数学物理方法

Mathematical Methods in Physics

武汉大学

物理科学与技术学院

第一篇　复变函数论

Theory of Complex Variable Functions

引 言

一、复变函数的内容：

1、将实变函数中：函数、极限、连续、 微商、 积分、级数等概念推广至复变函数中；

2、解除了实数领域中若干禁令；

3、建立了三角函数和指数函数，双曲函数的关系；

二、复变函数的应用：

1、解偏微分方程的边值问题，如：保角变换法；

2、解微分方程的初值问题，如：拉普拉斯变换法；

3、计算实积分，如：留数定理。

引 言

复变函数理论被人誉为19世纪最独特的创造，曾被称为19世纪的数学享受，也曾被称为抽象科学最和谐的理论之一。

本篇研究的中心问题是解析函数的问题.

第一章 解析函数论

Theory of Analytic Functions

中心内容：解析函数

学习目的：

1、熟练掌握复数的各种表示及运算规则；

2、熟练掌握复变函数中与实变函数平行的概念；

*3、重点掌握解析函数的概念及性质；

§1.1 复数及其运算

一、复数概念

1. 定义 $z=(x,y)=x+iy$ $x=\operatorname{Re}z$

$\bar{z}=x-iy$ $y=\operatorname{Im}z$

2. 性质

(1) 若 $\begin{matrix} z_1=x_1+iy_1 \\ z_2=x_2+iy_2 \end{matrix}$，则 $z_1=z_2 \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1=x_2 \\ y_1=y_2 \end{matrix}$

(2) z无大小

(3) $\overline{R(a,\ b,\ c)}=R(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\ \ldots)$

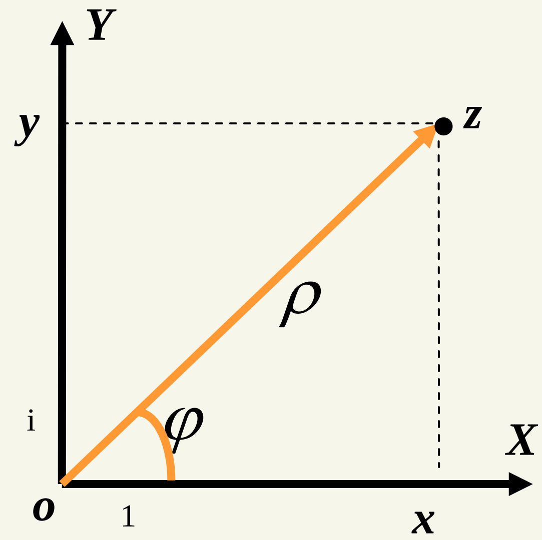
二、复数的表示方法

1. 几何表示

(1) 点z;

(2) 向量$\overrightarrow{oz}$;

(3) 极坐标(ρ,φ):



$$\rho=\sqrt{x^2+y^2} \quad — \ z\text{ 的模}$$

$$\varphi = Arc\tan\frac{y}{x} = Argz \qquad — \ z\text{的幅角，多值}$$

规定: $-\pi < \arg z \le \pi$ —幅角的主值

$$Argz = \arg z \pm 2k\pi \ , \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Q&A

问: 如何用 $\arctan\frac{y}{x}$ 来表示 $\arg z$?

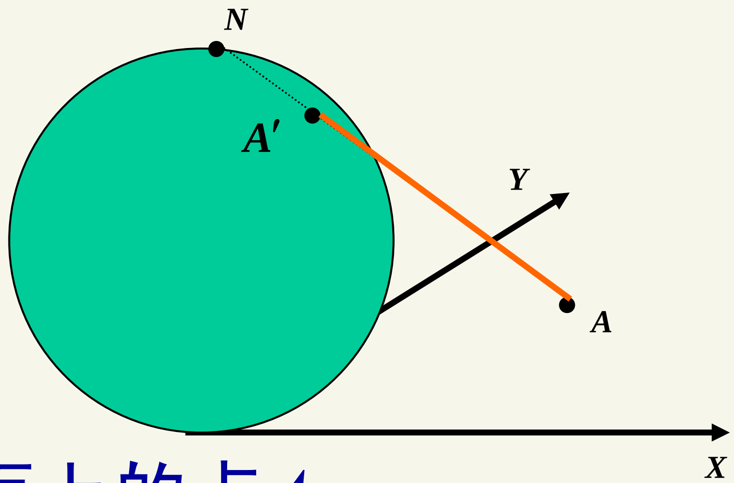
答: $$\arg z=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x}, x>0, y>0\\ \arctan\frac{y}{x}+\pi, x<0, y>0\\ \arctan\frac{y}{x}-\pi, x<0, y<0\\ \arctan\frac{y}{x}, x>0, y<0\end{cases}$$

问: 若$0<\arg z\le 2\pi$,如何用 $\arctan\frac{y}{x}$ 来表示 $\arg z$?

二、复数的表示方法

1. 几何表示

(4) 复球表示:



球面上的点$A'\longleftrightarrow$复平面上的点A;

北极$N\longleftrightarrow$复平面上的∞;

复平面$+\infty=$全平面$\longleftrightarrow$复球面

2. 代数表示

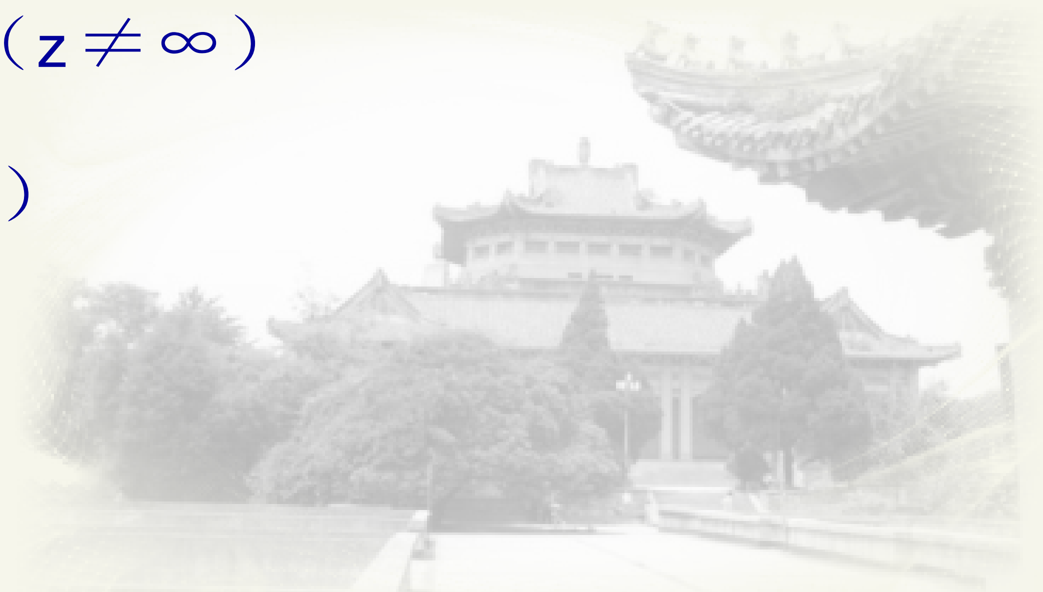
$$z=\begin{cases} x+iy \\ \rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi & (\text{三角}) \\ \rho e^{i\varphi} & (\text{指数}) \end{cases}$$

二、复数的表示方法

注意:

1° ∞ 与数学分析中 $+\infty$、$-\infty$ 有着根本区别，
在那儿 $+\infty$、$-\infty$ 只是变量变化的记号

2°规定:
$$\begin{cases} |\infty| = \infty, \text{但实部、虚部和辐角则认为是无意义的} \\ \infty \pm z = z \pm \infty \ (z \neq \infty) \\ \dfrac{z}{\infty} = 0 \ (z \neq \infty) \\ \dfrac{z}{0} = \infty \ (z \neq 0) \end{cases}$$



三、复数的运算规则

1、运算结果与实数运算结果相符合

2、运算规则与实数运算规则相符合

3、满足 $i^2=-1$

规定:

若 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$

则 $z_1 \pm z_2=(x_1 \pm x_2)+i(y_1 \pm y_2)$

$z_1 \times z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2)$

三、复数的运算规则

容易证得:

$$
\begin{cases}
e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \\
e^{i\varphi_1} / e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \\
z_1^2 - z_1^2 = (z_1 + z_2)(z_1 - z_2) \\
(z_1 + z_2)^n = \sum_{m=0}^{n} c_n^m z_1^m z_2^{n-m}
\end{cases}
$$

三、复数的运算规则

进而可证明:

$$\begin{cases} z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(Argz_1 + Argz_2)} \\ z_1 / z_2 = (|z_1| / |z_2|) e^{i(Argz_1 - Argz_2)} \quad (z_2 \neq 0) \\ z^n = |z|^n e^{inArgz} \\ \sqrt[m]{z} = \sqrt[m]{|z|} e^{i\frac{argz+2k\pi}{m}}, \begin{cases} k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ m \geq 2 \end{cases} \end{cases}$$

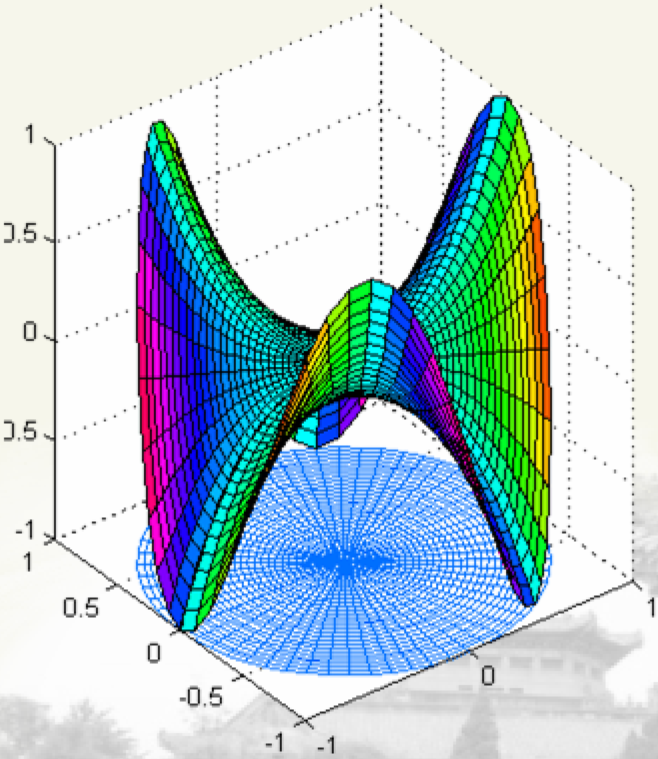
$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

—DeMoivre公式

三、复数的运算规则

$$z^n = |z|^n e^{inArgz}$$

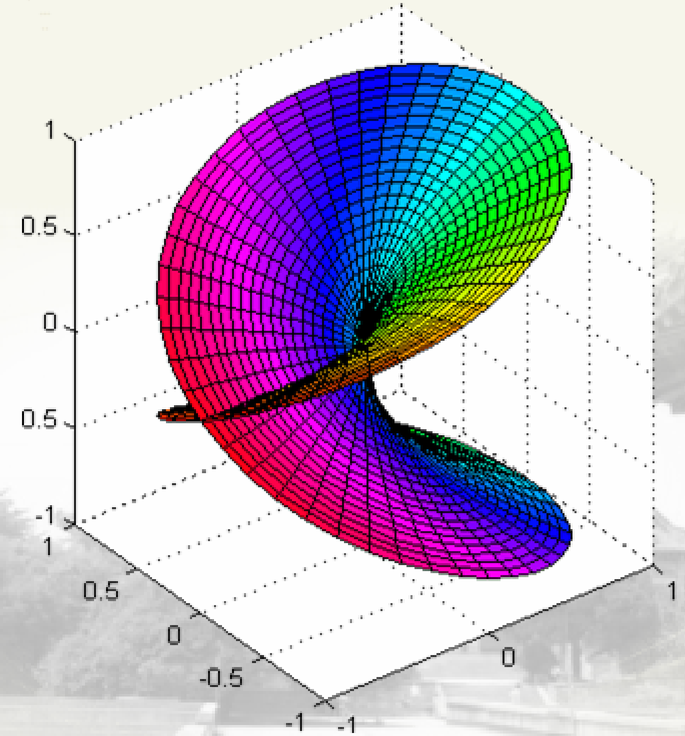
$$n = 3:$$



三、复数的运算规则

$$\sqrt[m]{z}=\sqrt[m]{|z|}e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{m}},\begin{cases}k=0,\pm1,\pm2,\ldots\\ m\geq 2\end{cases}$$

$$m=2:$$



习题1.1：

1(2),(4);　2(3);　4(2);

6(2);　7(2)

Good-by!