数理方法 CH9 作业题解答

P170.习题 9.1

2.求下列函数的 Fourier 变换

（2） e^{-hx^2}　　$h>0$

解： $F[e^{-hx^2}]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-hx^2}e^{-iwx}dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-hx^2}(\cos wx-i\sin wx)dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-hx^2}\cos wxdx$

（上式虚部被积函数是奇函数，积分结果为零，故只剩实部）

根据教材 P91 积分公式 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}\cos bxdx=e^{-\frac{b^2}{4a}}\sqrt{\frac{p}{a}}$，上式积分结果为： $e^{-\frac{w^2}{4h}}\sqrt{\frac{p}{h}}$

(3) $\sin hx^2$， $\cos hx^2$， $h>0$

解： $F[e^{ihx^2}]=F[\cos hx^2+i\sin hx^2]=F[\cos hx^2]+iF[\sin hx^2]$

而 $F[e^{ihx^2}]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ihx^2}e^{-iwx}dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ih(x^2-\frac{w}{h}x+\frac{w^2}{4h^2})-\frac{iw^2}{4h}}dx=\frac{1}{\sqrt{h}}\cdot e^{-\frac{iw^2}{4h}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ih(x-\frac{w}{2h})^2}d\sqrt{h}(x-\frac{w}{2h})$

记 $x=\sqrt{h}(x-\frac{w}{2h})$，上式为： $F[e^{ihx^2}]=\frac{1}{\sqrt{h}}\cdot e^{-\frac{iw^2}{4h}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix^2}dx$

由教材 P90 积分公式 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix^2}dx=\sqrt{p}\,e^{i\frac{p}{4}}$，得 $F[e^{ihx^2}]=\sqrt{\frac{p}{h}}e^{-\frac{iw^2}{4h}}e^{i\frac{p}{4}}=\sqrt{\frac{p}{h}}e^{-i(\frac{w^2}{4h}-\frac{p}{4})}$

比较上式两边的实部和虚部，得到：

$$F[\cos hx^2]=\sqrt{\frac{p}{h}}\cos(\frac{w^2}{4h}-\frac{p}{4})$$

$$F[\sin hx^2]=-\sqrt{\frac{p}{h}}\sin(\frac{w^2}{4h}-\frac{p}{4})$$

7.设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=|\vec{r}|$，　$w=\sqrt{w_1{}^2+w_2{}^2+w_3{}^2}=|\vec{w}|$，证明

（1） $F[\frac{1}{r}]=\frac{4p}{w^2}$；　（2） $F[\frac{1}{r}e^{-mr}]=\frac{4p}{w^2+m^2}$　　$(m>0)$

证明：（1）可从右边推得左边。

$$F^{-1}[\frac{4p}{w^2}]=\frac{1}{(2p)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{4p}{w^2}e^{i\vec{w}\cdot\vec{r}}d\vec{w}=\frac{4p}{(2p)^3}\int_0^{\infty}\int_0^{2p}\int_0^{p}\frac{1}{w^2}e^{iwr\cos q}w^2\sin q\,dq\,dj\,dw$$

$$=\frac{1}{p}\int_0^{\infty}\int_{-1}^{1}e^{iwrx}dxdw=\frac{1}{p}\int_0^{\infty}\frac{e^{iwr}-e^{-iwr}}{iwr}dw=\frac{2}{p}\int_0^{\infty}\frac{\sin wr}{wr}dw=\frac{2}{pr}\cdot\frac{p}{2}=\frac{1}{r}$$

（其中记 $\cos q = x$，倒数第 2 步用了教材 P90 的积分公式：$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{p}{2}$）

证明：（2）可从左边推至右边。

$$F[\frac{1}{r}e^{-mr}] = \iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{r}e^{-mr}e^{-i\vec{w}\cdot\vec{r}}d\vec{r} = \int_0^\infty\int_0^{2p}\int_0^p \frac{1}{r}e^{-mr}e^{-iwr\cos q}r^2\sin q\,dq\,dj\,dr$$ 记 $\cos q = x$，

则

$$F[\frac{1}{r}e^{-mr}] = 2p\int_0^\infty\int_{-1}^1 \frac{1}{r}e^{-mr}e^{-iwrx}r^2dxdr = 2p\int_0^\infty(\int_{-1}^1 e^{-iwrx}dx)\frac{1}{r}e^{-mr}r^2dr = 2p\int_0^\infty \frac{e^{-iwr}-e^{iwr}}{-iwr}e^{-mr}rdr$$

$$=\frac{4p}{w}\int_0^\infty e^{-mr}\sin wr\ dr = \frac{4p}{w}\cdot\frac{w}{m^2+w^2}=\frac{4p}{m^2+w^2}$$

（上式最后一步积分由连续两次应用分部积分法即可求得）

P175 习题 9.2

6.求解热传导方程 $u_t = a^2u_{xx}\quad(-\infty<x<\infty,\quad t>0)$ 的初值问题，已知

（1）$u(x,0)=\sin\ x$　　　　　　　　　（2）$u(x,0)=x^2+1$

（1）解：定解问题为：

$$\begin{cases} u_t = a^2u_{xx} \quad (-\infty<x<\infty,\quad t>0)\text{............1} \\ u(x,0)=\sin x\text{..2} \end{cases}$$

对定解问题 1~2 式中各项以 x 为变量进行 Fourier 变换，记

$$F[u(x,t)] = \int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-iwx}dx=\tilde{u}(w,t)$$

$$F[\sin x] = \int_{-\infty}^{\infty}\sin xe^{-iwx}dx=\tilde{j}(w)$$

则 1~2 式化为

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{u}(w,t)}{dt}+a^2w^2\tilde{u}(w,t)=0\text{..................3} \\ \tilde{u}(w,0)=\tilde{j}(w)\text{...................................4} \end{cases}$$

满足初始条件 4 式的方程 3 的解为：

$$\tilde{u}(w,t)=\tilde{j}(w)e^{-a^2w^2t}\text{.......... .... 5}$$

下面求 5 式的逆变换，

$$u(x,t)=F^{-1}[\tilde{u}(w,t)]=F^{-1}[\tilde{j}(w)e^{-a^2w^2t}]=\sin x * F^{-1}[e^{-a^2w^2t}]\text{...........6}$$

$$F^{-1}[e^{-a^2w^2t}]=\frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2w^2t}e^{iwx}dw=\frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-a^2tw^2}\cos wxdw$$

由教材 P91 积分公式 $\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bxdx=\frac{1}{2}e^{-\frac{b^2}{4a}}\sqrt{\frac{p}{a}}$，上式积分结果为：

$$F^{-1}[e^{-a^2w^2t}]=\frac{1}{p}\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\sqrt{\frac{p}{a^2t}}=\frac{1}{2a\sqrt{pt}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

代入 6 式，并代入卷积定义式，得

$$u(x,t)=\sin x * F^{-1}[e^{-a^2w^2t}]=\frac{1}{2a\sqrt{pt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\sin(x-x)dx$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{pt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}(\sin x\cos x-\cos x\sin x)dx$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{pt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\sin x\cos xdx=\frac{1}{2a\sqrt{pt}}\sin x\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\cos xdx$$

再一次应用教材 P91 积分公式 $\int_0^{\infty}e^{-ax^2}\cos bxdx=\frac{1}{2}e^{-\frac{b^2}{4a}}\sqrt{\frac{p}{a}}$，上式积分结果为：

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{pt}}\sin xe^{-\frac{1}{4}\cdot 4a^2t}\sqrt{p\cdot 4a^2t}=e^{-a^2t}\sin x$$

（2）解：定解问题为：

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx} & (-\infty<x<\infty,\quad t>0)\ldots\ldots\ldots\ldots 1\\ u(x,0)=x^2+1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2\end{cases}$$

对定解问题 1~2 式中各项以 x 为变量进行 Fourier 变换，记

$$F[u(x,t)]=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-iwx}dx=\tilde{u}(w,t)$$

$$F[x^2+1]=\int_{-\infty}^{\infty}(x^2+1)e^{-iwx}dx=\tilde{j}(w)$$

则 1~2 式化为

$$\begin{cases}\dfrac{d\tilde{u}(w,t)}{dt}+a^2w^2\tilde{u}(w,t)=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3\\ \tilde{u}(w,0)=\tilde{j}(w)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4\end{cases}$$

满足初始条件 4 式的方程 3 的解为：

$$\tilde{u}(w,t)=\tilde{j}(w)e^{-a^2w^2t}\ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ \ 5$$

下面求 5 式的逆变换，

$$u(x,t)=F^{-1}[\tilde{u}(w,t)]=F^{-1}[\tilde{j}(w)e^{-a^2w^2t}]=(x^2+1)*F^{-1}[e^{-a^2w^2t}]\ldots\ldots\ldots 6$$

$$F^{-1}[e^{-a^2w^2t}]=\frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2w^2t}e^{iwx}dw=\frac{1}{p}\int_0^{\infty}e^{-a^2tw^2}\cos wxdw$$

由教材 P91 积分公式 $\int_0^{\infty}e^{-ax^2}\cos bxdx=\frac{1}{2}e^{-\frac{b^2}{4a}}\sqrt{\frac{p}{a}}$，上式积分结果为：

$$F^{-1}[e^{-a^2w^2t}] = \frac{1}{p}\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\sqrt{\frac{p}{a^2t}} = \frac{1}{2a\sqrt{pt}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

代入 6 式，并代入卷积定义式，得

$$u(x,t) = (x^2+1)*F^{-1}[e^{-a^2w^2t}] = \frac{1}{2a\sqrt{pt}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}[(x-x)^2+1]dx$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{pt}}\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}(x-x)^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} dx\ \}$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{pt}}\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}(x^2+x^2-2xx)dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} dx\}$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{pt}}\{x^2\sqrt{p\cdot 4a^2t} + \frac{1}{2}\sqrt{p}\cdot(\frac{1}{4a^2t})^{-\frac{3}{2}} + \sqrt{p\cdot 4a^2t}\}$$

$$= x^2 + 2a^2t + 1$$

注：上式最后一步积分时，用的是教材 P88 第 9 题中的两个积分公式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{p}{a}} \quad 以及 \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{p}\,a^{-\frac{3}{2}}$$