数学物理方法

Methods of Mathematical Physics

武 汉 大 学

物理科学与技术学院

问题的引入：

*数理方法研究问题的步骤

- 写出定解问题 √
- 求解 ?
- 分析解答 ?

1、抖动的绳子－ 一维进行波；

2、投石入水－ 二维进行波；

3、灯塔上发出的灯光－ 三维进行波；

进行波——往无前向前传播的波。

行波法－ 研究行进行波的方法。

第七章　行波法

travelling wave method

中心：用行波法求解无界空间波动问题。

目的：1、掌握行波法解题要领及全过程；

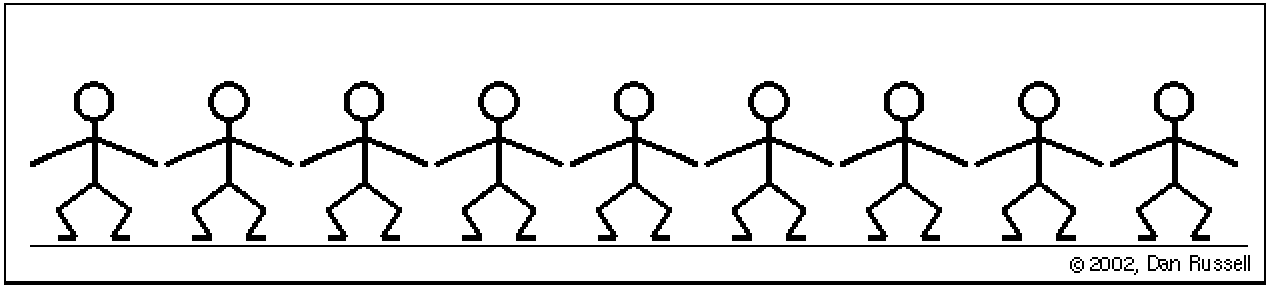
2、熟练地运用达朗贝尔公式求解一维无界波动问题；

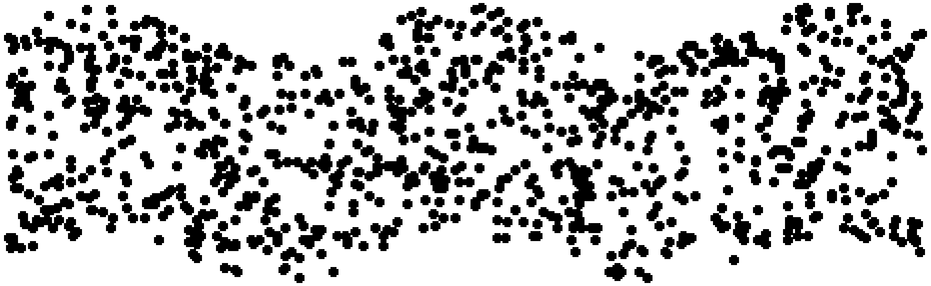
3、掌握三维问题化为一维问题的平均值法。

4、掌握三维波动方程的解—泊松公式及推迟势的应用。

第七章　行波法

travelling wave method





第七章　行波法

travelling wave method

§7.1　达朗贝尔公式

D'Alembert formula

物理模型：　无界弦的自由振动

一、定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \ , \ -\infty < x < \infty & (1) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \ -\infty < x < \infty & (2) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), \ -\infty < x < \infty & (3) \end{cases}$$

二、求解：

1、思路：仿照求解常微分方程的先求通解，再用初始条件求特解的方法。

二、求解

2、引入坐标变换求（1）的通解：

选择 $\begin{cases} \xi = (x + at) \\ \eta = (x - at) \end{cases}$ 即：$\begin{cases} x = (1/2)(\xi + \eta) \\ t = (1/2a)(\xi - \eta) \end{cases}$

则方程（1）化为：$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} u(\xi, \eta) = 0 \quad (1)'$$

$$u(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta) \quad (4)$$

通解：$$\boxed{u(x,t) = f_1(x + at) + f_2(x - at)} \quad (5)$$

二、求解

3、用初始条件定特解：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \;, -\infty < x < \infty & (1) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), -\infty < x < \infty & (2) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), -\infty < x < \infty & (3) \end{cases}$$

$$\boxed{u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at)} \quad (5)$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)d\alpha \quad (6)}$$

—D'Alembert公式

三、分析解答：

1、适定性：

（1）达朗贝尔公式存在。

$$u_t = \frac{a}{2}[\varphi'(x+at) - \varphi'(x-at)]$$

$$+ \frac{1}{2a}[\int_{x-at}^{x+at} \frac{\partial \psi}{\partial t} d\alpha + a \cdot \psi(x+at) + a\psi(x-at)]$$

$$u_{tt} = \frac{a^2}{2}[\varphi''(x+at) + \varphi''(x-at)] + \frac{a}{2}[\psi'(x+at) - \psi'(x-at)]$$

$$u_x = \frac{1}{2}[\varphi'(x+at) + \varphi'(x-at)] + \frac{1}{2a}[\psi(x+at) - \psi(x-at)]$$

$$u_{xx} = \frac{1}{2}[\varphi''(x+at) + \varphi''(x-at)] + \frac{1}{2a}[\psi'(x+at) - \psi'(x-at)]$$

三、分析解答：

1、适定性：

（2）任意性已由初始条件唯一确定。

（3）稳定性：设

$$u|_{t=0}=\begin{cases}\varphi_1(x)\\ \varphi_2(x)\end{cases};\quad u_t|_{t=0}=\begin{cases}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\end{cases};\qquad |\varphi_1-\varphi_2|\le\delta,\ |\psi_1-\psi_2|\le\delta$$

$$|u_1-u_2|\le\frac{1}{2}|\varphi_1(x+at)-\varphi_2(x+at)+\varphi_1(x-at)-\varphi_2(x-at)|$$

$$+\frac{1}{2a}\left|\int_{x-at}^{x+at}[\psi_1(\alpha)-\psi_2(\alpha)d\alpha\right|$$

$$\le\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2a}\delta[(x+at)-(x-at)]=\delta[1+t]$$

结论：达朗贝尔公式存在、唯一、稳定。即，适定.

三、分析解答:

2、物理意义:

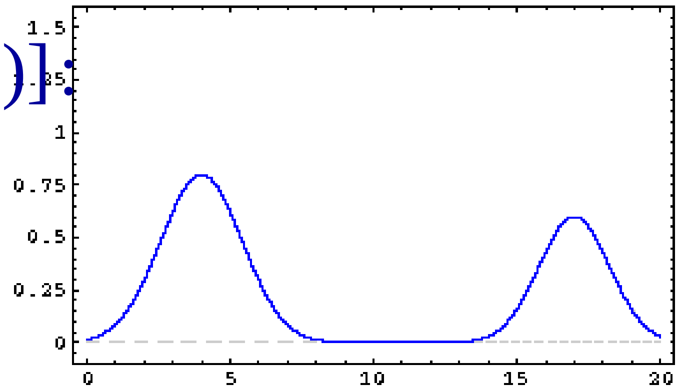
（1）设$\psi=0$，即$u(x,t)=\dfrac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]$:

$\varphi(x-at)$:以速度 a 沿 x 轴正向传播的波—正波 .

$\varphi(x+at)$:以速度 a 沿 x 轴反向传播的波—反波 .

（2）设$\varphi=0$，$\Psi(x)=\dfrac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\psi(\alpha)d\alpha$:

则:$u(x,t)=\dfrac{1}{2}[\Psi(x+at)-\Psi(x-at)]$:



结论: 达朗贝尔解表示正行波和反波的叠加。

四、例题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = \sin x \\ u_t(x,0) = x^2 \end{cases}$$

答: $\boxed{\sin x \cos at + \frac{t}{3}(3x^2 + a^2 t^2)}$

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} = 0 \\ u(x,0) = x \\ u_y(x,0) = 0 \end{cases}$$

$u(x,y) = ?$

答: $\boxed{x}$

五、小结

1、
$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \ , \ -\infty < x < \infty & (1) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \ -\infty < x < \infty & (2) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), \ -\infty < x < \infty & (3) \end{cases}$$

的解为

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\,d\alpha \qquad (6)}$$

方程（1）的通解为

$$\boxed{u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at)}$$

五、小结

2、行波法：

（1）它基于波动特点为背景；

（2）其要领是引入坐标变换简化方程；先求通解再求特解；

（3）优点：求解方式易于理解，求波动方程十分方便；

（4）缺点：通解不易求，使之有局限性。

思考：

1、行波法是否仅限于用来求波动问题？

2、能否用行波法求解

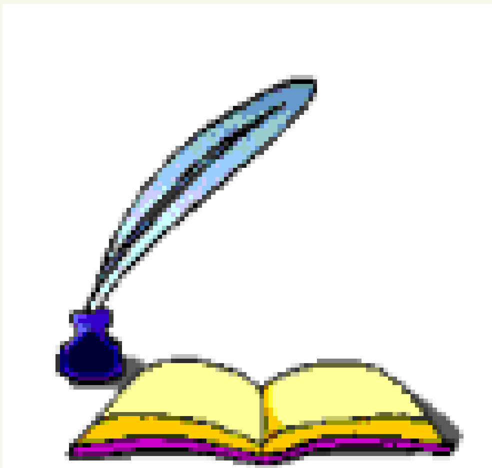
$$(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y})(\frac{\partial}{\partial x}+3\frac{\partial}{\partial y})$$

$$\begin{cases}\xi = 3x - y \\ \eta = x + y\end{cases}$$

$$(1)\ \begin{cases} u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}=0 & (1) \\ u(x,0)=\sin x & (2) \\ u_y(x,0)=x & (3) \end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=x^2 y, & x>1, y>0 \\ u(x,0)=x^2, & x>1 \\ u(1,y)=\cos y, & y>0 \end{cases}$$

本节作业



习题 7.1：1（3）；

4；

7（2）；

Good-by!