数学物理方法

Mathematical Methods in Physics

第八章 分离变量法

The Method of Separation of Variables

武汉大学物理科学与技术学院

Wuhan University

问题的引入：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l & (1) \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0 & (2) \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x) & (3) \end{cases}$$

§8.1

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < l\ 0 & (1) \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0 & (2) \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x) & (3) \end{cases}$$

$$u(x,t) = ?$$

§8.2 非齐次方程—纯强迫振动

Inhomogeneous equations -pure forced vibration

一、定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \ 0 < x < l, t > 0 & (1) \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0 & (2) \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0 & (3) \end{cases}$$

二、求解

思路1：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \\ u\big|_{t=0} = 0 \\ u_t\big|_{t=0} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0 \\ v\big|_{t=\tau} = 0 \\ v_t\big|_{t=\tau} = f(x,\tau) \end{cases}$$

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t;\tau)\,d\tau$$

二、求解

思路2：考虑二阶非齐次的常微分方程的求解：

对于 $$y''(x)+p(x)y'+Q(x)y=f(x) \quad (A)$$

考虑齐次 $$y''(x)+p(x)y'+Q(x)y=0 \quad (B)$$

若（B）有通解： $$\boxed{y_g(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)}$$

则由：常数变易法可令（A）有特解

$$\boxed{y_s(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x) \quad (C)}$$

将（C）式代入（A）并补充条件：

$$C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0$$

则有： $$C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x)$$

于是可求得得：$C_1(x)$和 $C_2(x)$, $\rightarrow$ $y_s(x)$

二、求解

1、对应的齐次问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u\,|_{x=0} = 0,\ u|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

令 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 则可得：

$$\begin{cases} X'' - \mu X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases} \qquad \mu = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\ n = 1,2,\ldots$$

$$X_n(x) = C_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

二、求解

2、求对应的 $T_n(t)$ 方程的解

令 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$

$$\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}[T_n''(t)+(\frac{an\pi}{l})^2T_n(t)]\sin\frac{n\pi x}{l}=f(x,t)\\ \begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\frac{n\pi x}{l}=0\\ \sum_{n=1}^{\infty}T_n'(0)\sin\frac{n\pi x}{l}=0\end{cases}\end{cases}$$

$$\begin{cases}T_n''(t)+(\frac{an\pi}{l})^2T_n(t)=f_n(t)\\ \begin{cases}T_n(0)=0\\ T_n'(0)=0\end{cases}\end{cases}$$

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\alpha,t)\sin\frac{n\pi\alpha}{l}d\alpha$$

二、求解

2、求对应的$T_n(t)$方程的解

$$T_n(t)=\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)d\tau \qquad (4)$$

3、有界弦（杆）的纯强迫振动的解：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)d\tau]\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (5)$$

三、小结

1、定解问题（1）～（3)的解由（5）式给出。

三、小结

2、本征函数法：以上求解非齐次方程的方法，显然也适用于求解带有其他齐次边界条件的各类方程。其中主要步骤为：

① 用分离变量法求得对应的齐次问题的本征函数。

② 将未知函数按求得的本征函数展开，其展开系数为另一变量的函数，代入非齐次方程和初始条件（或另一变量的边界条件），得到另一单元函数的非齐次常微分方程的定解问题

③用常数变易法或拉氏变换法解非齐次常微分方程的定解问题，从而可求得原定解问题的解。此即本征函数法。

三、小结

3、对于一般的两端固定的弦的强迫振动：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

令 $u = u^{I} + u^{II}$，使：

$$\begin{cases} u_{tt}^{I} = a^2 u_{xx}^{I} \\ u^{I}|_{x=0} = 0,\ u^{I}|_{x=l} = 0 \\ u^{I}|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t^{I}|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

§8.1

$$\begin{cases} u_{tt}^{II} = a^2 u_{xx}^{II} + f(x,t) \\ u^{II}|_{x=0} = 0,\ u^{II}|_{x=l} = 0 \\ u^{II}|_{t=0} = 0,\ u_t^{II}|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

§8.2

四、例题：

求解定解问题：
$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = A\sin\omega t \\ u_x\big|_{x=0} = 0\ ,\ \ u_x\big|_{x=l} = 0 \\ u\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

解：① 对应的齐次方程的本征值问题为

$$\begin{cases} X'' - \mu X = 0 \\ X'(0) = 0\ ,\ \ X'(l) = 0 \end{cases} \rightarrow \mu = -\frac{n^2\pi^2}{l^2},$$

$$X_n(x) = C_n \cos\frac{n\pi x}{l}\ ,\ \ n = 0,1,2,\ldots$$

② $$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos\frac{n\pi x}{l}\ ,\ \ n = 0,1,2,\ldots$$

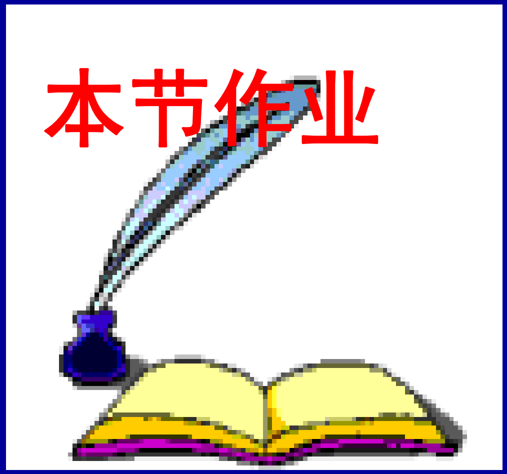
四、例题：

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}[T_n'(t)+(\frac{an\pi}{l})^2T_n(t)]\cos\frac{n\pi x}{l}=A\sin\omega t \\ \sum_{n=0}^{\infty}T_n(0)\cos\frac{n\pi x}{l}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_0'(t)=A\sin\omega t \\ T_0(0)=0 \end{cases}, n=0 \qquad \begin{cases} T_n'(t)+(\frac{n\pi a}{l})^2T_n(t)=0 \\ T_n(0)=0 \end{cases}, n\neq 0$$

$$T_0(t)=\frac{A}{\omega}(1-\cos\omega t)\,;\,T_n(t)=0\quad(n=1,2,3,\ldots)$$

$$\boxed{u(x,t)=\frac{A}{\omega}(1-\cos\omega t)}$$



1、习题 8.2:　2；3(4);

2、试用常数变易法求解常微分方程

$$\begin{cases} T_n''(t)+\left(\dfrac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t)=f_n(t) \\ \begin{cases} T_n(0)=0 \\ T_n'(0)=0 \end{cases} \end{cases}$$