第三章题解

3-1 电子的能量分别为 10eV，100 eV，1000 eV 时，试计算相应的德布罗意波长。

解：依计算电子能量和电子波长对应的公式

电子的能量：$E_k = \dfrac{p^2}{2m_e} \Rightarrow p = \sqrt{2m_e E_k}$

由德布罗意波长公式：$\lambda = \dfrac{h}{p} \Rightarrow \lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2m_e E_K}}$

$$\lambda = \frac{1.226}{\sqrt{E}} \boldsymbol{nm}$$

$$\lambda_1 = \frac{1.226}{\sqrt{10}} \boldsymbol{nm} = 0.388\boldsymbol{nm} \qquad \lambda_2 = \frac{1.226}{\sqrt{100}} \boldsymbol{nm} = 0.1226\boldsymbol{nm}$$

$$\lambda_3 = \frac{1.226}{\sqrt{1000}} \boldsymbol{nm} = 0.0388\boldsymbol{nm}$$

3-2 设光子和电子的波长均为 0.4nm，试问：（1）光子的动量与电子的动量之比是多少？

（2）光子的动能与电子的动能之比是多少？

解：（1）由 $\lambda = \dfrac{h}{p}$ 可知光子的动量等于电子的动量，即 $p_{光子}:p_{电子}=1:1$

（2）由 光子动能与波长的对应的关系

$$\lambda_{光子} = \frac{1.24}{E_{光子}(KeV)} \boldsymbol{nm}$$

电子动能与波长的关系

$$\lambda_{电子} = \frac{1.226}{\sqrt{E_{电子}}} \boldsymbol{nm} \qquad E_{电子} = \left(\frac{1.226}{\lambda_{电子}}\right)^2 \boldsymbol{nm}$$

则知 $$\frac{E_{光子}}{E_{电子}} = \frac{1.24\times10^3 \times 0.4}{1.226^2} = 329.96$$

3-3 若一个电子的动能等于它的静止能量，试求：(1)该电子的速度

为多大?(2)其相应的德布罗意波长是多少?

解：（1）依题意，相对论给出的运动物体的动能表达式是：

$$E = mc^2 \qquad E = E_k + m_0c^2$$

$$mc^2 = 2m_0c^2 \qquad m = 2m_0$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2m_0 \qquad \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = 4$$

$$\frac{1}{4} = 1-\frac{v^2}{c^2} \qquad \frac{3}{4} = \frac{v^2}{c^2}$$

所以

$$v = \sqrt{\frac{3}{4}}c \approx 0.866c$$

（2） 根据电子波长的计算公式：

$$\lambda = \frac{1.226\text{nm}}{\sqrt{E_k(eV)}} = \frac{1.226\text{nm}}{\sqrt{511\times10^3\text{eV}}} = 0.001715\text{nm}$$

3-4 把热中子窄束射到晶体上，由布喇格衍射图样可以求得热中子的能量．若晶体的两相邻布喇格面间距为 0.18nm，一级布喇格掠射角(入射束与布喇格面之间的夹角)为30°，试求这些热中子的能量．

解：根据布喇格衍射公式 $n\lambda=d\sin\theta$

$$\lambda=d\sin\theta=0.18\times\sin30° \text{ nm}=0.09 \text{ nm}$$

$$\lambda = \frac{1.226\text{nm}}{\sqrt{E_k(eV)}}$$

$$E_k = \left(\frac{1.226\text{nm}}{\lambda}\right)^2 = 13.622^2\text{eV} = 185.56\text{eV}$$

3-5 电子显微镜中所用加速电压一般都很高，电子被加速后的速度

很大，因而必须考虑相对论修正．试证明：电子的德布罗意波长与加速电压的关系应为：

$$\lambda=\frac{1.226}{\sqrt{V_r}}\mathrm{nm}$$

式中$V_r=V(1+0.978\times10^{-6}V)$，称为相对论修正电压，其中电子加速电压$V$的单位是伏特．

分析:考虑德布罗意波长,考虑相对论情况质量能量修正,联系德布罗意关系式和相对论能量关系式,求出相对论下P即可解.

证明：

根据相对论质量公式 $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$ 将其平方整理乘c^2,得其能量动量关系式

$$m^2[1-(\frac{v}{c})^2]c^2=m_0{}^2c^2 \qquad m^2c^2-p^2c^2=m_0{}^2c^2$$

$$E^2=p^2c^2+m_0{}^2c^4 \qquad E=E_k+mc_0{}^2 \qquad E_k=E-E_0$$

$$p=\frac{1}{c}\sqrt{E^2-m_0{}^2c^4}=\frac{1}{c}\sqrt{(E_k+m_0c^2)^2-m_0{}^2c^4}=\frac{1}{c}\sqrt{E_k(E_k+2m_0c^2)}$$

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{hc}{\sqrt{E_k(E_k+2m_ec^2)}}=\frac{hc}{\sqrt{2m_ec^2}}\frac{\sqrt{2m_ec^2}}{\sqrt{E_k(E_k+2m_ec^2)}}=\frac{1.226}{\sqrt{\frac{E_k(E_k+2m_ec^2)}{2m_ec^2}}}$$

$$=\frac{1.226}{\sqrt{V(\frac{V}{2m_ec^2}+1)}}=\frac{1.226}{\sqrt{V(1+0.9785\times10^{-6}V)}}=\frac{1.226}{\sqrt{V_r}}$$

题意得证.

3-6 (1)试证明：一个粒子的康普顿波长与其德布罗意波长之比等于

$$\sqrt{\left(\frac{E}{E_0}\right)^2-1}$$

式中E_0和E分别是粒子的静止能量和运动粒子的总能量.(康普顿波长$\lambda_c=h/m_0c$, m_0为粒子静止质量，其意义在第六章中讨论)

(2)当电子的动能为何值时，它的德布罗意波长等于它的康普顿波长?

证明：根据相对论能量公式 $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$ 将其平方整理乘c^2

$$m^2[1-(\frac{v}{c})^2]c^2=m_0{}^2c^2 \qquad m^2c^2-p^2c^2=m_0{}^2c^2$$

$$E^2=p^2c^2+m_0{}^2c^4 \qquad E=E_k+mc_0{}^2 \qquad E_k=E-E_0$$

$$p=\frac{1}{c}\sqrt{E^2-m_0{}^2c^4}=\frac{1}{c}\sqrt{(E_k+m_0c^2)^2-m_0{}^2c^4}=\frac{1}{c}\sqrt{E_k(E_k+2m_0c^2)}$$

$$p=\frac{1}{c}\sqrt{E^2-m_0{}^2c^4}=\frac{1}{c}\sqrt{(E_k+m_0c^2)^2-m_0{}^2c^4}=\frac{1}{c}\sqrt{E_k(E_k+2m_0c^2)}=\frac{1}{c}\sqrt{(E-E_0)(E+E_0)}$$

（1）相对论下粒子的德布罗意波长为：

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{hc}{\sqrt{(E-E_0)(E+E_0)}}=\frac{hc}{\sqrt{E^2-E_0^2}}$$

粒子的康普顿波长为

$$\lambda_c=\frac{h}{m_0c}=\frac{hc}{m_0c^2}=\frac{hc}{E_0}$$

$$\frac{\lambda_c}{\lambda}=\frac{\dfrac{hc}{E_0}}{\dfrac{hc}{\sqrt{(E^2-E^2{}_0)}}}=\frac{\sqrt{(E^2-E_0^2)}}{E_0}=\sqrt{(\frac{E}{E_0})^2-1}$$

（2）若粒子的德布罗意波长等于它的康顿波长

$$\sqrt{(\frac{E}{E_0})^2-1}=1$$

$$(\frac{E}{E_0})^2 = 2, E = \sqrt{2}E_0$$

$$E = \sqrt{2}E_0 = \sqrt{2} \times 511 = 722.55\text{KeV}$$

$$E_k = E - E_0 = 722.55 - 511 = 211.55(\text{KeV})$$

则电子的动能为 211.55KeV.

则电子的动能为 211.55KeV

注意变换：1. ΔP 转化为Δλ 表示；

2. ΔE 转化为Δν 表示；

3-7 一原子的激发态发射波长为 600nm 的光谱线，测得波长的精度为 $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 10^{-7}$，试问该原子态的寿命为多长？

解： 依 $\Delta E \Delta t \geq h$ 求Δt

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} \qquad \Delta E = hc\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$$

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta t \geq \frac{\hbar}{2\Delta E} = \frac{\hbar\lambda \cdot \lambda}{2hc\Delta\lambda} = \frac{\lambda}{4\pi c}\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{600 \times 10^{-9} \times 10^{7}}{4 \times 3.14 \times 3 \times 10^{8}} = 1.6 \times 10^{-9} s$$

3-8 一个电子被禁闭在线度为 10fm 的区域中，这正是原子核线度的数量级，试计算它的最小动能.

解： $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$ 粒子被束缚在线度为 r 的范围内，即Δx = r

那么粒子的动量必定有一个不确定度，它至少为：$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2\Delta x}$

∵ $\Delta p_x = \sqrt{[(p_x - \bar{p}_x)^2]}$ $\bar{p}_x = 0$

∴ $(\Delta p_x)^2{}_{平均} = \frac{1}{3}(p^2)_{平均}$

∴ 电子的最小平均动能为 $E_k=\frac{3\hbar^2}{8mr^2}=2.848\times10^8 eV$

3-9 已知粒子波函数 $\psi=N\exp\left\{-\frac{|x|}{2a}-\frac{|y|}{2b}-\frac{|z|}{2c}\right\}$，试求：(1)归一化常数 N；(2)粒子的 x 坐标在 0 到 a 之间的几率；(3)粒子的 y 坐标和 z 坐标分别在 $-b\to+b$ 和 $-c\to+c$.之间的几率.

解：(1)因粒子在整个空间出现的几率必定是一，所以归一化条件是：

$\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi|\mathrm{dv}=1$

即：$$\int\int\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi|^2dv=N^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\frac{|x|}{2a}}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\frac{|y|}{2b}}dy\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\frac{|z|}{2c}}dz$$

$$=N^2 2a\int_0^\infty e^{-\frac{|x|}{a}}d_{\frac{x}{a}}2b\int_0^\infty e^{-\frac{|y|}{b}}d_{\frac{y}{b}}2c\int_0^\infty e^{-\frac{|z|}{c}}d_{\frac{z}{c}}=N^2 8abc=1$$

所以 $N=\frac{1}{\sqrt{8abc}}$

(2) 粒子的 x 坐标在 $0\to a$ 区域内几率为：$$N^2\int_0^a e^{-2\frac{|x|}{2a}}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\frac{|y|}{2b}}dy\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\frac{|z|}{2c}}dz$$

$$=N^2 4abc\left[-\left(e^{-1}-1\right)\right]=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e})$$

(3) 粒子的 $y\in(-b,b),z\in(-c,c)$ 区域内的几率为：

$$N^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\frac{|x|}{2a}}dx\int_{-b}^{+b}e^{-2\frac{|y|}{2b}}dy\int_{-c}^{+c}e^{-2\frac{|z|}{2c}}dz=N^2 8abc(\frac{1}{e}-1)^2=(\frac{1}{e}-1)^2$$

3-10 若一个体系由一个质子和一个电子组成，设它的归一化空间波函数为 $\psi(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2)$，其中足标 1，2 分别代表质子和电子，试写出：

(1)在同一时刻发现质子处于(1，0，0)处，电子处于(0，1，1)处的几率密度；

(2)发现电子处于(0，0，0)，而不管质子在何处的几率密度；

(3)发现两粒子都处于半径为 1、中心在坐标原点的球内的几率大小

3-11　对于在阱宽为a的一维无限深阱中运动的粒子，计算在任意本征态 ψ_n中的平均值$\bar{x}$及$\overline{(x-\bar{x})^2}$，并证明：当$n\to\infty$时，上述结果与经典结果相一致.

3-12　求氢原子 1s 态和 2P 态径向电荷密度的最大位置.

第三章习题 13,14

3-13　设氢原子处在波函数为$\psi(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{\pi\pi\cdot a_1^3}}e^{-\frac{r}{a_1}}$的基态，$a_1$为第一玻尔半径，试求势能

$U(r)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$ 的平均值.

3-14　证明下列对易关系：

$[\hat{y},\hat{p}]=i\hbar$

$[\hat{x},\hat{p}_y]=0$

$[\hat{x},\hat{L}_x]=0$

$[\hat{x},\hat{L}_y]=i\hbar_z$

$[\hat{p}_x,\hat{L}_x]=0$

$[\hat{p}_x,\hat{L}_y]=i\hbar\hat{P}_z$

第三章习题 15 解

3-15 设质量为 m 的粒子在半壁无限高的一维方阱中运动,此方阱的表达式为:

$$V(x)=\begin{cases}\infty & x<0\\ 0 & 0\le x\le a\\ V_0 & x>a\end{cases}$$

试求:(1)粒子能级表达式;(2)证明在此阱内至少存在一个束缚态的条件是,阱深V_0和阱宽 a 之间满足关系式:

$$V_0a^2\ge\frac{\hbar^2}{32m}$$

解:（1）在 x<0 时,由薛定谔方程可得:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V_{(r)}\right]\psi=E\psi$$

因为　$V(x)=-\infty$　所以　$\Psi_1(x)=0$　（1）

$0 \le x \le a$， V(x)=0,体系满足的薛定谔方程为:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_2}{dx^2} = E\psi_2 \qquad (2)$$

整理后得: $\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_2 = 0$ 令 $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ 则: $\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + k^2\psi_2 = 0$

因为 $\psi_2(0) = 0$ 所以波函数的正弦函数: $\psi_2 = A\sin(kx)$ (3)

x>a ， $V(x) = V_0$ 薛定谔方程为: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_3}{dx^2} + V_0\psi_3 = E\psi_3$

(4)

整理后得: $\frac{d^2\psi_3}{dx^2} - \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}\psi_3 = 0$ 令 $k = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$

则: $\frac{d^2\psi_3}{dx^2} - k'^2\psi_3 = 0$ 方程的解为: $\psi_3 = Be^{-k'x}$ (5)

式中 A,B 为待定系数,根据标准化条件 $\frac{\psi'}{\psi}$ 的连续性,有 $\frac{\psi'_2(a)}{\psi_2(a)} = \frac{\psi'_3(a)}{\psi_3(a)}$

将(3),(5)式代人得: $kctg\alpha k = k'$ (6)

(2):证明: 令 $u = ka$ $v = k'a$ 则(6)式可改为: $uctgu = -v$

(7)

同时, u 和 v 还必须满足下列关系式:

$$u^2 + v^2 = (k^2 + k'^2)a^2 = 2mv_0a^2/h^2 \qquad (8)$$

联立(7) (8)可得粒子的能级的值..

用图解法求解:在以 v 为纵轴 u 为横轴的直角坐标系中(7) (8) 两式分别表示超越曲线和圆,其交点即为解.

因 k k' 都不是负数,故 u 和 v 不能取负值,因此只能取第一象限.

由图可知(7) (8)两式至少有一解得条件为:

$$\sqrt{\frac{2mv_0a^2}{\hbar^2}} \ge \frac{\pi}{2} \quad 即 \quad V_0a^2 \ge \frac{\hbar^2}{32m}$$