4-1　一束电子进入 1.2T 的均匀磁场时，试问电子自旋平行于和反平行于磁场的电子的能量差为多大？

分析要点：m_s=1/2, g_s=2; $\mu_z=\pm m_s g_s \mu_B=\pm\mu_B$

解：已知：电子自旋磁矩在磁场方向的投影

$$\mu_z=\pm m_s g_s \mu_B=\pm\mu_B$$

依磁矩与磁场的作用能量 $E=\vec{\mu}\cdot\vec{B}=\mu B\cos\theta$

自旋与磁场平行时

$$E_1=\vec{\mu}_s\cdot\vec{B}=\mu_s B\cos 0°=\mu_B B$$

自旋与磁场反平行时

$$E_2=\vec{\mu}_s\cdot\vec{B}=\mu_s B\cos 180°=-\mu_B B$$

则

$$\Delta E=E_2-E_1=2\mu_B B=2\times1.2\times0.5788\times10^{-4}eV=1.389\times10^{-4}eV$$

4-2　试计算原子处于 ${}^2D_{3/2}$ 状态的磁矩 μ 及投影 μ_z 的可能值.

解：已知：j=3/2，2s+1=2　s=1/2，l=2

则 $$g_j=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\frac{\hat{s}^2-\hat{l}^2}{\hat{j}^2})=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\frac{\frac{3}{4}-6}{\frac{15}{4}})=\frac{4}{5}$$

依据磁矩计算公式

$$\mu_j=-\sqrt{j(j+1)}g_j\mu_B=-\frac{2\sqrt{5}}{15}\mu_B$$

依据磁矩投影公式 $\mu_z=-m_j g_j \mu_B$　　$m_j g_j=\pm\frac{2}{5},\pm\frac{6}{5}$

$$\therefore\quad \mu_z=\pm\frac{2}{5}\mu_B,\pm\frac{6}{5}\mu_B$$

4-3　试证实：原子在 ${}^6G_{3/2}$ 状态的磁矩等于零，并根据原子矢量模型

对这一事实作出解释.

解：因为 $2S+1=6$ $S=5/2$

$J=3/2$ $l=4$

$m_j=3/2,1/2,-1/2,-3/2$

$$g_j=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{S}^2-\hat{L}^2}{\hat{J}^2}\right)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}+1\right)-4(4+1)}{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)}\right)=0$$

$g_J m_J=0$

这是一个多电子耦合系统,相互作用产生的总效果为零.说明多电子作用有互相抵消的情况.

4-4 在史特恩-盖拉赫实验中，处于基态的窄的银原子束通过极不均匀的横向磁场，并射到屏上，磁极的纵向范围d=10cm，磁极中心到屏的距离D=25 cm. 如果银原子的速率为 400m／s，线束在屏上的分裂间距为 2.0mm，试问磁场强度的梯度值应为多大?银原子的基态为$^2S_{1/2}$，质量为 107.87u.

解：原子束在屏上偏离中心的距离可用下式表示:

$$z=-Mg\mu_B\frac{\partial B_Z}{\partial z}\frac{dD}{2E_K}$$

对原子态 $^2S_{1/2}\Rightarrow$ $L=0$ $S=1/2$ $J=1/2$ 故 $M=\pm\frac{1}{2}$ 朗德g因子为:$g=2$

对于上屏边缘的线束取 M=-J, 对于下屏边缘的线束取 M=J

所以 $\Delta z=2Jg\mu_B\frac{\partial B_Z}{\partial z}\frac{dD}{2E_K}\Rightarrow\frac{\partial B_Z}{\partial z}=\frac{\Delta ZE_K}{JG\mu_B Dd}$ .... (1)

$\Delta Z=2\times10^{-3}m$ $J=\frac{1}{2}$ $g=2$ $\mu_B=0.5788\times10^{-4}\mathrm{eV\cdot T^{-1}}$

$D=25\times10^{-2}m$ $d=10\times10^{-2}$

代入上式得: $\frac{\partial B_Z}{\partial z}=1.24\times10^{2}\,\mathrm{T/m}$

4-5 在史特恩-盖拉赫实验中(图 19.1)，不均匀横向磁场梯度为

$\frac{\partial B}{\partial z}=5.0T/cm$，磁极的纵向范围$d$=10cm，磁极中心到屏的距离$D$=30cm，使用的原子束是处于基态$^4F_{3/2}$的钒原子，原子的动能$E_k$=50MeV．试求屏上线束边缘成分之间的距离．

解：　对于多个电子　　$2S+1=4$　　$S=3/2$　　$L=3$，　$J=3/2$

则 $$g_j=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{s}^2-\hat{l}^2}{\hat{j}^2}\right)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{15}{4}-12}{\frac{15}{4}}\right)=\frac{2}{5}$$

$$m_j=+\frac{3}{2};+\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}$$

依公式 $$Z_2=-m_J g_J \mu_B \frac{\partial B}{\partial z}\cdot\frac{dD}{3kT}$$

又 $$\frac{1}{2}mV^2=50\mathrm{MeV}$$ $3kT=mV^2$=0.1eV

$$Z_2=-m_J g_J \mu_B \frac{\partial B}{\partial z}\cdot\frac{dD}{3kT}$$

$$=\pm\frac{3}{2}\times\frac{2}{5}\times5.0\times\frac{10\times30}{50}=\pm0.52092\mathrm{cm}$$

和 $$Z_2=-m_J g_J \mu_B \frac{\partial B}{\partial z}\cdot\frac{dD}{3kT}$$

$$=\pm\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times5.0\times\frac{10\times30}{50}=\pm0.1736\mathrm{cm}$$

即：$Z_{\pm3/2}=2Z_{2(\pm3/2)}=2\times0.52092=1.42\mathrm{cm}$

$Z_{\pm1/2}=2Z_{2(\pm1/2)}=2\times0.1736=0.347\mathrm{cm}$

4-6. 在史特恩-盖拉赫实验中，原子态的氢从温度为 400 K的炉中射出，在屏上接受到两条氢束线，间距为 0.60cm．若把氢原子换成氯原子(基态为$^2P_{3/2}$)，其它实验条件不变，那么，在屏上可以接受到几条氯束线?其相邻两束的间距为多少?

解：　　已知　　Z_2=0.30cm　　T=400K　　$3kT=3\times8.617\times10^{-5}\times$ 400eV=0.103eV

J=1/2　g_j=2　$m_j g_j=\pm1$

由 $$Z_2=-m_J g_J \mu_B \frac{\partial B}{\partial z}\cdot\frac{dD}{3kT}\qquad \mu_B\frac{\partial B}{\partial z}\cdot\frac{dD}{3kT}=0.3$$

当换为氯原子时，因其基态为 $^2P_{3/2}$ ，j=3/2，　l=1　s=1/2

$$g_j=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{s}^2-\hat{l}^2}{\hat{j}^2}\right)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{3}{4}-2}{\frac{15}{4}}\right)=\frac{4}{3}$$

$$m_j=+\frac{3}{2};+\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}$$

$$z'=\pm\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times0.3=\pm0.6cm$$

$$z''=\pm\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times0.3=\pm0.2cm$$

共有 $2j+1=4$ 条，相邻两条间距为 $|Z''-Z'|$=0.4cm。

4-7　试问波数差为 29.6cm^{-1}的赖曼系主线双重线，属于何种类氢离子？

解：$$\Delta\tilde{\nu}=\frac{z^4}{n^3(l+1)}\times5.84cn^{-1}\Rightarrow z=\sqrt[4]{\frac{\Delta\tilde{\nu}n^3 l(l+1)}{5.84cm^{-1}}}$$

$$\Delta\tilde{\nu}=29.6cm^{-1}$$

以为是赖曼系主线　n=2　L=1　代入上式 得，z=3　所以是 Li 原子

又因为其为类氢离子　所以为 Li^{++}

4-8　　试估计作用在氢原子 2P 态电子上的磁场强度.

解：$$B=\frac{hc\Delta\lambda}{2\lambda^2\mu_B}=\frac{\Delta\mu}{2\mu_B}$$

又由(21-13)式，Δμ=4.53×10^{-5}eV

$$B \approx \frac{\Delta\mu}{2\mu_B} = \frac{4.53\times10^{-5}}{2\times5.788\times10^{-5}} = 0.4\mathrm{T}$$

4-9　　　试用经典物理方法导出正常塞曼效应.

4-10　Z=30 锌原子光谱中的一条谱线($^3S_1\to{}^3p_0$)在B为 1．00T的磁场中发生塞曼分裂，试问：从垂直于磁场方向观察，原谱线分裂为几条?相邻两谱线的波数差等于多少?是否属于正常塞曼效应?并请画出相应的能级跃迁图.

解：　已知：对于激发态　L=0，J=1, S=1.　m_1=0,±1,在外磁场作用下，可以分裂为三条。

$$g_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{S}^2 - \hat{L}^2}{\hat{J}^2}\right) = \frac{3}{2} + \left(\frac{2-0}{2}\right) = 2$$

对于基态　L=1，J=0, S=1　m_2=0,在外磁场作用下，并不分裂。

$$g_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{S}^2 - \hat{L}^2}{\hat{J}^2}\right) = \frac{3}{2} + \left(\frac{2-0}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$E_2' - E_1' = (E_2 - E_1) + (m_2 g_2 - m_1 g_1)\mu_B B = E_2 - E_1 + \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}\mu_B B$$

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$$

$$\nu' = \nu + \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}\frac{e}{4\pi m_e}B$$

$$\nu' - \nu = \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}\frac{eB}{4\pi m_e} = \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}\times 14B(\mathrm{T})\mathrm{GHz}$$

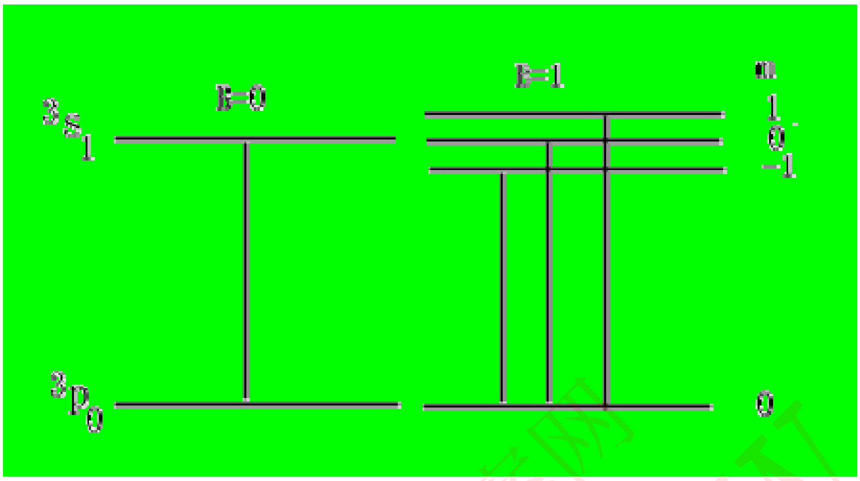
$$\tilde{\nu} = \frac{\nu' - \nu}{c} = \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}\frac{eB}{4\pi m_e c} = \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}\times 0.467B(T)cm^{-1} = (0.934,0,-0.934)\mathrm{cm}^{-1}$$

所以原谱线在外加磁场中分裂为三条，垂直磁场可以看到三条谱线。

Δm=0,+1,-1,分别对应于π，σ^+，σ^-三条谱线。

虽然谱线一分为三，但彼此间间隔值为 $2\mu_B B$，并不是$\mu_B B$，并非激发态和基态的S=0，因S≠0 所以它不是正常的塞曼效应。

对应的能级跃迁图



4-11　试计算在 B 为 2.5T 的磁场中，钠原子的 D 双线所引起的塞曼分裂.

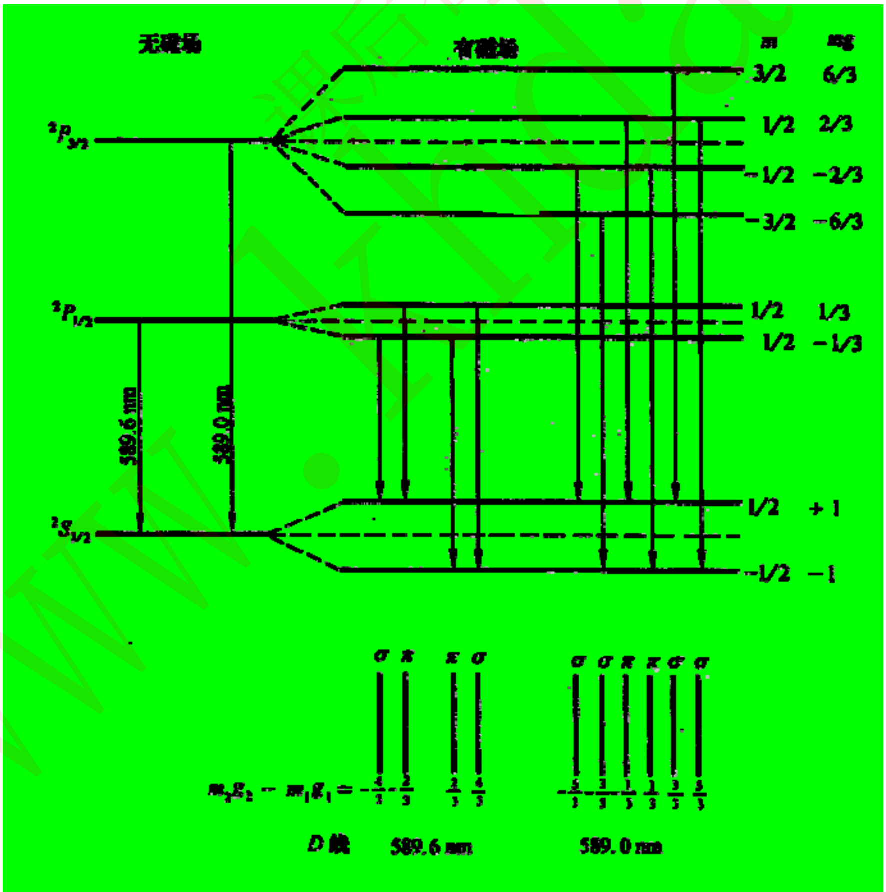


图 22.6　钠 D 线的塞曼效应

解：A. 对于$^2S_{1/2}$态，用$g_j=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{s}^2-\hat{l}^2}{\hat{j}^2}\right)$，将$s$=1/2，$l$=0;$j$=1/2 代入，即可算出$g_j$=2；由于$j$=1/2，因而$m_j=\pm\frac{1}{2}$，于是$m_jg_j=\pm 1$。

B. 对于P态，相应的l=1，因而$j=l\pm s$，s=1/2，j=1/2，3/2，有两个原子态$^2P_{1/2}$，$^2P_{3/2}$。分别对应于

$g_{1/2}$=2/3，　$m_1g_1=\pm 1/3$

$g_{3/2}$=4/3，　$m_2g_2=\pm 2/3$ ，　$\pm 6/3$

依

$$\nu'-\nu=(m_2g_2-m_1g_1)\mu_B B/h=(m_2g_2-m_1g_1)\tilde{L}$$

$$\nu_1'-\nu=(m_2g_2-m_1g_1)\tilde{L}=(\pm\frac{1}{3}-\pm 1)\tilde{L}=\begin{pmatrix}\pm\frac{2}{3}\\ \pm\frac{4}{3}\end{pmatrix}\tilde{L}$$

分裂为四条线。

$$\nu_2'-\nu=(m_2'g_2'-m_1g_1)\tilde{L}=(\begin{pmatrix}\pm\frac{2}{3}\\ \pm\frac{6}{3}\end{pmatrix}-\pm 1)\tilde{L}=\begin{pmatrix}\pm\frac{5}{3}\\ \pm\frac{1}{3}\\ \pm 1\end{pmatrix}\tilde{L}$$

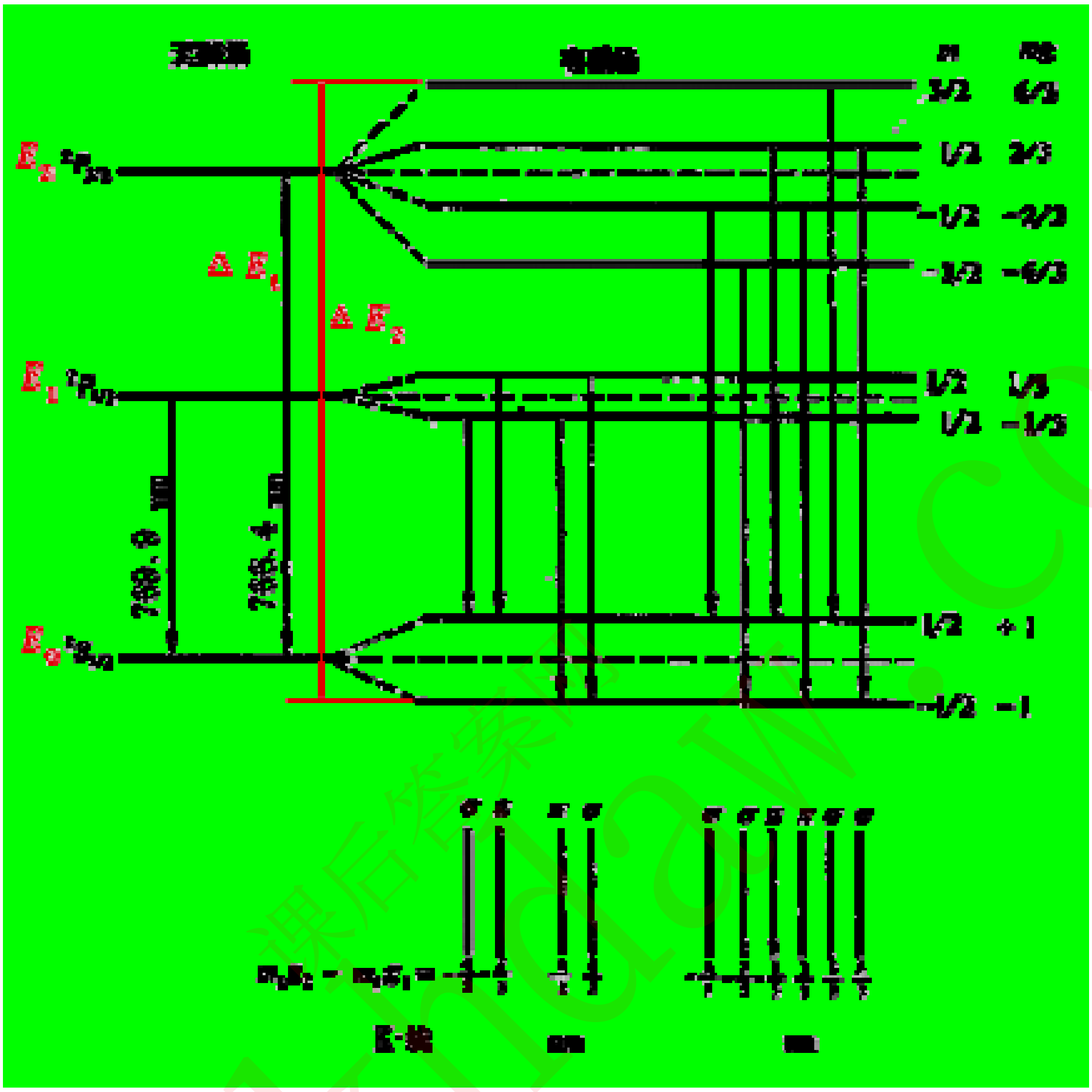
分裂为六条线。

4-12　注:此题(2)有两种理解(不同习题集不同做法,建议用第二种方法).

钾原子的价电子从第一激发态向基态跃迁时，产生两条精细结构谱线,其波长分别为 766.4nm 和 769.9nm,现将该原子置于磁场 B 中(设为弱场)，使与此两精细结构谱线有关的能级进一步分裂.

(1) 试计算能级分裂大小，并绘出分裂后的能级图.

(2) 如欲使分裂后的最高能级与最低能级间的差距ΔE_2等于原能级差ΔE_1的 1.5 倍，所加磁场B应为多大?



要点分析: 钾原子的价电子从第一激发态向基态的跃迁类似于钠的精细结构。其能级图同上题。

解:

(1) 先计算朗德因子和$m_j g_j$

A. 对于$^2S_{1/2}$态，用$g_j=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{s}^2-\hat{l}^2}{\hat{j}^2}\right)$，将$s$=1/2，$l$=0; j=1/2 代入，即可算出g_j=2；由于j=1/2, 因而$m_j=\pm\frac{1}{2}$，于是$m_j g_j=\pm 1$。

B. 对于P态，相应的l=1，因而$j=l\pm s$，s=1/2, j=1/2，3/2，有两个原子态$^2P_{1/2}$，$^2P_{3/2}$。分别对应于

$^2P_{1/2}$对应有　$m_1=\pm 1/2$，$g_{1/2}=2/3$，　$m_1 g_1=\pm 1/3$

$^2P_{3/2}$对应有　$m_2=\pm 1/2$，$g_{3/2}=4/3$，　$m_2 g_2=\pm 2/3$ ，　$\pm 6/3$

能级分裂大小:

$P_{3/2}$能级分裂大小: m_2g_2从+6/3→+2/3 为 4/3$\mu_B B$

$P_{1/2}$能级分裂大小: m_2g_2从+1/3→−1/3 为 2/3$\mu_B B$

$S_{1/2}$能级分裂大小: m_1g_1从+1→−1 为 2$\mu_B B$

(2) 解: 有两种认为:

(2) 第一种认为: $\Delta E=(E_2-E_1)$ 与教材计算结果一致.

分裂后的最高能级 $2P_{3/2}$, m_J=3/2 与最低能级差 $2P_{1/2}$, m_J =−1/2

$$\Delta E_2=\Delta E_1+(m_2g_2-m_1g_1)\mu_B B=\Delta E_1+[\frac{6}{3}-(-\frac{1}{3})]\mu_B B=\Delta E_1+\frac{7}{3}\mu_B B$$

若使 $\Delta E_2=1.5\Delta E_1=1.5(E_2-E_1)$ 即 $\Delta E_1+7/3\mu_B B=1.5\Delta E_1$

即 $7/3\mu_B B=0.5\Delta E_1=0.5(E_2-E_1)$

$$=0.5[(E_2-E_0)-(E_1-E_0)]=0.5\left(h\frac{c}{\lambda_1}-h\frac{c}{\lambda_2}\right)$$

即 $$\frac{7}{3}\mu_B B=0.5\times\left(h\frac{c}{\lambda_1}-h\frac{c}{\lambda_2}\right)$$

∴

$$\begin{aligned}B&=\frac{3}{7\mu_B}\times0.5\times\left(h\frac{c}{\lambda_1}-h\frac{c}{\lambda_2}\right)\\&=\frac{3}{7}\times0.5\times197\times6.28\left(\frac{1}{766.4}-\frac{1}{769.9}\right)\times\frac{1}{0.5788\times10^{-4}}\\&=27.17(\mathrm{T})\end{aligned}$$

B=27.17 T

(3) 第二种认为: $\Delta E=(E_2-E_0)$与教材结果相差甚远

分裂后的最高能级 $2P_{3/2}$, m_J =3/2 与最低能级差 $2s_{1/2}$, m_J=−1/2

$$\Delta E_2=\Delta E_1+(m_2g_2-m_1g_1)\mu_B B=\Delta E_1+[\frac{6}{3}-(-1)]\mu_B B=\Delta E_1+3\mu_B B$$

若使 $\Delta E_2=1.5\Delta E_1$ 即 $\Delta E_1+3\mu_B B=1.5\Delta E_1$

即 $3\mu_B B$=0.5ΔE_1=0.5(E_2−E_0)

=0.5 $\left(h\frac{c}{\lambda_1}\right)$

$$3\mu_B B = 0.5\times\left(h\frac{c}{\lambda_1}\right)$$

∴

$$B=\frac{1}{3\mu_B}\times 0.5\times\left(h\frac{c}{\lambda_1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\times 0.5\times 197\times 6.28\left(\frac{1}{766.4}\right)\times\frac{1}{0.5788\times 10^{-4}}$$

$$=4648.3(\mathrm{T})$$

B=4648.3 T

4-13 假如原子所处的外磁场 $\boldsymbol{B}$ 大于该原子的内磁场，那么，原子的 $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}$ 耦合将解脱，总轨道角动量 $\boldsymbol{L}$ 和总自旋角动量 $\boldsymbol{S}$ 将分别独立地绕 $\boldsymbol{B}$ 旋进.

(1) 写出此时原子总磁矩 μ 的表示式；

(2) 写出原子在此磁场 B 中的取向能 ΔE 的表示式；

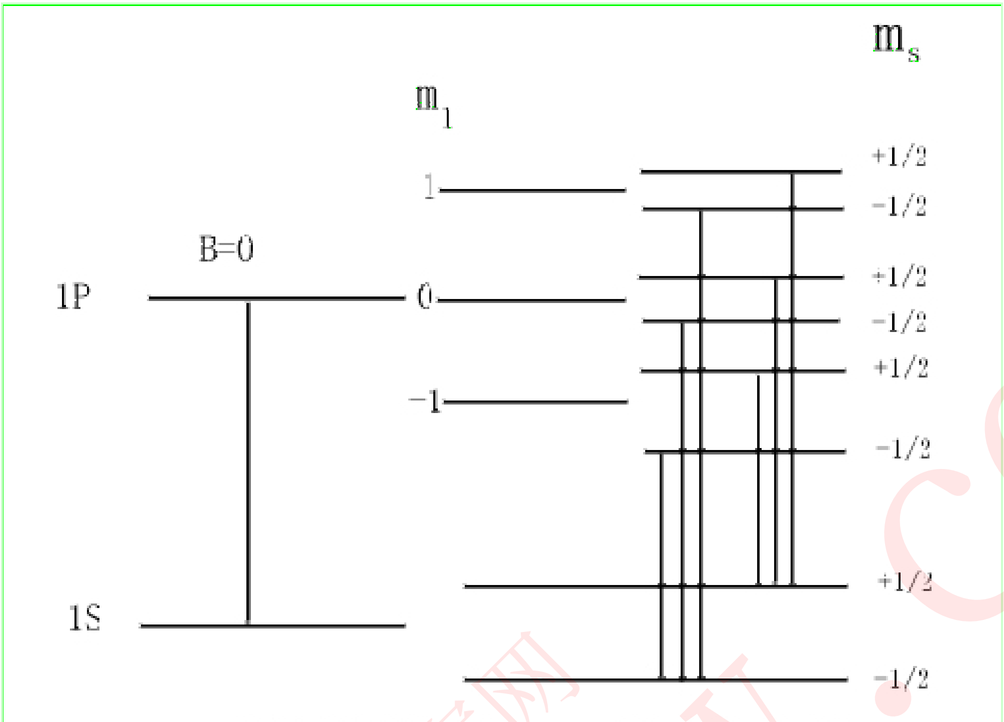
(3) 如置于 B 磁场中的原子是钠，试计算其第一激发态和基态的能级分裂，绘出分裂后的能级图，并标出选择定则(Δm_s=0， Δm_l=0，±1)所允许的跃迁.

4-14 4-14 在居 B=4T 的外磁场中，忽略自旋—轨道相互作用，试求氢原子的 $2P$-$1S$ 跃迁 (λ=121 nm)所产生的谱线的波长.

解：$\because$ $h\nu' = h\nu + (m_2 g_2 - m_1 g_1)\mu_B B$

忽略自旋与轨道相互作用，即引起帕邢-巴克效应。

此时，$U=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}=\frac{e}{2m_e}(g_s\vec{S}+g_l\vec{L})\cdot\vec{B}$



强磁场破坏 L，S 耦合作用后
跃迁条件 Δm_s=0，Δm_l=0，±1

或者

$$U=\frac{eB}{2m_e}(2S_z+L_z)=\frac{e\hbar B}{2m_e}(2m_s+m_l) \qquad (1)$$

选择规则变为

Δ m_s=0，Δ m_l=0，±1

∴　对应于 1*S*态，m_s=±1/2，m_l=0.　　因此类比（1）式给出双分裂.

　　对应于 1*P*态，m_s=±1/2，m_l=0，±1.　因此给出六分裂.

依据跃迁定则可能的跃迁如图. 产生六种跃迁，三种波长。

由（1）式看来，三种波长必然差

$$\tilde{L}=\frac{eB}{4\pi m_e c}=0.467cm^{-1}\times 4=1.87cm^{-1}$$

$$\frac{1}{\lambda'}=\frac{1}{\lambda}+\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\tilde{L} \qquad \lambda=121\text{nm}$$

∴　$$\lambda'=\begin{pmatrix}121-0.00274\\121\\121+0.00274\end{pmatrix}nm$$