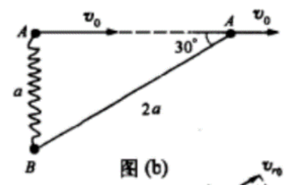
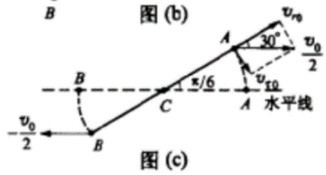
第六章 角动量守恒定律　作业题参考答案

(源自原材料提供答案，未作修改，仅供参考)





1．解：设从释放球B到绳刚伸直时间为t_l，这期间绳对二球无作用力，二球仅受重力作用，在地面参考系看球A作平抛运动，球B自由下落；若选球B为参考系，则二球所受的重力便被惯性力抵消掉了，这时球A相对于球B作匀速直线运动见图（b），因此

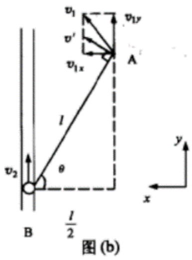
$$t_1 = \frac{2a\cos 30^\circ}{v_0} = \sqrt{3}\frac{a}{v_0}.$$

设从绳刚伸直到球A, B恰好第一次位于同一水平线时间为t_2，选二球的质心C为参考系，二球所受的重力也被惯性力抵消掉了，二球作绕质心C的圆周运动见图（C），因二球所受绳的拉力对质心C的力矩为零，故二球对质心C的角动量守恒，即$2amv_\tau = 2amv_{\tau 0}$，

$$v_\tau = v_{\tau 0} = \frac{v_0}{2}\sin 30^\circ = \frac{v_0}{4}, \quad t_2 = \frac{a\frac{\pi}{6}}{v_\tau} = \frac{a\pi/6}{v_0/4} = \frac{2\pi}{3}\frac{a}{v_0}.$$

由以上得到

$$t = t_1 + t_2 = (\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3})\frac{a}{v_0}.$$



2．解：设绳拉紧的瞬时，A的速度为v_1、B的速度为v_2，取坐标如图（b）所示．在y方向系统不受外力，动量守恒

$$mv_0 = m_{1y} + mv_2$$

A对B所在位置的角动量守恒

$$mv_0\frac{l}{2} = m_{1x}l\sin\theta + mv_{1y}l\cos\theta$$

图中$\theta = 60^\circ$，得$v_0 = \sqrt{3}v_{1x} + v_{1y}$．绳拉紧时，$A$相对于$B$的运动是以$B$为中心的圆周运动，其相对运动速度$v'$与绳垂直，且$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}'$，于是有

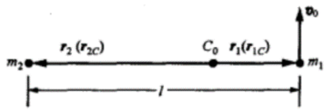
$$\begin{aligned} v_{1x} &= v'\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}v' \\ v_{1y} &= v_2 + v'\cos\theta = v_2 + \frac{1}{2}v' \end{aligned}$$

由以上各式解得

$$v_2 = \frac{3}{7}v_0,$$

方向沿y方向．

3. 解：（1）如图所示，以质点m_1, m_2和轻绳为系统，系统水平方向不受外力，所以动量守恒且等于质心动量，即



$$(m_1+m_2)\boldsymbol{v}_c = m_1\boldsymbol{v}_0$$

解得质心速度为

$$\vec{v}_c = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_0.$$

（2）根据角动量定义，打击结束这一瞬间，系统对C_0点的角动量为

$$\vec{L}_{C_0} = \vec{r}_1 \times m_1\vec{v}_0 + \vec{r}_2 \times m_2\vec{v}_2,$$

式中$v_2=0$，故

$$\vec{L}_{C_0} = \vec{r}_1 \times m_1\vec{v}_0,$$

$\vec{L}_{C_0}$的方向垂直纸面向外，大小为

$$L_{C_0} = r_1 m_1 v_0,$$

式中$r_1 = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}l$，于是，

$$L_{C_0} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} l v_0 = \mu l v_0,$$

式中$\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$为两质点的约化质量.

（3）系统对质心C的角动量守恒，且知（2）中求出的即为系统对质心C的初态角动量，即

$$L_{rC_0} = L_{C_0} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} l v_0.$$

设打击m_1后系统对质心C的角速度为ω，则系统对质心C的末态角动量为

$$L_{rC} = m_1 r_{1C}^2\omega + m_2 r_{2C}^2\omega,$$

式中$r_{1C} = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}l, r_{2C} = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}l$，于是，

$$L_{rC} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} l^2\omega.$$

由角动量守恒$L_{rC} = L_{rC_0}$，则有

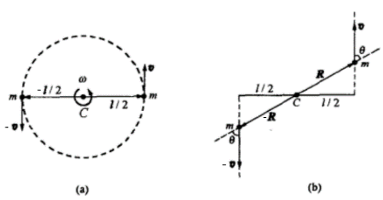
$$\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} l^2\omega = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} l v_0$$

解得

$$\omega = \frac{v_0}{l}.$$

综合（1）和（3）的结果可知，打击m_1后，系统质心以$\vec{v}_c = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_0$作匀速直线运动；$m_1$和$m_2$沿逆时针方向，相对质心以$\omega = v_0/l$作匀速圆周运动.

4. 解：（1）图（a）描述了绳断前系统的运动情况. 质量都是m的两质点系统的质心C在其连线的几何中心，即绳的中点处. 根据定义，系统对质心C的角动量为



$$\vec{L}_C = \frac{\vec{l}}{2} \times m\vec{v} + \frac{-\vec{l}}{2} \times m(-\vec{v}).$$

角动量的方向垂直纸面向外，大小为

$$L_C = mlv.$$

将$v = l\omega/2$代入上式，可得

$$L_C = \frac{1}{2}ml^2\omega.$$

（2）如图（b）所示，绳断后两质点均以速率v作匀速直线运动．它们对绳子中点的角动量为

$$\vec{L}_C = \vec{R} \times m\vec{v} + (-\vec{R}) \times m(-\vec{v}).$$

角动量的方向垂直纸面向外，大小为

$$L_C = 2mvR\sin\theta.$$

图（b）表明$R\sin\theta = l/2$，且有$v = l\omega/2$，因此，

$$L_C = \frac{1}{2}ml^2\omega.$$

（3）计算表明，绳断前后系统对质心C，即绳子中点的角动量相等．