数学物理方法

Mathematical Methods in Physics

武汉大学

物理科学与技术学院

数学物理方法

Methods in Mathematical Physics

第十六章 斯特母刘维尔问题

Problems of Sturm-Liuville equations

武汉大学物理科学与技术学院

问题的引入：

$$(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0 \quad \rightarrow \frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{dy}{dx}]+l(l+1)y=0$$

$$(1-x^2)y''-2xy'+[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}]y=0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{dy}{dx}]-\frac{m^2}{1-x^2}y+l(l+1)y=0$$

$$x^2y''+xy'+[k^2x^2-n^2]y=0 \quad \rightarrow \frac{d}{dx}[(x\frac{dy}{dx}]-\frac{n^2}{x}y+k^2xy=0$$

$$\frac{d}{dx}[k(x)\frac{dy}{dx}]-q(x)y+\lambda\rho(x)y=0, \quad a\le x\le b \quad (1)$$

一、S-L方程

1、定义：

$$\frac{d}{dx}[k(x)\frac{dy}{dx}]-q(x)y+\lambda\rho(x)y=0,\quad a\le x\le b\quad(1)$$ —S-L方程

$$k(x)\ge 0,\ q(x)\ge 0,\ \rho(x)\ge 0,\lambda-\text{常。}$$

2、任意的二阶方程可化为S-L方程

$$y''(x)+p(x)y'(x)+h(x)y(x)=0,\quad(2)$$

$$(2)\cdot[k(x)=e^{\int p(x)dx}]:\frac{d}{dx}[e^{\int p(x)dx}\frac{dy}{dx}]+e^{\int p(x)dx}h(x)y=0\quad(3)$$

例： Hermit方程：$y''-2xy'+\lambda y=0\quad(4)$

$$p(x)=-2x,\ h(x)=\lambda\qquad\rightarrow k(x)=e^{\int -2xdx}=e^{-x^2}$$

$$(4)\rightarrow\frac{d}{dx}[e^{-x^2}y']+\lambda e^{-x^2}y=0$$

一、S-L方程

1、定义：

$$\frac{d}{dx}[k(x)\frac{dy}{dx}]-q(x)y+\lambda\rho(x)y=0,\quad a\le x\le b\ \ (1)$$ —S-L方程

$$k(x)\ge 0,\ q(x)\ge 0,\ \rho(x)\ge 0,\lambda-\text{常。}$$

2、任意的二阶方程可化为S-L方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0 \quad \to \frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{dy}{dx}]+l(l+1)y=0$$

$$(1-x^2)y''-2xy'+[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}]y=0$$

$$\to \frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{dy}{dx}]-\frac{m^2}{1-x^2}y+l(l+1)y=0$$

$$x^2y''+xy'+[k^2x^2-n^2]y=0 \to \frac{d}{dx}[(x\frac{dy}{dx}]-\frac{n^2}{x}y+k^2xy=0$$

二、S-L方程的自然边界条件

1、定义：为满足物理上的适定性，物理问题本身所应具有的边界条件。

例：

$$\begin{cases} \Phi'' + n^2\Phi = 0 \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r^2 + 2rR' - l(l+1)R = 0 \quad r < R \\ R(r)\big|_{r=0} \to \text{有限} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0 \\ y\big|_{|x|=1} \to \text{有限} \end{cases}$$

二、S-L方程的自然边界条件

2、S-L方程在以下情况下具有自然边界条件

S-L方程 $\frac{d}{dx}[k(x)\frac{dy}{dx}]-q(x)y+\lambda\rho(x)y=0,\quad a\le x\le b\quad(1)$

(1) 当$k(a)=0$和或$k(b)=0$时，在边界$x=a,x=b$处，具有有限性自然边界条件(下页）。

例：$(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0\quad\rightarrow\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{dy}{dx}]+l(l+1)y=0$

$x^2y''+xy'+[k^2x^2-n^2]y=0\quad\rightarrow\frac{d}{dx}[x\frac{dy}{dx}]-\frac{n^2}{x}y+k^2xy=0$

(2) 当$k(a)=k(b)$时，在边界$x=a,x=b$处，具有周期性自然边界条件。

例：$\Phi''+n^2\Phi=0\quad\rightarrow\frac{d}{d\varphi}[1\cdot\frac{d\Phi}{d\varphi}]+n^2\Phi=0$

附：证明

$$\frac{d}{dx}[k(x)\frac{dy_1}{dx}]-q(x)y_1+\lambda\rho(x)y_1=0, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx}[k(x)\frac{dy_2}{dx}]-q(x)y_2+\lambda\rho(x)y_2=0, \quad (3)$$

$(3)\cdot y_1-(2)y_2$： $$y_1\frac{d}{dx}[k(x)\frac{dy_2}{dx}]-y_2\frac{d}{dx}[k(x)\frac{dy_1}{dx}]=0,$$

$$\frac{d}{dx}[k(x)(y_1y_2'-y_2y_1')]=0, \qquad \to (y_1y_2'-y_2y_1')]=\frac{c}{k(x)}$$

$$(\frac{y_2}{y_1})'=\frac{y_1y_2'-y_2y_1'}{y_1^2}=\frac{c}{k(x)y_1^2}\neq 0 \quad (\because \frac{y_2}{y_1}\neq C)$$

$$y_2=y_1[\int_{x_0}^{x}\frac{c}{k(x)y_1^2}dx+c_1],$$ 当$k(a)=0,k(b)=0$时，$y_2\to\infty$

$$\boxed{\therefore y_2\big|_{x=a,b}\to \text{有限}}$$

三、S-L本征值问题

1、定义：称

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}[k(x)\dfrac{dy}{dx}]-q(x)y+\lambda\rho(x)y=0, \quad a\le x\le b \ \ (1) \\ [\alpha\dfrac{dy}{dx}+\beta y(x)+\gamma k(x)]_{x=a,b}=0 \end{cases}$$

为S-L本征值问题

2、 S-L本征值问题的性质：

(1) 有无穷多个本征值：$\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n\le\cdots$

无穷多个本征函数：$y_1(x)\ y_2(x)\cdots\ \ y_n(x)\cdots$

例：

$$\begin{cases} \rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)+(k^2\rho^2-n^2)R(\rho)=0 \\ R(a)=0 \end{cases}$$

本征函数：

本征值：$k_m^n=\dfrac{x_m^n}{a}, m=1,2,\cdots$ $\quad R_m(k\rho)=J_n(\dfrac{x_m^n}{a}\rho), m=1,2,\cdots$

三、S-L本征值问题

2、 S-L本征值问题的性质：

(2) $\lambda_m \geq 0,\ m = 1,2,\cdots$ 如： $(k_m^n)^2 \geq 0$

(3) $\int_a^b \rho(x) y_m(x) \bar{y}_n(x) dx = N_n^2 \delta_{mn}$ （见下页）

如： $$\int_0^a \rho J_n(k_m^n \rho) J_n(k_l^n \rho) d\rho = \frac{a^2}{2} J_{n+1}^2(k_l^n a) \delta_{ml}$$

(4) $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m y_m(x)$ $\quad c_m = \frac{1}{N_m^2} \int_a^b \rho(x) f(x) \bar{y}_m(x) dx$

如：$f(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_n(k_m^n \rho)$ $\quad c_m = \dfrac{1}{\frac{a^2}{2} J_{n+1}^2(k_m^n a)} \int_0^a \rho f(\rho) J_n(k_m^n \rho) d\rho$

附：证明性质（3）

$$\frac{d}{dx}[k(x)\frac{dy_m}{dx}]-q(x)y_m+\lambda_m\rho(x)y_m=0, \quad (4)$$

$$\frac{d}{dx}[k(x)\frac{d\bar{y}_n}{dx}]-q(x)\bar{y}_n+\lambda_n\rho(x)\bar{y}_n=0, \quad (5)$$

$$(4)\cdot\bar{y}_n-(5)y_m: \quad (\lambda_m-\lambda_n)\int_a^b\rho(x)y_m\bar{y}_n dx$$

$$=\int_a^b y_m\frac{d}{dx}[k(x)\frac{d\bar{y}_n}{dx}]dx-\int_a^b\bar{y}_n\frac{d}{dx}[k(x)\frac{dy_m}{dx}]dx$$

$$=[k(x)(y_m\bar{y}_n'-\bar{y}_n y_m')]_b^a$$

1) 第一类：$\bar{y}_n(a)=0, y_m(a)=0\rightarrow$ 右边＝0

2) 第二类：$\bar{y}_n'(a)=0, y_m'(a)=0\rightarrow$ 右边＝0

附：证明

$(4)\cdot\bar{y}_n-(5)y_m$：

$$(\lambda_m-\lambda_n)\int_a^b \rho(x)y_m\bar{y}_n dx=[k(x)(y_m\bar{y}_n'-\bar{y}_n y_m')]_b^a$$

3) 第三类：$y_m\bar{y}_n'-\bar{y}_n y_m' = y_m\bar{y}_n'+hy_m\bar{y}_n-hy_m\bar{y}_n-\bar{y}_n y_m'$

$$=y_m(h\bar{y}_n+\bar{y}_n')-\bar{y}_n(y_m'+hy_m) \quad \rightarrow 右边=0$$

4) 当$k(a)=0,k(b)=0$时， $\rightarrow$ 右边=0

$m\neq n$: $\int_a^b \rho(x)y_m\bar{y}_n dx=0$

$m=n$: 令 $m\rightarrow n$ 第一类：$\bar{y}_n(a)=0, y_m(a)\neq 0$

$$\int_a^b \rho(x)y_m\bar{y}_n dx=\int_a^b \rho(x)\left|y_n\right|^2 dx\overset{记}{=}N_n^2$$

四、例题

1.已知$S-L$问题：$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 & (1) \\ X(0)=0, X(l)=0 & (2) \end{cases}$

求： 1）$k(x)=?, k(0)=?, k(l)=?, q(x)=?, \rho(x)=?$

2) $\lambda=?$,本征函数＝?, $N_l=?$,

3）将$f(x)=x\in[0,l]$按上述本征函数展开

解： 1）$k(x)=1, k(0)=k(l)=1,, q(x)=0, \rho(x)=1;$

2) $\lambda=(\frac{n\pi}{l})^2, n=1,2,\cdots; X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}$

$$N_l^2=\int_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{2}\int_0^l[1-\cos\frac{2n\pi x}{l}]dx=\frac{l}{2}$$

四、例题

3) $x=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\frac{n\pi x}{l}$, $\quad c_n=\frac{1}{N_l^2}\int_0^l x\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2l(-1)^{n+1}}{n\pi}$

2.已知 $H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} \qquad (1)$

试证：(1) $e^{2tx-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n \qquad (2)$

(2) $\begin{cases} H_n'(x)=2nH_{n-1}(x) & (3) \\ H_{n+1}(x)-2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0 & (4) \end{cases}$

四、例题

已知 $H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$ (1)

试证：(1) $e^{2tx-t^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{H_n(x)}{n!}t^n$

证明：令 $e^{2tx-t^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x)t^n$， 则

$$a_n(x)=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}e^{2tx-t^2}\Big|_{t=0}=\frac{1}{n!}e^{x^2}\frac{d^n}{dt^n}e^{-(x^2-2tx+t^2)}\Big|_{t=0}$$

$\boxed{\xi=t-x}$

$$=\frac{1}{n!}e^{x^2}\frac{d^n}{d\xi^n}e^{-\xi^2}\Big|_{\xi=-x}=\frac{1}{n!}e^{x^2}\frac{d^n}{d(-x)^n}e^{-x^2}$$

$$\therefore a_n(x)=\frac{H_n(x)}{n!}$$

$$e^{2tx-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n \qquad (2)$$

四、例题

试证：(2) $\begin{cases} H_n'(x)=2nH_{n-1}(x) \\ H_{n+1}(x)-2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0 \end{cases}$

$$\frac{d}{dx}(2):\ 2te^{2tx-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n'(x)}{n!}t^n$$

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n'(x)}{n!}t^n$$

$$t^n:\ 2\frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!}=\frac{H_n'(x)}{n!}$$

$$\boxed{\therefore\ H_n'(x)=2nH_{n-1}(x)}$$

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \qquad (2)$$

四、例题

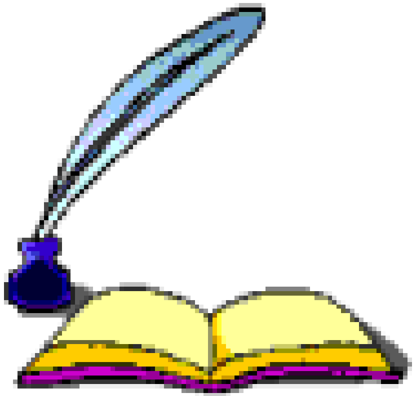
$$\frac{d}{dt}(2):\ 2(x-t)e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{(n-1)!} t^{n-1}$$

$$2(x-t)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{(n-1)!} t^{n-1}$$

$$t^n:\ 2x\frac{H_n(x)}{n!} - 2\frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} = \frac{H_{n+1}(x)}{n!}$$

$$\boxed{2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) - H_{n+1}(x) = 0}$$

本节作业



习题16.1 ：2

再见！