刚体的定点运动

2016 年 12 月 24 日

刚体的定点运动

刚体动力学中最复杂、最困难的问题是刚体定点运动的动力学问题.

1. 动力学方程的建立需要克服一些困难，需要引入张量概念和运用一些技巧;
2. 动力学方程组是非线性的.

刚体的定点运动

解决刚体体定点运动动力学问题的理论和方法：

1. 运用质点系的三大定理来解决.
2. 运用更一般的分析力学方法建立其运动方程.

欧拉角

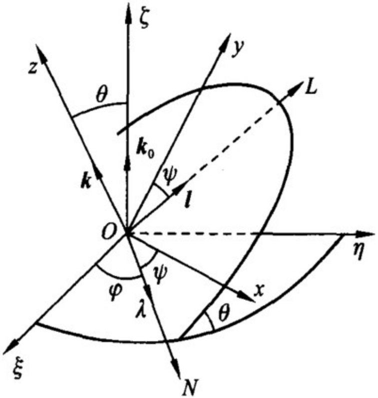
设 $O-\xi\eta\zeta$ 为静止系,$O-xyz$ 为与刚体固连的坐标系，初始时刻二者重合.

定义 1.1 (节线)

平面 Oxy 与 $O\xi\eta$ 的交线 ON.

定义 1.2 (欧拉角 (θ, φ, ψ))

章动角：$0 \leq \theta < \pi$
进动角：$0 \leq \varphi < 2\pi$
自转角：$0 \leq \psi < 2\pi$



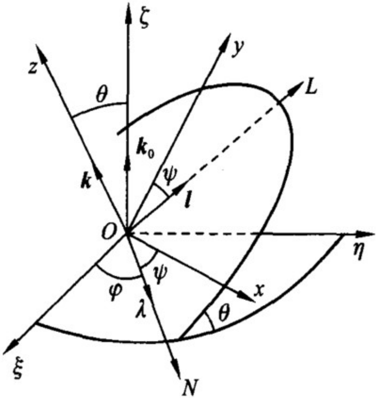
欧拉角

$O\xi\eta\zeta \to Oxyz$ 动作分解

1. 将 $O\xi\eta\zeta$ 绕 $O\zeta$ 轴转动 φ，$O\xi$ 转到 ON
2. 再绕 ON 轴转动 θ，$O\zeta$ 转到 Oz
3. 再绕 Oz 轴转动 ψ，ON 转到 Ox

得到三个过 O 点的角速度矢量

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k}_0 + \dot{\theta}\vec{\lambda} + \dot{\psi}\vec{k}$$



欧拉运动学方程

将角速度投影到动坐标上

进动角速度：作辅助线 OL，

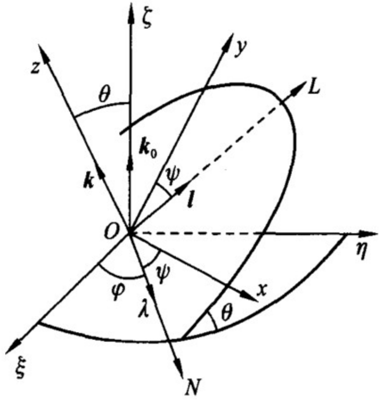
$$\dot{\varphi}\vec{k}_0 = \dot{\varphi}\cos\theta\vec{k} + \dot{\varphi}\sin\theta\vec{l}$$

再分解上式第二项

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}\vec{k}_0 &= \dot{\varphi}\cos\theta\vec{k} + \dot{\varphi}\sin\theta\vec{l} \\ &= \dot{\varphi}\cos\theta\vec{k} + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi\vec{i} + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi\vec{j}\end{aligned}$$

章动角速度

$$\dot{\theta}\vec{\lambda} = \dot{\theta}\cos\psi\vec{i} - \dot{\theta}\sin\psi\vec{j}$$



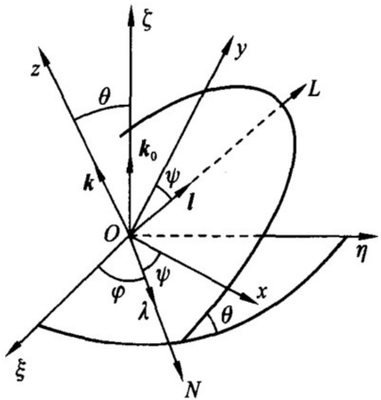
欧拉运动学方程

因为角速度在动系中

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

则有

$$\boxed{\begin{cases} \omega_x = \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi \\ \omega_y = \dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi \\ \omega_z = \dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi} \end{cases}}$$



定点转动的角动量

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \\ &= \sum m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \\ &= \sum m_i [\omega \vec{r}_i^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \vec{r}_i]\end{aligned}$$

在坐标轴上投影，$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$，$\vec{r}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}$，则有

$$\begin{aligned}\vec{L} = \quad & [\omega_x \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum m_i x_i y_i - \omega_z \sum m_i x_i z_i] \vec{i} \\ & + [-\omega_x \sum m_i y_i x_i + \omega_y \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) - \omega_z \sum m_i y_i z_i] \vec{j} \\ & + [-\omega_x \sum m_i z_i x_i - \omega_y \sum m_i z_i y_i + \omega_z \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)] \vec{k}.\end{aligned}$$

定点转动的角动量

定义 3.1 (对轴的转动惯量)

$$J_{xx} = \sum m_i(y_i^2 + z_i^2),\ J_{yy} = \sum m_i(x_i^2 + z_i^2),\ J_{zz} = \sum m_i(y_i^2 + y_i^2)$$

定义 3.2 (惯量积)

$$J_{xy} = J_{yx} = \sum m_i x_i y_i,\ J_{yz} = J_{zy} = \sum m_i y_i x_i,\ J_{xz} = J_{zx} = \sum m_i x_i z_i$$

则有

$$\vec{L} = [J_{xx}\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z]\vec{i} + [-J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y - J_{yz}\omega_z]\vec{j} + [-J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z]\vec{k}.$$

定点转动的角动量

$$
\begin{aligned}
L_x &= J_{xx}\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z \\
L_y &= -J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y - J_{yz}\omega_z \\
L_z &= -J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z .
\end{aligned}
$$

写成矩阵形式，有

$$
\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}
$$

即

$$
\vec{L} = \mathbf{J}\vec{\omega}
$$

定点转动的角动量

也可以将惯量张量 $\mathbf{J}$ 写成并矢

$$\mathbf{J}=\vec{i}\vec{i}J_{xx}-\vec{i}\vec{j}J_{xy}-\vec{i}\vec{k}J_{xz}-\vec{j}\vec{i}J_{yx}+\vec{j}\vec{j}J_{yy}-\vec{j}\vec{k}J_{yz}-\vec{k}\vec{i}J_{zx}-\vec{k}\vec{j}J_{zy}+\vec{k}\vec{k}J_{zz}$$

惯量张量 $\mathbf{J}$

$$\mathbf{J}=\begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}$$

1. 如果 $Oxyz$ 不是固连在刚体上的坐标系，刚体相对 $Oxyz$ 有转动，那么在 $Oxyz$ 上看到的质量分布一般会随时间改变，故在这个坐标系中惯量系数依赖于时间.
2. 如果 $Oxyz$ 不是固连在刚体上的坐标系，在少数有良好对称性的情况下 $Oxyz$ 上看到的质量分布可能不随时间改变，此时在这个坐标系中惯量系数是常数.

动能

刚体定点转动的动能为

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_i m_i(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_i) \\
&= \frac{1}{2}\sum_i m_i\vec{\omega}\cdot(\vec{r}_i\times(\omega\times\vec{r}_i)) \\
&= \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L} \\
&= \frac{1}{2}\vec{\omega}^T\mathbf{J}\vec{\omega}
\end{aligned}
$$

动能

即

$$T=\frac{1}{2}(\omega_x,\omega_y,\omega_z)\begin{pmatrix}J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz}\\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz}\\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}$$

换成另一种形式

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}\sum_i m_i(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)\\ &= \frac{1}{2}\sum_i m_i[\omega r_i\sin\theta_i]^2\\ &= \frac{1}{2}\omega^2\sum_i m_i r_{i\perp}^2=\frac{1}{2}J_0\omega^2\end{aligned}$$

J_0 是刚体绕转动瞬轴的转动惯量.

惯量椭球

若 $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$，则

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T\mathbf{J}\vec{\omega} = \frac{1}{2}J'\omega^2$$

其中，

$$\vec{n}^T\mathbf{J}\vec{n} = J'$$

则转动惯量可以写成

$$\frac{\vec{n}^T}{\sqrt{J'}}\mathbf{J}\frac{\vec{n}}{\sqrt{J'}} = 1, \quad \rho^T\mathbf{J}\rho = 1$$

则可得到

$$J_{xx}\rho_x^2 + J_{yy}\rho_y^2 + J_{zz}\rho_z^2 + 2J_{xy}\rho_x\rho_y + 2J_{xz}\rho_x\rho_z + 2J_{yz}\rho_y\rho_z = 1$$

以 ρ_x，ρ_y，ρ_z 为坐标的椭球．称为**惯量椭球**.

惯量椭球

（1）对于刚体中不同的固定点，惯量椭球不同；
（2）若惯量积为零，则

$$J_{xx}\rho_x^2+J_{yy}\rho_y^2+J_{zz}\rho_z^2=1.$$

用途：已知惯量椭球, 求转动惯量.
椭球中心为 O 点, 在椭球上取一点 N， ON 是角速度的方向，

$$\vec{\rho}_{ON}=\frac{\vec{n}}{\sqrt{J'}}$$

求出 $\vec{\rho}_{ON}$ 的量值，得

$$J'=\frac{1}{|\vec{\rho}_{ON}|^2}.$$

惯量主轴

定理 6.1

设 A 是 n 阶实对称矩阵 $(C^T = C)$，则
(1)A 的特征值都是实数;
(2) A 的对应不同本征值的特征向量必正交;
(3) 存在正交矩阵 C （$C^T C = 1$），使得 $C^T AC = \Lambda$ 为对角矩阵.

惯量主轴

定义 6.1 (惯量主轴)

若刚体绕某轴转动时，角动量 $\vec{L}$ 和角速度 $\vec{\omega}$ 同向，则此轴为该点的惯量主轴.

$$\vec{L} = \mathbf{J}\vec{\omega} = J'\vec{\omega}$$

$\mathbf{J}$ 为矩阵，J' 为本征值.

$$(\mathbf{J} - J'\mathbf{I})\vec{\omega} = 0, \, , \det(\mathbf{J} - J'\mathbf{I}) = 0$$

$J' = J_1, J_2, J_3$ 称为**主转动惯量**. 本征矢量 $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3$ 对应三个本征方向，称为惯量主轴.

惯量主轴

$\mathbf{J}$ 可以通过相似变换对角化.

$$\mathbf{J} = C\Lambda C^T, \mathbf{J}C = C\Lambda$$

其中，$\Lambda = \mathrm{diag}\{J_1,\ J_2,\ J_3\}$

$$\mathbf{J}(\vec{c}_1,\ \vec{c}_2,\ \vec{c}_3) = (\vec{c}_1,\ \vec{c}_2,\ \vec{c}_3)\begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} = (J_1\vec{c}_1,\ J_2\vec{c}_2,\ J_3\vec{c}_3)$$

$\vec{c}_i\ (i = 1,\ 2,\ 3)$ 是本征单位列矢量.

惯量主轴

坐标系选为惯量主轴方向时角动量 $\vec{L}$ 和角速度 $\vec{\omega}$ 的关系

$$\vec{L} = \mathbf{J}\vec{\omega} = C\Lambda C^T\vec{\omega},\ C^T\mathbf{J}\vec{\omega} = \Lambda C^T\vec{\omega}$$

写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \vec{c}_1^T \\ \vec{c}_2^T \\ \vec{c}_3^T \end{pmatrix} \vec{L} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{c}_1^T \\ \vec{c}_2^T \\ \vec{c}_3^T \end{pmatrix} \vec{\omega}$$

在三个方向 (惯量主轴) 上的投影

$$\vec{L}' = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \vec{\omega}' = \Lambda\vec{\omega}'.$$

惯量主轴

动能的表达式

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\vec{\omega}^T \mathbf{J}\vec{\omega} \\
&= \frac{1}{2}\vec{\omega}^T C\Lambda C^T\vec{\omega} \\
&= \frac{1}{2}(C^T\vec{\omega})^T \Lambda C^T\vec{\omega} \\
&= \frac{1}{2}(\vec{\omega}')^T \Lambda\vec{\omega}' \\
&= \frac{1}{2}(J_1\omega_x'^2 + J_2\omega_y'^2 + J_3\omega_z'^2).
\end{aligned}
$$

欧拉动力学方程

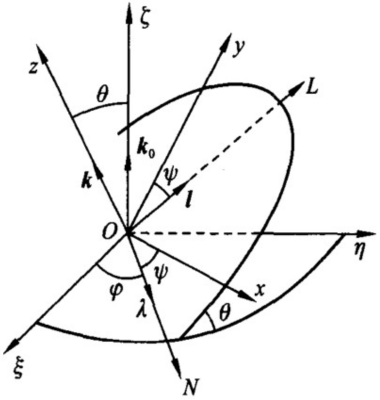
$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \omega_y = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{cases}$$

选择采用刚体固定点的主轴坐标系 $Oxyz$，惯量主轴为坐标轴

$$\vec{L} = J_x\omega_x\vec{i} + J_y\omega_y\vec{j} + J_z\omega_z\vec{k}$$

根据角动量定理有

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\vec{L}}{\mathrm{d}t} + \vec{\omega}\times\vec{L} = \vec{M}^{(e)}$$



欧拉动力学方程

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\vec{L}}{\mathrm{d}t} + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = J_x \frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + J_y \frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + J_z \frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{L} = -(J_y - J_z)\omega_y\omega_z\vec{i} - (J_z - J_x)\omega_z\omega_x\vec{j} - (J_x - J_y)\omega_x\omega_y\vec{k}$$

则有

$$\boxed{\begin{cases} J_x \dfrac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t} - (J_y - J_z)\omega_y\omega_z = M_x^{(e)} \\ J_y \dfrac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}t} - (J_z - J_x)\omega_z\omega_x = M_y^{(e)} \\ J_z \dfrac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t} - (J_x - J_y)\omega_x\omega_y = M_z^{(e)} \end{cases}}$$

欧拉动力学方程

$$
\boxed{\begin{cases}
J_x \dfrac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t} - (J_y - J_z)\omega_y\omega_z = M_x^{(e)} \\
J_y \dfrac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}t} - (J_z - J_x)\omega_z\omega_x = M_y^{(e)} \\
J_z \dfrac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t} - (J_x - J_y)\omega_x\omega_y = M_z^{(e)}
\end{cases}}
$$

$$
\boxed{\begin{cases}
\omega_x = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\
\omega_y = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\
\omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}
\end{cases}}
$$

1. 欧拉动力学方程中的力矩通常与欧拉角有关，所以动力学方程与运动学方程通常是耦合的.
2. 需要联合求解 6 个非线性方程. 数学上是困难的.
3. 一旦定点运动问题解决，刚体自由运动问题即可在质心系中解决.

欧拉-潘索问题：$\vec{M}^{(e)} = 0$

推论 1

角动量是常矢量，动能是常量.

推论 2

如果三个主转动惯量相等，则刚体角速度为常矢量.

推论 3

如果 $J_x = J_y \neq J_z$，则刚体以恒定角速度绕 z 轴自转，同时 z 轴以恒定角速度绕 $\vec{L}$ 轴进动.