数学物理方法

Mathematical Methods in Physics

武汉大学

物理科学与技术学院

第一篇 复变函数论

Theory of Complex Variable Functions

第一章 解析函数论

Theory of Analytic Functions

武汉大学

物理科学与技术学院

§1.3 微商及解析函数

一、微商及微分：

1、微商：

$w=f(z)$是z点及$N(z,\varepsilon)$ 的单值函数，

若$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$存在有限，

则记 $f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta z}$，称为$f(z)$在$z$点的导数。

一、微商及微分：

$$e.g \qquad f(z)=z^2$$

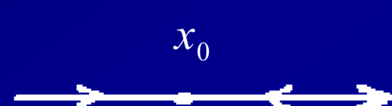
$$(z^2)'=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(2z+\Delta z)\Delta z}{\Delta z}=2z$$

$$\boxed{(z^n)'=nz^{n-1}}$$

注意： （1） $\Delta z\to 0$的方式必须是任意的

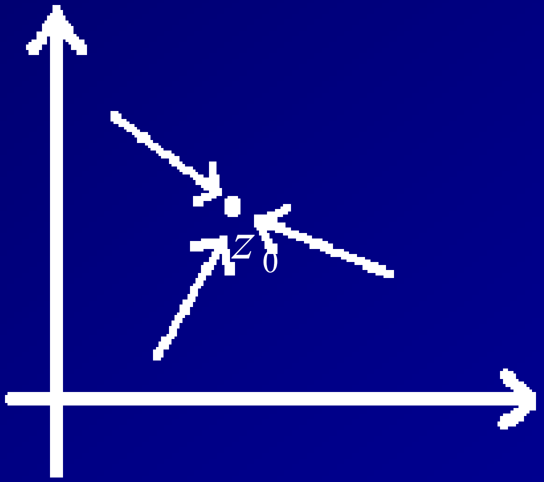
在实函数中： $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$



一、微商及微分：

而在复变函数中：

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}$$



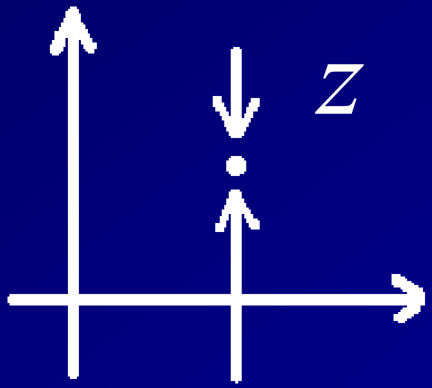
$$e.g\ f(z)=\mathrm{Re}z$$

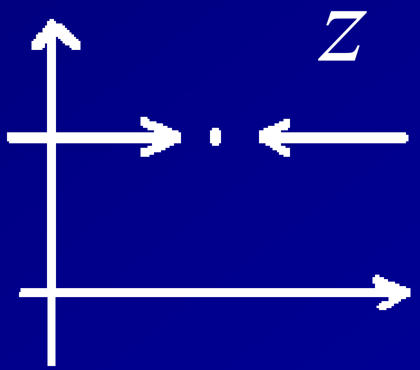
$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\mathrm{Re}(z+\Delta z)-\mathrm{Re}\,z}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\mathrm{Re}\,\Delta z}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta z}$$

一、微商及微分：

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\begin{cases}\displaystyle\lim_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}=0\\[2em] \displaystyle\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}=1\end{cases}$$





$\therefore\ f(z)=\operatorname{Re} z$, 在复平面处处不可导。

一、微商及微分：

注意：（2）可导必然连续，反之则未必；

如$f(z)=\mathrm{Re}\,z=x$在“复平面”中处处连续，但却处处不可导。

（3）可导与连续不同，由实部与虚部在某一点连续，可以断定复变函数连续，但是由实部与虚部在某点可导，并不能判断函数可导；

$$e.g\quad f(z)=\mathrm{Re}\,z$$

一、微商及微分：

2. 微分

若 $w = f(z)$

记 $dw = f'(z)\,dz$ –微分

$[or\ \ df = f'(z)\,dz]$

则 $f'(z) = \dfrac{dw}{dz} \left(= \dfrac{df}{dz}\right)$ –微商

一、微商及微分：

3. 求导、微分法则：

实函中求导、微分法则在此 皆实用。

$$[f_1(z)\pm f_2(z)]' = f_1'(z)\pm f_2'(z)$$

$$[f_1(z)\cdot f_2(z)]' = f_1'(z)\cdot f_2(z)+f_1(z)\cdot f_2'(z)$$

$$\cdots\cdots$$

$$e.g \quad p_n(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots a_nz^n$$

$$\to \quad p_n'(z)=a_1+2a_2z+\cdots+na_nz^{n-1}$$

一、微商及微分：

4. 可导的必要条件

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}}$$

C-R条件

5. 可导的充分条件：

$$\begin{cases} \text{(1)}\ u_x, u_y; v_x, v_y \text{ 均连续} \\ \\ \text{(2)}\ u, v \text{ 满足} C-R\text{条件} \end{cases}$$

一、微商及微分：

注意：（1） C-R条件只是可导的必要条件，不是充分条件

（2） C-R条件的极坐标形式为：

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \rho} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \rho} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} \end{cases}}$$

一、微商及微分：

注意:

（3）由C-R条件可得：

$$f'(z)=\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}\\[2ex]\dfrac{\partial v}{\partial y}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}\\[2ex]\dfrac{\partial u}{\partial x}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial v}{\partial y}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases}$$

问：(1) 可否用这四个公式来判断函数是否可导？

(2) 可否用求导公式判断函数是否存在？

二、解析函数：

1. 定义：

若$w=f(z)$ 在z_0点及$N(z_0,\varepsilon)$ 可导，则称 $w=f(z)$在z_0点解析。

若$w=f(z)$ 在区域σ内处处可导，则称 $w=f(z)$在区域σ内解析。

引入记号 $f(z)\in H(\sigma)$

——表示$f(z)$在区域σ内解析。

二、解析函数：

注：（1）凡说解析都是指在某点或某区域解析

（2）函数在某点解析是比在某点可导严格得多的条件，两者并不等价。

$e.g.\quad f(z)=|z|$ ，在$z=0$点可导却不解析。

(3) $f(z)$在区域 σ 内解析和可导是完全等价的。

(4) $f(z)$的不解析之点称为奇点。

(5) 解析函数又称为正则函数或全纯函数。

二、解析函数：

2. 必要条件：由解析定义和可导必要条件可得：…

3. 充分条件：由解析定义和可导充分条件可得：…

例　证明：$f(z)=e^{x}(\cos y+i\sin y)$

在复平面解析，且

$$f'(z)=f(z).$$

二、解析函数：

4. 解析函数的部分性质

若 $f(z)=u+iv \quad \in H(\sigma)$

则 （1）$\Delta u=0, \Delta v=0$ 且由C-R联系着

（2） $\nabla u \cdot \nabla v=0$

（3） 已知u 或v 均可求出解析函数

（4） 解析函数的和、差、积、商仍为解析函数

问： 若 $f(z) = \xi(x,y) + i\eta(x,y)$，且 $\Delta\xi = 0, \Delta\eta = 0$

能否判断 $f(z) \in H(\sigma)$?

二、解析函数:

例　已知 $v(x,y)=x+y$，求解析函数 $f(z)=u+iv$

解（1）用全微分法求

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=\frac{\partial v}{\partial y}dx-\frac{\partial v}{\partial x}dy=dx-dy$$

$$u=\int d(x-y)+c=x-y+c$$

（2）用积分微分求

$$u=\int\frac{\partial u}{\partial y}dy+g(x)=-\int\frac{\partial v}{\partial x}dy+g(x)$$

$$u=-y+g(x)$$

二、解析函数:

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = g'(x) = \frac{\partial v}{\partial y} = 1, \quad g(x) = x + c$$

$$\therefore u = x - y + c \quad \therefore f(z) = x - y + c + i(x + y)$$

$$= x + iy + i(x + iy) + c$$

$$= z(1 + i) + c$$

二、解析函数：

5. 解析函数的物理解释：

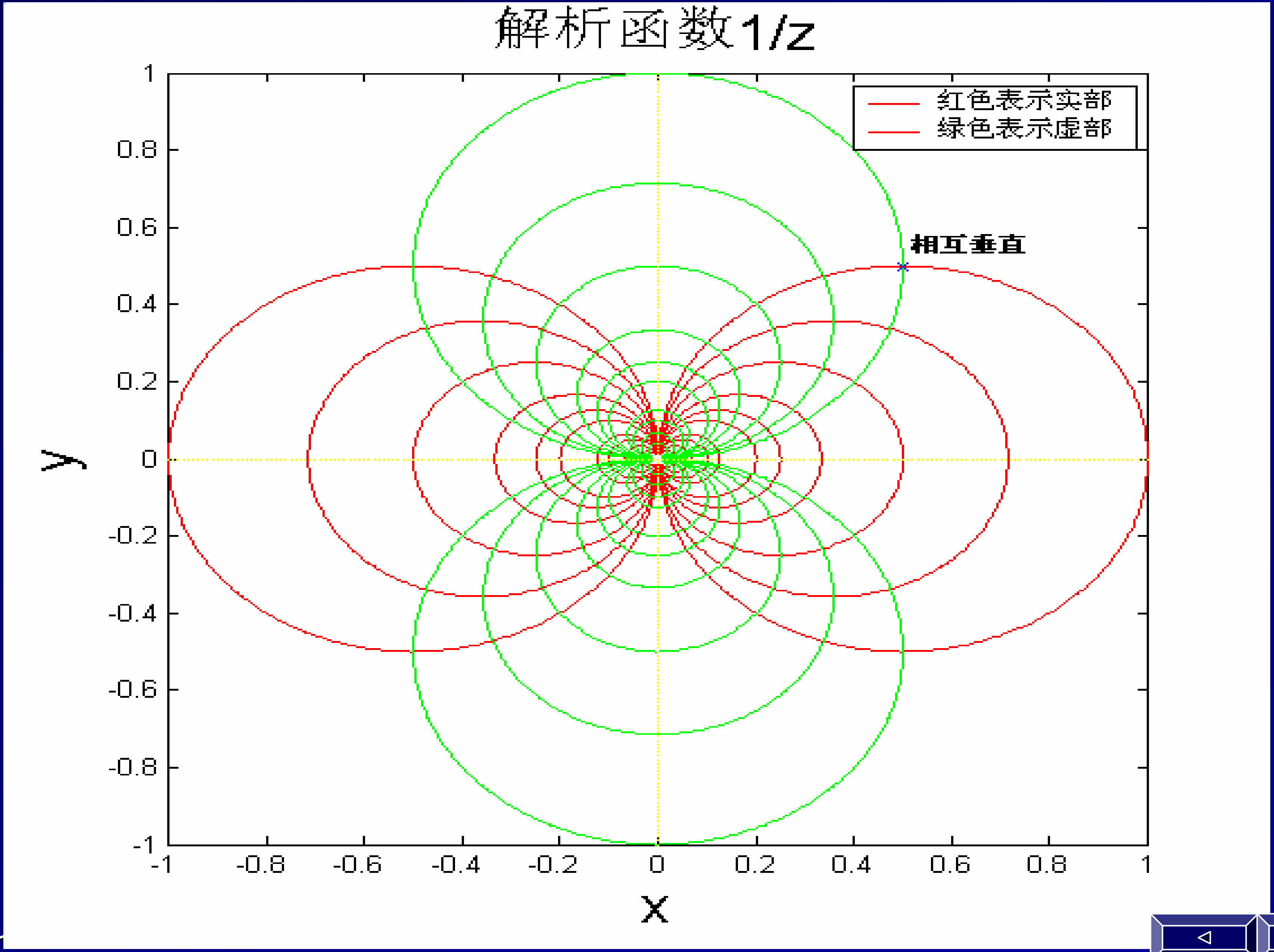
以平面静电场为例（也适合于其他标量场）：电势 $\psi(x, y)$ 在平面的无源即无电荷区域满足二维拉氏方程

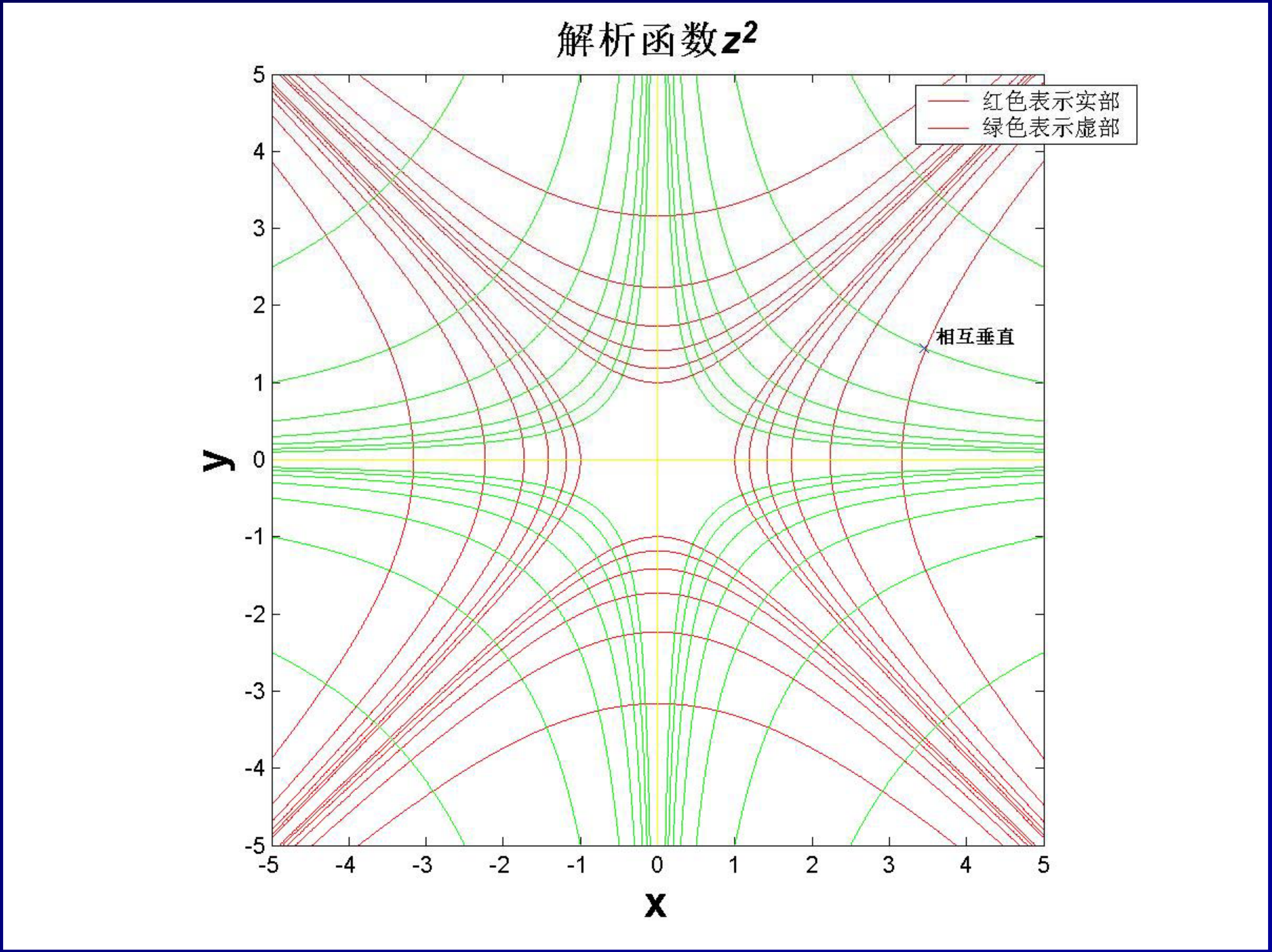
$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$$

则由解析函数的性质，可由一解析函数

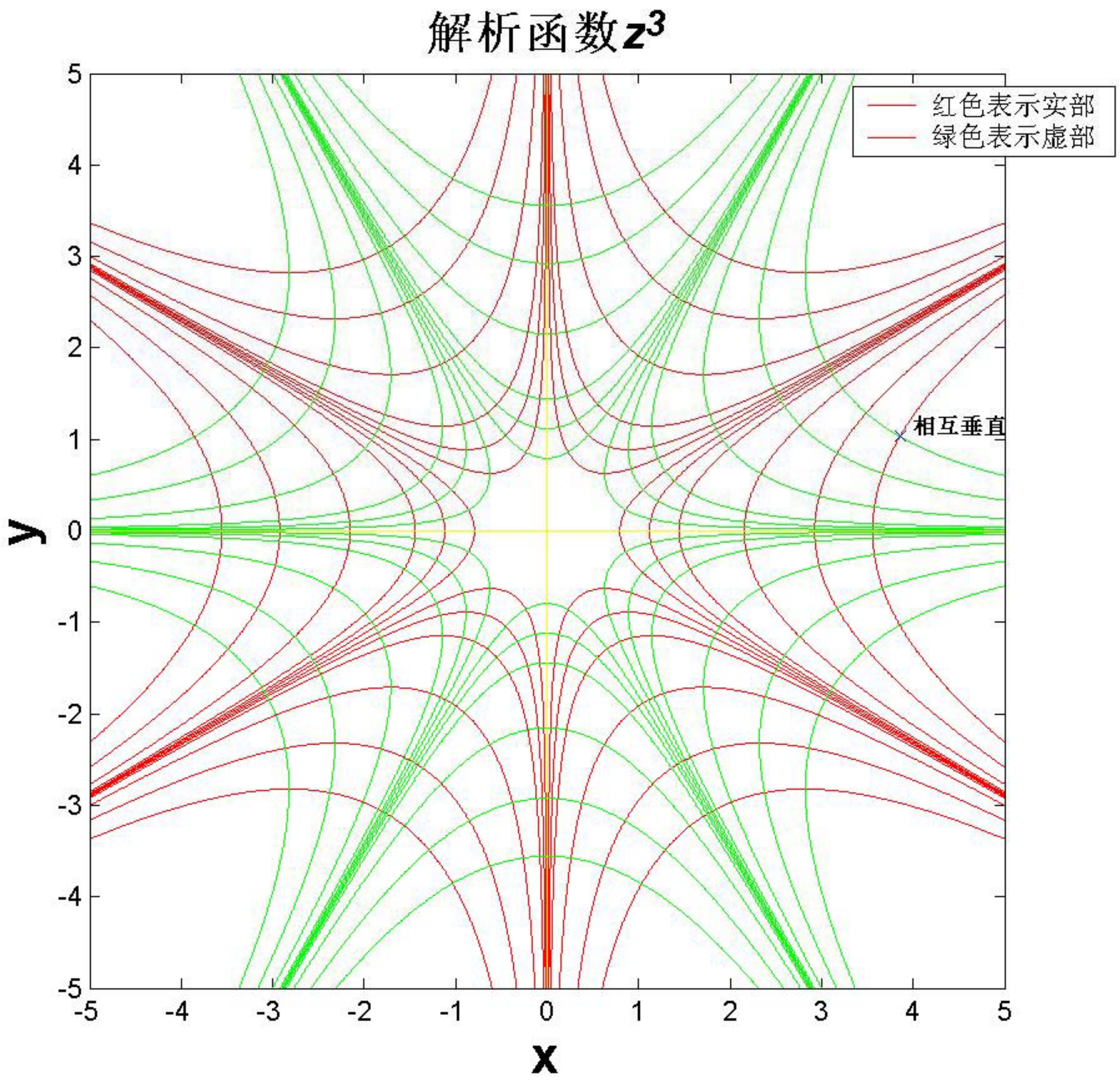
$f(z) = u + iv$ 来描绘该电场称为复势。

解析函数图例


解析函数1/z
红色表示实部
绿色表示虚部
相互垂直
y
x
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1



解析函数z^2
红色表示实部
绿色表示虚部
相互垂直
y
x
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5



解析函数z^3
红色表示实部
绿色表示虚部
相互垂直
x
y

小结

一、微商及微分：

1、微商： $$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}$$

2、微分： $$dw=f'(z)dz$$

3、 求导、微分法则：

4. 可导的必要条件

5. 可导的充分条件：

$$\boxed{\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases}}$$

C-R条件

$$\begin{cases}\text{(1) } \boldsymbol{u_x,u_y;v_x,v_y} \text{ 均连续}\\ \\ \text{(2) } \boldsymbol{u,v} \text{ 满足} \boldsymbol{C-R}\text{条件}\end{cases}$$

小结

$$f'(z)=\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial y}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}\\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial y}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

小结

二、解析函数：

1. 定义：

2. 必要条件：

3. 充分条件：

4、解析函数的部分性质

若 $f(z)=u+iv \quad \in H(\sigma)$

则 （1） $\Delta u=0\,,\Delta v=0$ 且由C-R连系着

（2） $\nabla u\cdot\nabla v=0$

（3） 已知u（或v）均可求出解析函数

Good-by!

习题1.3:

2(2); 4(3);