数学物理方法

Mathematical Methods for Physics

第六章　定解问题

Mathematical　Problem

武汉大学

物理科学与技术学院

§6.3　定解条件

*引入定解条件的必要性：

a．从物理的角度看：数理方程仅能表示一般性

b．从数学的角度看：微分方程的解的任意性
也需附加条件来确定。

定解条件
- 初始条件
- 边界条件
- 其它条件

一、初始条件：

1、定义：

物理过程初始状况的
数学表达式为初始条件。

弦振动:

$$\begin{cases} u\,|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t\,|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

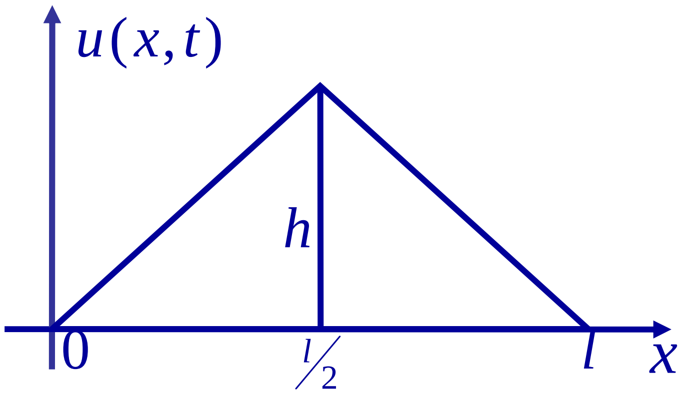
一、初始条件：

2、注意：

（1）整个系统初始状况：

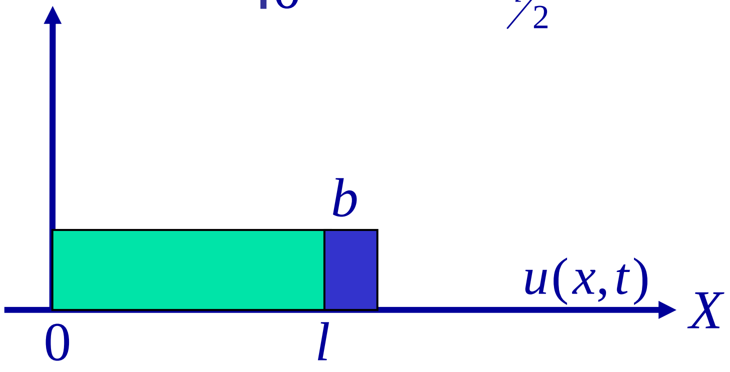
弦的横振动，当$t=0$时

$$\begin{cases} u\big|_{t=0}=\begin{cases}(2h/l)x & 0\le x\le l/2\\ (2h/l)(l-x) & l/2\le x\le l\end{cases}\\ u_t\big|_{t=0}=0\end{cases}$$



杆的纵振动，当$t=0$时

$$u\big|_{t=0}=\frac{b}{l}x$$



一、初始条件：

2、注意：

（2）时间t的 n阶方程需要n个条件：

如：

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f \rightarrow \begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

$$u_t = D\Delta u + f \rightarrow u|_{t=0} = \varphi(x)$$

$$\Delta u = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$ 无

二、边界条件

1、定义：

物理过程边界状况的数学表达式为边界条件

2、三类边界条件：

（1）第一类边界条件（Dirichlet条件）

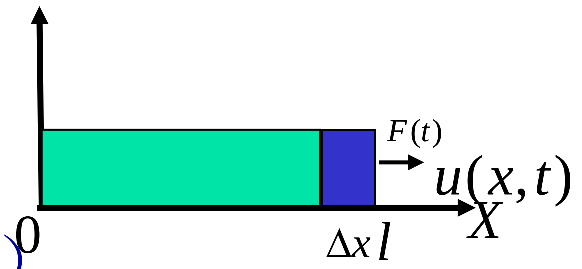
$$u|_{边}=f(M,t)$$ （已知函数）

杆的导热问题: $u|_{x=l}=T_0e^{-t}$

两端固定弦的横振动: $u|_{x=0}=0,\ u|_{x=l}=0$

二、边界条件

2、三类边界条件：



(2) 第二类边界条件（Neuman条件）

$$u_n|_{边}=f(M,t)$$ （已知函数）

杆的纵振动问题：一端固定，另一端单位面积受力为F(t)

$$u_x|_{x=l}=F/E,$$ 一端自由？ $u_x|_{x=l}=0$

杆的导热问题：

a) $x=l$端有热量流出，热流密度为$\psi(t)$　　$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l}=-\frac{\psi(t)}{k}$

b) $x=l$端有热量流入，热流密度为$\psi(t)$　　$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l}=\frac{\psi(t)}{k}$

c) $x=0$端有热量流入，热流密度为$\psi(t)$　　$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0}=-\frac{\psi(t)}{k}$

二、边界条件

2、三类边界条件：

(3) 第三类边界条件（混合边界条件条件）：

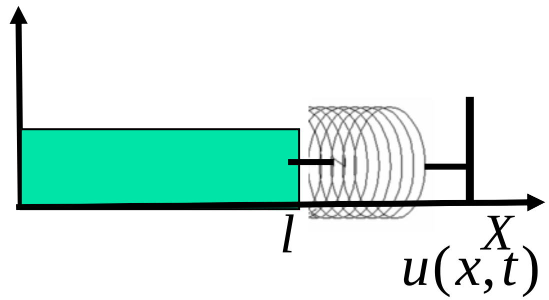
$$(u + hu_n)|_{边} = f(M, t)$$ （已知函数）

杆的导热问题： 一端自由冷却（即牛顿冷却问题）

$$\therefore \quad [u + hu_x]_{x=l} = u_0 \,, h = \frac{k}{H}$$

杆的纵振动问题: 若一端固定，一端与弹簧相连

$$u|_{x=0} = 0 \,, \qquad (u + \frac{Es}{k} u_x)|_{x=l} = 0$$



二、边界条件

3、注意：

（1）区别边界条件和外源

例　长为l的均匀杆，一端固定于x=0，在t=0时，一个沿着杆长方向的力F(单位面积上）加在杆的另一端上，求 t>0时杆上各点的位移。

答：$u_x|_{x=l}=\dfrac{F}{E}$

（2）一个边界只有一个边界条件

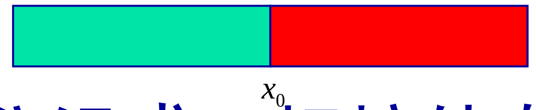
例　长为l的均匀杆一端固定于以匀速v前进的车壁上另一端自由，突然静止，写出杆做纵振动的定解条件。

$$u_x|_{x=l}=0 \quad , \quad u|_{x=0}=0$$

（3）当f=0时，分别称为第1、2、3类齐次边界条件

三、其它条件

1、衔接条件：



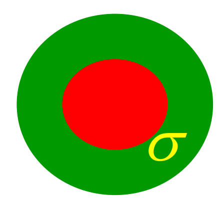
若所研究的问题由不同部分组成，相接处有衔接条件。

杆的纵振动问题　若由两段不同材料组成，则其衔接处有

$$\begin{cases} u_1 \big|_{x=x_0} = u_2 \big|_{x=x_0} \\ E_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = E_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=x_0} \end{cases}$$

静电场问题　若由两种介质组成，则其衔接处有

电势连续： $u_1\big|_\sigma = u_2\big|_\sigma$



电位移矢量连续： $\varepsilon_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial n}\Big|_\sigma = \varepsilon_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial n}\Big|_\sigma$

三、其它条件：

2、自然边界条件：

物理问题的有限性、单值性、周期所决定的条件。

例 （Euler）方程通解为：

$$y = Ax^{l} + Bx^{-(l+1)}$$

$[0,a]: y = ?$;$[a,\infty): y = ?$

答： $y = Ax^{l}$ $y = Bx^{-(l+1)}$

四、三类定解问题：

1、初值问题：

只有初始条件而无边界条件的定解问题

例

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \ , \ -\infty < x < \infty \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \ , \ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

2、边值问题：

只有边界条件而无初始条件的定解问题

例

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\sigma} = f(M) \end{cases}$$

3、混合问题：

既有边界条件又有初始条件的定解问题

例

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \ , \ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

本节小结

定解条件
- 初始条件
- 边界条件
  - 第一类边界条件（Dirichlet条件）
  - 第二类边界条件（ Neuman条件）
  - 第三类边界条件（混合边界条件）
- 其它条件
  - 衔接条件
  - 自然边界条件

三类定解问题
- 初值问题
- 边值问题
- 混合问题

本节作业

习题6.3：2，3，7

Good-by!