数学物理方法

Methods in Mathematical Physics

第十章 格林函数法

Method of Green’s Function

武汉大学物理科学与技术学院

问题的引入：

$$\begin{cases}\text{行波法:无界空间波动问题,有局限性}\\ \text{分离变量法:各种有界问题,其解为无穷级数}\\ \text{积分变换法：各种无界问题,其解为无限积分}\end{cases}$$

1、格林函数法：

其解为含有格林函数的有限积分。

由§10. 2: $\begin{cases}\Delta u = -h(M)\\ u|_{\sigma} = f(M)\end{cases} \rightarrow$

$$u(M)=\iiint_{\tau}G(M,M_0)h(M_0)d\tau_0-\iint_{\sigma}f(M_0)\frac{\partial G}{\partial n_0}d\sigma_0$$

$G(M,M_0)$—狄氏格林函数

问题的引入：

2、格林函数：点源函数，点源产生的场和影响

若外力 $f(x,t)$ 只在 ξ 点，τ 时起作用

$$
\text{则}\begin{cases}
u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\quad f(x,t)=\begin{cases}0, & x\neq\xi,t\neq\tau\\ f(\xi,\tau), & x=\xi,t=\tau\end{cases}\\
u\big|_{x=0}=0,u\big|_{x=l}=0\\
u\big|_{t=0}=0,u_t\big|_{t=0}=0 \\
\quad\uparrow
\end{cases}
$$

$u(x,t)$ – 格林函数，即 $\mathrm{G}(\mathrm{x},\mathrm{t}|\xi,\tau)$；$f(x,t)$ – 点源

问题的引入：

3、为何引入格林函数法

$$5.2 \rightarrow \begin{cases} \Delta u = -h(M) \\ u\big|_{\sigma} = f(M) \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} u(M) = &\iiint_{\tau} G(M, M_0) h(M_0) d\tau_0 \\ &- \iint_{\sigma} f(M_0) \frac{\partial G}{\partial n_0} d\sigma_0 \end{aligned}$$

（1）解的形式(有限积分)便于理论分析和研究

（2）以统一的形式研究各类定解问题

（3）对于线性问题，格林函数一旦求出，就可以算出任意源的场，关键就是求点源

第十章 格林函数法

Method of Green's Function

中心：用格林函数法求解狄氏问题

目的：1、掌握(点源函数) δ 函数的定义、性质

2、格林函数法的思想、方法、步骤

3、狄氏积分公式的应用

4、如何用电象法求狄氏格林函数

第十章 格林函数法

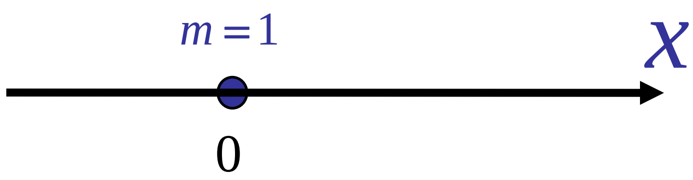
§10.1 δ 函数

The Delta Function

一、δ函数的引入

1、物理背景

（1）金属线　总质量$m=1$,集中在$x=0$处



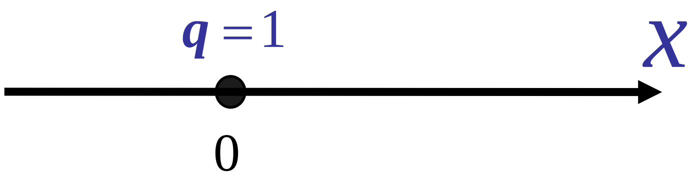
则密度：$\rho(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta m}{\Delta x}=\begin{cases}0 & x\neq 0\\ \infty & x=0\end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)dx=1$$

一、δ函数的引入

1、物理背景

（2）带电导线　　总电量$q=1$，集中在$x=0$处



则电荷密度：$\rho(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta q}{\Delta x}=\begin{cases}0 & x\neq 0\\ \infty & x=0\end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)dx=1$$

一、δ函数的引入

2、定义：

$$\begin{cases} \delta(x)=\begin{cases} 0 & x\neq 0 \\ \infty & x=0 \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1 \end{cases} \quad -\delta\text{函数}$$

一般：
$$\begin{cases} \delta(x-x_0)=\begin{cases} 0 & x\neq x_0 \\ \infty & x=x_0 \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)dx=1 \end{cases}$$

一、δ函数的引入

3、注意：

(1) $\delta-$密度函数和点源函数

若在$x=x_0$点放有m质量，总质量m

则 $\rho(x)=m\delta(x-x_0)$

同样若在$x=x_0$放有电量为q的点电荷，总电量为q，

则 $\rho(x)=q\delta(x-x_0)$

(2) $\delta-$广义函数

二、δ函数的性质

设 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$连续, 则

1、 $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0) \ [\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)]}$

注意：δ也能表示连续分布的函数

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau-t)d\tau = \int_a^b f(\tau)\delta(\tau-t)d\tau$$

附：判断函数相等的一种方法:

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是定义在(a, b) 区间上的函数，若对于定义在(a, b) 区间上的任意连续函数 $\varphi(x)$ 都有如下等式成立：

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \int_a^b g(x)\varphi(x)dx,\ \text{则必有：} f(x) = g(x)$$

$$\text{特别：若} \int_a^b \varphi(x)g(x)dx = 0,\ \text{则必有} g(x) = 0$$

二、δ 函数的性质

2、若定义 $\dfrac{d}{dx}\delta(x)=\delta'(x)-\delta$函数的导数，则

$$(1)\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-x_0)dx = -f'(x_0)$$

$$(2)\ (x-x_0)\delta'(x-x_0) = -\delta(x-x_0)$$

$$(3)\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^{(n)}(x-x_0)dx = (-1)^n f^{(n)}(x_0)$$

3、$\delta[\varphi(x)]=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\delta(x-x_i)}{|\varphi'(x_i)|}$，其中 $\varphi(x_i)=0$

三、高维δ函数

1、定义：

$$(1)\begin{cases}\delta(M-M_0)=\begin{cases}0\,,\ M\neq M_0\\ \infty\quad M=M_0\end{cases}\\ \displaystyle\iiint_{-\infty}^{\infty}\delta(M-M_0)dv=1\end{cases}$$

其中,$\delta(M-M_0)$
$=\delta(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$
$=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$
为三维函数;$dv=dxdydz$

$$(2)\begin{cases}\delta(M-M_0)=\begin{cases}0\,,\ M\neq M_0\\ \infty\quad M=M_0\end{cases}\\ \displaystyle\iint_{-\infty}^{\infty}\delta(M-M_0)dxdy=1\end{cases}$$

其中,$\delta(M-M_0)$
$=\delta(x-x_0,y-y_0)$
$=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$
为二维函数;$dv=dxdy$

三、高维δ函数

2、性质：

$$(1)\int\int_{-\infty}^{\infty}\int f(M)\delta(M-M_0)dxdydz$$

$$=f(x_0,y_0,z_0)$$

$$=f(M_0)$$

$$(2)\int\int_{-\infty}^{\infty} f(M)\delta(M-M_0)\delta xdy$$

$$=f(M_0)$$

$$=f(x_0,y_0)$$

四、例题

1. $\int_1^2 \sin x\,\delta(x-\frac{1}{2})dx = ?$ $\boxed{0}$

2. $\int_1^2 \sin x\,\delta(x)dx = ?$ $\boxed{0}$

3. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x+y)\delta(x+2)\delta(y-1)dxdy = ?$ $\boxed{\sin(-1)}$

4. 长为l,密度为ρ的弦两端固定,初位移为零,初始时刻在$x = x_0$点受到一横向冲量I_0.试写出弦的横振动的定解问题。

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = \dfrac{I_0}{\rho}\delta(x-x_0) \end{cases}$$

五、小结

一般：$$\begin{cases} \delta(x-x_0)=\begin{cases} 0 & x\neq x_0 \\ \infty & x=x_0 \end{cases} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)dx=1 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0) \quad \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^{(n)}(x-x_0)dx = (-1)^n f^{(n)}(x_0)$$

本节作业

习题 10.1：

1（1）（3）；4；

6（1） （4）；7；

Good-by!