第16卷 第3期 南京师大学报(自然科学版) Vol. 16 No. 3
1993年 JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science) 1993

教学研究

平面界面下的静电问题①

陆建隆

(物理系)

0 引言

在求解静电场问题中，最为方便和重要的求解方法是电像法。它可解决在一些特殊形状边界下求解有限个点电荷所激发电场一类的问题。采用的方法是避开直接求解方程，在对问题作具体分析后，把边界上的束缚电荷和(或)感应电荷激发的场用一个或几个称为像电荷的点电荷贡献来作等效替代。只要设法知道这些像电荷的大小和位置，静电场分布就求得了。由静电问题的唯一性定理，这个解就是我们所要求的唯一正确解。该方法还适用于类似的静磁场问题。

本文对界面为平面的情况作了专门的讨论，特别是界面为介质分界面的情况，在考虑了介质的微观本质后，很好地处理了极化电荷，从而在电势分布等公式中，介电常数一律以ε_0描写，而不用原介电常数ε。这样求解的好处是物理图像更清晰，求解过程更简洁。本文主要讨论导体与介质的分界面及介质与介质的分界面，真空可视为介电常数为ε_0的介质。这里所指的介质均为均匀各向同性的线性介质。

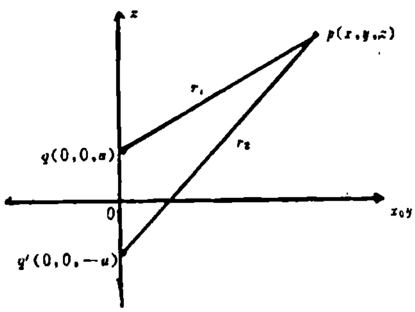

图 1

1 真空与导体的分界平面

不失一般性，我们考虑如下问题。真空中有一无限大导体平板，离平板距离a处置一点电荷q，如图1，求空间电势。

该问题的求解可在任一电动力学[1]书中找到，这里简述如下：

取图1所示坐标内，其定解问题可写为

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi=-\dfrac{q}{\varepsilon_0}\delta(x,y,z-a) & z>0 \\ \varphi(x,y,0)=0 & \end{cases} \tag{1}$$

① 本文于1992年12月28日收到。

由电像法，界面感应电荷激发的场可用一像电荷q'的贡献来等效。像电荷的大小及位置分别为$q'=-q$和$(0,0,-a)$。所求电势为

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) \tag{2}$$

其中$r_1=[x^2+y^2+(z-a)^2]^{1/2}$；$r_2=[x^2+y^2+(z+a)^2]^{1/2}$ (3)

由(2)界面的感应电荷分布及感应总电荷q'分别为

$$\sigma=-\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=0}=-\frac{qa}{2\pi(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \tag{4}$$

$$q'=\iint\sigma ds=-q \tag{5}$$

进而我们可求出电荷q与界面感应电荷的作用力。q受到的作用力为

$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2a)^2}(-\hat{e}_z) \tag{6}$$

而导体界面受到的作用力为

$$\vec{F}'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{(2a)^2}e_z \tag{7}$$

(6)，(7)比较有 $\vec{F}=-\vec{F}'$ 满足牛顿第三定律。这里参与电相互作用的电荷只有点电荷q与导体界面上的感应电荷。

2 介质与导体的分界平面

在上节问题中把上半平面换成充满介电常数为ε的介质，其它不变，求电势分布。

容易写出定解问题为

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi=-\dfrac{1}{\varepsilon}q\delta(x,y,z-a) & z>0\\ \varphi(x,y,0)=0\end{cases} \tag{8}$$

先对该题作一分析。从微观角度讲，介质实际上是大量的带电粒子的集合。整个呈电中性。对于单个荷电粒子，其电磁运动规律遵从麦克斯韦方程组，这时的场量为微观量。但在我们所研究的宏观电磁现象里，所讨论的物理量是在一个包含大数目分子的物理小体积内的平均值，称宏观量。这样在考虑了介质的作用后，介电常数就可一律用ε_0描写。在这里所讨论的问题中，$z>0$区域的介质在q激发的电场作用下产生极化电荷，而导体板由于q作用还产生感应电荷。我们要求的场实际上是由点电荷q、极化电荷及感应电荷共同激发的。极化电荷分为两部分：一部分分布在区域内，另一部分分布在界面上，大小可由下式表示

$$\begin{cases}\rho_p=-\nabla\cdot\vec{P}\\ \sigma_p=-\vec{n}\cdot(\vec{P}_2-\vec{P}_1)\end{cases} \tag{9}$$

其中$\vec{P}$为极化强度矢量，$\vec{n}$的方向为1到2。

在弱外场下，对本文所讨论的介质有

$$\rho_p=-\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\rho_f \tag{10}$$

其中 ρ_f 为自由电荷密度。由(10)知,在(0,0,a)处有一极化点电荷,电量 $q_p = -(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})q$。由电像法,把界面上的极化电荷与感应电荷共同激发的场用一像电荷 q' 的贡献来等效。位置为(0,0,$-a$)。只要知道 q' 的大小,问题即可解得。为此我们写出电势分布

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q+q_p}{r_1}+\frac{q'}{r_2}\right) \tag{11}$$

其中 r_1、r_2 同(3)式,$q+q_p=\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_q}q$。

由 $\varphi(x,y,0)=0$ 我们求得

$$q' = -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}q \tag{12}$$

最后求得电势分布为

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) \tag{13}$$

关于电相互作用问题,电荷 q 受到的作用来源于介质的极化电荷及导体板上感应电荷。在上面求解中是用 q_p,q' 来等效的。先考虑 q_p,其位置(0,0,a)。众所周知,点电荷只是理想的数学模型,物理荷电体系总是有线度的,q_p 也不例外。由对称性知,q_p 分布在以(0,0,a)为中心的小球体的球面上,它对 q 的净作用效果为零。这样电荷 q 仅受到 q' 的作用。

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{(2a)^2}(\hat{e}_z) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q^2}{(2a)^2}\hat{e}_z \tag{14}$$

至于界面上的极化电荷和感应电荷所受到的作用力源于 q,q_p。

$$\vec{F}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'\cdot(q+q_p)}{(2a)^2}(-\hat{e}^z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^2\frac{q^2}{(2a)^2}\hat{e}_z \tag{15}$$

(14)、(15)两式比较,$F\neq -F'$,不满足牛顿第三定律,其原因是此时情况不同于真空情形,在两种情况下参与电相互作用的电荷不同,(14),(15)中作用力不是仅仅两个电荷之间的。

3　介质与介质的分界平面

问题　空间充满二种介质,介电常数分别为 ε_1 和 ε_2,其分界面为一无限大平面,如图 2 在离界面距离 a 处置一点电荷 q,求电势分布。

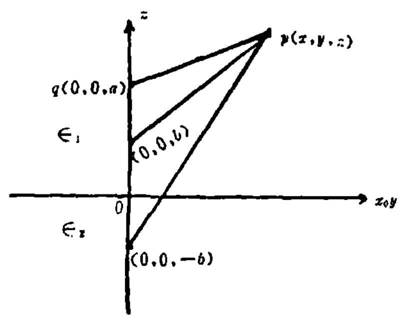

图 2

在取如图 2 示的坐标系后,定解问题可写为:

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi_1 = -\frac{1}{\varepsilon_1}q\delta(x,y,z-a) & z>0 \\ \nabla^2\varphi_2 = 0 & z<0 \\ \varphi_1|_{r\to\infty}=0; \quad \varphi_2|_{r\to\infty}=0 & \\ z=0: \varphi_1=\varphi_2; \varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} & \end{cases} \tag{16}$$

类似 1 节的讨论,空间某点的场由以下电荷共同激发。电荷 q,极化电荷 $q_p = -(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1})$,位置(0,0,$a$)以及界面上的极化电荷。由电像法,界面极化电荷以像电荷 q' 等效,其位置

视求解区域而定，只要像电荷不破坏求解区域原来的电荷分布及边界条件。

(1)$z>0$：设 q' 置于$(0,0,-b)$ b 为某正数，则

$$\varphi_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q+q_p}{r_1}+\frac{q'}{r_2}\right) \tag{17}$$

其中 $r_1=[x^2+y^2+(z-a)^2]^{1/2}$； $r_2=[x^2+y^2+(z+b)^2]^{1/2}$ (18)

(2)$z<0$，q' 置于$(0,0,b)$，则

$$\varphi_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q+q_p}{r_1}+\frac{q'}{r_3}\right) \tag{19}$$

其中 $r_3=[x^2+y^2+(z-b)^2]^{1/2}$。把 φ_1，φ_2 代入边界条件求得 b，q'。这里 $\vec{n}$ 为 $-\hat{e}_z$ 方向。由(17)、(18)、(19)得

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}q}{(x^2+y^2+a^2)^{1/2}}+\frac{q'}{(x^2+y^2+b^2)^{1/2}}\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}q}{(x^2+y^2+a^2)^{1/2}}+\frac{q'}{(x^2+y^2+b^2)^{1/2}}\right] \tag{21}$$

$$\frac{\varepsilon_0 qa}{\varepsilon_1(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)=\frac{q'b}{(x^2+y^2+b^2)^{3/2}}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) \tag{22}$$

要使任意的 x、y、(22)式均成立，则必须

$$\begin{cases}b=a\\ q'=\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q\end{cases} \tag{23}$$

从而求得问题[3]的电势分布为

$$\varphi=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left(\dfrac{q}{r_1}+\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\dfrac{q}{r_2}\right) & z>0\\ \dfrac{q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r_1} & z<0\end{cases} \tag{24}$$

文献[2]也得到该结果，不过这里的物理图像清楚，易掌握。这时界面上的极化电荷分布及总量为

$$\begin{cases}\sigma_p=-\vec{n}\cdot(\vec{P}_2-\vec{P}_1)=\dfrac{\varepsilon_0}{2\pi}\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\dfrac{qa}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}\\ Q_p=\iint\sigma_p ds=\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q=q'\end{cases} \tag{25}$$

类似前面讨论电荷 q 受到的作用力为

$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\frac{q^2}{(2a)^2}\hat{e}_z \tag{26}$$

若$\varepsilon_1>\varepsilon_2$ 表现为排斥力；而$\varepsilon_1<\varepsilon_2$ 则表现为吸引力。同理界面极化电荷受到的作用力为

$$\vec{F}'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)^2\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{q^2}{(2a)^2}(-\vec{e}_z) \tag{27}$$

与(26)式比较 $\vec{F}'\neq-\vec{F}$. 也不同于真空情形，其原因还是由于介质中极化电荷的作用。

对介质分界面下静电问题的解可作如下讨论。

①$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_0$，则 $q_p=0$，$q'=0$，而电势为

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_1}$$

此即为熟知的结果。

②由于介电常数反映了介质的极化情况，其大小与电荷的束缚程度成反比。ε越大，介质内电荷受到的束缚越小。故当ε趋于无穷大时，介质内电荷就完全自由，故可把$\varepsilon\to\infty$作为由介质向导体过渡的描述。

当$\varepsilon_1 = \varepsilon_0, \varepsilon_2 \to \infty$时，有$q_p = 0, q' = -q$

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right) & z > 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

此即为第1节问题的结果。

以上讨论了平面界面下的静电问题，对不同类型的界面给出了电势分布，界面的束缚电荷或感应电荷，以及自由电荷与界面电荷所受到的作用力。由于介质极化，两者受到的作用力不再与真空情形相同，因此，我们必须做到具体情况具体分析。一般来说，对于界面为介质分界面，用电像法求解是困难的，如界面为球面时，用分离变数法反而容易，而用电像法则繁琐得很，有兴趣的读者可参阅有关文献。

参考文献

1 郭硕鸿。电动力学，高教出版社，1979

2 朗道等。连续媒质电动力学(中译本)。人民教育出版社，1963:57