数学物理方法

Mathematical Methods in Physics

第二章 解析函数积分

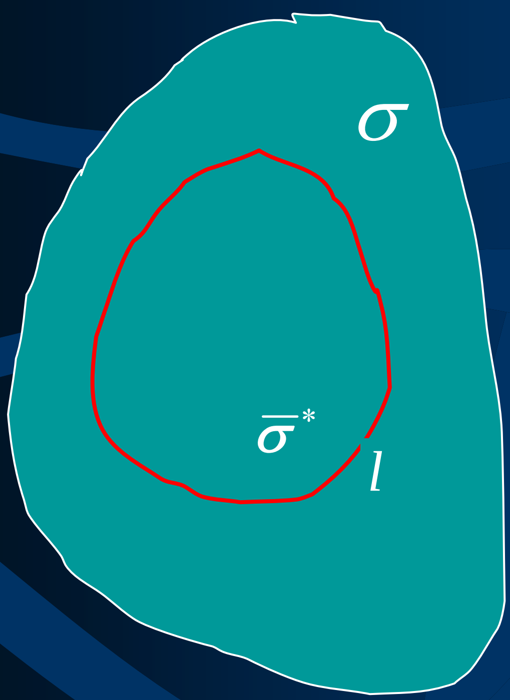
Integrals of Analytic Function

武汉大学

物理科学与技术学院

§2.2 柯西定理
Cauchy Theorem

一、单连通区域的Cauchy定理



设 $f(z)$在单连通区域 σ内解析，l 为 σ 内的任意一条分段光滑的曲线，则

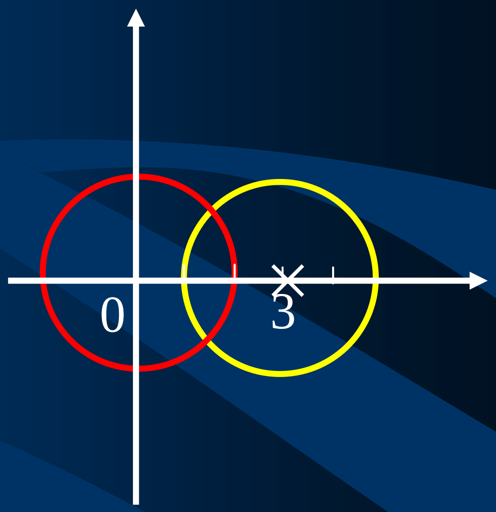
$$\boxed{\oint_l f(z)\,dz = 0}$$

*

注： Cauchy定理被人们称之为解析函数的基本定理

一、单连通区域的Cauchy定理

例1 $\oint_l \frac{dz}{(z-3)} = ?\quad l: 1)\ |z-3| = 2;\ 2)\ |z| = 2$



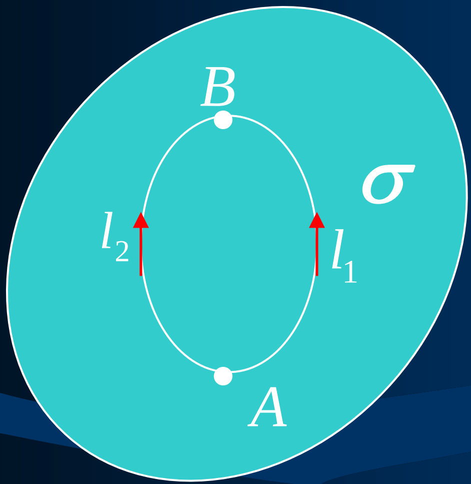
答：1） $2\pi i$ ；2）0

例2 $\oint_{|z-3|=2} \frac{dz}{(z-3)^2} = ?$

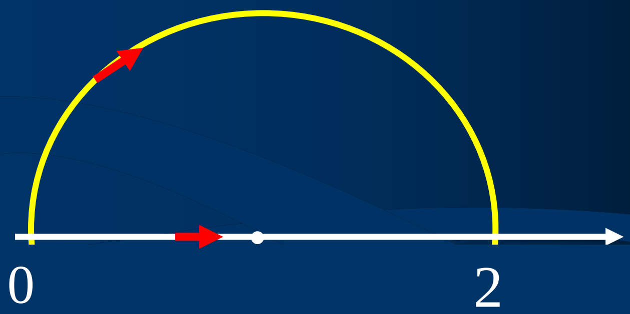
答：0

注：Cauchy逆定理不成立。

二、推论



解析函数的积分之值与路径无关。



例3 计算 $\int_l \sin z\, dz$, $l: |z-1|=1$的上半圆从 $0 \to 2$

答： $1-\cos 2$

（1）柯西定理条件是否可减弱？

（2）复通区域柯西定理是否存在？

三、不定积分和原函数

1、定理： 若 $f(z)$ 在 σ 内解析，则在 σ 内

$$\boxed{F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta}$$

单值、解析且 $F'(z)=f(z)$

证明： (1) $\int_{l_{AB}} f(\zeta)\,d\zeta=\int_A^B f(\zeta)d\zeta$

$$=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta \quad (A=z_0, B=z)$$

$$=F(z) \quad (\text{单值})$$

三、不定积分和原函数

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

证明：

(2) $$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\left[\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta-\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta\right]$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\left[\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta+\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta-\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta\right]$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta \quad (\text{沿} z \to z+\Delta z \text{直线})$$

$$f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\zeta \quad (\text{沿} z \to z+\Delta z \text{直线})$$

三、不定积分和原函数

证明：

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=\left|\frac{1}{\Delta z}\right|\left|\int_z^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]d\zeta\right|$$

$$\le\frac{1}{|\Delta z|}\int_z^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)||d\zeta|$$

$\because f(z)\in H(\sigma)\quad\therefore f(z)$连续

$$\therefore\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ni|\zeta-z|<\delta\to|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$$

$$\therefore\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|<\left|\frac{1}{\Delta z}\right|\varepsilon|\Delta z|=\varepsilon$$

$$\therefore\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z)\quad\to F'(z)=f(z)$$

三、不定积分和原函数

1、**定理：** 若 $f(z)$ 在 σ 内解析，则在 σ 内

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$$

单值、解析且 $F'(z)=f(z)$

思考： 在证明过程中为什么强调 $\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta$ 沿直线？

注意： 上述定理的条件可减弱为

(1) $\oint_l f(z)\,dz=0$；　(2) $f(z)$在σ内连续。

三、不定积分和原函数

2、原函数定义：

若 $\phi'(z)=f(z)$，则称 $\phi(z)$为$f(z)$的原函数。

显然，$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\varsigma$是 $f(z)$的一个原函数。

3、$\phi(z)-F(z)=c$

4、$Newton-Leibniz$公式：

若$f(z)\in H(\sigma)$，则有$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta=\phi(z)-\phi(z_0)$

例4

$$I=\int_0^{2+i} zdz=\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{2+i}=\frac{3}{2}+2i$$

5、对于解析函数，也可采用分部积分，

如，$\int_1^{1+\frac{\pi}{2}i} ze^z\,dz$ 答：$-\frac{\pi}{2}e$

三、不定积分和原函数

例5 已知$u=x^2-y^2-x$为$f(z)\in H(\sigma)$的实部，求$f(z)$.

$$\because\ f(z)\in H(\sigma)\rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial x}=2x-1\\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y\end{cases}$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\ =2x-1+i2y\ =2z-1$$

$$\rightarrow f(z)=\int_{z_0}^{z}(2\zeta-1)d\zeta=z^2-z+c$$

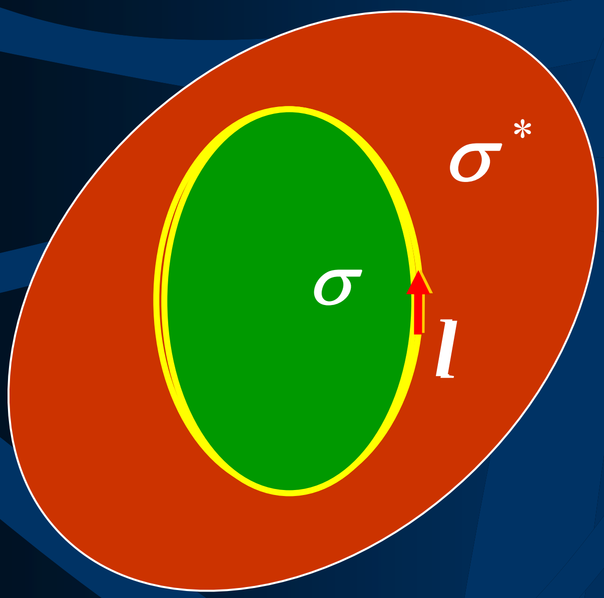
三、不定积分和原函数

柯西定理条件是否可减弱？

柯西定理： 设 $f(z)$在单连通区域σ^*内解析，l 为σ^*内的任意一条分段光滑的曲线，

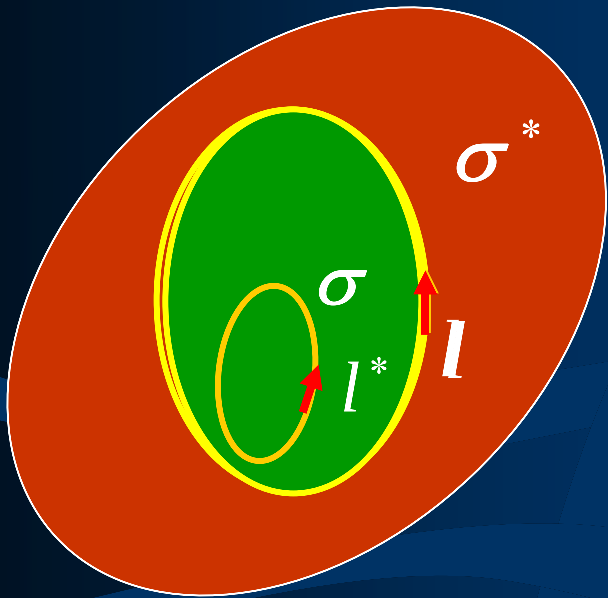
$\Updownarrow$

设 $f(z)$在单连通区域 σ 内及 $\overline{\sigma}=\sigma+l$ 上 均解析，



则 $$\boxed{\oint_l f(z)dz=0}$$

四、推广的柯西定理

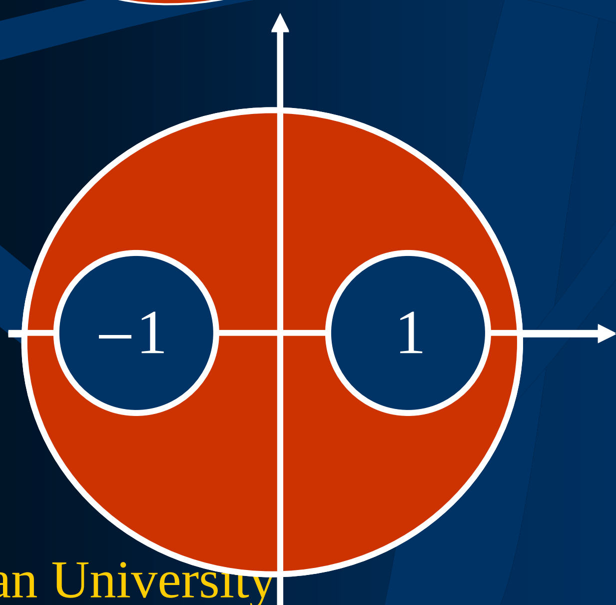


若$f(z)\in H(\sigma)$,在$\overline{\sigma}=\sigma+l$上连续，则

$$\oint_l f(z)dz=0$$

思考：

$$\oint_{|z|=a}\frac{1}{z^2-1}dz=?\,,\ a>2$$

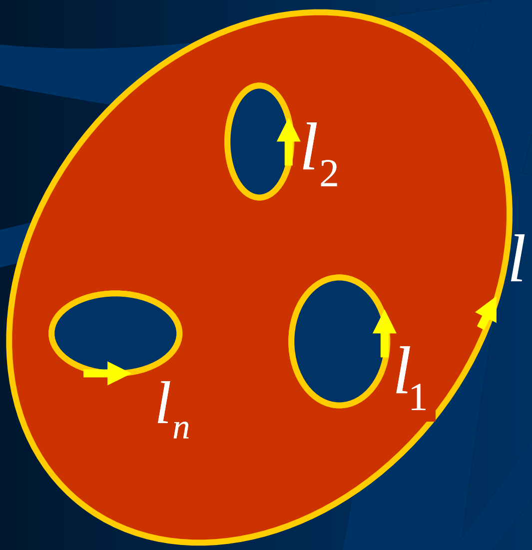


复通区域柯西定理是否存在？

五、复通区域的柯西定理

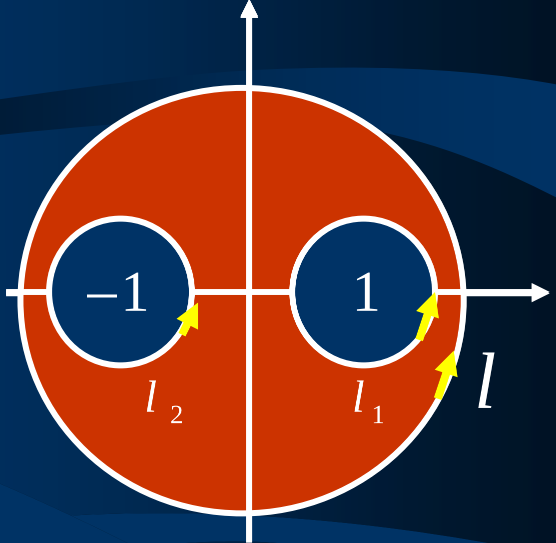
设 $L = l + \sum_{k=1}^{n} l_k$ 为 σ 的复围线, $f(z) \in H(\sigma)$

在 $\overline{\sigma} = \sigma + L$ 上连续, 则



$$\boxed{\oint_{l} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{l_k} f(z)\,dz}$$

五、复通区域的柯西定理

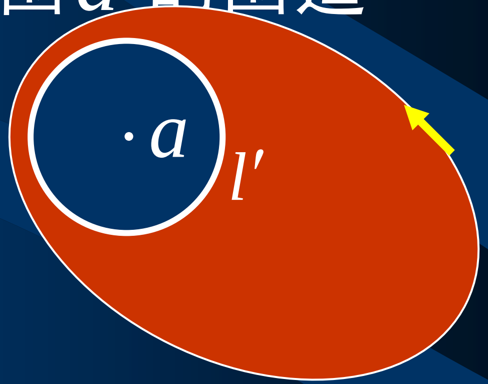


例6 $\displaystyle\oint_{|z|=a}\frac{1}{z^2-1}dz=?\,,\ a>2$

$$\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right]$$

答：**0**

例7 计算 $\displaystyle I=\oint_l\frac{1}{(z-a)^n}dz$;l:包围a 的围道



答：
$$\boxed{\oint_l\frac{dz}{(z-a)^n}=\begin{cases}2\pi i\,,\ n=1\\ 0\,,\ n\neq 1\end{cases}}$$

问：

1）至此，你了解该如何计算复围道积分吗？

2）$\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz=?$

小　结

2.2　$f(z) \in H(\sigma)$:

一、单连通区域的Cauchy定理　$\boxed{\oint_l f(z)dz = 0}$

二、 Cauchy定理推论　$\boxed{\int_{l_1 AB} f(z)dz = \int_{l_2 AB} f(z)dz}$

三、不定积分和原函数

定理:　$\boxed{F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta,\ F'(z) = f(z)}$

原函数定义: $\phi'(z) = f(z)$　$\boxed{\phi(z) - F(z) = c}$

*Newton – Leibniz*公式:　$\boxed{\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = \phi(z) - \phi(z_0)}$

解析函数，也可采用分部积分

小 结

四、推广的柯西定理的

若$f(z)\in H(\sigma)$,在$\overline{\sigma}=\sigma+l$上连续，则

$$\oint_l f(z)dz=0$$

五、复通区域的柯西定理

设$L=l+\sum_{k=1}^{n} l_k$为σ的复围线,$f(z)\in H(\sigma)$

在$\overline{\sigma}=\sigma+L$上连续,则

$$\boxed{\oint_l f(z)\,dz=\sum_{k=1}^{n}\oint_{l_k} f(z)\,dz}$$

习题2.2：1(1)；2（1）