第一章　习题 1、2 解

1.1 速度为v的非相对论的α粒子与一静止的自由电子相碰撞，试证明：α粒子的最大偏离角约为10^{-4}rad.

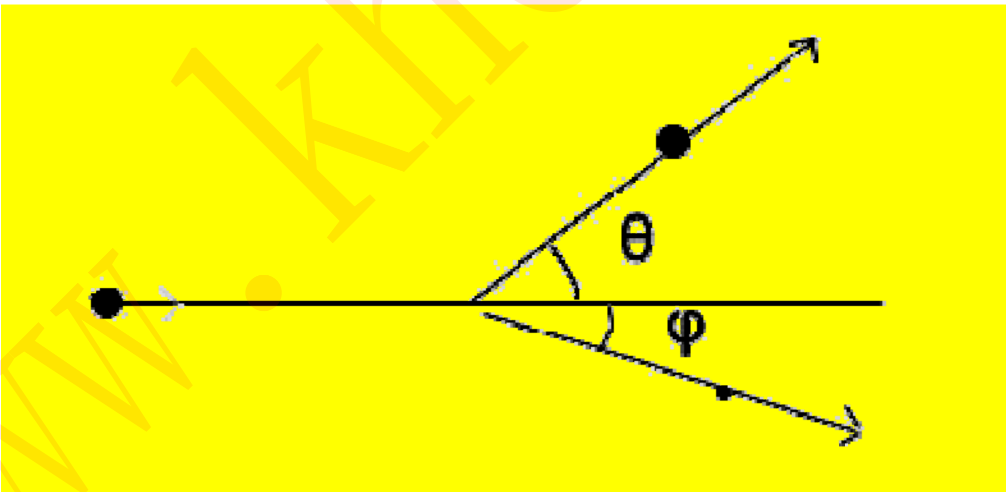
要点分析：碰撞应考虑入射粒子和电子方向改变. 并不是像教材中的入射粒子与靶核的碰撞(靶核不动). 注意这里电子要动.

证明：设α粒子的质量为M_α，碰撞前速度为V，沿X方向入射；碰撞后，速度为V'，沿θ方向散射。电子质量用m_e表示，碰撞前静止在坐标原点O处，碰撞后以速度v沿φ方向反冲。α粒子-电子系统在此过程中能量与动量均应守恒，有：

$$\frac{1}{2}M_\alpha V^2=\frac{1}{2}M_\alpha V'^2+\frac{1}{2}m_e v^2 \qquad (1)$$

$$M_\alpha V=M_\alpha V'\cos\theta+m_e v\cos\varphi \qquad (2)$$

$$0=M_\alpha V'\sin\theta-m_e v\sin\varphi \qquad (3)$$



作运算：(2) ×sinθ± (3) ×cosθ, 得

$$m_e v=M_\alpha V\frac{\sin\theta}{\sin(\theta+\varphi)} \qquad (4)$$

$$M_\alpha V'=M_\alpha V\frac{\sin\varphi}{\sin(\theta+\varphi)} \qquad (5)$$

再将（4)、(5）二式与（1）式联立，消去 V'与 v，

$$M_\alpha V^2 = M_\alpha V^2 \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2(\theta+\varphi)} + \frac{M_\alpha^2}{m_e} V^2 \frac{\sin^2\theta}{\sin^2(\theta+\varphi)}$$

化简上式，得

$$\sin^2(\theta+\varphi) = \sin^2\varphi + \frac{M_\alpha}{m_e}\sin^2\theta \qquad (6)$$

若记 $\mu = \frac{m_e}{M_\alpha}$，可将（6）式改写为

$$\mu\sin^2(\theta+\varphi) = \mu\sin^2\varphi + \sin^2\theta \qquad (7)$$

视 θ 为 φ 的函数 $\theta(\varphi)$，对（7）式求 θ 的极值，有

$$\frac{d\theta}{d\varphi}[\sin 2\theta - \mu\sin(\theta+\varphi)] = \mu[-\sin 2\varphi + \sin 2(\theta+\varphi)]$$

令 $\frac{d\theta}{d\varphi} = 0$，则

$\sin2(\theta+\varphi)-\sin2\varphi=0$

即

$2\cos(\theta+2\varphi)\sin\theta=0$

（1） 若 $\sin\theta=0$,

则 $\theta=0$（极小） （8）

（2）若 $\cos(\theta+2\varphi)=0$

则 $\theta=90^\circ-2\varphi$ （9）

将（9）式代入（7）式，有

$$\mu\sin^2(90^0-\varphi)=\mu\sin^2\varphi+\sin^2\theta$$

由此可得

$$\sin\theta=\mu=\frac{m_e}{M_\alpha}=\frac{1}{4\times1836}$$

$\theta\approx10^{-4}$弧度（极大）

此题得证。

1.2（1）动能为 5.00MeV 的 α 粒子被金核以 90°散射时，它的瞄准距离（碰撞参数）为多大?

（2）如果金箔厚 1.0 μm，则入射 α 粒子束以大于 90°散射（称为背散射）的粒子数是全部入射粒子的百分之几?

要点分析: 第二问是 90°～180°范围的积分. 关键要知道 n，注意推导出 n 值.

$$n=\frac{N_{总分子数}}{V}=\frac{\mathrm{mol}\cdot N_A}{V}=\frac{1}{V}(\frac{V\rho}{A}N_A)=\frac{\rho}{A}N_A$$ ，其他值从书中参考列表中找.

解:（1）依 $b=\frac{a}{2}\cot\frac{\theta}{2}$ 和 $a\equiv\frac{Z_1Z_2e^2}{4\pi\varepsilon_0E}$ 金的原子序数 Z_2=79

$$b=\frac{1}{2}\frac{2Z\cdot e^2}{4\pi\varepsilon_0E}\cot\frac{\theta}{2}=\frac{79\times1.44}{5.00}\cot45^o=22.752\times10^{-15}(m)$$

答：散射角为 90º 所对所对应的瞄准距离为 22.8fm.

(2) 解：第二问解的要点是注意将大于 90°的散射全部积分出来.

(问题不知道 nA，但可从密度与原子量关系找出)

从书后物质密度表和原子量表中查出 Z_{Au}=79，A_{Au}=197，

ρ_{Au}=1.888×10^4kg/m^3

依：
$$dN' = ntN\frac{a^2}{16\sin^4\frac{\theta}{2}}2\pi\sin\theta d\theta$$

$$\frac{dN'}{N} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} nt\frac{a^2 2\pi\sin\theta d\theta}{16\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

$$\sin\theta d\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}2d(\frac{\theta}{2}) = 2\sin\frac{\theta}{2}2d(\sin\frac{\theta}{2})$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} nt(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon})^2 2\pi(\frac{2Z}{E})^2\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{16\times\sin^4\frac{\theta}{2}}d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} nt(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon})^2 2\pi(\frac{2Z}{E})^2\frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{16\times\sin^3\frac{\theta}{2}}d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} nt(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon})^2 2\pi\times(\frac{2Z}{E})^2\frac{4\sin\frac{\theta}{2}d(\sin\frac{\theta}{2})}{16\times\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

注意到：$n = \frac{N_{总分子数}}{V} = \frac{\mathrm{mol}\cdot N_A}{V} = \frac{1}{V}(\frac{V\rho}{A}N_A) = \frac{\rho}{A}N_A$ 即

单位体积内的粒子数

为密度除以摩尔质量数乘以阿伏加德罗常数。

$\mathrm{nt}(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon})^2\frac{\pi}{4}\times(\frac{2Z}{E})^2$ 是常数其值为

$$1.0\times10^{-6}\times\frac{1.88\times10^{7}\times6.22\times10^{23}}{197}(1.44\times10^{-15})^2\frac{\pi}{4}\times(\frac{2\times79}{5.00})^2 = 9.648\times10^{-5}$$

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^{3}\frac{\theta}{2}}d\theta=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{d(\sin\frac{\theta}{2})}{\sin^{3}\frac{\theta}{2}}=1$$

最后结果为：dN'/N=9.6×10^{-5}

说明大角度散射几率十分小。

1-3～1-4 练习参考答案（后面为褚圣麟 1-3～1-4 作业）

1-3 试问 4.5MeV的α粒子与金核对心碰撞时的最小距离是多少？若把金核改为^{7}Li核，则结果如何？

要点分析：计算简单，重点考虑结果给我们什么启示，影响靶核大小估计的因素。

解：对心碰撞时 $r_m=\frac{a}{2}\left[1+\csc\frac{\theta}{2}\right]$，$\theta=180°$ 时，

$$r_m=\frac{a}{2}\left(1+\csc 90°\right)=a$$

离金核最小距离

$$r_m=a=\frac{Z_1Z_2e^2}{4\pi\varepsilon_0 E}=\frac{2\times79\times1.44}{4.5}=50.56\mathrm{fm}$$

离^{7}Li核最小距离

$$r_m=a=\frac{Z_1Z_2e^2}{4\pi\varepsilon_0 E}=\frac{2\times3\times1.44}{4.5}=1.92\mathrm{fm}$$

结果说明：靶原子序数越小，入射粒子能量越大，越容易估算准核的半径．反之易反。

1-4 (1) 假定金核半径为 7.0 **fm**，试问入射质子需要多少能量才能在对头碰撞时刚好到达金核的表面？

(2)若金核改为铝时质子在对头碰撞时刚好到达铝核的表面，那么入射质子的能量应为多少？设铝核的半径为 4.0 **fm**。

要点分析：注意对头碰撞时，应考虑靶核质量大小，靶核很重

时，$m \ll M$可直接用公式计算；靶核较轻时，$m \ll M$不满足,应考虑靶核的反冲，用相对运动的质心系来解．$^{79}A_{Au}=196$　$^{13}A_{Al}=27$

解：(1)若入射粒子的质量与原子核的质量满足 $m \ll M$，则入射粒子与原子核之间能达到的最近距离为 $r_m=\frac{a}{2}\left[1+\csc\frac{\theta}{2}\right]$，

$\theta=180°$ 时，

$$r_m=\frac{a}{2}\left(1+\csc 90°\right)=a$$

即 $$\frac{Z_1Z_2e^2}{4\pi\varepsilon_0}=r_m \therefore E=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z_1Z_2}{r_m}$$

即： $$E=1.44\text{fmMeV}\times\frac{1\times 79}{7.0\text{fm}}=16.25\text{MeV}$$

(2) 若金核改为铝核，$m \ll M$则不能满足，必须考虑靶核的反冲在散射因子 $a=\frac{Z_1Z_2e^2}{4\pi\varepsilon_0 E}$ 中，应把E理解为质心系能E_C

$$E_C=\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}V^2=\frac{M}{m+M}E_L$$

$$\therefore a_c=\frac{Z_1Z_2e^2}{4\pi\varepsilon_0 E_C}=\frac{Z_1Z_2e^2}{4\pi\varepsilon_0}\bullet\frac{m+M}{M}$$

$$a_c\approx r_m$$

$$\therefore E_L=\frac{Z_1Z_2e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_c}\bullet\frac{m+M}{M}=4.85\text{MeV}$$

说明靶核越轻、Z 越小，入射粒子达到靶核表面需要能量越小．核半径估计值越准确．

褚圣麟教材作业题解

1．3 若卢瑟福散射用的α粒子是放射性物质镭C'放射的，其动能为 7.68×10^6电子伏特。散射物质是原子序数Z=79 的金箔，试问散射角θ=150°所对应的瞄准距离b多大？

解：　依 $b=\frac{a}{2}\cot\frac{\theta}{2}$ 和 $a\equiv\frac{Z_1Z_2e^2}{4\pi\varepsilon_0 E}$

$$b=\frac{2Z\cdot e^2}{4\pi\varepsilon_0 m\cdot v_0^2}\cot\frac{\theta}{2}=\frac{2\times79\times(1.6\times10^{-19})^2}{4\times3.14\times8.85\times10^{-12}\times\frac{7.68}{2}\times10^6}\cot75^{\circ}=3.9664\times10^{-15}(m)$$

答：散射角为 150° 所对所对应的瞄准距离为 3.9664×10^{-15}m

1.4 钋放射的一种α粒子的速度为 1.597×10^7 米/秒，正面垂直入射厚度为 10^{-7} 米，密度为 1.932×10^4 公斤/米^{3}的金箔，试求所有散射在 $\theta\geqslant90°$ 的α粒子占全部入射粒子的百分比，已知金的原子量为179。

解：此题解的要点是注意将大于90°的散射全部积分出来. 设散射入大于 90°角的粒子数为 d*n*’，入射的总粒子数为 *n*，金箔的单位体积内的粒子数为 *N*。

依：$\frac{dn}{n}=Ntd\sigma$

$$\frac{dn'}{n}=Nt\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\sigma=Nt\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\frac{1}{4\pi\varepsilon})^2\pi(\frac{2Z\cdot e^2}{Mv^2})^2\frac{2\pi\sin\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}}d\theta$$

注意到：$N=\frac{\rho}{A}N_0$

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}}d\theta=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{d(\sin\frac{\theta}{2})}{\sin^3\frac{\theta}{2}}=1$$

最后结果为：d*n*/*n*=3.89×10^{-7}

问答：如果知道散射的总粒子数，如何计算散射入某一角度内粒子的数量？如何求出其散射截面？如何算出散射几率？

散射入某一角内的粒子数

$$dN'=N\frac{a^2d\Omega}{16A\sin^4\frac{\theta}{2}}nAt=ntN(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z_1Z_2e^2}{4E})^2\frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

散射几率(微分散射截面) $\sigma_c(\theta)\equiv\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}\equiv\frac{dN'}{Nntd\Omega}$

$$\sigma_c(\theta)=(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z_1Z_2e^2}{4E})^2\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

习题 1-5、1-6 解

补：求积分式 $\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{2\pi\sin\theta d\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$ 的积分结果

解：积分式的积分结果

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{2\pi\sin\theta d\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}}=2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\sin\theta d\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}}=2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

$$=4\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\cos\frac{\theta}{2}d\theta}{\sin^3\frac{\theta}{2}}=4\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{2d(\sin\frac{\theta}{2})}{\sin^3\frac{\theta}{2}}=8\pi\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right]_{\theta_1}^{\theta_2}=-4\pi\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

结果：

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{2\pi\sin\theta d\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}}=-4\pi\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

1-5　动能为 1.0MeV的窄质子束垂直地射在质量厚度为 1.5mg/cm^{2}的金箔上，记数器的记录以 60° 角散射的质子。计数器圆形输入孔的面积为 1.5cm^2，离金箔散射区的距离为 10cm，输入孔对着且垂直于

射到它上面的质子，试问：散射到计数器输入孔的质子数与入射到金箔的质子数之比为多少？（质量厚度ρ_m定义为单位面积的质量$\rho_m=\rho t$，则$\rho=\rho_m/t$其中ρ为质量密度，t 为靶厚）。

要点分析：没给直接给 nt。设置的难点是给出了质量厚度，计算时需把它转换成原子体密度 n 和厚度 t。需推导其关系。

解：输入圆孔相对于金箔的立体角为

$$d\Omega=\frac{s}{r^2}=\frac{1.5}{10^2}=1.5\times10^{-2}$$ $A_{Au}=197$

$\theta=60^{\circ}$ （注意密度为单位体积的质量 $\rho=\frac{m}{V}$，单位体积内的粒子数为 $n=\frac{m}{V}\frac{1}{A}N_A=\frac{\rho}{A}N_A$ ） $n=\frac{\rho}{A}N_A$ $n=\frac{\rho_m}{tA}N_A$

$$nt=\frac{\rho_m}{A}N_A$$

依公式 $$dN'=ntN\frac{\alpha^2}{16}\frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{dN'}{N}=nt\frac{\alpha^2}{16}\frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\theta}{2}}=\frac{1.5}{197}\times6.022\times10^{23}\times\frac{(79\times1.44\times10^{-15})^2}{16}\times\frac{1.5\times10^{-2}}{(\frac{1}{2})^4}=8.9\times10^{-6}$$

1-6　一束α粒子垂直射至一重金属箔上，试求α粒子被金属箔散射后，散射角大于 60° 的α粒子与散射角大于 90° 的粒子数之比。

要点分析：此题无难点，只是简单积分运算。

解：依据散射公式

$$dN'=ntN\frac{\alpha^2}{16}\frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\theta}{2}}=ntN\frac{\alpha^2}{16}\frac{2\pi\sin\theta d\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} dN' = \int_{\theta_1}^{\theta_2} ntN \frac{\alpha^2}{16} \frac{2\pi \sin\theta d\theta}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} = ntN \frac{2\pi\alpha^2}{16} \int_{\theta_1}^{\theta_2} 4 \frac{d(\sin\frac{\theta}{2})}{\sin^3 \frac{\theta}{2}}$$

因为

$$\int_{60}^{180} \frac{(d\sin\frac{\theta}{2})}{\sin^3\frac{\theta}{2}} = \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right]_{60}^{180} = \frac{3}{2}$$

同理算出

$$\int_{90}^{180} \frac{(d\sin\frac{\theta}{2})}{\sin^3\frac{\theta}{2}} = \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right]_{90}^{180} = \frac{1}{2}$$

可知 $\dfrac{dN'_{>60}}{dN'_{>90}} = \dfrac{3/2}{1/2} = 3$

习题 1-7、8 解

补：求积分式 $\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{2\pi\sin\theta d\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$ 的积分结果

解： 积分式的积分结果

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{2\pi\sin\theta d\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}} = 2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sin\theta d\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}} = 2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

$$= 4\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos\frac{\theta}{2}d\theta}{\sin^3\frac{\theta}{2}} = 4\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{2d(\sin\frac{\theta}{2})}{\sin^3\frac{\theta}{2}} = 8\pi\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right]_{\theta_1}^{\theta_2} = -4\pi\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

结果: $$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{2\pi\sin\theta d\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}}=-4\pi\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

1-7 单能的窄α粒子束垂直地射到质量厚度为 2.0mg/cm^{2}的钽箔上，这时以散射角θ_0>20°散射的相对粒子数（散射粒子数与入射数之比）为 4.0×10^{-3}. 试计算：散射角θ=60° 角相对应的微分散射截面$\frac{d\sigma}{d\Omega}$。

要点分析：重点考虑质量厚度与 nt 关系。

解： ρ_m= 2.0mg/cm^2 $\frac{dN'_{\theta>20^\circ}}{N}=2.0\times10^{-2}$ A_{Ta}=181 Z_{Ta}=73

θ=60° $n=\frac{\rho}{A}N_A$ $n=\frac{\rho_m}{tA}N_A$

$$nt=\frac{\rho_m}{A}N_A$$

依微分截面公式 $\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{16}\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$ 知该题重点要求出$a^2/16$

由公式

$$\frac{dN'}{N}=nt\frac{\alpha^2}{16}\int_{20}^{180}\frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\theta}{2}}=\frac{2.0}{181}\times6.022\times10^{23}\times\frac{a^2}{16}\times\int_{20}^{180}\frac{2\pi\sin\theta d\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}}=4.3\times10^{-3}$$

$$\frac{2.0}{181}\times6.022\times10^{23}\times\frac{a^2}{16}\times\int_{20}^{180}\frac{2\pi\sin\theta d\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}}=6.65\times10^{21}\times\frac{a^2}{16}\times(-4\pi)\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right]_{20}^{180}=4.3\times10^{-3}$$

$$6.65\times10^{21}\times\frac{a^2}{16}\times(-4\pi)\times(-22.13)=4.3\times10^{-3}$$

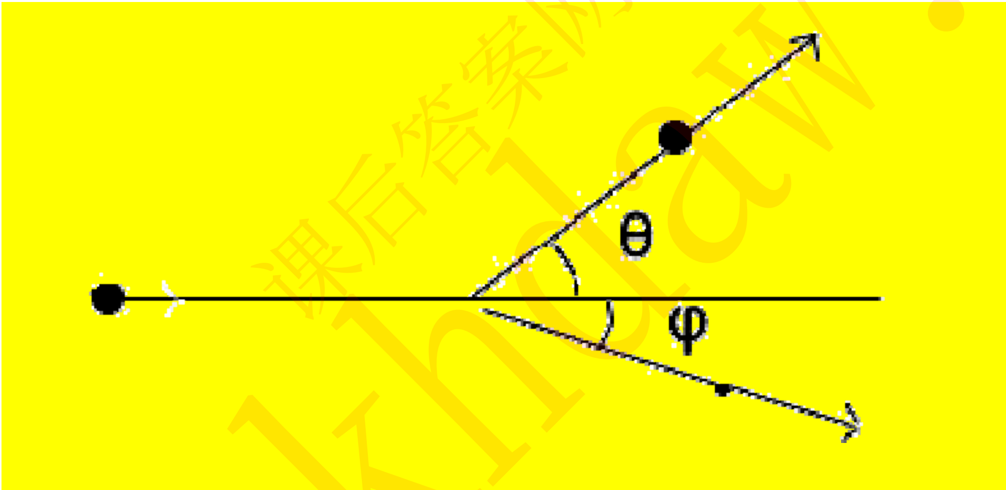
所以 $$\frac{a^2}{16}=2.33\times10^{-26}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{16}\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}=2.33\times10^{-26}\times\frac{1}{\sin^4\frac{60}{2}}=1.456\times10^{-27}$$

1-8 (1)质量为m_1的入射粒子被质量为m_2（$m_2 << m_1$）的静止靶核弹性散射,试证明:入射粒子在实验室坐标系中的最大可能偏转角θ由下式决定.

$$\sin\theta=\frac{m_2}{m_1}$$

（2）假如粒子在原来静止的氢核上散射，试问：它在实验室坐标系中最大的散射角为多大?



要点分析：同第一题结果类似。

证明:

$$\frac{1}{2}m_1V^2=\frac{1}{2}m_1V'^2+\frac{1}{2}m_2v^2 \qquad (1)$$

$$m_1V=m_1V'\cos\theta+m_2v\cos\varphi \qquad (2)$$

$$0=m_1V'\sin\theta-m_2v\sin\varphi \qquad (3)$$

作运算:（2）×sinθ ± (3) ×cosθ,得

$$m_2v=m_1V\frac{\sin\theta}{\sin(\theta+\varphi)} \qquad (4)$$

$$m_1V' = m_1V\frac{\sin\varphi}{\sin(\theta+\varphi)} \qquad (5)$$

再将（4)、(5）二式与（1）式联立，消去 V'与v，得

$$m_1V^2 = m_1V^2\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2(\theta+\varphi)} + \frac{m_1^2}{m_2}V^2\frac{\sin^2\theta}{\sin^2(\theta+\varphi)}$$

化简上式，得

$$\sin^2(\theta+\varphi) = \sin^2\varphi + \frac{m_2}{m_1}\sin^2\theta \qquad (6)$$

若记$\mu = \frac{m_2}{m_1}$，可将（6）式改写为

$$\mu\sin^2(\theta+\varphi) = \mu\sin^2\varphi + \sin^2\theta \qquad (7)$$

视 θ 为 φ 的函数 $\theta(\varphi)$，对(7)式求 θ 的极值，有

$$\frac{d\theta}{d\varphi}[\sin 2\theta - \mu\sin(\theta+\varphi)] = \mu[-\sin 2\varphi + \sin 2(\theta+\varphi)]$$

令 $\frac{d\theta}{d\varphi} = 0$，则

$$\sin 2(\theta+\varphi) - \sin 2\varphi = 0$$

$$2\cos(\theta+2\varphi)\sin\theta = 0$$

(1) 若 $\sin\theta=0$,

则 $\theta=0$（极小） (8)

(2) 若 $\cos(\theta+2\varphi)=0$

则 $\theta=90^\circ-2\varphi$ (9)

将(9)式代入(7)式，有

$$\mu\sin^2(90^\circ-\varphi) = \mu\sin^2\varphi + \sin^2(\theta)$$

由此可得

$$\sin\theta = \mu = \frac{m_2}{m_1}$$

若$m_2=m_1$

则有 $$\sin\theta=\mu=\frac{m_2}{m_1}=1,\theta=90°$$

此题得证。

第一章　　习题 1-9、10 题解

1-9 动能为 1.0 Mev的窄质子束垂直地射到质量厚度（ρt）为 1.5mg/cm^{2}的金箔上，若金箔中含有百分之三十的银，试求散射角大于 30°的相对质子数为多少？

要点分析：此题靶为一个复合材料靶，关键找出靶的厚度 t．然后计算出金原子数和银原子数，即可积分计算．

从书后表可知：$Z_{Au}=79, A_{Au}=197$，$\rho_{Au}=1.888\times10^4 kg/m^3$；$Z_{Ag}=47, A_{Ag}=108$，$\rho_{Ag}=1.05\times10^4 kg/m^3$．

解：　先求金箔的厚度 t

$\rho t=(0.7\rho_{Au}+0.3\rho_{Ag})\ t=1.5 mg/cm^2$

$$t=\frac{1.5\times10^{-2}}{0.7\rho_{Au}+0.3\rho_{Ag}}=\frac{1.5\times10^{-2}}{0.7\times1.888\times10^4+0.3\times1.05\times10^4}m=0.916\mu m$$

这种金箔中所含金原子数与银原子数分别为

$$\frac{\rho_{Au}t}{A_{Au}}N_A \quad 和 \quad \frac{\rho_{Ag}t}{A_{Ag}}N_A$$

再计算质子被金原子与银原子散射到 θ>30°范围内的相对数目。被金原子散射的相对数目为：

$$\eta_{Au}=\int\frac{dN'_{Au}}{N}=\int_{30^\circ}^{180^\circ}nt\frac{\alpha^2}{16}\frac{2\pi\sin\theta d\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}}=\frac{\rho_{Au}t}{A_{Au}}N_A\frac{\pi Z_1^2Z_2^2 1.44^2}{2}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right]_{30^\circ}^{180^\circ}$$

式中，N为入射质子总数，dN_{Au}'为被金原子散射到θ>30°范围内的质子数。同理可得质子被银原子散射的相对数目为：

$$\eta_{Ag}=\int\frac{dN'_{Ag}}{N}=\int_{30^\circ}^{180^\circ} nt\frac{\alpha^2}{16}\frac{2\pi\sin\theta d\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}}=\frac{\rho_{Ag}t}{A_{Ag}}N_A\frac{\pi Z_1^2Z_3^2 1.44^2}{2}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right]_{30^\circ}^{180^\circ}$$

被散射的相对质子总数为

$$\eta=\eta_{Au}+\eta_{Ag}=\frac{\rho_{Au}t}{A_{Au}}N_A\frac{\pi Z_1^2Z_2^2(1.44\times10^{-5})^2}{4E^2}+\frac{\rho_{Ag}t}{A_{Ag}}N_A\frac{\pi Z_1^2Z_3^2(1.44\times10^{-5})^2}{4E^2}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{30}{2}}-\frac{1}{\sin^2\frac{180}{2}}\right]$$

将已知数据代入：

N_A=6.02 × 10^{23}, E=1.0MeV, t=0.916 μ m, Z_{Au}=79, A_{Au}=197, ρ_{Au}=18.88 × 10^3kg/m^3, Z_{Ag}=47, A_{Ag}=108, ρ_{Ag}=10.5 × 10^3kg/m^3

$\eta\approx 1.028\times10^{-5}$

结果讨论：此题是一个公式活用问题.只要稍作变换,很容易解决.我们需要这样灵活运用能力.

1-10 由加速器产生的能量为 1.2MeV、束流为 5.0 nA的质子束，垂直地射到厚为 1.5μm的金箔上，试求 5 min内被金箔散射到下列角间隔内的质子数。金的密度（ρ=1.888×10^4 kg/m^3）

[1] 59°～61°;

[2] $\theta>\theta_0$=60°

[3] $\theta<\theta_0$=10°

要点分析:解决粒子流强度和入射粒子数的关系.

注意:第三问,因卢瑟福公式不适用于小角(如 0°)散射，故可先计算质子被散射到大角度范围内的粒子数，再用总入射粒子数去减，即为所得。

解：设 j 为单位时间内入射的粒子数，I 为粒子流强度，因 $I=je$, $j=I/e$, 时间 T=5min 内单位面积上入射的质子的总数为 N 个：

$$N=jT=\frac{IT}{e}=\frac{5.0\times10^{-9}\times5\times60}{1.602177\times10^{-19}}=9.36\times10^{12}$$

再由卢瑟福公式，单位时间内，被一个靶原子沿 θ 方向，射到 dΩ 立体角内的质子数为：

$$dN' = N\frac{\alpha^2 d\Omega}{16A\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

单位时间内，被所有靶原子沿 θ 方向，射到 dΩ 立体角内的质子数为

$$dN' = N\frac{\alpha^2 d\Omega}{16A\sin^4\frac{\theta}{2}}nAt = ntN\frac{\alpha^2}{16}\frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

$$dn = N\frac{a^2 d\Omega}{16A\sin^4\frac{\theta}{2}}nAt = jT\frac{a^2 d\Omega}{16\sin^4\frac{\theta}{2}}nt = jTnt\frac{a^2 2\pi\sin\theta d\theta}{16\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

式中，n 为单位体积的粒子数，它与密度的关系为：

$$n = \frac{\rho}{A}N_A$$

所以，上式可写为

$$dn = N\frac{a^2 d\Omega}{16A\sin^4\frac{\theta}{2}}nAt = jT\frac{a^2 d\Omega}{16\sin^4\frac{\theta}{2}}nt = jT\frac{\rho}{A}N_A t\frac{a^2 2\pi\sin\theta d\theta}{16\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

解：[1]

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} dn = \int_{\theta_1}^{\theta_2} jT\frac{\rho}{A}N_A t\frac{a^2 2\pi\sin\theta d\theta}{16\sin^4\frac{\theta}{2}} = jT\frac{\rho}{A}N_A t\frac{a^2}{16}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{2\pi\sin\theta d\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

$$= \left(\frac{\rho}{A}N_A Ttj\frac{a^2}{16}\right)\times(-4\pi)\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$= -\left[\frac{1.88\times10^4\times6.02\times10^{23}}{196\times10^3}\times1.5\times10^{-6}\times9.36\times10^{12}\times\frac{\left(1.44\times\frac{79}{1.2}\right)^2}{4}\times10^{-30}\right]\times\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right]_{59^\circ}^{61^\circ}$$

$$= -5.719\times10^9\times-(0.228) = 1.3\times10^9$$

解：[2]　仍然像上式一样积分，积分区间为 60°-180°，然后用总数减去所积值。即 $\theta>\theta_0$=60°的值。

$$-5.719\times10^{9}\times\left[\frac{1}{\sin^{2}\frac{\theta}{2}}\right]_{\theta_1}^{\theta_2}=-5.719\times10^{9}\times\left[\frac{1}{\sin^{2}\frac{\theta}{2}}\right]_{60^{\circ}}^{180^{\circ}}=5.719\times10^{9}\times3=1.7151\times10^{10}$$

解：[3]　由于 0°的值为无穷大,无法计算,所以将作以变换.仍然像上式一样积分，积分区间为 10°-180°，然后用总数减去所积值，即$\theta<\theta_0$=10°的值。

$$-5.719\times10^{9}\times\left[\frac{1}{\sin^{2}\frac{\theta}{2}}\right]_{\theta_1}^{\theta_2}=-5.719\times10^{9}\times\left[\frac{1}{\sin^{2}\frac{\theta}{2}}\right]_{10^{\circ}}^{180^{\circ}}=5.719\times10^{9}\times32.16=1.84\times10^{11}$$

总数为 $9.36\times10^{12}-7.56\times10^{11}=8.6\times10^{12}$（个