# 数学物理方法

## Mathematical Methods in Physics

### 第三章　无穷级数

### Infinite Series

武汉大学

物理科学与技术学院

# 无穷级数习题课

## Exercise class on infinite series

- **本章内容小结**

  一、无穷级数

  二、泰勒级数与罗朗级数

  三、孤立奇点的分类

- **习题求解与讨论**

  一、确定幂级数的收敛半径

  二、将函数展开为泰勒级数

  三、泰勒展开的若干应用

  四、将函数展开为罗朗级数

  五、判断奇点的类型

# 本章内容小结

## 一、无穷级数

- 复数项级数 $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$
- 复变函数项级数 $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$
- 幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-b)^k$, $\quad |z-b| < R$, $\quad R = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right| \\ \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} \end{cases}$

均与相应的实级数具有类似的相关概念、定理和性质。

# 二、泰勒级数与罗朗级数

| | 泰勒级数 | 罗朗级数 |
|---|---|---|
| 展开式 | $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k,$ $a_k=\dfrac{f^{(k)}(b)}{k!}$ | $f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(z-b)^k,$ $c_k=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_l\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{k+1}}d\zeta$ |
| 收敛域 | $\lvert z-b\rvert<R,$ | $r<\lvert z-b\rvert<R,$ |
| 与解析函数的关系 | $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k \underset{\longleftarrow}{\xrightarrow{\lvert z-b\rvert<R}}$ $f(z)\in H(\lvert z-b\rvert<R)$ | $\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(z-b)^k \underset{\longleftarrow}{\xrightarrow{r<\lvert z-b\rvert<R}}$ $f(z)\in H(r<\lvert z-b\rvert<R)$ |
| 性质 | 在收敛域内绝对收敛，在较小的闭域内一致收敛。 | |
| 展开方法 | 1.直接用展开定理展开；2.利用已知级数展开式展开 | |
| 二者关系 | 是罗朗展开的正则部 | 是泰勒展开的推广 |

## 常用的级数展开公式:

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty} z^{k},\ |z|<1$$

$$e^{z}=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k}}{k!},\ |z|<\infty$$

$$\sin z=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k} z^{2k+1}}{(2k+1)!},\ |z|<\infty$$

$$\cos z=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k} z^{2k}}{(2k)!},\ |z|<\infty$$

# 三、孤立奇点的分类

| 奇点 / 展开式 / 类型 | b | ∞ |
|---|---|---|
| 展开式 | $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-b)^k, 0<\|z-b\|<R$ | $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k,\ R<\|z\|<\infty$ |
| 可去奇点 | 无负幂 | 无正幂 |
| m阶极点 | 有m项负幂 | 有m项正幂 |
| 本性奇点 | 有无限项负幂 | 有无限项正幂 |

# 习题求解与讨论

## 一、确定幂级数的收敛半径

1、“学习指导” P64 例1 （4）：

求幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty}[2+(-1)^k]^k z^k$ 的收敛半径。

注： $R=\begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right| & (1) \to \text{答：} \dfrac{1}{9} \quad \times \\ \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} & (2) \to \text{答：} \dfrac{1}{3}\end{cases}$

哪一答案有问题？

# 一、确定幂级数的收敛半径

1、“学习指导” P64 例1（4）：

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_k: \quad \lim_{k\to\infty}\left|\frac{f_{k+1}}{f_k}\right| = l\begin{cases} <1 & 收 \\ >1 & 发 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}[2+(-1)^{2n}]^{2n} z^{2n}:$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{[2+(-1)^{2(n+1)}]^{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{[2+(-1)^{2n}]^{2n} z^{2n}}\right| = \frac{3^{2n+2}}{3^{2n}}|z|^2\begin{cases} <1 & 收 \\ >1 & 发 \end{cases}$$

$$|z|^2\begin{cases} <\dfrac{1}{9} & 收 \\ >\dfrac{1}{9} & 发 \end{cases} \qquad |z|\begin{cases} <\dfrac{1}{3} & 收 \\ >\dfrac{1}{3} & 发 \end{cases} \to R_1 = \frac{1}{3}$$

# 二、将函数展开为泰勒级数

1、“学习指导” P67 例3 （2）

将下列函数在指定点展开为泰勒级数，并指出其收敛范围：

$$f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}, z=0$$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty} z^k, |z|<1$$

$$e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}, |z|<\infty$$

注： 展开方法有 $\begin{cases}\text{间接展开法}\\\text{直接展开法}\end{cases}$

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-b)^k,$$

$$a_k=\frac{f^{(k)}(b)}{k!}$$

# 二、将函数展开为泰勒级数

1、“学习指导” P67 例3 （2）

$$f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}, \quad \rightarrow f(0)=e$$

$$f'(z)=e^{\frac{1}{1-z}}\frac{1}{(1-z)^2}, \quad \rightarrow f'(0)=e$$

$$f''(z)=\frac{(3-2z)f'(z)}{(1-z)^2}, \quad \rightarrow f''(0)=3e$$

答: $f(z)=e[1+z+\frac{3z^2}{2!}+\cdots]$

* 在 $|z|>1$ 中 $f(z)$ 能否按上述方法展开？

# 二、将函数展开为泰勒级数

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty} z^k, |z|<1$$

2、“学习指导”P69 例5:

将 $f(z)=\frac{z^2}{(z+1)^2}$ 按 $(z-1)$ 的正幂展开，并求其收敛范围。

解：$$\frac{z^2}{(z+1)^2}=1-\frac{2}{(z+1)}+\frac{1}{(z+1)^2}$$

$$\frac{1}{(z+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(z-1)^k; \quad \frac{1}{(z+1)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+1)}{2^{k+2}}(z-1)^k$$

答：$$\frac{1}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(k-3)}{2^{k+2}}(z-1)^k, |z-1|<1$$

# 三、泰勒展开的若干应用

1、“学习指导” P74 例11 （2）

求下列级数之和： $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1},\quad |z|<1$ 答： $\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z z^{2n}dz=\int_0^z\frac{1}{1-z^2}dz,\quad |z|<1$$

2、“教材” P69，8

求下列级数之和：

$$S=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^{-nt}}{n^2-1},\quad |t|>0$$ (加州理工学院研究生试题）

答： $S(t)=\ln(1-e^{-t})\sinh t+\frac{1}{2}+\frac{e^{-t}}{4},t\geq 0$

# 三、泰勒展开的若干应用

2、 $S=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^{-nt}}{n^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}[\frac{e^{-nt}}{n-1}-\frac{e^{-nt}}{n+1}]$

令 $n-1=p,\rightarrow\quad \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^{-nt}}{n-1}=\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{e^{-(p+1)t}}{p}=\frac{1}{2}e^{-t}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{e^{-pt}}{p}$

令 $n+1=m,\rightarrow\quad \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^{-nt}}{n+1}=\frac{1}{2}\sum_{m=3}^{\infty}\frac{e^{-(m-1)t}}{m}=\frac{1}{2}e^{-t}\sum_{m=3}^{\infty}\frac{e^{-mt}}{m}$

记 $s_1(t)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{e^{-pt}}{p},\quad\rightarrow\frac{ds_1(t)}{dt}=-\sum_{p=1}^{\infty}e^{-pt}=-\sum_{p=0}^{\infty}e^{-pt}+e^{-0t}$

$$=1-\frac{1}{1-e^{-t}}=-\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}},\quad |e^{-t}|<1$$

$$\boxed{s_1(t)=-\int_t^{\infty}\frac{e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}}d\alpha=-\ln[1-e^{-\alpha}]_t^{\infty}=-\ln\frac{1}{1-e^{-t}}}$$

# 三、泰勒展开的若干应用

2、 $S=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^{-nt}}{n^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}[\frac{e^{-nt}}{n-1}-\frac{e^{-nt}}{n+1}]$

$$\boxed{s_1(t)=-\ln\frac{1}{1-e^{-t}}}$$

记 $s_2(t)=\sum_{m=3}^{\infty}\frac{e^{-mt}}{m}$,

$$\to\frac{ds_2(t)}{dt}=-\sum_{m=3}^{\infty}e^{-mt}=-\sum_{m=0}^{\infty}e^{-mt}+(e^{-t})^0+(e^{-t})^1+(e^{-t})^1$$

$$\boxed{=-\frac{1}{1-e^{-t}}+1+e^{-t}+e^{-2t}}=-\frac{-e^{-t}}{1-e^{-t}}+e^{-t}+e^{-2t}$$

$$\boxed{s_2(t)=-\ln\frac{1}{1-e^{-t}}-e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}}$$

$$s(t)=\frac{1}{2}e^{-t}s_1(t)-\frac{1}{2}e^{t}s_2(t)=\ln(1-e^{-t})\sinh t+\frac{1}{2}+\frac{e^{-t}}{4},\quad t\ge 0$$

# 三、泰勒展开的若干应用

3、已知在量子力学中会涉及到的厄米多项式满足如下母函数关系式

$$e^{x^2-(t-x)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{H_k(x)}{k!}t^k$$

（1）把 $H_n(x)$ 表示为围道积分的形式。

（2）证明 $H_n(x)$ 满足厄米方程：

$$H_n''(x)-2xH_n'(x)+2nH_n(x)=0$$

（3）导出 $H_n(x)$ 的递推关系。

$$H_n'(x)=2nH_{n-1}(x)$$

答:

$$H_n(x)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_l\frac{e^{x^2-(t-x)^2}}{t^{n+1}}dt$$

# 三、泰勒展开的若干应用

（1）把$H_n(x)$表示为围道积分的形式。

令 $$\frac{H_k(x)}{k!}=a_k$$

则 $$F(x,t)=e^{x^2-(t-x)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k t^k$$

$$\therefore\ a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{e^{x^2-(t-x)^2}}{t^{n+1}}dt$$

$$H_n(x)=a_n\cdot n!=\frac{n!}{2\pi i}\oint_l\frac{e^{x^2-(t-x)^2}}{t^{n+1}}dt$$

# 三、泰勒展开的若干应用

（2）证明 $H_n(x)$满足厄米方程：

$$H_n''(x)-2xH_n'(x)+2nH_n(x)=0$$

$$e^{x^2-(t-x)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{H_k(x)}{k!}t^k \qquad F(x,t)=e^{x^2-(t-x)^2} \qquad \frac{\partial F}{\partial x}=2tF(x,t)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}=-2(x-t)F(x,t) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=4t^2F(x,t) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-2x\frac{\partial F}{\partial x}+2t\frac{\partial F}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-2x\frac{\partial F}{\partial x}+2t\frac{\partial F}{\partial t}=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{H_k''(x)t^k}{k!}-2x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{H_k'(x)t^k}{k!}+2t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{H_k'(x)kt^k}{k!}=0$$

$$t^n:\quad H_n''(x)-2xH_n'(x)+2nH_n(x)=0$$

# 四、将函数展开为罗朗级数

1、将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在指定的范围展开为泰勒或罗朗级数（已讲）

(1) 在$z=0$的邻域 $\boxed{|z|<1:}$ $\quad f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^{k+1}}\right)z^k$

(2) 以$z=0$为中心 $\boxed{1<|z|<2:}$ $\quad f(z)=-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{z^{k+1}}-\dfrac{z^k}{2^{k+1}}\right)$

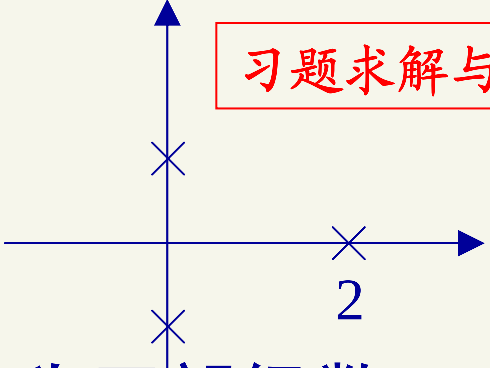
(3) 在$|z-1|>1$中 $\boxed{|z|>2:}$ $\quad f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(2^k-1)\dfrac{1}{z^{k+1}}$

(4) 在奇点的去心邻域中

(5) 以奇点为中心 $\boxed{|z-1|>1:}$ $\quad f(z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(z-1)^{k+1}}$

$\boxed{(4):0<|z-1|<1;\quad 0<|z-2|<1:}$

$\boxed{(5):0<|z-1|<1;1<|z-1|;0<|z-2|<1;1<|z-2|:}$




# 四、将函数展开为罗朗级数

2、“学习指导” P80 例5 （1）

将下列函数在指定环域内展开 为罗朗级数：

$$\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)},\ 1<|z|<2$$

法一：

令 $$\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}=\frac{A}{(z-2)}+\frac{B}{(z-i)}+\frac{C}{(z+i)}=\cdots$$

法二：$$\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}=\frac{z^2+1\cancel{-1}-2z+4\cancel{+1}}{(z-2)(z^2+1)}=\frac{1}{(z-2)}-\frac{2}{(z^2+1)}$$

答： $$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2^{k+1}}-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{z^{2k}},\ 1<|z|<2$$

# 五、判断奇点的类型

步骤：1、判断何点为奇点

2、判断奇点是孤立奇点还是非孤立奇点

3、对于孤立奇点判断奇点的类型

（$a$）$\lim\limits_{z\to b(\infty)} f(z)=?$ 若 $\lim\limits_{z\to b(\infty)} f(z)=\begin{cases}\infty，b(\infty)-\text{极}\\ \text{有限}，b(\infty)-\text{可去}\\ \text{不定}，b(\infty)-\text{本性}\end{cases}$

$(b)$若$b$为极点,则当$\begin{cases} f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-b)^m} \\ \lim\limits_{z\to b}[(z-b)^m f(z)]=\text{非0有限} \\ g(z)=\dfrac{1}{f(z)}\text{以}b\text{为}m\text{阶0点}\end{cases}$

$b$为$m$阶极点。

# 五、判断奇点的类型

## 4、求下列函数的奇点及奇点的类型

(1) $\dfrac{z}{z-1}: z=1$？，$z=\infty$？ 答：单极点，可去奇点

(2) $\dfrac{e^{z}-1}{\sin^{3}z}, z=0$？ 答：二阶极点

(3) $\Gamma(z)=\dfrac{\Gamma(z+1)}{z}, z=-n$？ 答：单极点

(4) $ctgz, z=k\pi$？, $z=\infty$？ 答：单极点，非孤立

(5) $z\sin\dfrac{1}{z}, z=0$？$z=\infty$ 答：本性，可去

# Good-by!


福娃 Friendlies
福娃贝贝
Beibei
福娃晶晶
Jingjing
福娃欢欢
Huanhuan
福娃迎迎
Yingying
福娃妮妮
Nini