数学物理方法

Mathematical Methods in Physics

第二章解析函数积分习题课

武汉大学

物理科学与技术学院

Wuhan University

本 章 小 结

一、若$f(z)\in H(\sigma)$，在$\overline{\sigma}=\sigma+L$上连续，则

$$\boxed{\oint_L f(z)dz=0} \rightarrow \begin{cases} \boxed{\oint_l f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\oint_{l_k} f(z)dz}, & L=l+\sum_{k=1}^{n} l_k \\ \boxed{\oint_l f(z)dz=0}, & L=l \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta}$$

可计算复变函数的围道积分

本 章 小 结

若$f(z)\in H(\sigma)$，在$\overline{\sigma}=\sigma+l$上连续，则

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \rightarrow$$

- 柯西不等式 $\left|f^{(n)}(z)\right|\le\frac{n!Ms}{2\pi d^{n+1}}$
- 刘维尔定理 $\left|f(z)\right|\le M\rightarrow f(z)=c$
- 模数原理 $\max\left|f(\zeta)\right|=M\rightarrow\left|f(z)\right|\le M$
- 平均值定理 $f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}f(a+\mathrm{R}e^{i\varphi})\,d\varphi$
- 摩勒纳定理 $f(z)$连，$\oint_l f(z)dz=0$ $\rightarrow$ $f(z)\in H(\sigma)$

二、复积分重要公式：

$$\left|\int_l f(z)\,dz\right|\le\int_l\left|f(z)\right|\cdot\left|dz\right|\le Ms$$

$$\oint_l\frac{dz}{(z-a)^n}=\begin{cases}2\pi i\ ,\ n=1\\ 0\ ,\ n\ne1\end{cases}$$

习题解析

一、沿非闭合路径的积分

二、沿闭合路径的积分

三、估计积分值

四、实定积分的计算

一、沿非闭合路径的积分

计算途径有2：

1）若 $f(z)$不解析，则

$$\int_l f(z)dz = \begin{cases} \int_l udx - vdy + i\int_l vdx - udy \\ \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt \end{cases}$$

2) 若 $f(z)\in H(\sigma)$则

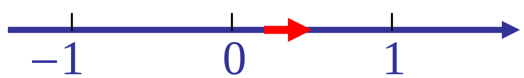
$$\int_{Z_0}^{Z} f(\zeta)d\zeta = F(z) - F(z_0),\quad F'(z) = f(z)$$

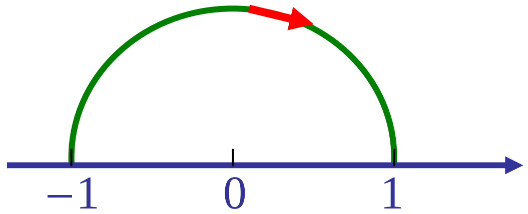
一、沿非闭合路径的积分

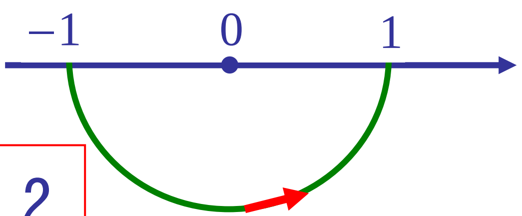
1、学习指导P46例1：

计算 $I=\int_{-1}^{1}|z|dz$ ，积分路径是

（1）直线段;（2）单位圆周的上半;（3）单位圆周的下半



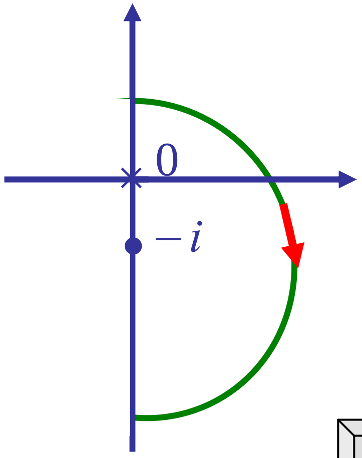




答:1; 2; 2

思考: $\int_{-3i}^{i}\frac{1}{z^2}dz=?$

沿 $|z+i|=2$ 的右半圆周



答: $\frac{4i}{3}$

二、沿闭合路径的积分

步骤：1、判断被积函数有无奇点？有何奇点？

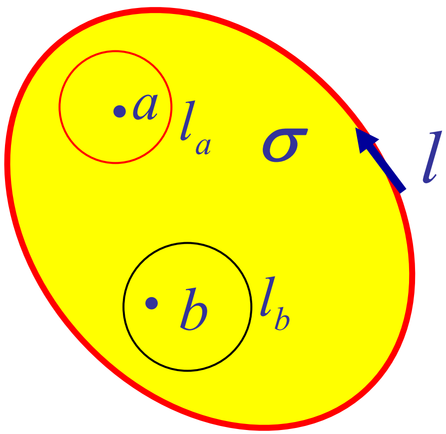
2、围道内有无奇点？有何奇点？

3、选择适当公式

若$f(z)\in H(\sigma)$，在$\overline{\sigma}=\sigma+l$上连续，则

公式：1) $\oint_l f(z)dz=0$

2) $\oint_l \frac{f(z)}{z-a}dz=2\pi i f(a)\quad a,b\in\sigma$



3) $\oint_l \frac{f(z)}{(z-a)^n}dz=\frac{2\pi i}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)$

4) $\oint_l \frac{f(z)}{(z-a)^n(z-b)}dz=2\pi i\frac{f(b)}{(b-a)^n}+\frac{2\pi i}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\frac{f(z)}{z-b}\right]_{z=a}$

二、沿闭合路径的积分

1、计算： $I=\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z^2+5z+6}dz$ 答：0

2、“指导”P48例3（5）

计算： $I=\oint_{|z|=3}\frac{1}{z^3(z+1)(z-1)}dz$ 答：0

法一： $I=\oint_{l_1}\frac{\frac{1}{(z^2-1)}}{z^3}dz+\oint_{l_2}\frac{\frac{1}{z^3(z-1)}}{z+1}dz+\oint_{l_3}\frac{\frac{1}{z^3(z+1)}}{z-1}dz=0$

法二：令 $\frac{1}{z^3(z+1)(z-1)}=\frac{A_1}{z^3}+\frac{A_2}{z^2}+\frac{A_3}{z}+\frac{A_4}{z+1}+\frac{A_1}{z-1}$

$$=\frac{(A_3+A_4+A_5)z^4+(A_2-A_4+A_5)z^3+(A_1-A_3)z^2-A_2z-A_1}{z^3(z+1)(z-1)}$$

二、沿闭合路径的积分

$$\oint_l \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

$$\oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z)$$

法二
$$A_3 + A_4 + A_5 = 0$$
$$A_2 - A_4 + A_5 = 0$$
$$A_1 - A_3 = 0$$
$$A_2 = 0, \quad -A_1 = 1$$

$\longrightarrow$
$$A_2 = 0,$$
$$A_1 = -1$$
$$A_3 = -1$$
$$A_4 = A_5 = \frac{1}{2}$$

3、“指导”P50例6

已知 $f(z) = \oint_{|\zeta|=3} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} d\zeta$，求 $f'(1+i)$

答: $-12\pi + 26\pi i$ 问: $f'(4+i) = ?$

4、求积分 $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$，从而证明: $\int_0^\pi e^{\cos\theta} \cos(\sin\theta) d\theta = \pi$

问: 怎样证 $\int_0^\pi e^{\rho\cos\varphi} \cos(\rho\sin\varphi - n\varphi) = \frac{2\pi\rho^n}{n!}$

三、积分估计值

1、“指导”P52, 例8 (1) :

$$\left|\int_l f(z)\,dz\right| \le \int_l |f(z)|\cdot|dz| \le Ms$$

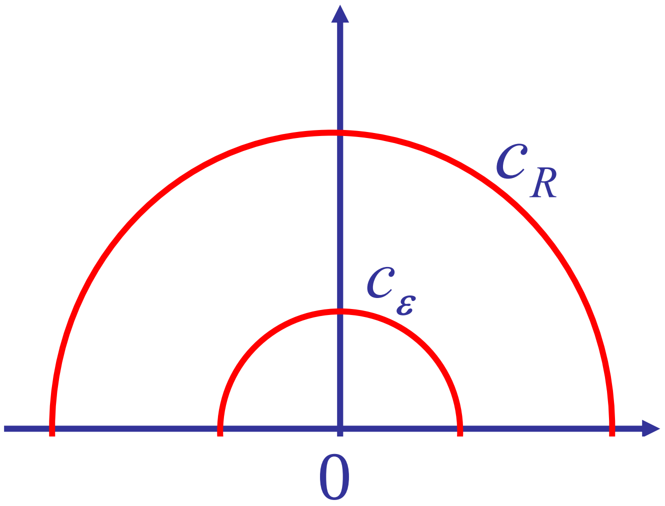
证明: $\left|\int_{-i}^{i}(x^2+iy^2)dz\right| \le 2$ （沿直线）

2、“指导”P53, 例10:

证明：1) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{c_\varepsilon}\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}dz = 0$;

2) $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{c_R}\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}dz = 0$;

$0<\alpha<1$



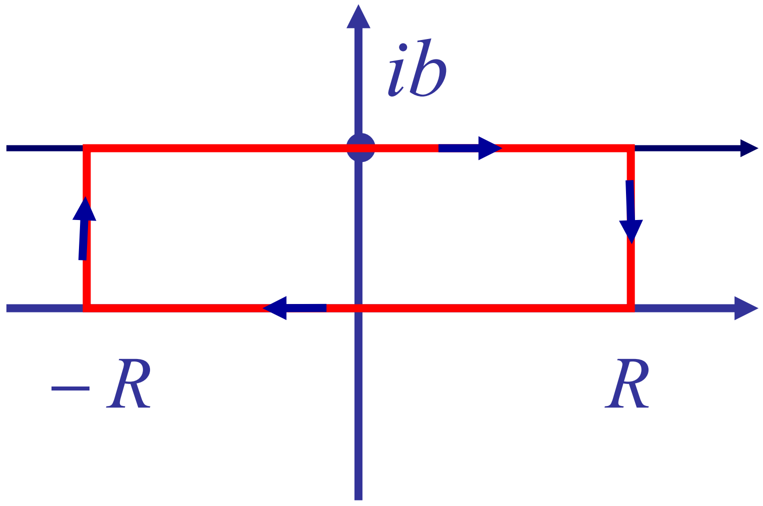
$$|z_1+z_2| \ge \big||z_1|-|z_2|\big|$$

四、计算实积分

1、“指导”P53例

计算下列积分之值

$$I=\int_{-\infty+ib}^{\infty+ib}e^{-az^2}dz\,,\quad a,b>0$$



答: $\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$

Good-by!