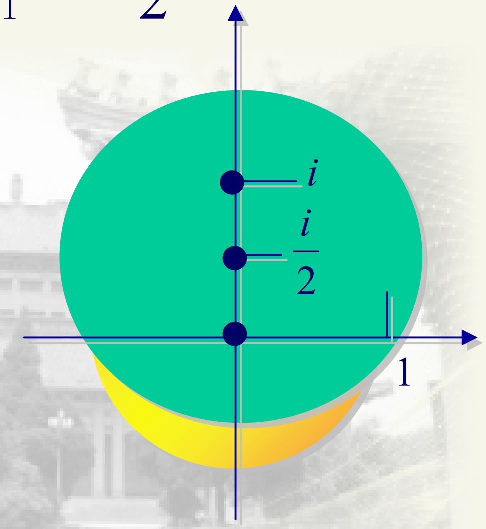
一. 解析延拓

2. 解析延拓的方法–泰勒展开

例： $f_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^k,\quad |z|<1\quad f_1(z)\in H(\sigma_1:\ \ |z|<1)$

记 $$f_2(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_1^{(k)}(\frac{i}{2})}{k!}(z-\frac{i}{2})^{\mathrm{k}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z-\frac{i}{2})^{\mathrm{k}+1}}(z-\frac{i}{2})^{\mathrm{k}}$$

$$R=\left|1-\frac{i}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

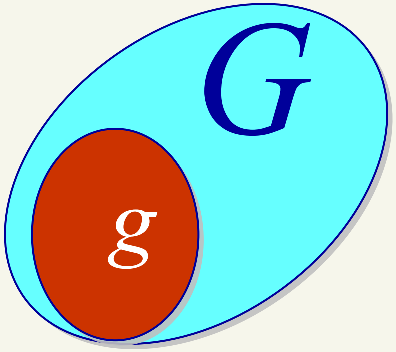


则 $f_2(z)\in H(\sigma_2:\left|z-\frac{i}{2}\right|<\frac{\sqrt{5}}{2})$

泰勒展开法繁,此外还可利用函数关系,施瓦茨反射原理等(见4.2,4.3).

一. 解析延拓

3. 解析延拓的内唯一性定理



设$f_1(z)$和$f_2(z)$在区域G中均解析，若在G的任一子区域g中$f_1(z)\equiv f_2(z)$，则在整个区域G中必有$f_1(z)\equiv f_2(z)$。

由此可见，解析函数 $e^z,\sin z,\cos z$等分别由实函数$e^x,\sin x,\cos x$等唯一确定。换句话说，只要这些函数是解析的，而且在实轴上取值$e^x,\sin x,\cos x$等，那末这些函数在整个复平面上便只能如1.4节那样所定义。

由此定理还可推知，我们所熟知的各种初等函数的等式，在复变函数中也均成立。

例如： $\sin 2x = 2\sin x\cos x \quad \to \sin 2z = 2\sin z\cos z$

因为$\sin 2z$和$2\sin z\cos z$都是解析函数，而且他 们在实轴上相等。

二、Γ函数

1、Γ函数的定义

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt \quad \operatorname{Re} z>0$$

这积分又成为第二类欧 拉($Euler$)积分

2. Γ函数的基本性质

$$(1)\ \Gamma(1)=1$$

$$(2)\ \Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$$

$$(3)\ \Gamma(n+1)=n!\quad N=0,1,2.\ldots\ldots$$

$$(4)\ \Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi/\sin\pi z$$

$$(5)\ \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$$

二、Γ 函数

3. Γ 函数的解析性

（1）定义:在有限区域中除极点外别无其它奇点的函数称为半纯函数.

（2）Γ 函数是半纯函数

（3）Γ 函数在全平面除 $z=0,-1,-2,\cdots,-n,\cdots$ 这些一阶极点之外是处处解析的。

三、B函数

1、B函数的定义

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \quad \mathrm{Re}\,p>0, \mathrm{Re}\,q>0$$

这积分又成为第一类欧 拉($Euler$)积分

2. B函数的基本性质

令 $t=\sin^2\varphi$

(1) $\mathrm{B}(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\varphi\cos^{2q-1}\varphi d\varphi$

(2) $\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

(3) $\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)$

Good-by!


福娃 Friendlies
福娃贝贝
Beibei
福娃晶晶
Jingjing
福娃欢欢
Huanhuan
福娃迎迎
Yingying
福娃妮妮
Nini