数学物理方法

Methods in Mathematical Physics

武汉大学

物理科学与技术学院

问题的引入：

由第二篇第八章分离变量法有：

$$\Delta u = 0 \xrightarrow{\text{令} u=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)}$$

$$r^2 R'' + 2rR' - l(l+1)R = 0 \rightarrow R(r) = c_l r^l + d_l r^{-(l+1)}$$

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0 \rightarrow \Phi_m(\varphi) = A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta = 0 \rightarrow \Theta(\theta) = ?$$

问题的引入:

由第二篇第八章分离变量法有:

$$\left.\begin{aligned}\Delta u+\lambda u=0\\ \Delta u=0\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{令}u=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)}$$

$$\Phi''+n^2\Phi=0\to\Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi$$

$$Z''+\mu Z=0\to Z(z)=c_1e^{kz}+c_2e^{-kz}$$

$$\rho^2R''+\rho R'+(k^2\rho^2-n^2)R=0\to R(\rho)=?$$

第三篇

特 殊 函 数

Special functions

物理问题:

求一表面充电至电位为$\left(1+3\cos^2\theta\right)$的单位空心球内任一点的电位。

$$\begin{cases}\Delta u=0, r<1\\ u\big|_{r=1}=\left(1+3\cos^2\theta\right)\end{cases}$$

第十四章 勒让德多项式

Legendre polynomial

$$\Delta u=0\xrightarrow{\text{令}u=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)}u=?$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta=0\xrightarrow{m=0}\Theta(\theta)=?$$

第十四章 勒让德多项式

Legendre polynomial

中心：球坐标系中的特殊函数问题

目的：1. 掌握Legendre方程的解，及常微分方程常点邻域的级数解法。

2. 掌握Legendre多项式和缔合Legendre函数的性质。

3. 在球坐标中$\Delta u=0$的解$u=?$

第十四 章勒让德多项式

Legendre polynomial

$$\Delta u = 0 \xrightarrow{\text{令} u=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)} u = ?$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta = 0 \to \Theta(\theta) = ?$$

令 $x=\cos\theta, y(x)=\Theta(\theta)$

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0 \to y(x) = ?$$

当$m=0$时 $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+l(l+1)y=0 \quad \to y(x)=?$

—勒让德方程

第十四 章勒让德多项式

Legendre polynomial

§14.1 勒让德多项式

—勒让德方程的解

附：二阶线性常微分方程的级数解法1

对于： $W''(z)+p(z)W'(z)+q(z)W(z)=0 \qquad (1)$

若其系数$p(z)$和$q(z)$均在某点z_0及其邻域内解析，则称z_0为方程的常点。

在常点$z=z_0$的邻域$|z-z_0|<R$内，方程有唯一的一个满足初始条件 $W(z_0)=C_0, W'(z_0)=C_1$

形式为

$$W(z)=\sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-z_0)^k \qquad (2)$$

的幂级数解。其中C_0和C_1是任意常数；而其它各次幂系数与C_0和C_1的关系，均由将形式解(2)代入方程(1)中通过比较方程两边同次幂的系数[即让左边$(z-z_0)$的各次幂的系数均为零]来确定。

一、勒让德方程的级数解

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+l(l+1)y=0 \qquad (1)$$

$$p(x)=\frac{-2x}{1-x^2},\ q(x)=\frac{l(l+1)}{1-x^2},$$ x=0为该方程的常点

令 $$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k \qquad (2)$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}-\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^k-2\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^k+l(l+1)\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=0$$

$$x^0: 2\cdot 1c_2+l(l+1)c_0=0 \qquad \to c_2=-\frac{l(l+1)}{2\cdot 1}c_0$$

$$x^1: 3\cdot 2c_3-2c_1+l(l+1)c_1=0\to c_3=-\frac{l(l+1)-2}{3\cdot 2}c_1$$

一、勒让德方程的级数解

$$\boxed{x^k: c_{k+2} = -\frac{[l(l+1)-k(k+1)]}{(k+2)\cdot(k+1)} c_k \qquad (3)}$$

—系数递推公式

$$\therefore c_4 = -\frac{l^2+l-2\cdot 3}{4\cdot 3} c_2 = (-1)^2 \frac{(l-2)l(l+1)(l+3)}{4!} c_0$$

$$c_5 = (-1)^2 \frac{(l-3)(l-1)(l+2)(l+4)}{5!} c_1$$

$$\boxed{c_{2n} = (-1)^n \frac{(l-2n+2)(l-2n+4)\ldots l(l+1)(l+3)\ldots(l+2n-1)}{(2n)!} c_0 \quad (4)}$$

$$\boxed{c_{2n+1} = (-1)^n \frac{(l-2n+1)(l-2n+3)\ldots(l-1)(l+2)(l+4)\ldots(l+2n)}{(2n+1)!} c_1 \quad (5)}$$

一、勒让德方程的级数解

故 $$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_{2n}x^{2n}+c_1x+\sum_{n=1}^{\infty}c_{2n+1}x^{2n+1}$$

$$=y_0(x)+y_1(x)$$

式中 $$y_0(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_{2n}x^{2n} \qquad (6)$$

$$y_1(x)=c_1x+\sum_{n=1}^{\infty}c_{2n+1}x^{2n+1} \qquad (7)$$

$$\boxed{c_{2n}=(-1)^n\frac{(l-2n+2)(l-2n+4)\ldots l(l+1)(l+3)\ldots(l+2n-1)}{(2n)!}c_0 \quad (4)}$$

$$\boxed{c_{2n+1}=(-1)^n\frac{(l-2n+1)(l-2n+3)\ldots(l-1)(l+2)(l+4)\ldots(l+2n)}{(2n+1)!}c_1 \quad (5)}$$

二、解的敛散性

1. 由达氏判别法

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+2}}\right|$$

$$\overset{(3)}{=}\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+2)(k+1)}{l(l+1)-k(k+1)}\right|=1$$

$$\to y(x)\begin{cases}|x|<1 & \text{收敛}\\ |x|>1 & \text{发散}\\ |x|=1 & \text{收敛?发散?}\end{cases}$$

二、解的敛散

4）高斯判别：设 $\frac{f_k}{f_{k+1}} = 1 + \frac{\mu}{k} + O(\frac{1}{k^{\lambda}})$，$\lambda > 1$

则 $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ 当 $\mathrm{Re}\,\mu > 1$，绝对收敛；当 $\mathrm{Re}\,\mu \le 1$，发散。

2. 由高斯判别法

将 $x=\pm1$ 代入(6)和(7)得：

$$y_0(\pm1) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n}(\pm1)^{2n} = c_0\sum_{n=0}^{\infty} f_n \qquad f_n\text{—常数}$$

类似 $y_1(\pm1) = c_1\sum_{n=1}^{\infty} g_n$

$$\therefore \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{2n(2n+1)-l(l+1)} = 1+\frac{1}{n}+\frac{l(l+1)}{4n^2}\cdots = 1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\frac{g_n}{g_{n+1}} = 1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$\therefore y_0(x), y_1(x)$ 在 $x=\pm1$ 发散

三、本征值问题

$$\begin{cases} \left(1-x^2\right)y''-2xy'+l(l+1)y=0,\ l(l+1)-\text{常数} & (8) \\ y\big|_{x=\pm1}\to\text{有限}, \end{cases}$$

$$c_{k+2}=-\frac{\left[l(l+1)-k(k+1)\right]}{(k+2)\cdot(k+1)}c_k \quad (3)$$

若取$l=0,1,2,\ldots$，则当$l=k$时，

$$c_{k+2}=c_{l+2}=0\cdot c_l=0$$

从而有$c_{k+4}=0,c_{k+6}=0\ldots$

即y_0或$y_1\to l$次多项式

三、本征值问题

$$\begin{cases}(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0, l(l+1)-\text{常数} \quad (8)\\ y\big|_{x=\pm1}\to\text{有限},\end{cases}$$

1.若$l=k=2n, n=0,1,2,\dots$

$\boxed{\text{则 } c_{k+2}=c_{l+2}=c_{2n+2}=0}$ $\therefore c_{2n+4}=c_{2n+6}=\dots=0$

$$y_0(x)=c_0+c_2x^2+\dots+c_{2n}x^{2n}$$

$$=c_0+c_2x^2+\dots+c_lx^l\to l\text{次多项式}$$

$$y_1(x)=c_1x+c_3x^3+\dots+c_{2n+1}x^{2n+1}+c_{2n+3}x^{2n+3}+\dots$$

$$\to\text{无穷级数}$$

三、本征值问题

$$\begin{cases} (1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0, l(l+1)-\text{常数} & (8) \\ y|_{x=\pm1}\to\text{有限,} \end{cases}$$

2.若 $l=k=2n+1, n=0,1,2,\ldots$

$\boxed{\text{则 } c_{k+2}=c_{l+2}=c_{2n+3}=0}$ $\therefore c_{2n+5}=c_{2n+7}=\ldots=0$

$$y_1(x)=c_1x+c_3x^3+\ldots+c_{2n+1}x^{2n+1}$$

$$=c_1x+c_3x^3+\ldots+c_lx^l\to l\text{次多项式}$$

$$y_0(x)=c_0+c_2x^2+\ldots+c_{2n+2}x^{2n+2}+c_{2n+4}x^{2n+4}+\ldots$$

$$\to\text{无穷级数}$$

三、本征值问题

总之，本征值问题

$$\begin{cases} \left(1-x^2\right)y''-2xy'+l(l+1)y=0, l(l+1)-\text{常数} & (8) \\ y\big|_{x=\pm1} \to \text{有限}, \end{cases}$$

本征值：$l(l+1), l=0,1,2,\ldots$

$$\text{本征函数：}\begin{cases} y_0(x)=c_0+c_2x^2+\ldots+c_lx^l, l=2n \\ y_1(x)=c_1x+c_3x^3+\ldots+c_lx^l, l=2n+1 \end{cases}$$

$$c_{2n}=(-1)^n\frac{(l-2n+2)(l-2n+4)\ldots l(l+1)(l+3)\ldots(l+2n-1)}{(2n)!}c_0$$

$$c_{2n+1}=(-1)^n\frac{(l-2n+1)(l-2n+3)\ldots(l-1)(l+2)(l+4)\ldots(l+2n)}{(2n+1)!}c_1$$

四、勒让德多项式

选 $c_l=\dfrac{(2l)!}{2^l(l!)^2}$

记上述l次多项式$y_0(x)$或$y_1(x)$为$P_l(x)$，称之为l阶Legendre多项式。

则由（3）：$c_k=\dfrac{(k+2)(k+1)}{k(k+1)-l(l+1)}c_{k+2}=\dfrac{(k+2)(k+1)}{(k-l)(k+l+1)}c_{k+2}$

$$\to c_{l-2}=\frac{l(l-1)}{-2(2l-1)}c_l=(-1)\frac{(2l-2)!}{2^l(l-1)!(l-2)!},$$

$$c_{l-4}=\frac{(l-2)(l-3)}{-4(2l-3)}c_{l-2}=(-1)^2\frac{(2l-4)!}{2^l2\cdot(l-2)!(l-4)!},$$

$$\boxed{c_{l-2n}=(-1)^n\frac{(2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!}}\to p_l(x)=\sum_n c_{l-2n}x^{l-2n}$$

四、勒让德多项式

$$P_l(x)=\sum_{n=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}\frac{(-1)^n(2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!}x^{l-2n} \qquad (9)$$

-勒让德多项式

其中 $\left[\frac{l}{2}\right]=\begin{cases}\frac{l}{2}, & l=2n\\ \frac{l-1}{2}, & l=2n+1\end{cases}$

于是: $\begin{cases}(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0, l(l+1)-\text{常数} \quad (8)\\ y|_{x=\pm1}\to \text{有限},\end{cases}$

$\Rightarrow$ $\begin{cases}\text{本征值}: l(l+1), l=0,1,\ldots\\ \text{本征函数}: P_l(x)\end{cases}$

四、勒让德多项

$$P_l(x)=\sum_{n=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}\frac{(-1)^n(2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!}x^{l-2n} \qquad (9)$$

$$P_0(x)=\frac{(-1)^0 0!}{2^0 0!0!0!}x^{0-0}=1 \qquad (10)$$

$$l=1,n:0\to\frac{1-1}{2}=0,\quad P_1(x)=\frac{(-1)^0(2-0)!}{2^1 0!(1-0)!(1-0)!}x^1=x \qquad (11)$$

$$\boldsymbol{l=2,n:}0\to\frac{2}{2}=1,$$

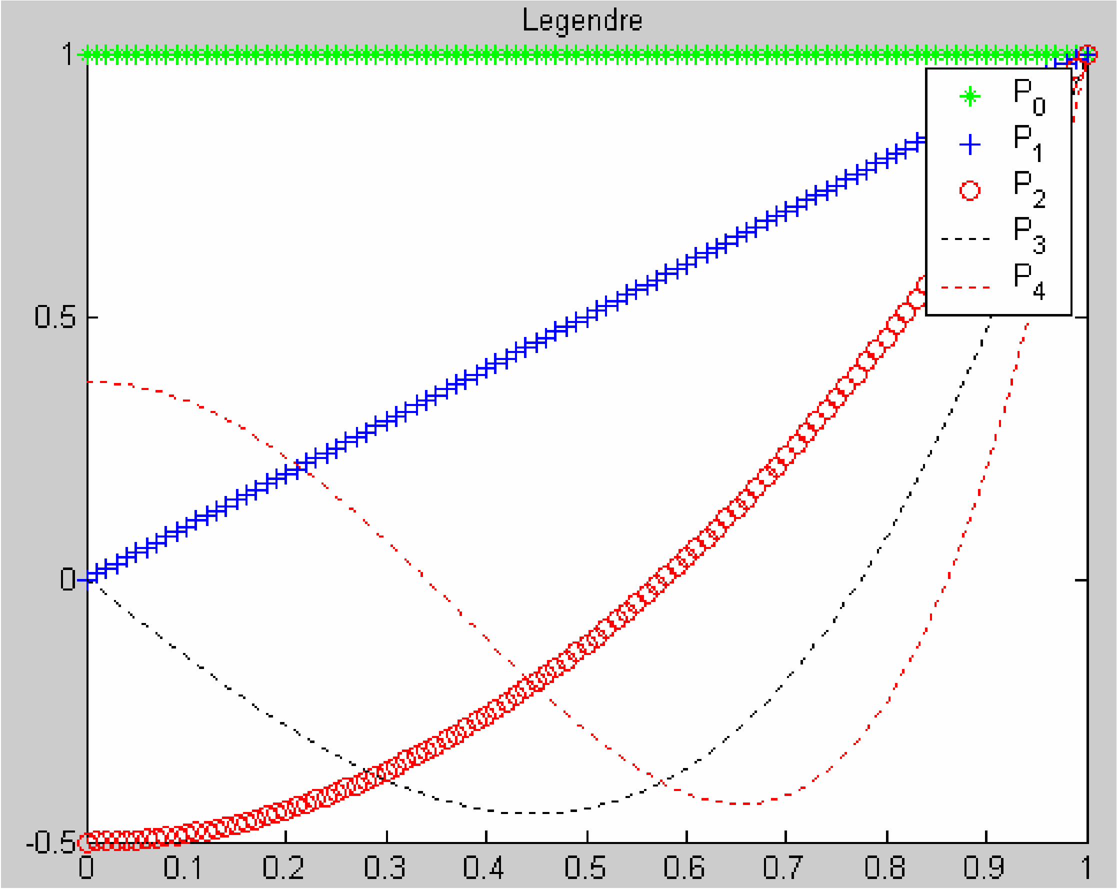
$$P_2(x)=\frac{(-1)^0(4-0)!}{2^2 0!(2-0)!(2-0)!}x^2+\frac{(-1)^1(4-2)!}{2^2 1!(2-1)!(2-2)!}x^0$$

$$=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right) \qquad (12) \qquad \boxed{P_l(1)=1}$$

思考： $\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)y'(x)\right]+6y=0\to y(x)=?$

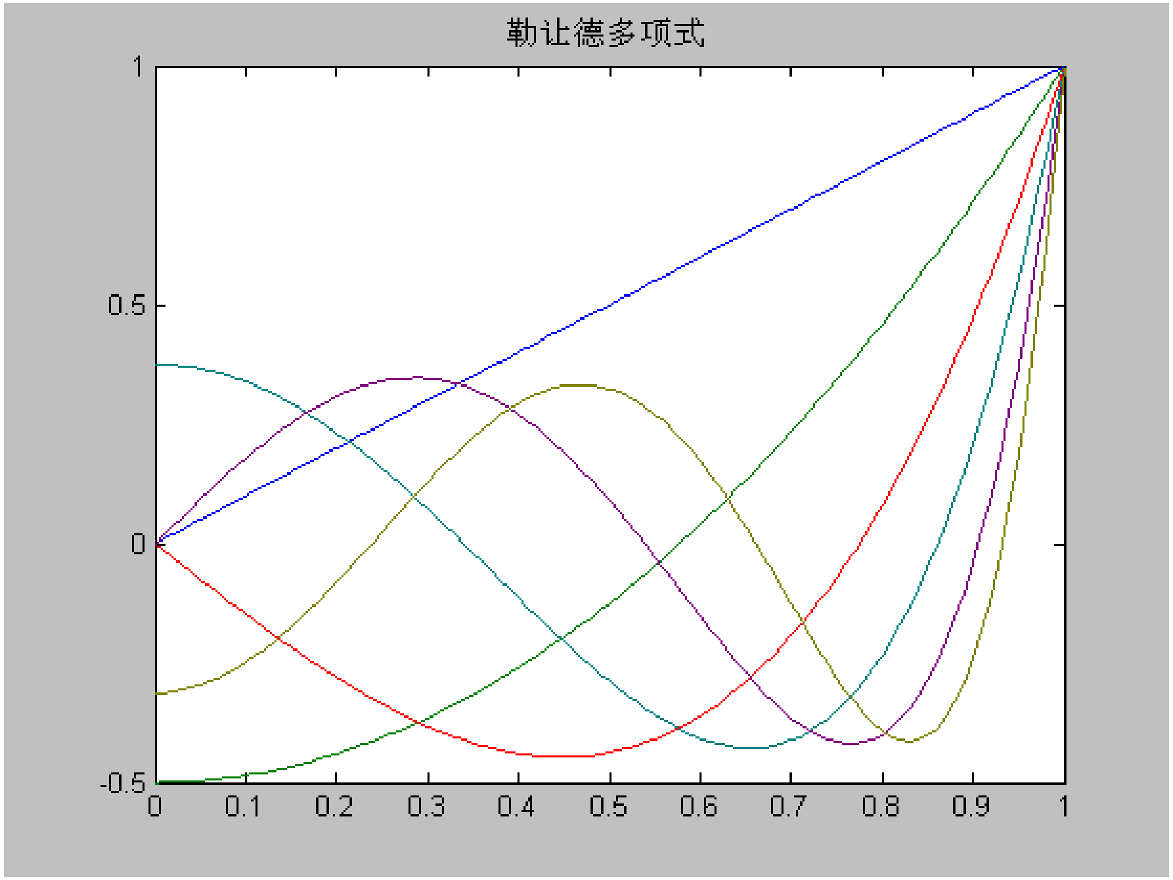
四、勒让德多项式

0-4阶勒让德函数图形：



四、勒让德多项式

勒让德函数图形：



五、勒让德多项式的其他表示

1. 微分式

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l \qquad (13)$$

2. 积分式

$$P_l(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{l^*}\frac{\left(\xi^2-1\right)^l}{2^l\left(\xi-x\right)^{l+1}}d\xi \qquad (14)$$

六、小结

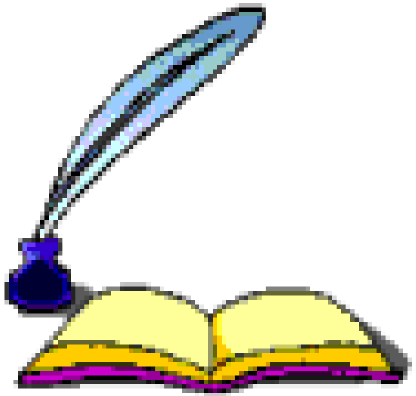
$$\begin{cases}(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0, l(l+1)-\text{常数} & (8)\\ y\big|_{x=\pm1}\to\text{有限,}\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases}\text{本征值}: l(l+1), l=0,1,\ldots\\ \text{本征函数}: P_l(x)\end{cases}}$$

$$\boxed{P_l(x)=\sum_{n=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}\frac{(-1)^n(2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!}x^{l-2n} \qquad (9)}$$

$\boxed{P_0(x)=1,}$ $\boxed{P_1(x)=x,}$ $\boxed{p_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),}$ $\boxed{p_l(1)\equiv1}$

本节作业



习题14.1 :3

Good-by!