在介质界面的电象法中关于介电常数运用问题的讨论

毛　镇　山

用电象法解介质的静电边值问题，在提出试探解时，往往要涉及运用不同介电常数（下简称ε）的问题，几年来的教学中发现学生对该采用什么ε常常产生误解，认为只可用某一确定的ε而不可用别的，否则便没有物理意义。这种认识是不全面的，它限制了解题的思路。对此问题本文将以一例[1]加以讨论。

设有两种各向同性的均匀电介质ε_1和ε_2各自充满半无穷空间，两者的分界面为一平面，有自由点电荷q_0位于ε_1中，距界面为a，求电场分布。

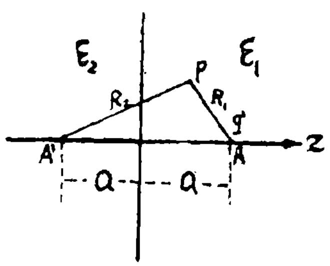
用电象法求解，可以提出下列形式的试探解[2]

$$z>0 \quad \phi_1=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_1 R_1}+\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_1 R_2} \tag{i}$$

$$z<0 \quad \phi_2=\frac{q''}{4\pi\varepsilon_2 R_1} \tag{ii}$$

式中ϕ_1和ϕ_2为ε_1和ε_2中任意一点P的电势；当取柱坐标时，

$$R_1=\sqrt{\rho^2+(z-a)^2},\quad R_2=\sqrt{\rho^2+(z+a)^2}$$



（如下图）；q_1是处于无穷大介质ε_1中（即假定全空间充满ε_1介质）A'点的象电荷；q''是处于无穷大介质ε_2中A点的象电荷。易证试解满足

在无穷远面上 $\phi_1=\phi_2=0$

$$\text{在 } z>0 \text{ 区} \qquad \nabla^2\phi_1=\frac{-q_0\delta(\rho,\phi,z-a)}{\varepsilon_1} \tag{iii}$$

$$\text{在 } z<0 \text{ 区} \qquad \nabla^2\phi_2=0$$

再由边值关系 $z=0$

$$\left.\begin{aligned}\phi_1&=\phi_2\\ \varepsilon_1\frac{\partial\phi_1}{\partial z}&=\varepsilon_2\frac{\partial\phi_2}{\partial z}\end{aligned}\right\} \tag{iv}$$

可以定出

$$q_1=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q_0$$

$$q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} q_0$$

则：

$$\left.\begin{aligned} z>0 \quad & \phi_1 = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_1}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-a)^2}} + \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\sqrt{\rho^2+(z+a)^2}}\right] \\ z<0 \quad & \phi_2 = \frac{2q_0}{4\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\sqrt{\rho^2+(z-a)^2}} \end{aligned}\right\} \text{(v)}$$

上述解法是对的，问题是试探解中所用的 ε 是否一定要如 (i) 和 (ii) 所示？不一定。除 (i) 式中的第一项必用 ε_1 外，余者的 ε 可以选用 $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ 或 ε_2 中的任意一个，即还可以提出下列多种试探解，如：

$$z>0 \qquad \phi_1 = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_1 R_1} + \left.\begin{matrix} \dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \\ \\ \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_2 R_2} \end{matrix}\right\} \text{后两项中任取其一第一项组合。}$$

$$z<0 \qquad \phi_2 = \frac{q^1}{4\pi\varepsilon_1 R_1} \text{ 或 } \phi_2 = \frac{q'''}{4\pi\varepsilon_1 R_1} \text{ 或}$$

$$\phi_2 = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \left.\begin{matrix} \dfrac{q'''}{4\pi\varepsilon_0 R_1} \\ \\ \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_1 R_1} \\ \\ \dfrac{q_2'''}{4\pi\varepsilon_2 R_1} \end{matrix}\right\} \text{后三项中任取其一与第一项组合。}$$

或

$$\phi_2 = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_1 R} + \left.\begin{matrix} \dfrac{q_3'}{4\pi\varepsilon_2 R_1} \\ \\ \dfrac{q_1'}{4\pi\varepsilon_1 R_1} \\ \\ \dfrac{q_2'}{4\pi\varepsilon_2 R_1} \end{matrix}\right\} \text{后三项中任取其一与第一项组合。}$$

或

$$\phi_2 = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_2 R} + \left.\begin{matrix} \dfrac{q_3''}{4\pi\varepsilon_0 R_1} \\ \\ \dfrac{q_1''}{4\pi\varepsilon_1 R_1} \\ \\ \dfrac{q_2''}{4\pi\varepsilon_2 R_1} \end{matrix}\right\} \text{或后三项中任取其一与第一项组合。}$$

易证这些试探解都满足 (iii)，再由 (iv) 可定出各个象电荷：

$$q_2=\frac{\varepsilon_2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}q_0,\quad q_3=\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}q_0,\quad q_1'=q_1,q_2'=q_2,q_3'=q_3,$$

$$q_1''=\frac{\varepsilon_1(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_2(\varepsilon_2+\varepsilon_1)}q_0,\quad q_2''=-q_1,\quad q_3''=\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_2(\varepsilon_2+\varepsilon_1)}q_0,\quad q_1'''=\frac{\varepsilon_1(2\varepsilon_0-\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}q_0,$$

$$q_2'''=\frac{\varepsilon_2(2\varepsilon_0-\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}q_0,\quad q_3'''=\frac{2\varepsilon_0-\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q_0,\quad q'=\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q_0,\quad q'''=\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q_0.$$

容易验证不管取哪组试探解所得的 ϕ_1 和 ϕ_2 皆与（v）相同。

何以 ε 的运用在这里有如此任意性？关键在于静电场的唯一性定理，在给定自由电荷分布的情况下，只要试探解在介质均匀区满足势的微分方程，在边界上满足给定的边界条件，在不同介质的分界面上满足边值关系，则场就被唯一确定。之所以 (i) 式的第一项必用 ε_1，正是由于只有如此，ϕ_1 才满足泊松方程（当然该项也可写成 $\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0R_1}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R_1}$，$q$ 为围绕 q_0 周围的束缚电荷，但因 $q=-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\varepsilon_1}q_0$ 故有 $\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0R_1}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R_1}=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_1R_1}$）。因介质不均匀对场产生的影响，在此处可以由放在不同无穷大介质中的 A 或 A' 点的象电荷等效，而象电荷本来是虚设的，它不必等于界面上的极化电荷（该题的极化电荷可求得为 $q_{极}=q_3$），因此在提出试探解时，可以从不同的角度出发去考虑，用不同的象电荷来等效介质对场的影响，从而可以提出带有不同介电常数的试探解，只要满足上述的所有条件这样做是完全可以的。例如当将界面上的极化电荷对 $z>0$ 区场的影响，试用放于真空中 A' 点的象电荷 q_3 等效时，则相应的应势中就该用 ε_0；若用放于无穷大介质 ε_1 中 A' 点的象电荷 q_1 等效时，则应该用 ε_1；若用放于无穷大介质 ε_2 中 A' 点的象电荷 q_2 等效时，则应该用 ε_2。同理，对 $z<0$ 区的影响也可从物理意义上作类似上述的解释，以下从略。可见只要符合唯一性定理，且弄清电象法的实质，在提出试探解时，就可以对 ε 运用自如了。

参 考 文 献

［1］北京大学物理系理论物理教研室，“电动力学”，人民教育出版社（1961）P89。

［2］J.D杰光逊，“经典电动力学”，人民教育出版社（1979）上册P163。