数学物理方法

Mathematical Methods in Physics

第二章 解析函数积分

Integrals of Analytic Function

武汉大学

物理科学与技术学院

Q&A

问题的引入：

1、至此，你了解该如何计算复围道积分吗？

首先判断被积函数是否解析

是解析， $\boxed{\oint_l f(z)dz = 0}$

不解析，绕奇点作补充围道

$$\boxed{\oint_l f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n}\oint_{l_k} f(z)\,dz}$$

$$\boxed{\oint_l \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i\,,\, n=1 \\ 0\,,\, n\neq 1 \end{cases},\quad l:|z-a|=r}$$

2、$\oint_{|z|=1} \dfrac{e^z}{z}dz = ?$

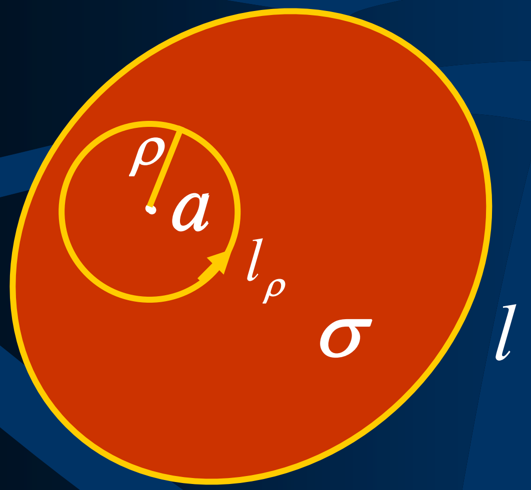
§2.3 柯西公式

Cauchy Formula

一、 Cauchy公式：

1、单通区域的Cauchy公式：

设$f(z)\in H(\sigma)$，在$\overline{\sigma}=\sigma+l$上连续， $a\in\sigma$



则 $$\boxed{f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)}{z-a}dz}$$

分析：*

一、 Cauchy公式：

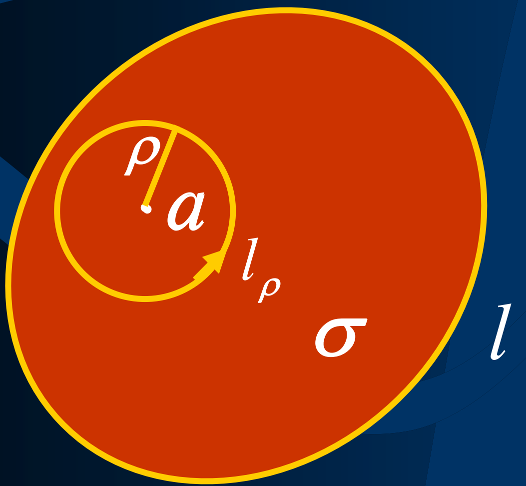
证明：$$\oint_l \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz = \oint_{l_\rho} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz$$

$$\rightarrow \left|\oint_{l_\rho} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz\right| \le \oint_{l_\rho} \left|\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right||dz|$$

$$\le \frac{\max|f(z)-f(a)|}{\rho}\cdot 2\pi\rho$$

$\because f(z)$在a点连续， $\therefore \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \ni |z-a|<\delta \rightarrow$

$$|f(z)-f(a)|<\varepsilon$$



$$\oint_{l_\rho} \left|\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right||dz| < 2\pi\varepsilon = \varepsilon'$$

$$\therefore \oint_l \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz = 0$$

一、 Cauchy公式：

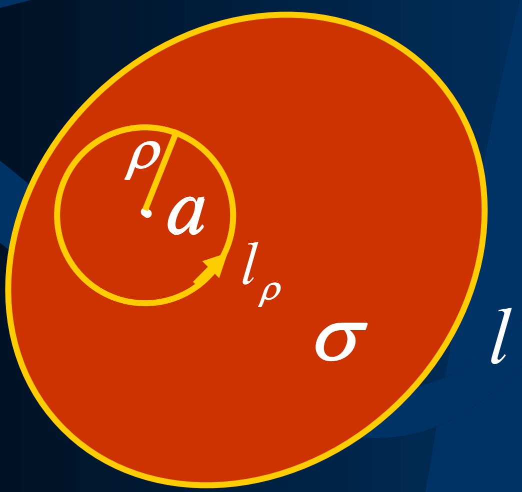
注：1）更一般：

$$\boxed{f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta}$$

2）意义：解析函数在区域内的值由边界上的积分值确定

3）可用来计算围道积分

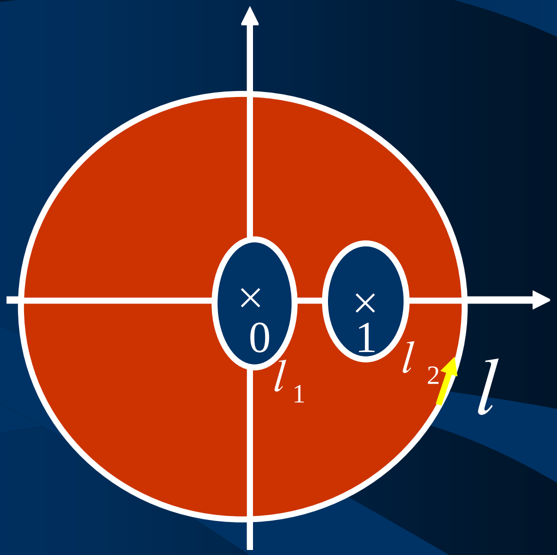
$$\oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=2\pi i f(z)$$



$$\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz=2\pi i$$

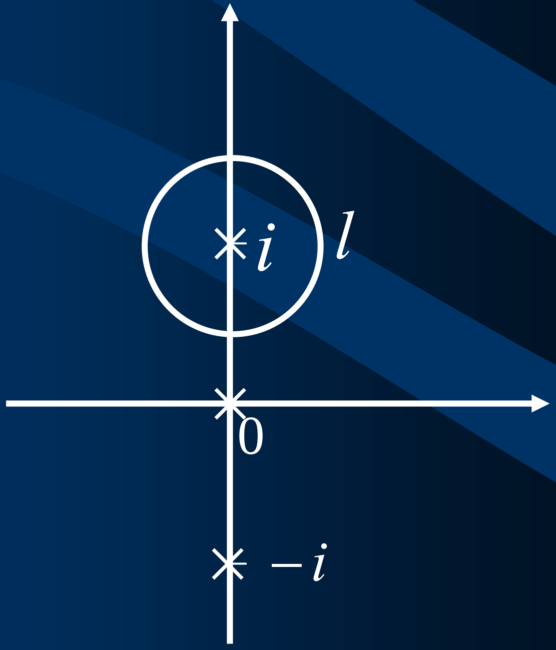
一、 Cauchy公式：

例1 计算：$\oint_{|z|=2}\frac{3z-1}{z(z-1)}dz$



* 答：$6\pi i$

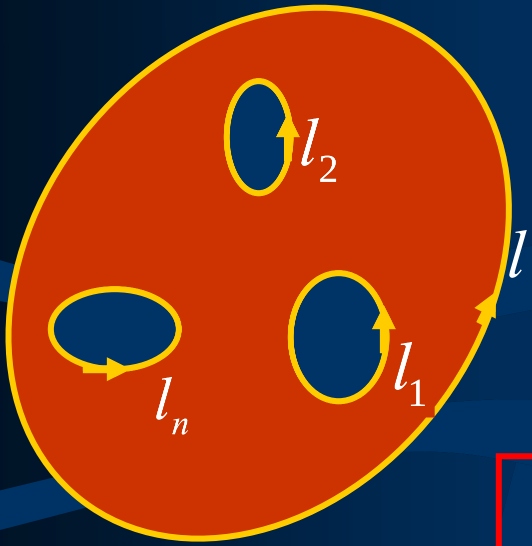
例2 计算：$\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{e^z}{z(z^2+1)}dz$



* 答：$\pi(\sin 1 - i\cos 1)$

一、 Cauchy公式：

2、复通区域的柯西公式



设 $L = l + \sum_{k=1}^{n} l_k$ 为 σ 的边界复围线，

$f(z) \in H(\sigma)$ 在 $\overline{\sigma} = \sigma + L$ 上连续，则

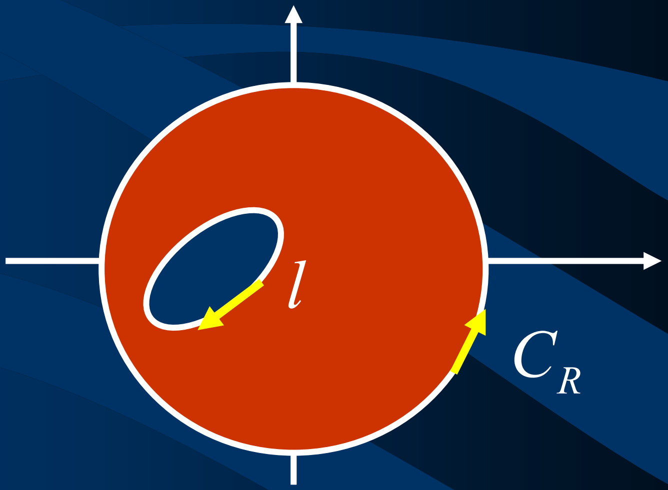
$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_l \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta - \sum_{k=1}^{n} \oint_{l_k} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta\right]}$$

一、 Cauchy公式：

3、无界区域的柯西公式

设 $f(z)$ 在围道 l 外单值解析，在 l外至 l上连续，且当 $z\to\infty$时 $f(z)$一致趋于零，则

$$\boxed{f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta}$$



思考：

1) $\oint_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z^n}dz=?$

2) 解析函数有任意阶导数吗？

二、柯西公式的推论

1、解析函数的任意阶导数

设 $l, \sigma, f(z)$ 满足柯西定理存在的条件，则在 σ 内有：

$$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta}$$

当 $n = 1$ 时有：

$$\boxed{f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta}$$

分析：*

二、科西公式的推论

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

证明：

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\Delta z}\oint_l\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta-z-\Delta z}-\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right]d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)}d\zeta$$

$$\left|\frac{\Delta f}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(\zeta)\Delta z}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)^2}d\zeta\right|$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\oint_l\frac{|f(\zeta)|\cdot|\Delta z|}{|\zeta-z-\Delta z||\zeta-z|^2}|d\zeta|$$

二、柯西公式的推论

证明： $\because f(z)$在σ上连续，$\therefore$有上界，

$$\text{设}\max|f(\zeta)| = M,\ d = \min|\zeta - z|,\ s - l\text{长},\ |\Delta z| < \frac{d}{2}$$

$$\text{则}\ |\zeta - z| \geq d,\ |\zeta - z - \Delta z| \geq |\zeta - z| - |\Delta z| > \frac{d}{2}$$

$$\therefore \left|\frac{\Delta f}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta\right| \leq \frac{1}{2\pi}\oint_l \frac{|f(\zeta)|\cdot|\Delta z|}{|\zeta - z - \Delta z||\zeta - z|^2}|d\zeta|$$

$$< \frac{1}{2\pi}\frac{M|\Delta z|}{d^3/2}s = \frac{|\Delta z|Ms}{\pi d^3}$$

取 $\delta = \min[\frac{d}{2}, \frac{\varepsilon\pi d^3}{Ms}]$，则当 $|\Delta z| < \delta$时有：

二、柯西公式的推论

证明：

$$\left|\frac{\Delta f}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\oint_{l}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{2}}d\zeta\right|<\varepsilon$$

即

$$\boxed{f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{l}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{2}}d\zeta}$$

注意：（1）上述公式成立，实际上只用到条件：

1) $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{l}\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z)}d\zeta$，2) $f(z)$ 连续

（2）对复变函数，若一阶可导，则任意阶导数存在；对实变函数则不然。

二、柯西公式的推论

注意：（3）柯西导数公式可用来计算积分：

$$\oint_l \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(a)$$

例3 $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n}dz = ?$ 答：$\begin{cases} \dfrac{2\pi i}{(n-1)!}, & n \geq 1 \\ 0, & n < 1 \end{cases}$

（4）推论：若 $\varphi(z)$在 l 上连续，

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)}d\zeta$$ —柯西型积分

则 $$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta \quad (z \notin l)$$

（5）复通区域的柯西导数公式仍然成立。

二、柯西公式的推论

2、柯西不等式：

设 $f(z)\in H(\sigma)$，在 $\overline{\sigma}=\sigma+l$上连续，则有

$$\boxed{\left|f^{(n)}(z)\right|\le\frac{n!Ms}{2\pi d^{n+1}}}$$

其中，$M=\sup\left|f(z)\right|, s-l$的长$, d=\min\left|\zeta-z\right|$

特别是，当 $l:\left|\zeta-z\right|=R$时，有：

$$\boxed{\left|f^{(n)}(z)\right|\le\frac{n!M}{R^{n}}}$$

二、柯西公式的推论

3、刘维尔定理：

设 $f(z)$ 在复平面解析，且当 $z\to\infty$ 时 $|f(z)|\leq M$，

则 $f(z)$必为常数。

注：（1）在复变函数中，函数可导有界必为常数；在实变函数中则不然。

(2) $P_n(z), e^z, \sin z$等不为常数，所以均无界。

4、模数原理：

若$f(z)\in H(\sigma)$，在$\overline{\sigma}=\sigma+l$上连续，则$f(z)$只能在边界上取得最大值。 *

二、柯西公式的推论

5、平均值定理：

若$f(z)$在$|z-a|<R$内解析，在$|z-a|\le R$上连续，则

$$\boxed{f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+\mathrm{Re}^{i\varphi})\,d\varphi}$$

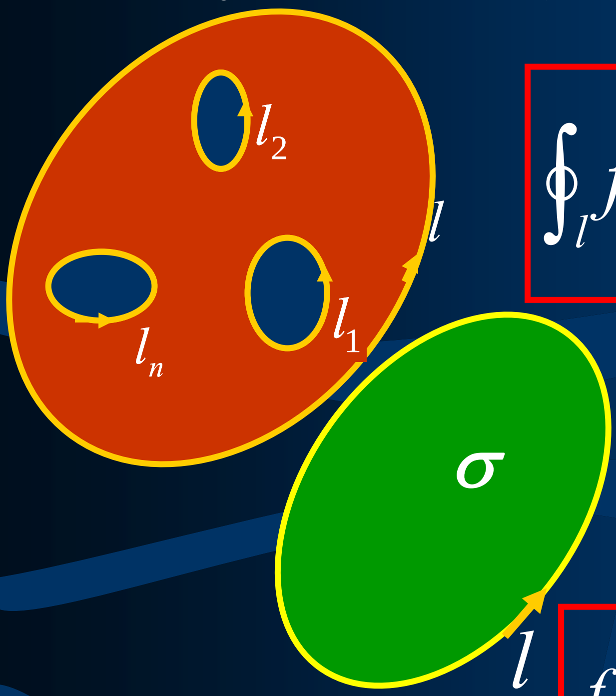
6、摩勒纳定理：

设 $f(z)$ 在区域 σ 内连续，且对 σ内任意围线

l 都有 $\oint_l f(z)\,dz=0$ ，则$f(z)$在 σ内解析。

小结

若$f(z)\in H(\sigma)$，在$\overline{\sigma}=\sigma+l$上连续，则



$$\oint_l f(z)\,dz=\sum_{k=1}^{n}\oint_{l_k} f(z)\,dz$$

摩勒纳定理

$$\oint_l f(z)dz=0$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

平均值定理

模数原理

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$$

$$\left|f^{(n)}(z)\right|\le\frac{n!Ms}{2\pi d^{n+1}}$$

刘维尔定理

习题2.3： 2； 5； 6