数学物理方法

Mathematical Methods in Physics

武汉大学

物理科学与技术学院

第八章 分离变量法

The Method of Separation of Variables

Wuhan University

问题的引入：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \ , \ -\infty < x < \infty & (1) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \, , \ -\infty < x < \infty & (2) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), \ -\infty < x < \infty & (3) \end{cases} \xrightarrow{\text{行波法}}$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha}$$

缺点：通解不易求，用定解条件定特解常有困难，有局限性。

思路：引入一直接求特解的方法

第三章 分离变量法

中心内容: 用分离变量法求解各种有界问题

基本要求:

- 掌握有界弦的自由振动的解及物理意义
- 着重掌握分离变量法的解题思想、解题步骤及其核心问题——本征值问题
- 掌握求解非齐次方程的本征函数展开法
- 掌握将非齐次边界条件齐次化的方法
- 掌握在柱、球坐标系中对 $\Delta u=0$ 和 $\Delta u+\lambda u=0$ 的分离变量及所得到的特殊函数微分方程

§8.1 有界弦的自由振动

Free transverse vibration of a finite string

一. 定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l & (1) \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0 & (2) \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x) & (3) \end{cases}$$

二. 求解

思路： 两端固定的弦形成驻波，故可用驻波法（即分离变量法）求解。

二. 求解

1、分离变量：

令 $$u(x,t)=X(x)T(t) \qquad (4)$$

则（1）$\longrightarrow$ $$\begin{cases} T''-a^2\mu T=0 & (5) \\ X''-\mu X=0 & (6) \end{cases}$$

（2）$\longrightarrow$ $$X(0)=0, X(l)=0 \qquad (7)$$

2、 解本征值问题：

$$\begin{cases} X''-\mu X=0 & (6) \\ X(0)=0, \quad X(l)=0 & (7) \end{cases}$$

二. 求解

2、 解本征值问题：

$$\begin{cases} X''-\mu X=0 & (6) \\ X(0)=0, \quad X(l)=0 & (7) \end{cases}$$

定义：

- 本征值：（6）中μ不能任意取值只能依据边界条件（7）取某些特定值称为本证值
- 本征函数：对于不同的μ值方程(6)所对应的解
- 本征值问题：求齐次方程带有齐次边界条件的本征值和本征函数的问题

附：二阶常微分方程的解：

对于 $$y''(x)+py'(x)+qy(x)=0$$

其特征方程为 $$r^2+pr+q=0$$

特征方程的解为： $$r=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}=\begin{cases} r_1 \\ r_2 \end{cases}$$

1° 若 $r_1\neq r_2$（实数），则 $y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$；

2° 若 $r_1=r_2=a$（实数），则 $y=(c_1x+c_2)e^{ax}$；

3° 若 $r_1=a+ib,\ r_2=a-ib,$

则 $y=e^{ax}(c_1\cos bx+c_2\sin bx)$

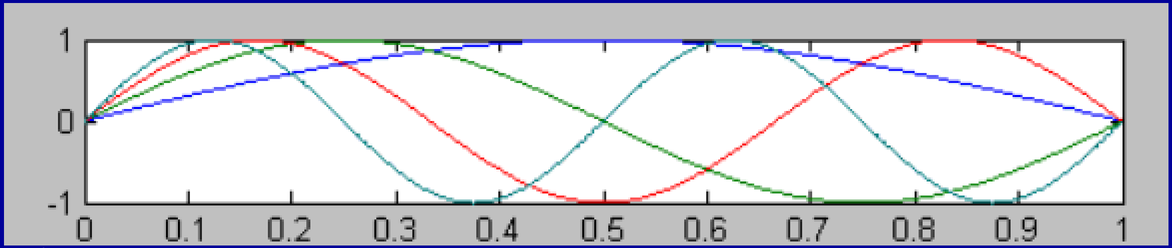
二. 求解

2、 解本征值问题：

$$\begin{cases} X'' - \mu X = 0 & (6) \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0 & (7) \end{cases}$$

本征值：$$\boxed{\mu = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}, \qquad n = 1,2,3,\ldots \qquad (8)}$$

本征函数：$$\boxed{X_n(x) = C_n \sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (9)}$$



二. 求解

3、求解 $T_n(t)$ 的方程

$$T_n''(t)+\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}T_n(t)=0$$

$$T_n(t)=A_n'\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n'\sin\frac{n\pi a}{l}t \qquad (10)$$

4、叠加，用初始条件定系数

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (11)}$$

$$\boxed{A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha d\alpha,} \quad \boxed{B_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha d\alpha \qquad (12)}$$

附：周期函数的傅立叶展开

设以 $2l$ 为周期的函数在 $[-l,l]$ 上可以展开为三角函数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos\frac{n\pi}{l}x+b_n sin\frac{n\pi}{l}x)$$

则

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx, n=0,1,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx, \quad n=1,2,\cdots$$

若 $f(x)$ 为奇函数

则 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$ 　 $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx, \quad n=1,2,\cdots$

若 $f(x)$ 为偶函数

则 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n cos\frac{n\pi}{l}x$ 　 $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx, n=0,1,\cdots$

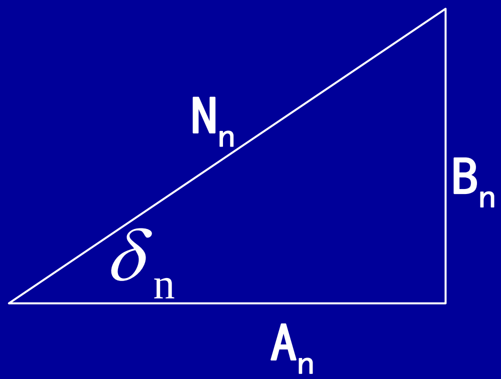
三. 分析解答

1. 存在性：

当 $\varphi \in c^2, \psi \in c^1$ 且满足边界条件（2），则（11），（12）给出的解存在。

2. 物理意义：

$$A_n = N_n cos\delta_n, B_n = N_n sin\delta_n$$



记 $\omega_n = \dfrac{n\pi a}{l}$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} N_n cos(\omega_n t - \delta_n) sin\frac{n\pi}{l}x$$

—— 驻波叠加

三. 分析解答

2. 物理意义：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}N_n\cos(\omega_n t-\delta_n)\sin\frac{n\pi}{l}x$$ —— 驻波叠加

振幅： $N_n \mathrm{Sin}\frac{n\pi}{l}x$

频率： ω_n

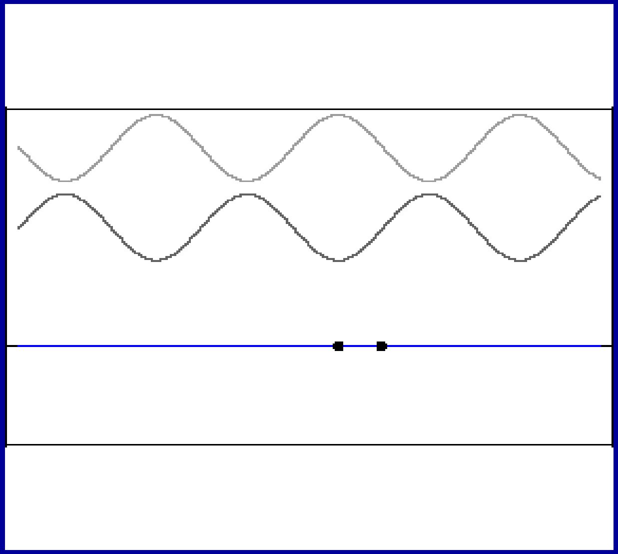
初位相: δ_n

波节： $x_m=\frac{m}{n}l\,,m=0,1,\cdots,n$（共 $n+1$ 个）

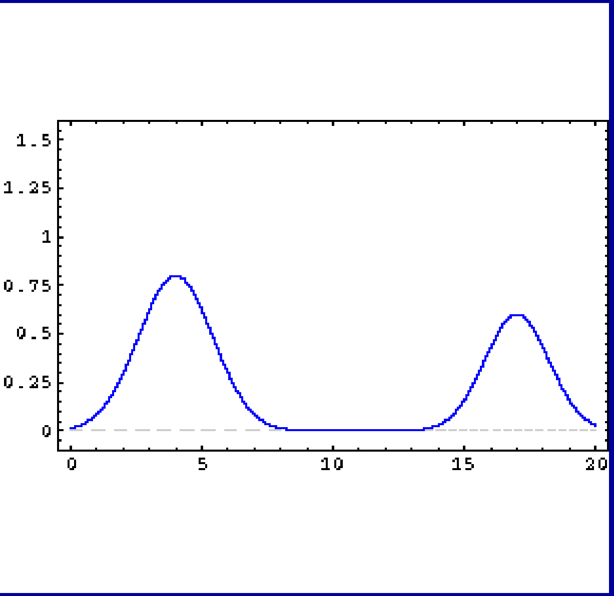
波腹： $x_k=\frac{2k-1}{2n}l\,,k=1,2,\cdots,n$（$n$ 个）

三. 分析解答

驻波



驻波的叠加



四. 小结

1. （1）-（3）的解，由（11）、（12）式给出；

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l & (1) \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0 & (2) \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x) & (3) \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t\right) \sin \frac{n\pi}{l} x \qquad (11)$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\alpha) \sin \frac{n\pi}{l} \alpha d\alpha, \quad B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(\alpha) \sin \frac{n\pi}{l} \alpha d\alpha \qquad (12)$$

2. 驻波法也适于求其他的齐次有界问题，又叫分离变量法

四. 小结

3. 分离变量法要领是，令

$$u(x,y,z,\ldots t)=X(x)Y(y)Z(z)\ldots T(t)$$

从而将偏微分方程变成常微分方程 求解。

4. 分离变量法的解题步骤为：

①对齐次方程和齐次边界条件分离变量

②解常微分方程的本征值问题

③解其它变量的常微分方程

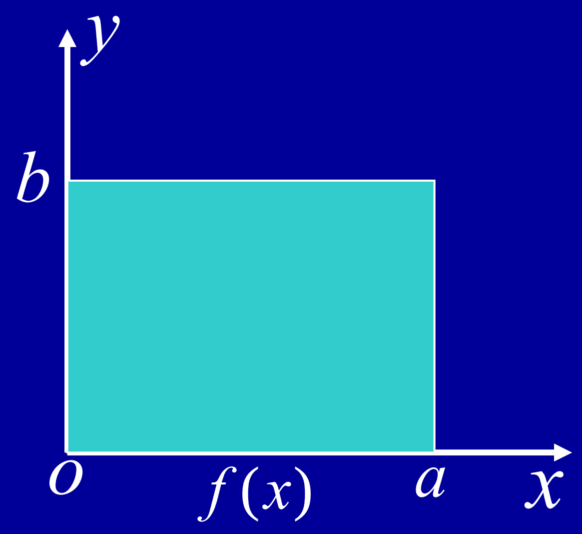
④叠加，用初始条件（或非齐次边界条件）定系数

五. 例题

考察在矩形薄板内稳定状态的温度分布，板的两对边绝热，而其余的两边一边温度保持为零，另一边的温度由f(x)规定。

解：其定解问题可表示为：

$$
\begin{cases}
u_{xx} + u_{yy} = 0,\ 0 < x < a,\ 0 < y < b & (13) \\
\left.\begin{aligned} u_x|_{x=0} = 0 \\ u_x|_{x=a} = 0 \end{aligned}\right\} & (14) \\
u|_{y=b} = 0 & (15) \\
u|_{y=0} = f(x) & (16)
\end{cases}
$$



1、分离变量：令 $u(x,y)=X(x)Y(y)$

则（13）$\longrightarrow$ $X''-\mu X=0 \qquad (17)$

$Y''+\mu Y=0 \qquad (18)$

（14）$\longrightarrow$ $\begin{cases} X'(0)=0 \\ X'(a)=0 \end{cases} \qquad (19)$

（15）$\longrightarrow$ $Y(b)=0 \qquad (20)$

2、解本征值问题（17），（19）：

本征值: $\mu=-\dfrac{n^2\pi^2}{a^2}$，$n=0、1、2、\ldots$

本征函数: $\boxed{X_n(x)=A_n\cos\dfrac{n\pi}{a}x}$

3、求解关于Y的方程 $$Y''-\frac{n^2\pi^2}{a^2}Y=0 \qquad (18)'$$

$$Y_n(y)=\begin{cases} C_0y+D_0,\ (n=0) \\ C_n\cosh\frac{n\pi}{a}y+D_n\sinh\frac{n\pi}{a}y=E_n\sinh\frac{n\pi}{a}(y+F_n),\ (n\neq 0) \end{cases}$$

$$E_n=\sqrt{D_n^2-C_n^2}\ ,\ F_n=\frac{a}{n\pi}th^{-1}\frac{C_n}{D_n}$$

由$Y_n(b)=0$有： $$C_0=-\frac{D_0}{b}\ ,\ F_n=-b(E_n\neq 0)$$

$$\boxed{Y_n(y)=\begin{cases} D_0\frac{b-y}{b} & (n=0) \\ E_n sh\frac{n\pi}{a}(y-b) & (n\neq 0) \end{cases}}$$

4、叠加用非齐次边界条件定系数

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}X_n(x)Y_n(y)$$

$$=\frac{a_0}{2}\frac{b-y}{b}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{a}x\,sh\frac{n\pi}{a}(y-b)$$

$$u|_{y=0}=f(x)\quad(16)\to\quad f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{a}x\,sh(-\frac{n\pi b}{a})$$

记 $$a_n^{*}=\frac{2}{a}\int_o^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx$$

则 $$u(x,y)=\frac{a_0^{*}}{2}\frac{b-y}{b}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{*}\frac{sh\frac{n\pi}{a}(b-y)}{sh\frac{n\pi b}{a}}\cos\frac{n\pi}{a}x$$

附 证明:

$$C\cosh\frac{n\pi}{a}y+D\sinh\frac{n\pi}{a}y=E\sinh\frac{n\pi}{a}(y+F),(n\neq 0)\ (*)$$

其中 $E=\sqrt{D^2-C^2}$ ， $F=\frac{a}{n\pi}th^{-1}\frac{C}{D}$

$$\because E\sinh\frac{n\pi}{a}(y+F)$$

$$=E\sinh\frac{n\pi y}{a}\cosh\frac{n\pi F}{a}+E\cosh\frac{n\pi y}{a}\sinh\frac{n\pi F}{a}$$

记 $C=E\sinh\frac{n\pi F}{a}$, $D=E\cosh\frac{n\pi F}{a}$, 则(*)成立.

其中 $\frac{C}{D}=\tanh\frac{n\pi F}{a}\rightarrow F=\frac{a}{n\pi}\tanh^{-1}\frac{C}{D}$

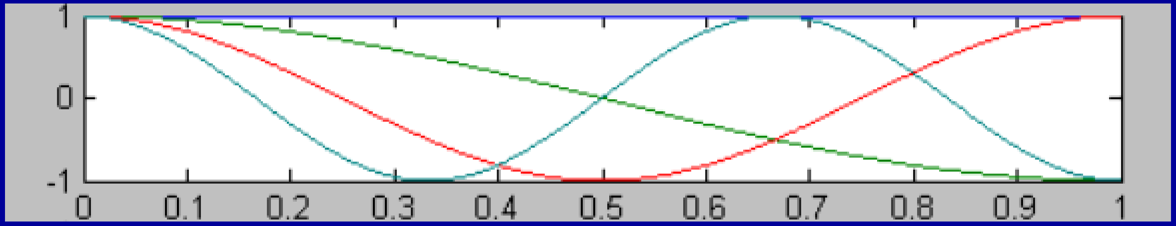
$$D^2-C^2=E^2(\cosh^2\frac{n\pi F}{a}-\sinh^2\frac{n\pi F}{a})=E^2$$

本节作业

习题 8.1:

1(3); 3(2),(4); 8

$$\boxed{X_n(x) = A_n \cos \frac{n\pi}{a} x} \qquad a = 1$$



Good- by!