# 数学物理方法

Mathematical Methods in Physics

## 第五章　留数定理

## The theorem of residues

武汉大学
物理科学与技术学院

# 问题的引入：

阻尼振动问题：$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=?$

光衍射问题：$\int_0^{\infty}\sin x^2 dx=?$

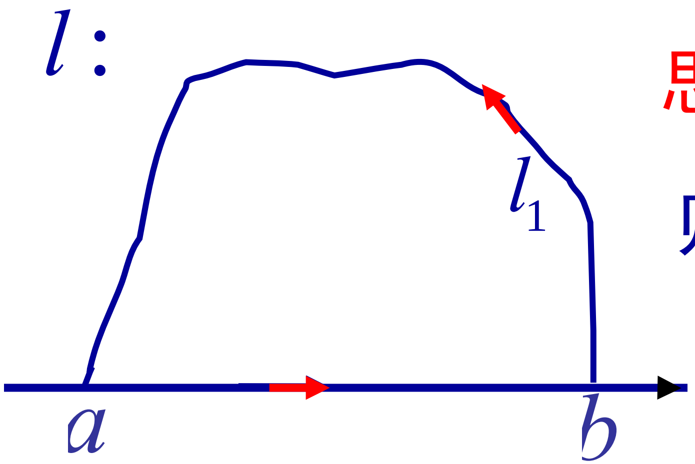
热传导问题：$\int_0^{\infty}e^{-ax^2}\cos bx dx=?(a>0,b-$实$)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=?$$

$$\int_a^b f(x)dx=?$$

# § 5. 2利用留数定理计算实积分

Calculating real integrals by using the theorem of residues




思路：$\int_a^b f(x)dx \longrightarrow \oint_l f(z)dz$

则 $\int_a^b f(x)dx + \int_{l_1} f(z)dz$

$$= \oint_l f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(b_k)$$

需要：（1）$f(x)$ 在实轴上无奇点

（2）$f(z)$在 $l_1$ 上无奇点

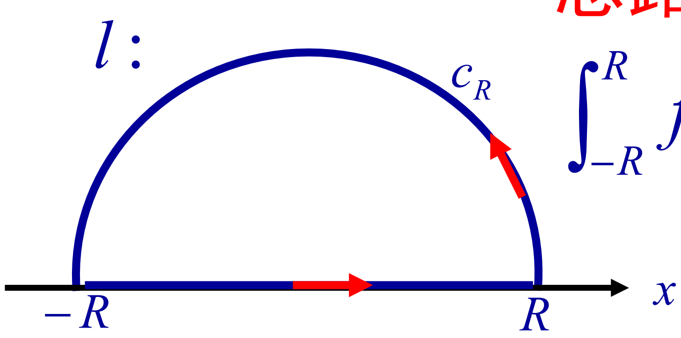
（3）$\int_{l_1} f(z)dz$ 易算

# 一、无穷积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

若 $f(z)$ 在实轴上无奇点，在 $\operatorname{Im} z > 0$ 中除有奇点 $b_k(k=1,2,\cdots,n)$ 外单值解析，且当 $|z| \to \infty$ 时 $|z \cdot f(z)| \to 0$，则

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(b_k)\Big|_{\operatorname{Im} z>0}}$$

思路：　考虑 $f(z)$ 沿如图所示路径 $l$ 的积分

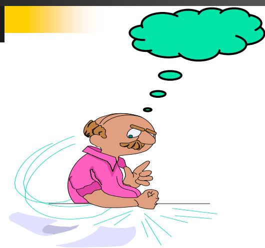



$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{c_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(b_k)\Big|_{l\text{内}}$$

例1　$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = ?$

答：$\pi$

# 一、无穷积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

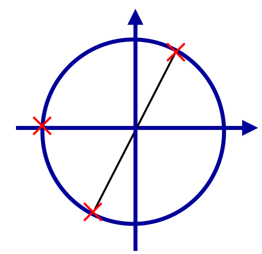


思考:

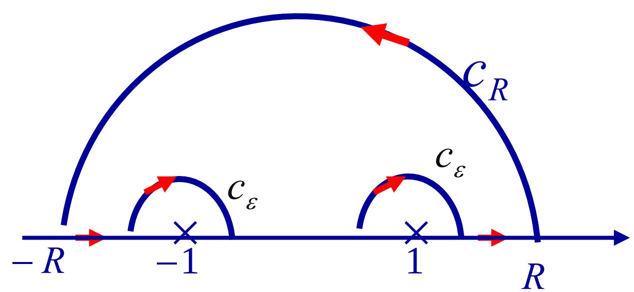
(1) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=?$

(2) 若考虑下半平面，无限积分公式应如何？

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^3}dx=?$



(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1-x^2}dx=?$



## 二、$\int_0^{\infty} f(x)\begin{Bmatrix}\cos px \\ \sin px\end{Bmatrix}dx$



若$f(z)$在实轴上无奇点，在$\operatorname{Im} z>0$中除有奇点$b_k(k=1,2,\cdots,n)$外单值解析，且当$|z|\to\infty$时$|f(z)|\to 0,\ p>0$则

$$\boxed{\int_0^{\infty} f(x)\cos px\,dx=\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}\left[f(b_k)e^{ipb_k}\right]_{\operatorname{Im}z>0}},\ f(x)\text{为偶函数；}$$

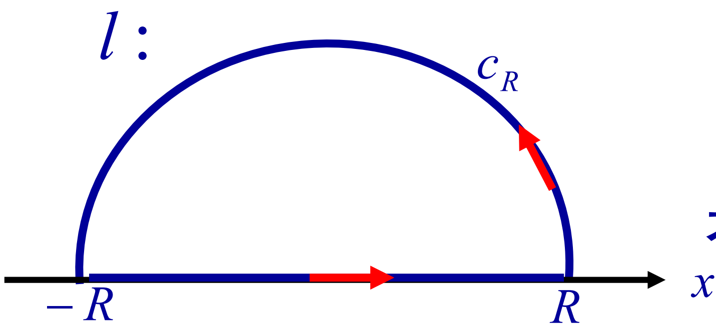
$$\boxed{\int_0^{\infty} f(x)\sin px\,dx=\pi\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}\left[f(b_k)e^{ipb_k}\right]_{\operatorname{Im}z>0}},\ f(x)\text{为奇函数。}$$

**注意：** 1)当$|z|\to\infty$时$|f(z)|\to 0$，而不是当$|z|\to\infty$时$|z\cdot f(z)|\to 0$；

2) $p>0$；

3) $f(x)$为偶函数和奇函数的问题；

## 二、$\int_0^{\infty} f(x)\begin{Bmatrix}\cos px \\ \sin px\end{Bmatrix}dx$




**思路：**

考虑 $F(z)=f(z)e^{ipz}$ 沿如图 l 积分

$$\int_{-R}^{R} f(x)e^{ipx}dx+\int_{c_R} f(z)e^{ipz}dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n} res[f(z)e^{ipz}]_{l内}$$

**附：** 约旦引理

设 $|z|\to\infty$ 时 $f(z)$ 在上半平面中一致趋于0，则

$$\boxed{\int_{c_R} f(z)e^{ipz}dz \xrightarrow{|z|\to\infty} 0,\ p>0}$$

# 二、$\int_0^\infty f(x)\begin{Bmatrix}\cos px\\ \sin px\end{Bmatrix}dx$

例2 计算 $\int_0^\infty \frac{x\sin\beta x}{(x^2+b^2)^2}dx, \beta>0, b>0$

解： $f(z)=\frac{z}{(z^2+b^2)^2}$， $z=\pm ib$ — 二阶极点

$$\int_0^\infty \frac{x\sin\beta x}{(x^2+b^2)^2}dx=\pi\cdot res[\frac{ze^{i\beta z}}{(z^2+b^2)^2},ib]$$

$$=\pi\cdot\frac{d}{dz}[(z-ib)^2\frac{ze^{i\beta z}}{(z^2+b^2)^2}]_{ib}$$

$$=\frac{\pi\beta e^{-b\beta}}{4b}$$

## 三、$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$

令 $z = e^{i\theta}$,则 $\cos\theta = \dfrac{z+z^{-1}}{2}$, $\sin\theta = \dfrac{z-z^{-1}}{2i}$, $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta = \oint_{|z|=1} \underbrace{R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{1}{iz}}_{f(z)} dz$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(b_k)\Big|_{|z|<1}}$$

**例3** $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 2\cos\theta} = ?$ 答: $\dfrac{2\pi}{\sqrt{21}}$

# 三、$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$



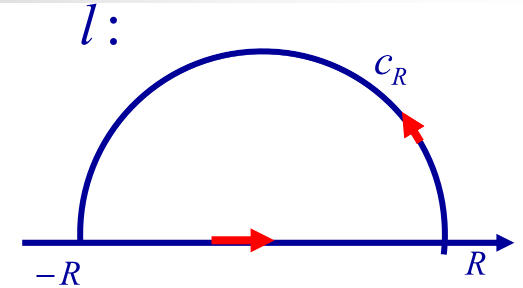
例3 $$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+2\cos\theta}=-i\oint_{|z|=1}\frac{1}{z^2+5z+1}dz$$

$$=-i\cdot 2\pi i\ res\ f\left(\frac{-5+\sqrt{21}}{2}\right)$$

$$=2\pi\left.\frac{1}{2z+5}\right|_{z=\frac{-5+\sqrt{21}}{2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{21}}$$

问：$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a+b\cos^2\theta}d\theta=?$$

# 四、小结




$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(b_k)\Big|_{\operatorname{Im} z>0}$$

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\cos px dx = \pi i\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\left[f(b_k)e^{ipb_k}\right]_{\operatorname{Im} z>0},\ f(x)\text{为偶函数；}$$

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\sin px dx = \pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\left[f(b_k)e^{ipb_k}\right]_{\operatorname{Im}>0},\ f(x)\text{为奇函数。}$$

$$\int_{0}^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(b_k)\Big|_{|z|<1}$$

# 四、小结

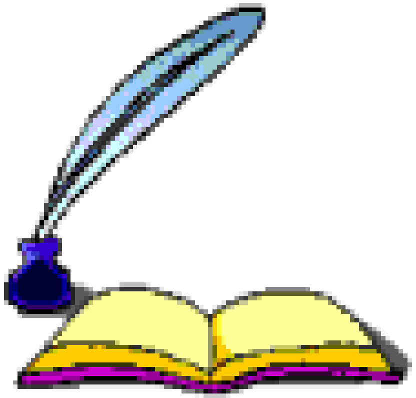
## 用留数定理计算实积分的要领:

1.视所要计算的积分$\int_a^b f(x)dx$的积分路径$[a,b]$为复平面中实轴上的一段$l_1$;

2.在复平面内补充一段或几段曲线$l_k\ (k=2,3,\cdots n)$,使$(l_1+\sum\limits^{n} l_k)=l$(闭合围道),且$\int_{l_k} f(z)dz$易于计算;(或做变量代换,使实轴上的一段$[a,b]$,变为复平面中的闭合围道$l$)

3.用留数定理计算复变函数的围道积分$\oint_l f(z)dz$.

# 本节作业



习题5.2:

1 (2) （4）

2（1) （4）

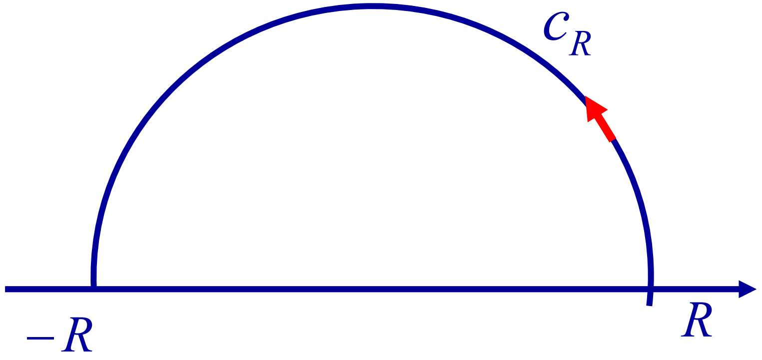
5 (2)

# Good-by!


# 附：约旦引理

设$|z| \to \infty$时$f(z)$在上半平面中一致趋于0，则

$$\boxed{\int_{c_R} f(z)e^{ipz}dz \xrightarrow{|z|\to\infty} 0,\ p>0}$$

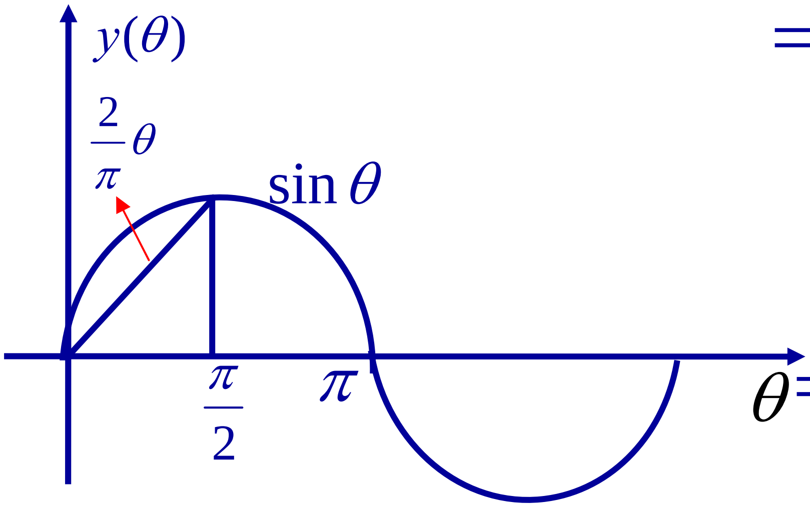


## 附：约旦引理

证明：
$$\left|\int_{c_R} f(z)e^{ipz}dz\right| \le \int_{c_R} |f(z)e^{ipz}||dz|$$

$$\le \int_{c_R} |f(z)|e^{-pR\sin\theta}Rd\theta \le \max|f(z)|\cdot R\int_0^{\pi} e^{-pR\sin\theta}d\theta$$

$$= \max|f(z)|\cdot R[\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-pR\sin\theta}d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-pR\sin\theta}d\theta]$$




$$= 2R\max|f(z)|\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-pR\sin\theta}d\theta$$

$$\le 2R\max|f(z)|\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-pR\frac{2}{\pi}\theta}d\theta$$

$$= 2R\max|f(z)|\frac{\pi}{2pR}(1-e^{-pR})$$

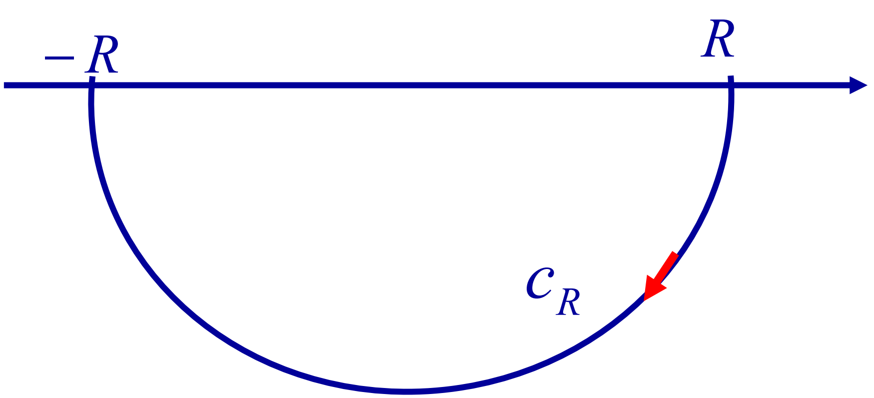
$$\xrightarrow{|z|\to\infty} 0$$

# 附：约旦引理

(1) 若 $p<0$, 约旦引理是否成立？若成立，形式应是怎样的？

应为：设 $|z|\to\infty$ 时 $f(z)$ 在下半平面中一致趋于0，则

$$\boxed{\int_{c_R} f(z)e^{ipz}dz \xrightarrow{|z|\to\infty} 0,\ p<0}$$



# 附：约旦引理

（2）若 $p<0$，积分 $\int_0^{\infty} f(x)\begin{Bmatrix}\cos px\\ \sin px\end{Bmatrix}dx=?$

**应有：**

若$f(z)$在实轴上无奇点,在$\operatorname{Im} z<0$中除有奇点$b_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$外单值解析，且当$|z|\to\infty$时$|f(z)|\to 0, p<0$则

$$\boxed{\int_0^{\infty} f(x)\cos px\,dx=-\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}\left[f(b_k)e^{ipb_k}\right]_{\operatorname{Im} z<0}}, f(x)\text{为偶函数；}$$

$$\boxed{\int_0^{\infty} f(x)\sin px\,dx=-\pi\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}\left[f(b_k)e^{ipb_k}\right]_{\operatorname{Im} z<0}}, f(x)\text{为奇函数。}$$

# 附：下半平面的无限积分

若$f(z)$在实轴上无奇点，在$\operatorname{Im} z<0$中除有奇点$b_k(k=1,2,\cdots,n)$外单值解析，且当$|z|\to\infty$时$|z\cdot f(z)|\to 0$，则

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=-2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(b_k)\Big|_{\operatorname{Im} z<0}}$$