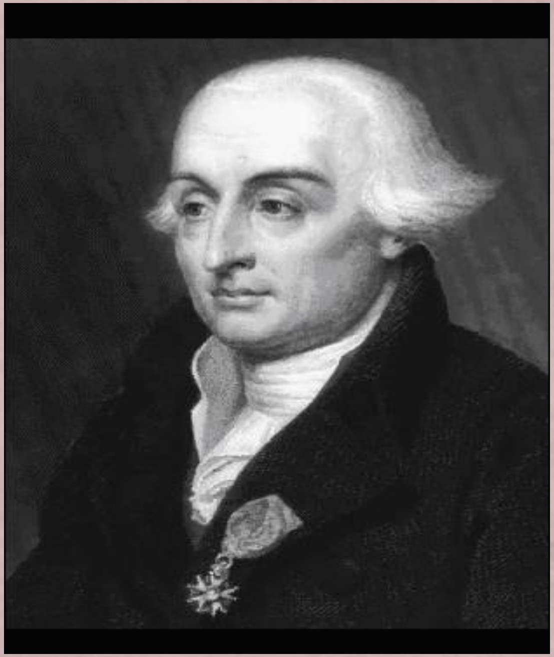
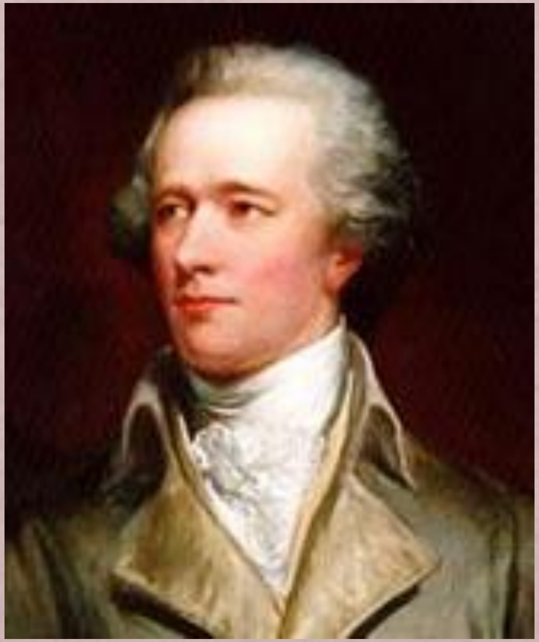
第六章
分析力学



拉格朗日



哈密顿

§6.10 正则变换

本节导读

- 正则变换的条件
- 母函数 正则变换的几种形式

哈密顿正则方程的求解完全等价于求解拉格朗日方程.

然而, 它的功能并不是拉格朗日方程所能替代的. 例如刘维定理揭示了力学系统在相空间中的运动规律, 提供了从经典力学过渡到统计物理的途径, 而在拉格朗日动力学的位形空间中却不存在类似的规律. 力学规律的泊松括号形式, 又揭示了经典力学和量子力学的对应关系.

与拉格朗日方程相比，哈密顿方程不仅在形式上, 而且在性质上具有更高的对称性.

哈密顿方程的独立变量(广义坐标和广义动量)比拉格朗日方程的独立变量(广义坐标)多一倍，从表面看，这似乎是一种无谓的复杂化，其实正是出于这种变量个数的增加，使哈密顿方程对于范围更广的变换(正则变换)具有不变性.

正则变换的重要意义：在于使新的正则方程组中的哈密顿函数比原有的H有较简单的结构，有较多的循环坐标，从而更易于得到运动积分和求解。

1 正则变换

与循环坐标对应的广义动量守恒．循环坐标的个数越多，求解哈密顿正则方程就越方便．但对同一个问题，广义坐标选取不同，循环坐标出现的个数也将不同.

广义坐标之间的变换叫做点变换，拉格朗日方程和哈密顿原理的形式不变。

哈密顿动力学中，广义坐标和广义动量处于对等的地位，不必局限于点变换，可以考虑更为广义的变换

$$\left.\begin{aligned} P_\alpha &= P_\alpha(p,q,t) \\ Q_\alpha &= Q_\alpha(p,q,t) \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,s)$$

当然, 我们要求变换后的动力学方程仍然是哈密顿正则方程, 满足这一要求的变换叫做正则变换.

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial H^*}{\partial P_\alpha}$$

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial H^*}{\partial Q_\alpha} \qquad \alpha = 1,2,\cdots s$$

这里H^*代表变换后的哈密顿函数.

注意: 变换以后的两组变数P_α与Q_α完全对等, 不再把它们区分为“坐标”和“动量”. 这样, 在哈密顿动力学中, 满足哈密顿正则方程的一对变数P_α与Q_α就叫做一对正则变数或一对共轭变数, 说不上哪个是坐标, 哪个是动量.

变换前的p_α和q_α满足哈密顿正则方程, 变换后P_α与Q_α也满足哈密顿正则方程. 显然, 作为同一个力学问题, 这两个正则方程是彼此等价的.

这就是说, 哈密顿原理

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha-H(p,q,t)\right]\mathrm{d}t=0,\ \delta\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{\alpha=1}^{s}P_\alpha\dot{Q}_\alpha-H^*(P,Q,t)\right]\mathrm{d}t=0$$

两者是等价的。借助于变换关系, 可将上面两式视为含有相同的变数;因此, 二者被积函数之差应为任意函数U对时间的全微商

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha - H\right) - \left(\sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha \dot{Q}_\alpha - H^*\right) = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$$

或

$$\sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \mathrm{d}q_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha \mathrm{d}Q_\alpha + \left(H^* - H\right)\mathrm{d}t = \mathrm{d}U$$

或

$$\sum_{\alpha=1}^{s} (p_\alpha \delta q_\alpha - P_\alpha \delta Q_\alpha) = \delta U$$

该式就是正则变换的必要和充分条件。

函数U在积分两个上、下限的变分为零，它是联系新、旧正则变量的函数。

证明充分性 $$\sum_{\alpha=1}^{s}(p_\alpha\delta q_\alpha - P_\alpha\delta Q_\alpha) = \delta U$$

$$\sum_{\alpha=1}^{s}(p_\alpha\dot{q}_\alpha - P_\alpha\dot{Q}_\alpha) + \left(H^* - H\right) = \dot{U}$$

等时变分时δ 与d/dt先后次序可换，对上述两式分别对时间求导数及变分后可得

$$\delta(\sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha\dot{Q}_\alpha) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha\delta Q_\alpha) - \delta H^*$$

$$= \delta(\sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha\dot{q}_\alpha) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha\delta q_\alpha) - \delta H$$

$$\delta(\sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha\dot{q}_\alpha) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha\delta q_\alpha) - \delta H = \sum_{\alpha=1}^{s}(\dot{q}_\alpha\delta p_\alpha - \dot{p}_\alpha\delta q_\alpha) - \delta H$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{s}(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha) - \delta H = \delta H - \delta H = 0$$

因此

$$\delta H^* = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial H^*}{\partial P_\alpha}\delta P_\alpha + \frac{\partial H^*}{\partial Q_\alpha}\delta Q_\alpha\right) = \sum_{\alpha=1}^{s}(\dot{Q}_\alpha \delta P_\alpha - \dot{P}_\alpha \delta Q_\alpha)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left[\left(\dot{Q}_\alpha - \frac{\partial H^*}{\partial P_\alpha}\right)\delta P_\alpha - \left(\dot{P}_\alpha + \frac{\partial H^*}{\partial Q_\alpha}\right)\delta Q_\alpha\right] = 0$$

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial H^*}{\partial P_\alpha} \qquad \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial H^*}{\partial Q_\alpha} \qquad \alpha = 1,2,\cdots s$$

2 母函数

U决定了正则变换, 因而叫正则变换的母函数.

(1)由于本身的随意性, 可以把母函数表示为函数

$$U_1 = U_1(q, Q, t)$$

考虑正则变换条件

$$\sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \mathrm{d}q_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha \mathrm{d}Q_\alpha + \left(H^* - H\right)\mathrm{d}t = \mathrm{d}U_1$$

得

$$p_\alpha = \frac{\partial U_1}{\partial q_\alpha}, \quad P_\alpha = -\frac{\partial U_1}{\partial Q_\alpha} \quad (\alpha = 1,2,\cdots,s)$$

$$H^* - H = \frac{\partial U_1}{\partial t}$$

上式中的第一个式子包含s个关系式，可以得到用p_α，q_α和t表示的s个Q_α，从而得到正则变换的第一式。将所得Q_α的表达式代入上式中的第二式，又可求出用p_α，q_α和t表示的s个P_α，从而得到正则变换的第二式。上式中的第三式则给出新哈密顿函数和旧哈密顿函数间的关系。

(2) **把母函数表示为函数** $U_2 = U_2(q, P, t)$

$$U_2(q, P, t) = U_1 + \sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha Q_\alpha$$

正则变换条件 $\sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \mathrm{d}q_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha \mathrm{d}Q_\alpha + \left(H^* - H\right)\mathrm{d}t = \mathrm{d}U_1$

相应的可以变为

$$\sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \mathrm{d}q_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha \mathrm{d}Q_\alpha + \left(H^* - H\right)\mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(U_2 - \sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha Q_\alpha\right)$$

所以

$$p_\alpha = \frac{\partial U_2}{\partial q_\alpha}, Q_\alpha = \frac{\partial U_2}{\partial P_\alpha} \quad (\alpha = 1,2,\cdots,s)$$

$$H^* - H = \frac{\partial U_2}{\partial t}$$

(3) 把母函数表示为函数 $U_3 = U_3(p, Q, t)$

$$U_3(p, Q, t) = U_1 - \sum_{\alpha=1}^{s} q_\alpha p_\alpha$$

正则变换条件 $\sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \mathrm{d}q_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha \mathrm{d}Q_\alpha + \left(H^* - H\right)\mathrm{d}t = \mathrm{d}U_1$

相应的可以变为

$$\sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \mathrm{d}q_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha \mathrm{d}Q_\alpha + \left(H^* - H\right)\mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(U_3 + \sum_{\alpha=1}^{s} q_\alpha p_\alpha\right)$$

所以 $P_\alpha = -\dfrac{\partial U_3}{\partial Q_\alpha}, \; p_\alpha = -\dfrac{\partial U_3}{\partial q_\alpha} \quad \left(\alpha = 1,2,\cdots,s\right)$

$$H^* - H = \frac{\partial U_3}{\partial t}$$

(4) 把母函数表示为函数 $U_4 = U_4(p, P, t)$

正则变换条件

$$\sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \mathrm{d}q_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha \mathrm{d}Q_\alpha + \left(H^* - H\right)\mathrm{d}t = \mathrm{d}U_1$$

相应的可以变为

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left(Q_\alpha \mathrm{d}P_\alpha - p_\alpha \mathrm{d}q_\alpha\right) + \left(H^* - H\right)\mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(U_1 + \sum_{\alpha=1}^{s}\left(P_\alpha Q_\alpha - p_\alpha q_\alpha\right)\right) = dU_4(p, P, t)$$

所以

$$Q_\alpha = \frac{\partial U_4}{\partial P_\alpha}, q_\alpha = -\frac{\partial U_4}{\partial p_\alpha}\ ; H^* - H = \frac{\partial U_4}{\partial t}$$

正则变换的目的和关键就是尽量给出变换后在哈密顿函数中出现尽量多的循环坐标.

3 正则变换举例

例1　取母函数为 $U(q, P, t) = \sum_{\alpha=1}^{s} q_\alpha P_\alpha$

给出正则变换

$$p_\alpha = \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} = P_\alpha, Q_\alpha = \frac{\partial U}{\partial P_\alpha} = q_\alpha$$

相当于没有变换, 即 恒等变换.

$$U(q, P, t) = \sum_{\alpha=1}^{s} k_\alpha q_\alpha P_\alpha (k_\alpha \text{为常量})$$

例2 取母函数为$U(q, P, t) = \sum_{\alpha=1}^{s} k_\alpha q_\alpha P_\alpha$ (k_α为常量)

给出正则变换

$$p_\alpha = \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} = k_\alpha P_\alpha, \quad Q_\alpha = \frac{\partial U}{\partial P_\alpha} = k_\alpha q_\alpha$$

即，一个正则变换如果把广义坐标q_α乘以k_α变为$Q_\alpha = k_\alpha q_\alpha$,它必然将广义动量$p_\alpha$除以$k_\alpha$变为$P_\alpha = p_\alpha / k_\alpha$.

小 结

正则变换:

变换后的动力学方程仍然是哈密顿正则方程

正则变换的目的和关键就是尽量给出变换后在哈密顿函数中出现尽量多的循环坐标.

母函数　四种正则变换的母函数.