2.2 对于一维自由运动粒子，设$\psi(x,0)=\delta(x)$求$|\psi(x,t)|^2$。

傅立叶变换

$$\psi(x,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{p=-\infty}^{\infty}\phi(p)e^{\frac{i}{\hbar}px}dp$$

但按题意，此式等于$\delta(x)$。但我们知道一维δ函数一种表示是：

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}dk$$

将二式比较：知道$k=\frac{p}{\hbar}$，$\delta(x)=\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\frac{p}{\hbar}x}d\mathrm{p}$

并且求得动量空间初始波函数：$\phi(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$，于是，通过动量空间t时刻波函数得：

$$\psi(x,t)=\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{p=-\infty}^{\infty}e^{\frac{i}{\hbar}(px-\frac{p^2}{2m}t)}dp$$

利用积分$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha\xi^2}d\xi=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$：

$$\psi(x,t)=\frac{1}{2\pi\hbar}e^{\frac{imx^2}{2\hbar t}}\sqrt{\frac{2m\hbar\pi}{it}}$$

写出共轭函数（前一式i变号）：

$$\psi^*(x,t)=\frac{1}{2\pi\hbar}e^{-\frac{imx^2}{2\hbar t}}\sqrt{\frac{2m\hbar\pi}{-it}}$$

$$|\psi(x,t)|^2=\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\times\frac{2m\hbar\pi}{t}=\frac{m}{2\pi\hbar t}$$

****

2.7 考虑单粒子的薛定谔方程式:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x},t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{x},t)+[V_1(\vec{x})+iV_2(\vec{x})]\Psi(\vec{x},t)$$

V_1，V_2为实函数，证明粒子的几率不守恒。求出在空间体积Ω内，粒子几率“丧失”或“增加”的速率。

解：要证明几率不守恒，可以计算总几率的时间变化率，先考察空间一定体积Ω中粒子出现的总几率，总几率是

$$P=\iiint_{\Omega}\Psi^*\Psi d^3x$$

求总几率的时间变化率

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega}\Psi^*\Psi d^3x=\iiint_{\Omega}(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\Psi)d^3x \qquad (1)$$

再根据薛定谔方程式和其共轭方程式求出$\frac{\partial\Psi}{\partial t}$和$\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}$，有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Psi}{\partial t}=-\dfrac{\hbar}{2mi}\nabla^2\Psi+\dfrac{1}{\hbar i}[V_1+iV_2]\Psi\\ \dfrac{\partial\Psi^*}{\partial t}=\dfrac{\hbar}{2mi}\nabla^2\Psi^*-\dfrac{1}{\hbar i}[V_1-iV_2]\Psi^*\end{cases} \qquad (2)$$

将（2）代入（1），化简后得

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\iiint_{\Omega}\{-\frac{\hbar}{2mi}(\Psi^*\nabla^2\Psi-\Psi\nabla^2\Psi^*)+\frac{2V_2}{\hbar}\Psi^*\Psi\}d^3x$$

利用高斯定理将右方第一项变形：

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\iiint_{\Omega}\{-\frac{\hbar}{2mi}\nabla\cdot(\Psi^*\nabla\Psi-\Psi\nabla\Psi^*)\}d^3x+\frac{2}{\hbar}\iiint_{\Omega}\Psi^*V_2\Psi d^3x$$

$$=-\iiint_{\Omega}\frac{\hbar}{2mi}(\Psi^*\nabla\Psi-\Psi\nabla\Psi^*)\cdot d\vec{S}+\frac{2}{\hbar}\iiint_{\Omega}\Psi^*V_2\Psi d^3x \qquad (3)$$

令：

$$\vec{J} \equiv \frac{\hbar}{2m\,i}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)$$

（3）式改写为：

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\iint_s \vec{J}\cdot d\,\vec{s} + \frac{2}{\hbar}\iiint_\Omega \psi^* V_2(\vec{x})\psi\, d^3x \qquad (5)$$

$\frac{\partial P}{\partial t}$是空间Ω内粒子几率减少或增加的速度，右方$-\iint_s \vec{J}\cdot d\,\vec{s}$是指Ω的包围面 S 上几率流动的速度（流进或流出），右方$\frac{2}{\hbar}\iiint_\Omega \psi^* V_2(\vec{x})\psi\, d^3x$指由虚数势能引起的，附加的几率变化速率，题目所指的是这一项。

****

2.7 证明从单粒子的薛定谔方程式得出的速度场是非旋的，即

$$\nabla\times\vec{v} = 0,\left(\vec{v} = \vec{j}/\rho\right) \qquad \rho = \Psi^*\Psi$$

（证明）根据它的解$\Psi(\vec{x}, t)$和它的共轭波函数$\Psi^*(\vec{x}, t)$可写出几率密度ρ和几率流密度$\vec{J}$：

$$\rho = \Psi^*\Psi$$

$$\vec{J} = \frac{\hbar i}{2m}(\Psi\nabla\Psi^* - \Psi^*\nabla\Psi)$$

速度算符 $\vec{v} = \frac{\hbar i}{2m}\frac{(\Psi\nabla\Psi^* - \Psi^*\nabla\Psi)}{\Psi^*\Psi} = \frac{\hbar i}{2m}\left(\frac{\nabla\Psi^*}{\Psi^*} - \frac{\nabla\Psi}{\Psi}\right)$

分量形式：

$$= \frac{\hbar i}{2m}\{\left(\frac{1}{\Psi^*}\frac{\partial\Psi^*}{\partial x} - \frac{1}{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{\Psi^*}\frac{\partial\Psi^*}{\partial y} - \frac{1}{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(\frac{1}{\Psi^*}\frac{\partial\Psi^*}{\partial z} - \frac{1}{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\vec{k}\}$$

$$=\frac{\hbar i}{2m}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{\Psi^*}{\Psi}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\ln\frac{\Psi^*}{\Psi}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\ln\frac{\Psi^*}{\Psi}\vec{k}\right\}=\frac{\hbar i}{2m}\nabla\ln\left(\frac{\Psi^*}{\Psi}\right)$$

因而证明 v 是一个标量场$\Psi^*(\vec{x})/\Psi(\vec{x})$的对数的梯度。梯度是非旋的。

****

证明：动能平均值一定为正:

以一维为例，

$$\overline{T}=\iiint\psi^*(p_x)(\frac{p_x^{\ 2}}{2m})\psi(p_x)dp_x$$

很容易推广到三维。