第十五章 Bessel 函数习题 课

*本章主要内容：

*例题分析：

一、贝塞尔函数的有关性质

二、在柱坐标中 $\Delta u+\lambda u=0$ $\Delta u=0$ 的解

三、在球坐标中 $\Delta u+\lambda u=0$ 的解

一、亥姆赫兹方程和拉普拉斯方程在柱坐标中的解

$$\left.\begin{array}{r}\Delta u+\lambda u=0\\ \Delta u=0\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{令}u=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)}$$

$$\Phi''+n^2\Phi=0\rightarrow\Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi$$

$$Z''+\mu Z=0\ (\text{若}\mu<0,\text{记}\ \mu=-k^2,)\rightarrow Z(z)=c_1e^{kz}+d_2e^{-kz}$$

$$(\text{若}\mu>0,\text{记}\ \mu=k^2\ )\rightarrow Z(z)=c_1\cos kz+d_2\sin kz$$

$$\boxed{\rho^2R''+\rho R'+[(\lambda-\mu)\rho^2-n^2]R=0}$$

当$\lambda-\mu\geq 0$时，记$k^2=\lambda-\mu,x=k\rho,y(x)=R(\rho)$,

$$\boxed{x^2y''(x)+xy'(x)+(x^2-n^2)y(x)=0\rightarrow y(x)=J_n(x)}$$

当$\lambda-\mu<0$时，记$-k^2=\lambda-\mu,x=k\rho,y(x)=R(\rho)$,

$$\boxed{x^2y''(x)+xy'(x)-(x^2+n^2)y(x)=0\rightarrow y(x)=I_n(x)}$$

二、本征值问题：

$$\begin{cases} \rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + (k^2\rho^2 - n^2)R(\rho) = 0 \\ R(a) = 0 \end{cases}$$

本征值为： $k_m^n = \dfrac{x_m^n}{a}, m = 1,2,\cdots$

本征函数为： $R_m(k\rho) = J_n(\dfrac{x_m^n}{a}\rho), m = 1,2,\cdots$

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\theta - n\theta)} d\theta \qquad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

三、贝塞尔函数的性质

（1）母函数关系式

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n \quad (1)$$

（2）递推公式：

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}[x^{\nu}J_{\nu}(x)]=x^{\nu}J_{\nu-1}(x) & (2)\\ \dfrac{d}{dx}[x^{-\nu}J_{\nu}(x)]=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x) & (3)\end{cases}$$

（3）正交性

$$\int_0^a \rho J_n(k_m^n\rho)J_n(k_l^n\rho)d\rho=\frac{a^2}{2}J_{n+1}^2(k_l^n a)\delta_{ml} \quad (8)$$

（4）广义傅氏展开

$$f(\rho)=\sum_{m=1}^{\infty}c_m J_n(k_m^n\rho)$$

$$c_m=\frac{1}{\frac{a^2}{2}J_{n+1}^2(k_m^n a)}\int_0^a \rho f(\rho)J_n(k_m^n\rho)d\rho$$

四、球坐标系中亥母霍兹方程的解

$$\Delta u+\lambda u=0 \xrightarrow{\text{令}u=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)}$$

$$\begin{cases}\Phi''+m^2\Phi=0 & \Phi_m(\varphi)=A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi \\ \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left[l(l+1)-\dfrac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta=0 & \Theta(\theta)=p_l^m(\cos\theta) \\ \boxed{r^2R''+2rR'+[k^2r^2-l(l+1)]R=0\ (k^2=\lambda)} & \end{cases}$$

$$\Big\downarrow\ x=kr,\ y(x)=R(r)$$

$$\boxed{x^2y''+2xy'+[x^2-l(l+1)]y=0} \longrightarrow \boxed{\text{球Bessel方程}}$$

$$y(x)=j_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{l+\frac{1}{2}}(x)$$

*例题分析

一、贝塞尔函数的有关性质

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}[x^{\nu}J_{\nu}(x)] = x^{\nu}J_{\nu-1}(x) & (2) \\ \dfrac{d}{dx}[x^{-\nu}J_{\nu}(x)] = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x) & (3) \end{cases}$$

$1.\int x^4 J_1(x)dx = ?$

法一：

$$\int x^4 J_1(x)dx = \int x^2[x^2 J_1(x)]dx \quad = \int x^2 \frac{d}{dx}[x^2 J_2(x)]dx$$

$$= x^4 J_2(x) - 2\int x^3 J_2(x)dx$$

$$= x^4 J_2(x) - 2\int \frac{d}{dx}[x^3 J_3(x)]dx$$

$$\boxed{= x^4 J_2(x) - 2x^3 J_3(x) + c}$$

*例题分析

一、贝塞尔函数的有关性质

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}[x^{\nu}J_{\nu}(x)] = x^{\nu}J_{\nu-1}(x) & (2) \\ \dfrac{d}{dx}[x^{-\nu}J_{\nu}(x)] = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x) & (3) \end{cases}$$

$$1.\int x^4 J_1(x)dx = ?$$

法二： $(3) \rightarrow J_1(x) = -J_0'(x)$

$$\int x^4 J_1(x)dx = -\int x^4 J_0'(x)dx = -x^4 J_0(x) + \int J_0(x)dx^4$$

$$= -x^4 J_0(x) + 4\int x^2 [xJ_0(x)]dx$$

$$= -x^4 J_0(x) + 4\int x^2 \frac{d}{dx}[xJ_1(x)]dx$$

$$= -x^4 J_0(x) + 4x^3 J_1(x) - 4\int xJ_1(x)dx^2$$

$$\boxed{= -x^4 J_0(x) + 4x^3 J_1(x) - 8x^2 J_2(x) + c}$$

知识点：递推公式

*例题分析

一、贝塞尔函数的有关性质

$$1.\int x^4 J_1(x)dx = ?$$

法二：$\int x^4 J_1(x)dx \boxed{= -x^4 J_0(x) + 4x^3 J_1(x) - 8x^2 J_2(x) + c}$ (B)

法一：$\int x^4 J_1(x)dx \boxed{= x^4 J_2(x) - 2x^3 J_3(x) + c}$ (A)

$$\because \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) \quad (7)$$

$$\nu = 1: \frac{2}{x} J_1(x) = J_0(x) + J_2(x) \to \quad J_0(x) \to J_1(x), J_2(x)$$

$$\nu = 2: \frac{2}{x} J_2(x) = J_1(x) + J_3(x) \to \quad J_1(x) \to J_2(x), J_3(x)$$

故 (B) ⇒ (A)

*例题分析

一、贝塞尔函数的有关性质

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(x\sin\theta-n\theta)}d\theta$$

$$J_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ibx\sin\theta}d\theta$$

2. $I=\int_0^{\infty}e^{-ax}J_0(bx)dx=?,a>0$

$$I=\int_0^{\infty}e^{-ax}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ibx\sin\theta}d\theta dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty}e^{-(a-ib\sin\theta)x}dxd\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{a-ib\sin\theta}d\theta$$

令 $z=e^{i\theta}$

$$=\frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=1}\frac{1}{a-\frac{b}{2z}(z^2-1)}\frac{dz}{iz}=\frac{-1}{\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{1}{bz^2-2az-b}dz$$

$$=\frac{-1}{\pi i}\cdot 2\pi i\,\mathrm{res}[f(z),\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{b}]=-2\frac{1}{2bz-2a}\Bigg|_{\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{b}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

知识点：贝赛尔 函数地积分表示

*例题分析

一、贝塞尔函数的有关性质

3. 试证:
$$\begin{cases} \cos x = J_0(x) + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m J_{2m}(x) \\ \sin x = 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m J_{2m+1}(x) \end{cases}$$

分析: $e^{ix} = \cos x + i\sin x$

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n \quad (1)$$

只要 $e^{ix} = e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} \rightarrow \frac{1}{2}(t-\frac{1}{t}) = i$

$\rightarrow t^2 - 2it - 1 = 0 \qquad \rightarrow t = i$

*例题分析

知识点：贝赛尔函数，母函数关系

一、贝塞尔函数的有关性质

证明：$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n \quad (1)$ 令 $t=i$, 则

$$(1)\to e^{ix}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)i^n=\sum_{n=-1}^{-\infty}J_n(x)i^n+J_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}J_n(x)i^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}[J_{-n}(x)\frac{1}{i^n}+J_n(x)i^n]+J_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n\frac{1}{i^n}+i^n]J_n(x)+J_0(x)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}2i^nJ_n(x)+J_0(x)=\sum_{m=1}^{\infty}J_{2m}(x)\cdot 2i^{2m}+J_0(x)+\sum_{m=1}^{\infty}J_{2m+1}(x)\cdot 2i^{2m+1}$$

$$=\underline{J_0(x)+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^mJ_{2m}(x)}+i\,\underline{2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^mJ_{2m+1}(x)}$$

$$=\underline{\cos x}+\underline{i\sin x}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos x&=J_0(x)+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^mJ_{2m}(x)\\ \sin x&=2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^mJ_{2m+1}(x)\end{aligned}}$$

*例题分析

一、贝塞尔函数的有关性质

4. 将ρ在$[0,a]$上按$J_1(\frac{x_m^1}{a}\rho)$展开。

$$\rho=\sum_{m=1}^{\infty}c_m J_1(k_m^1\rho),\quad c_m=\frac{1}{\frac{a^2}{2}J_2^2(k_m^1 a)}\int_0^a \rho^2 J_1(k_m^1\rho)d\rho$$

$$\int_0^a \rho^2 J_1(k_m^1\rho)d\rho=\frac{1}{(k_m^1)^3}\int_0^a (k_m^1\rho)^2 J_1(k_m^1\rho)d(k_m^1\rho)$$

$$=\frac{1}{(k_m^1)^3}\int_0^{k_m^1 a}\frac{d}{dx}[x^2J_2(x)]dx\boxed{=\frac{1}{(k_m^1)^3}(k_m^1 a)^2 J_2(k_m^1 a)}$$

$$c_m=\frac{2}{a^2J_2^2(k_m^1 a)}\cdot\frac{a^2J_2(k_m^1 a)}{k_m^1}=\boxed{\frac{2a}{x_m^1 J_2(x_m^1)}}$$

$$\boxed{\rho=2a\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{x_m^1}\frac{J_1(\frac{x_m^1}{a}\rho)}{J_2(x_m^1)}}$$

知识点：贝赛尔函数展开公式，递推公式

*例题分析

二、在柱坐标中 $\Delta u + \lambda u = 0$ 的解

1. 圆柱型空腔内电磁振荡的定解问题为

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0,\ \sqrt{\lambda} = \dfrac{\omega}{c} & (1) \\ u\big|_{r=a} = 0 & (2) \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0,l} = 0 & (3) \end{cases}$$

试证电磁振荡的固有频率为

$$\omega_{nm} = c\sqrt{\lambda} = c\sqrt{(\frac{x_m^0}{a})^2 + (\frac{n\pi}{l})^2}$$

*例题分析

二、在柱坐标中 $\Delta u+\lambda u=0$ 的解

证明： 令 $u(\rho,z)=R(\rho)Z(z)$

$$(1)\rightarrow\begin{cases} Z''+\mu Z=0 & (4)\\ \rho^2R''+\rho R'+[(\lambda-\mu)\rho^2-0]R=0 & (5)\end{cases}$$

$$(2)\rightarrow R(a)=0\quad(6);\quad(3)\rightarrow\begin{cases} Z'(0)=0\\ Z'(l)=0\end{cases}\quad(7)$$

求解(5)，(6)：

$$\lambda-\mu=k^2=\left(\frac{x_m^0}{a}\right)^2,\ m=1,2,\cdots$$

*例题分析

二、在柱坐标中 $\Delta u+\lambda u=0$ 的解

求解(4)，(7):

$$\mu=\frac{n^2\pi^2}{l^2},\quad n=0,1,2,\cdots$$

求 λ :

$$\because \lambda-\mu=k^2=(\frac{x_m^0}{a})^2,\quad m=1,2,\cdots$$

$$\lambda=(\frac{x_m^0}{a})^2+\mu=(\frac{x_m^0}{a})^2+\frac{n^2\pi^2}{l^2},\quad m=1,2,\cdots$$

$$\omega_{nm}=c\sqrt{\lambda}\ \boxed{=c\sqrt{(\frac{x_m^0}{a})^2+(\frac{n\pi}{l})^2}}$$

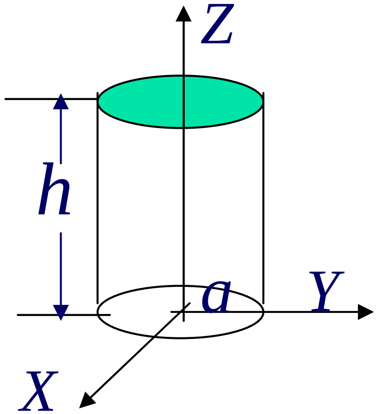
知识点：本征值问题

*例题分析

二、在柱坐标中 $\Delta u+\lambda u=0$ 的解

*例题分析

2. 一半径为a高为h的均匀圆柱体，其下底和侧面保持温度为零度，上端温度为 u_0，求柱内的稳定温度分布。



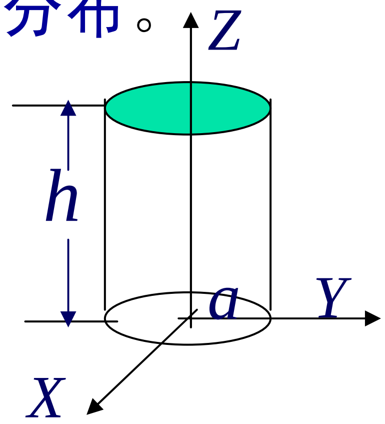
$$
\begin{cases}
\Delta u=0,\ \ 0\le\rho\le a, & (1)\\
u(a,z)=0 & (2)\\
u(\rho,0)=0 & (3)\\
u(\rho,h)=u_0 & (4)
\end{cases}
$$

（课堂上已讲）

*例题分析

二、在柱坐标中 $\Delta u+\lambda u=0$ 的解

3. 一半径为a高为h的均匀圆柱体，其上、下底面保持温度为零度，而侧面温度为u_0，试求柱内的稳定温度分布。



$$
\begin{cases}
\Delta u=0,\ \ 0\le\rho\le a, & (1)\\
u(a,z)=u_0 & (2)\\
u(\rho,0)=0 & (3)\\
u(\rho,h)=0 & (4)
\end{cases}
$$

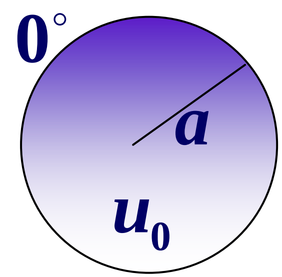
（课堂上已讲）

*例题分析

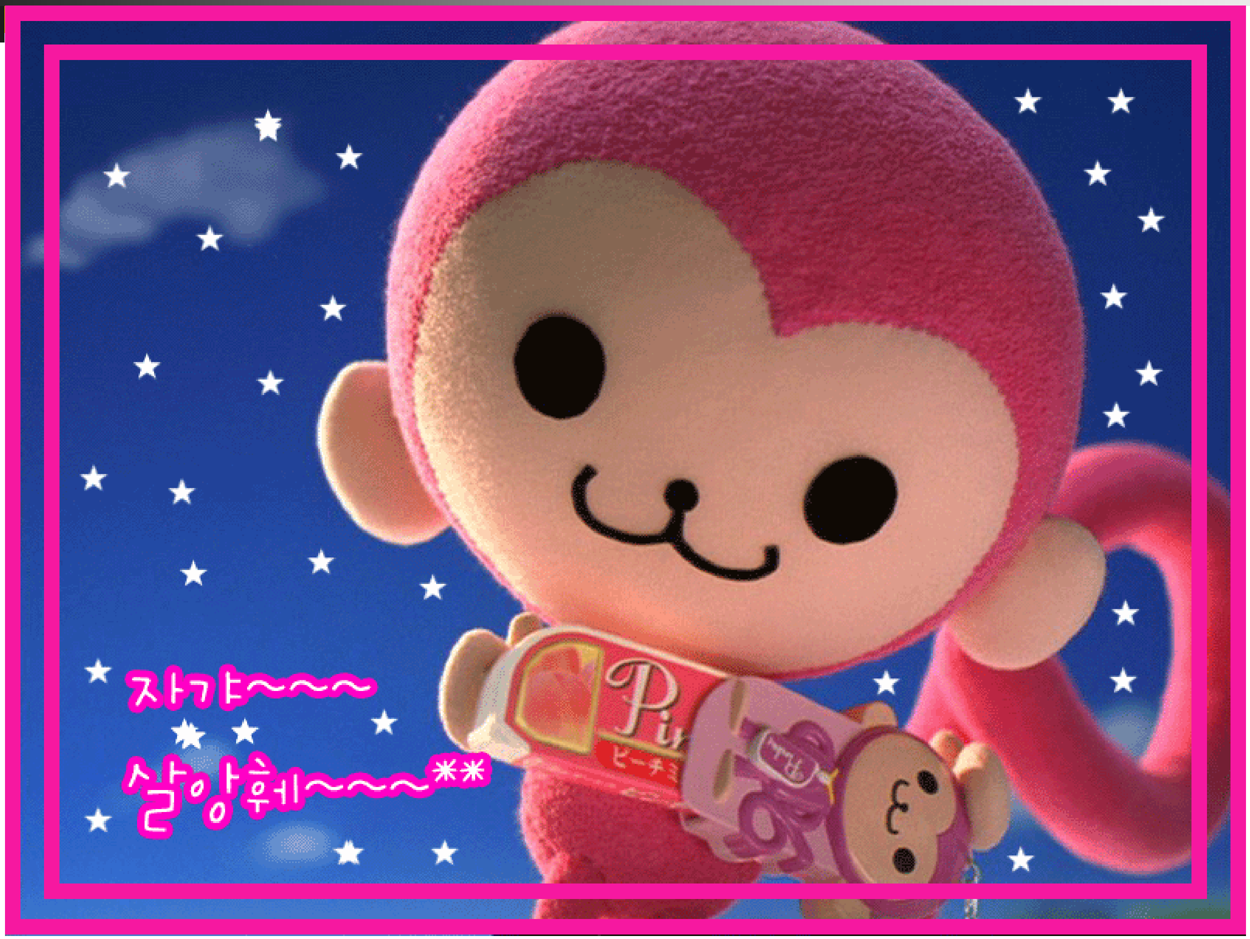
三、在球坐标中 $\Delta u+\lambda u=0$ 的解

1、半径为a的均匀导热介质球，原来的温度为u_0，将它放在冰水中，使球面温度保持为零度，求球内温度的变化。

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}-D\Delta u=0 & (1)\\
u\big|_{r=0}\to 有限 & (2)\\
u\big|_{r=a}=0 & (3)\\
u\big|_{t=0}=u_0 & (4)
\end{cases}
$$



（课堂上已讲）



Good-by!