

## 变质量问题

1. 雨滴下落时, 其质量的增加率与雨滴的表面积成正比. 求雨滴速度与时间的关系.

(答:  $v = \frac{g}{4\lambda} \left[ a + \lambda t - \frac{a^4}{(a + \lambda t)^3} \right]$ , 式中 $\lambda$ 为在单位时间内雨滴半径的增量,  $a$ 为 $t = 0$ 时雨滴的半径.)

2. 一条柔软、无弹性、质量均匀的绳索, 竖直地自高处下坠至地板上. 如绳索的长度等于 $\ell$ , 每单位长度的质量等于 $\lambda$ . 求当绳索剩在空中的长度等于 $x$  ( $x < \ell$ )时, 绳索的速度及它对地板的压力. 设开始时, 绳索的速度为零, 它的下端离地板的高度为 $h$ .

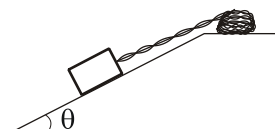
(答:  $v^2 = 2g(h + \ell - x)$ ;  $f = \lambda[2h + 3(\ell - x)]g$ .)

3. 一链静止跨于一光滑圆柱上, 柱轴为水平, 链长为圆柱周长之半. 若轻微扰动, 试证明当长为 $a\theta$ 之一段链滑过圆柱时, 其速度为 $\left\{ \frac{ga}{\pi} [\theta^2 + 2(1 - \cos \theta)] \right\}^{1/2}$ , 此处 $a$ 为圆柱的半径.

4. 一变质量单摆在介质中运动. 摆的质量因质点的离散作用, 按已知规律 $m = m(t)$ 变化, 且质点离散的相对速率为零. 已知摆长 $\ell$ , 单摆受阻力与角速度 $\dot{\varphi}$ 成正比, 即 $f = -\beta \ell \dot{\varphi}$ , 写出此单摆的运动微分方程.

(答:  $\ddot{\varphi} + \frac{\beta}{m(t)} \dot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$ .)

5. 如图所示, 一质量为 $m$ 的物体与单位长度的质量为 $\lambda$ 的软绳相连. 开始时, 物体静置于倾角为 $\theta$ 的光滑斜面的顶端, 而软绳则盘放在斜面顶端边的平台上. 释放物体, 让其沿斜面滑下. 求当它下滑距离 $x$ 时的速度.



## 有心力问题

1. 一个质量为 $m$ 的质点在有心力 $f = -k/r^3$  ( $k$ 为正值常量)作用下运动, 选择总能 $E$ 和角动量 $L$ 的什么值时, 它的轨道有 $r = ae^{b\varphi}$  ( $a, b$ 为常量)形式.

2. 一个质量为 $m$ 的质点在有心力 $f = \frac{mk^2a^4}{r^3}$  ( $k, a$ 均为常量)作用下运动, 开始位于 $r = a, \varphi = \pi$ , 速度的径向分量和横向分量分别为 $-\frac{ka}{\pi}$ 及 $ka$ , 求:

(1) 轨道方程 $r(\varphi)$ ; (2) 运动学方程 $r(t)$ 和 $\varphi(t)$ .

3. 一个质量为 $m$ 的质点束缚在线性势 $V = kr$  ( $k$ 为常量)之中.

(1) 当能量、角动量为多大时, 轨道是一个以原点为圆心、半径为 $R$ 的圆? (2) 圆运动的角速度多大? (3) 如果质点稍微偏离圆轨道, 小振动的角频率多大?

4. 一质点做椭圆轨道运动, 偏心率为 $e$ , 力心在椭圆轨道的一焦点上. 当质点运动到近心点时, 力心突然移到椭圆的另一焦点上. 求证以后椭圆轨道的偏心率为 $\frac{e(3+e)}{1-e}$ , 说明原来 $e$ 值处在什么范围时, 新的轨道将仍是椭圆、变成抛物线和变成双曲线.

5. 证明做椭圆轨道运动的最大与最小速率的乘积为 $\left( \frac{2\pi a}{T} \right)^2$ , 其中 $T$ 是周期,  $a$ 是长半轴.

6. 在光滑水平桌面上, 两个质量分别为 $m$ 和 $m'$ 的质点由一不可伸长的绳联结, 绳穿过固定在水平桌面上的光滑小环, 如图所示. 若 $m$ 与小环相距 $d$ 时获得垂直于绳的初速, 试写出质点 $m$ 的轨道微分方程, 并解出它的运动轨道方程.

