数学物理方法

Mathematical Methods for Physics

第六章　定解问题

Mathematical　Problem

武汉大学

物理科学与技术学院

§6.2 三类数理方程的导出

the derivation of three types of mathematical equations for physics

一、弦的横振动：

1、物理模型：

细长而柔软的弦线，紧绷于A、B两点之间，作振幅极微小的横振动，求其运动规律。

2、分析：

（1）研究的问题：$u(x,t)-$弦的位移

（2）已知：$a.$密度$\rho(x,t)=\rho(t)$，重力$p=0$；

$b.$无抗弯力

$c.$张力T沿切向；

$d.u_x$是小量，$u_x^2\approx 0$

（3）研究方法：微积分思想、任意性。

一、弦的横振动：

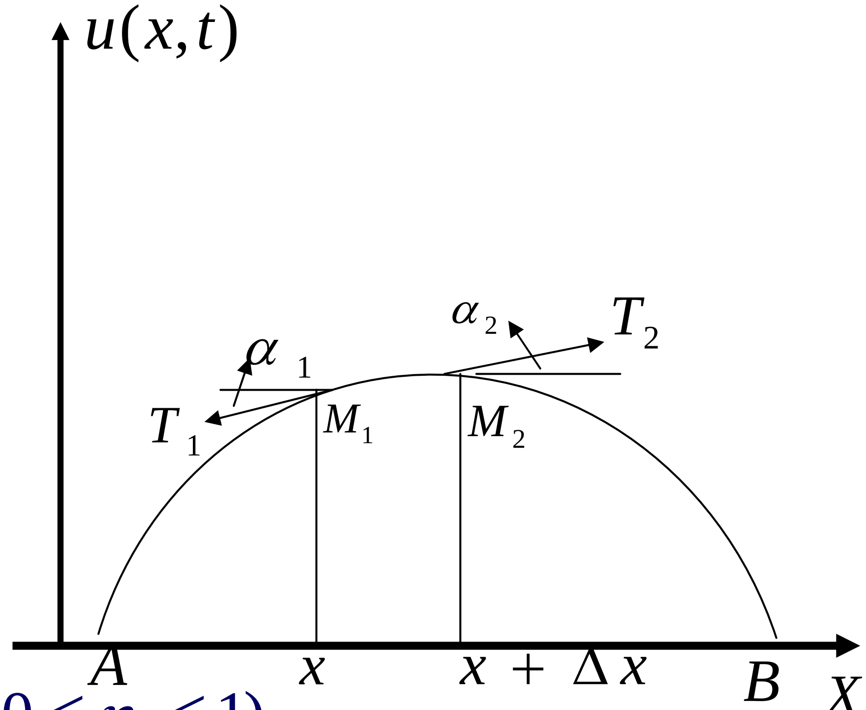
3、建立方程：

(1) 考虑任意段 Δx 受力：

$$x:\begin{cases}-T_1\cos\alpha_1\\ T_2\cos\alpha_2\end{cases}$$

$$y:\begin{cases}-T_1\sin\alpha_1\\ T_2\sin\alpha_2\\ F\ (x+\eta_1\Delta x,t)\cdot\Delta x \qquad (0\le\eta_1\le 1)\end{cases}$$

单位长度所受外力



（2）按牛顿运动定律写出方程

（3）化简整理

一、弦的横振动：

3、建立方程：

（2）按牛顿运动定律写出方程

$$T_2\cos\alpha_2 - T_1\cos\alpha_1 = 0 \qquad (1)$$

$$T_2\sin\alpha_2 - T_1\sin\alpha_1 + F(x+\eta_1\Delta x, t)\Delta x = u_{tt}(x+\eta_2\Delta x, t)\rho\Delta x \qquad (2)$$

（3）化简整理得

$$\boxed{u_{tt} = a^2 u_{xx} + f}$$ —弦的横振动

其中$a^2 = \dfrac{T}{\rho}$，量纲：$\dfrac{g\cdot cm/s^2}{g/cm} = \left(\dfrac{cm}{s}\right)^2$

$f = \dfrac{F}{\rho}$—单位质量所受力（即力密度）

一、弦的横振动：

注意：

（1）f=0称为齐次方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f \qquad \to u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

（2）三维波动方程：$\boxed{u_{tt} = a^2 \Delta u + f}$

（3）建立方程的步骤：A. 从内部划出一小块

B. 由物理规律写出算式

C. 化简整理得方程

附：复习热量的几个概念：

设：$Q-$热量，$S-$面积，$V-$体积，$t-$时间，$\rho-$密度，$T-$温度

则：

（1）比热：

单位物质，温度升高一度所需热量

$$C=\frac{Q}{(\rho V)T}$$

（2）热流密度：

单位时间流过单位面积的热量

$$q=\frac{Q}{tS}$$

（3）富里叶实验定理

$$q=-k\frac{\partial T}{\partial n}$$

$k-$导热率

热流密度与温度的下降率成正比

（4）热源强度：

单位时间，单位体积放出热量

$$F=\frac{Q}{tV}$$

二、热传导方程：

1、物理模型：

截面积为A的均匀细杆，侧面绝热，沿杆长方向有温差，求热量的流动。

2、分析：

（1）研究的问题：$u(x,t)-$温度

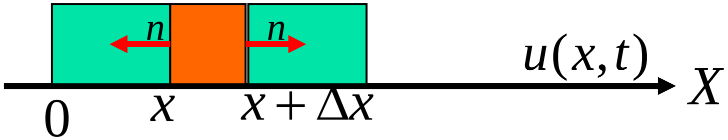
（2）已知：c、ρ、k是常数；

$u=u(x，t)$是一维问题

（3）研究方法：微积分思想、任意性。

二、热传导方程：

3、建立方程：



(1) 考虑任一Δx段在Δt时间热量情况：

流入x面：　$Q_1 = -k\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_x \cdot A\Delta t$

流出$x+\Delta x$面：　$Q_2 = -k\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x} \cdot A\Delta t$

热源产生：　$Q_3 = F\cdot\Delta t$（$A\Delta x$）（设其热源强度为F）

升温所需热量：$Q = C\cdot(\rho A\Delta x)[u(x,t+\Delta t)-u(x,t)]$

（2）根据热量守恒定律：$Q = Q_1 - Q_2 + Q_3$

二、热传导方程：

3、建立方程：

（3）化简整理得 $\boxed{u_t = Du_{xx} + f}$

$$\text{其中 } D = \frac{k}{c\rho},\ f = \frac{F}{c\rho}$$

此即为一维的热传导方程，中子扩散，高频电流分布皆属于此类方程。

三、泊松公式：

1、物理模型：

设在充满了介电常数 ε 的区域中，有体电荷密度为 $\rho(x,y,z)$ 的电荷，求静电场。

2、分析：

（1）研究的问题： $\because \vec{E}=-\nabla V$， $V-$标量势

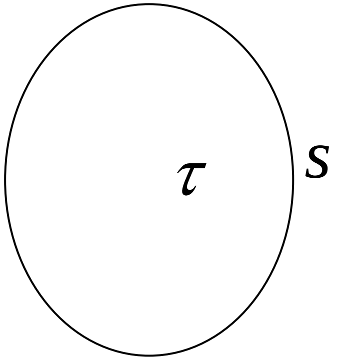
（2）已知： 稳定场

（3）方法：与上面的方法相同

三、泊松公式：

3、建立方程：

（1）考虑封闭曲面S中的情况



（2）由电学中奥-高定理，有：

$$\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{s} = 4\pi\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_\tau \rho d\tau$$

（通过一封闭面的净余电通量，等于该平面内所有电荷的代数和）

（3）化简整理得 $\boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$ $\rightarrow$ *Poisson*方程

若$\rho = 0$，则 $\boxed{\Delta V = 0}$ $\rightarrow$ *Laplace*方程

三、泊松公式：

注意：

在稳定温度场中 $u_t = 0$

$$u_t = D\Delta u + f \quad \rightarrow \quad \Delta u = -\frac{f}{D}$$

本节小结

三类数学物理方程

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f$$

$$u_t=Du_{xx}+f$$

$$\Delta u=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

建立方程的步骤有三步

1、划分出一小块，考虑其与邻近部分的关系；

2、根据物理学规律，表示出此关系；如：牛顿运动定律、能量守恒定律、麦克斯韦方程等。

3、化简、整理，即得数理方程。

本节作业

习题6.2：2，4

Good-by!