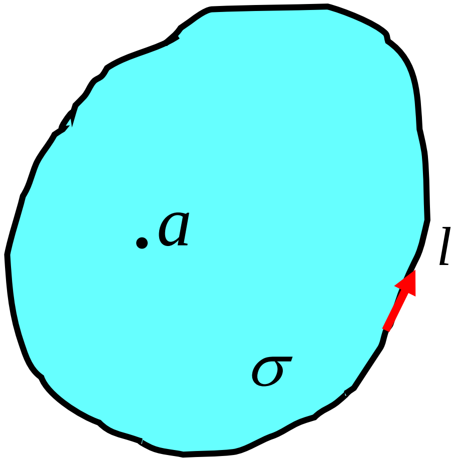
数学物理方法

Mathematical Methods in Physics

武汉大学

物理科学与技术学院

问题的引入：



$$\oint_l \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}dz = \begin{cases} 0, & n \le 0 \\ 2\pi i\varphi(a), & n = 1 \\ \dfrac{2\pi i}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(a), & n > 1 \end{cases}$$

$$\oint_{|z|=\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{\sin z}dz = ?$$ （$z = n\pi, n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$ **为单极点**）

$$\oint_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}}dz = ?$$ （$z=0$ **为本性奇点**）

第五章　留数定理

The theorem of residues

中心：用留数理论计算积分。

目的：1.留数的定义及计算方法。

2.用留数定理计算围道积分。

*3.用留数定理计算实积分。

§ 5.1 留数定理

一、留数定理

1、留数的定义

若b为$f(z)$的孤立奇点,则

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k(z-b)^k,(0<|z-b|<R)$$

称$\frac{1}{z-b}$的系数C_{-1}为$f(z)$在孤立奇点b处的留数。

记 $resf(b)=C_{-1}$ 或 $res[f(z),b]=C_{-1}$

$f(z)=\frac{1}{1-z}$, $resf(1)=?$ $\quad \text{res}\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{z}},0\right)=?$ X

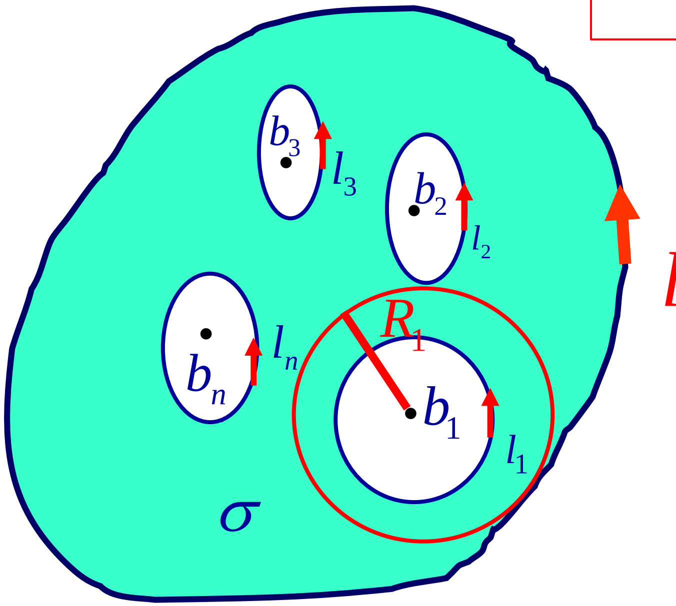
答: $resf(1)=-1$

一、留数定理

2、留数定理

设$f(z)$在σ内除有孤立奇点$b_k\,(k=1,2,\cdots,n)$外单值解析，在$\bar{\sigma}=\sigma+l$上连续，则

$$\boxed{\oint_l f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(b_k)}$$



注：$\boxed{\operatorname{res} f(b_k)=C_{-1}=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{l_k} f(z)dz}$

例1 $\oint_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}}dz=?$　答：$2\pi i$

二、无穷远点的留数

1、定义：

$$\operatorname{res} f(\infty)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{l} f(z)\,dz$$

其中，l 包围了所有的有限远点的孤立奇点。

2、易证：

$$\operatorname{res} f(\infty)=-C_{-1}\quad ,\ R<|z|<\infty$$

例2　求 $\operatorname{res}\left(\frac{1+z^2}{e^z},\infty\right)=?$　　答：0

3、全平面留数之和为0：

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(b_k)+\operatorname{res} f(\infty)=0$$

二、无穷远点的留数：

注意：

(1) $\operatorname{res} f(b_k) = C_{-1},\ 0 < |z - b_k| < R_k$

$\operatorname{res} f(\infty) = -C_{-1},\ R < |z| < \infty$

(2) 若b_k为可去奇点, 则$res f(b_k) = 0$

(3) 即使$z = \infty$为可去奇点, $\operatorname{res} f(\infty)$也不一定为0。

三、留数的计算方法

1、由定义计算

$$res\, f(b_k)=\begin{cases} C_{-1},\ 0<|z-b_k|<R_k \\ \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{l_k} f(z)dz \end{cases}$$

$$res\, f(\infty)=\begin{cases} -C_{-1},\ |z|>R \\ \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{l} f(z)dz \end{cases}$$

例3 $res[\dfrac{5z-2}{z(z-1)},0]=?$ 答：2

三、留数的计算方法

2、极点处的留数计算公式

若b为$f(z)$的n阶极点,则

$$\operatorname{res}f(b)=\begin{cases}\dfrac{1}{(n-1)!}\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-b)^n f(z)\right]_{z=b}\\[2em] \lim\limits_{z\to b}[(z-b)f(z)], \qquad n=1\end{cases}$$

例4 $res[\dfrac{1}{(z^2+1)^2},i]=?$ 答: $\dfrac{-\ i}{4}$

三、留数的计算方法

注：当b为单极点时，若 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$,

$\varphi(z)$、$\psi(z)\in H(\sigma)$; $\varphi(b)\neq 0,\psi(b)=0,\psi'(b)\neq 0,$，则

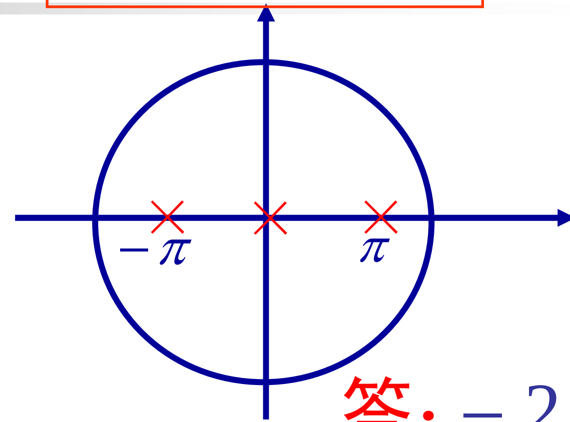
$$\boxed{res\ f(b)=\frac{\varphi(b)}{\psi'(b)}}$$

例5 $res[\dfrac{1}{z^4-1},i]=?$ 答：$\dfrac{i}{4}$

奇点：$1,i,-1,-i$ (单极点）

四、留数定理计算围道积分

例6 $$\oint_{|z|=\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{\sin z}\,dz = ?$$



奇点：$z = n\pi, n = 0, \pm 1, \cdots$（单极点）

答：$-2\pi i$

$$\oint_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}}\,dz = ?$$ 答：$2\pi i$

例7 $$\oint_{|z|=2} \frac{1}{(z-3)(z^5-1)}\,dz = ?$$

怎么做较好？

奇点：$z_k = e^{i\frac{2n\pi}{5}}, n = 0,1,2,3,4; k = 1,2,3,4,5,$（单极点）

$$z_6 = 3 \notin (|z| < 2)$$

答：$\dfrac{-\pi i}{121}$

五、小结

$$\oint_l f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res} f(b_k)$$

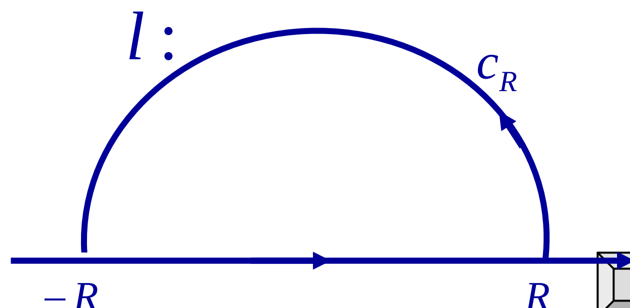
$$res\ f(b_k) = C_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{l_k} f(z)dz$$

若b_k为n阶极点

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!}\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-b_k)^n f(z)\right]_{z=b_k} \\ \lim\limits_{z\to b}\left[(z-b_k)f(z)\right], \text{或} \dfrac{\varphi(b_k)}{\psi'(b_k)}, n=1 \end{cases}$$

$$\mathrm{res}\, f(\infty) = \frac{1}{2\pi i}\oint_l f(z)dz = -C_{-1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = ?$$



柯西理论和留数理论差异？

柯西理论

设 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^n},\varphi(z)\in H(\sigma),$

在 $\overline{\sigma}=\sigma+l$ 上连续，则

$$\oint_l \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}dz=\begin{cases}0\,, & n\le 0\\ 2\pi i\varphi(a)\,, & n=1\\ \dfrac{2\pi i}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(a)\,, & n>1\end{cases}$$

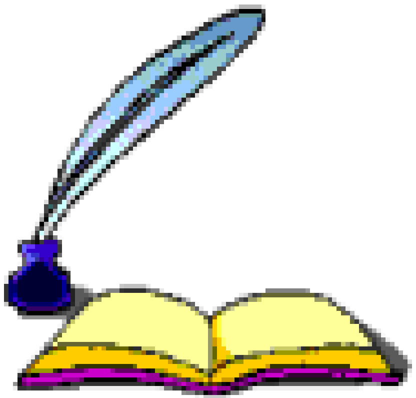
留数理论

设 $f(z)$ 在 σ 内除有孤立奇点 $b_k\,(k=1,2,\cdots,n)$ 外单值解析，在 $\overline{\sigma}=\sigma+l$ 上连续，则

$$\oint_l f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{res}\,f(b_k)$$

结论：柯西理论能解决的问题留数理论均能解决。反之则不然。

本节作业



习题5. 1:

1 (2)（4）

2（1)（5）

3 (1)

Good-by!