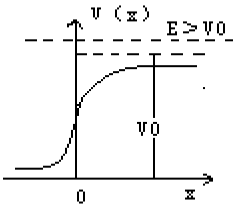
第三章：　一维定态问题

［5］试证明对于任意势垒，粒子的反射系数 R，透射系数 T 满足 R＋T＝1。

（解）任意的势垒是曲线形的，如果 V（x）没有给定，则 Ψ（x）不能决定，因而无法计算各种几率流密度。但如果附图所示 V（x）满足二点特性：



(1) $$\lim_{x\to\infty} V(x) = V_0$$

(2) $$\lim_{x\to-\infty} V(x) = 0$$

我们近似地认为当 $x\to\infty$ 时波函数的解是

$$\Psi(x) = Ce^{ik_2x}\left(k_2 = \sqrt{2m(E-V_0)}/\hbar\right)$$

$x\to-\infty$ 时波函数的解是

$$\Psi(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}\left(k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar\right)$$

但由于粒子几率流的守恒（V（x）是实数函数）：在数量上入射几率流密度 J_A 应等于反射的 J_B 和透射的 J_C 的和，即：

$$|J_A| = |J_B| + |J_C|$$

仿前题的算法，不必重复就可以写出：

$$\frac{\hbar k_1}{m}|A|^2 = \frac{\hbar k_1}{m}|B|^2 + \frac{\hbar k_2}{m}|C|^2$$

这里的（1）（2）是等效的，将（1）遍除 $|J_1|$ 得：

$$1 = \left|\frac{J_B}{J_A}\right| + \left|\frac{J_C}{J_A}\right|$$ 即 $$1 = T + R$$ 得证

将（2）式遍除 $\frac{\hbar k_1}{m}|A|^2$ 得另一种形式：

$$1=\frac{|B|^2}{|A|^2}+\frac{k_2}{k_1}\frac{|C|^2}{|A|^2}$$

#

［6］设在一维无限深势阱中运动的粒子的状态用：

$$\Psi(x)=\frac{4}{\sqrt{a}}\sin\frac{\pi x}{a}\cos^2\frac{\pi x}{a}$$

描述，求粒子能量的可能值及相应的几率。

（解）一维无限深势阱的本征态波函数是

$$\Psi(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

题给波函数可用本征函数展开：

$$\begin{aligned}\Psi(x)&=\frac{2}{\sqrt{a}}\sin\frac{\pi x}{a}\left(1+\cos\frac{2\pi x}{a}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{a}}\left\{2\sin\frac{\pi x}{a}+2\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{2\pi x}{a}\right\}\\&=\frac{1}{\sqrt{a}}\left\{2\sin\frac{\pi x}{a}+\sin\frac{3\pi x}{a}-\sin\frac{\pi x}{a}\right\}\\&=\frac{1}{\sqrt{a}}\left\{\sin\frac{\pi x}{a}+\sin\frac{3\pi x}{a}\right\}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{3\pi x}{a}\\&=C_1\Psi_1(x)+C_2\Psi_3(x)\end{aligned}$$

因此 $\Psi(x)$ 是非本征态，它可以有二种本征态，处在

$$\Psi_1(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}$$

态上的几率是$\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$。这时能量是$E_1=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$，处在$\Psi_3(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{3\pi x}{a}$

态上的几率是$\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$，这时能量是$E_3=\frac{9\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$。

[8] **设粒子处于无限深势阱中，状态用波函数$\psi(x)=Ax(a-x)$描述，$A=\sqrt{\frac{30}{a^5}}$是归一化常数，求（1）粒子取不同能量几率分布。（2）能量平均值及涨落。**

(解)在物理意义上，这是一种能量的非本征态，就是说体系在这种态上时，它的能量是不确定的，薛定谔方程是能量的本征方程，波函数不会满足薛氏方程式。但我们知道势阱中的粒子满足边界条件的解是：

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\qquad (n=1,2,3,\quad \cdots\cdots)$$

这种解是能量本征态，相应的能量$E=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$

按叠加原理非本征态可用本征函数谱展开：

$$（1）\ \psi(x)=\sum c_n\psi_n(x)=\sum_n c_n\cdot\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\qquad（1）$$

$$c_n=\int_0^a\psi(x)\psi_n^*(x)dx=\frac{\sqrt{60}}{a^3}\int_0^a x(a-x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx\qquad（2）$$

利用积分公式：

$$\begin{cases}\int x\sin pxdx=\frac{-x\cos px}{p}+\frac{\sin px}{p^2}\\ \int x^2\sin pxdx=(\frac{2}{p^2}-\frac{x^2}{p})\cos px+\frac{2x}{p^2}\sin px\end{cases}$$

于（2）式，可求得：$c_n=\frac{2\sqrt{60}}{\pi^3n^3}[1-(-1)^n]$　　（3）

此式只有为奇数时才不为0，故只有量子数奇数的态

$$\psi(x)=\frac{1}{\pi^3}\sqrt{\frac{1920}{a}}\{\frac{\sin\frac{\pi x}{a}}{1^3}+\frac{\sin\frac{3\pi x}{a}}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{\sin\frac{(2k-1)\pi x}{a}}{(2k-1)^3}+\cdots\cdots\}\quad（4）$$

仍是归一化的，故粒子具有能级：

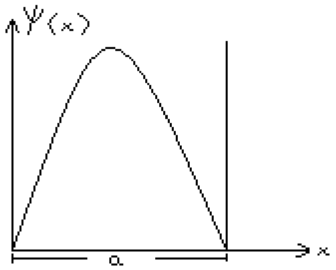
$E_n=\dfrac{n^2\pi^2\hbar}{2ma^2}$ 的几率是

$$c_n^*c_n=(\frac{4\sqrt{60}}{\pi^2n^2})^2=\frac{960}{\pi^6n^6} \qquad （5）$$

（2）能量的平均值可以按照已知几率分布的公式计算:

$$\overline{E}=\sum_n c_n^*c_n\cdot E_n=\sum_n\frac{960}{\pi^6n^6}\cdot\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

$$=\frac{960\hbar^2}{2m\pi^4a^2}\sum_n\frac{1}{n^4} \quad \text{（n 奇数）} \qquad （6）$$



根据傅立叶级数可计算$\sum_n\frac{1}{n^4}$(n 奇) 有几种方法，例如:

$$y(x)=x^2(3\pi-2|x|)=\frac{\pi^3}{2}-\frac{48}{\pi}\sum_n\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^4}$$

$$(-\pi<x<\pi)$$

上式中令 x=0 立刻得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}\cdots\cdots=\frac{\pi^4}{96} \qquad (7)$$

代(6)式得 $\overline{E}=\dfrac{5\hbar^2}{ma^2}$

另一方法是直接依据题给的能量非本征态用积分法求平均值:

$$\overline{E}=\int_0^A\psi^*\hat{H}\psi dx=A^2\int_0^a(ax-x^2)\cdot(-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}(ax-x^2))dx$$

$$=-\frac{30}{a^5}\cdot\frac{\hbar}{2m}\int_0^a-2(ax-x^2)dx=\frac{5\hbar^2}{ma^2}$$

能够这样的原因是是厄米算符.

(3)能量的涨落指能量的不准度 $\delta E=\sqrt{\overline{E^2}-(\overline{E})^2}$ 现需求能量平方的平均值,这可利用前半题结果,既的值来计算.

$$\overline{E^2}=\sum_n c_n^*c_nE_n^2=\sum_n\frac{960}{\pi^6n^6}\cdot\frac{n^4\pi^4\hbar^4}{4m^2a^4}$$

$$=\frac{240\hbar^4}{\pi^2m^2a^4}\sum_{n奇}\frac{1}{n^2}$$

但$\sum_{n奇}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$

关于此求和式$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}$也用福利衰级数

$$y(x)=x=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{l}$$

（展开区间$-\frac{l}{2}<x<\frac{l}{2}$）此式中可取$l=1$,

代入$x=\frac{1}{2}$得$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$

$$\overline{E^2}=\frac{30\hbar^4}{m^2a^4},\quad \delta E=\sqrt{\frac{30\hbar^4}{m^2a^4}-\frac{25\hbar^4}{m^2a^4}}=\frac{\sqrt{5}\hbar^2}{ma^2}$$

[9]一维无限深势阱中求处于$\psi_n(x)$态的粒子的动量分布几率密度$|\varphi(p)|^2$。

（解）因为$\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$是已知的，所以要求动量分布的几率密度，先要求动量波函数，这可利用傅立叶变换的一维公式:

$$\varphi_n(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_0^a\sqrt{\frac{2}{a}}e^{-ipx/\hbar}\sin\frac{n\pi x}{a}dx$$

利用不定积分公式

$$\int e^{ax}\sin pxdx=\frac{a\sin px-p\cos px}{a^2+p^2}e^{ax}$$

用于前一式:

$$\varphi_n(p)=\frac{1}{\sqrt{\pi\hbar a}}\cdot\frac{-\frac{ip}{\hbar}\sin\frac{n\pi x}{a}-\frac{n\pi}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}}{(\frac{n\pi}{a})^2-(\frac{p}{\hbar})^2}e^{ipx/\hbar}\Big|_0^a$$

$$=\frac{2n\sqrt{a\pi\hbar^8}}{a^2p^2-n^2\pi^2\hbar^2}\{\frac{-1+(-1)^n e^{\frac{ipa}{\hbar}}}{2}\}$$

$$=\frac{-2n\sqrt{a\pi\hbar^3}}{a^2p^2-n^2\pi^2\hbar^2}e^{\frac{ipa}{2\hbar}}\cos\frac{pa}{2\hbar} \qquad \text{(n 奇数)}$$

$$=\frac{-2ni\sqrt{a\pi\hbar^2}}{a^2p^2-n^2\pi^2\hbar^2}e^{\frac{ipa}{2\hbar}}\sin\frac{pa}{2\hbar}, \qquad \text{(n 偶数)}$$

动量几率密度分别是

$$\frac{4n^2a\pi\hbar^2}{(a^2p^2-n^2\pi^2\hbar^2)^2}\cos^2\frac{pa}{2\hbar}, \qquad \text{（n 奇数）}$$

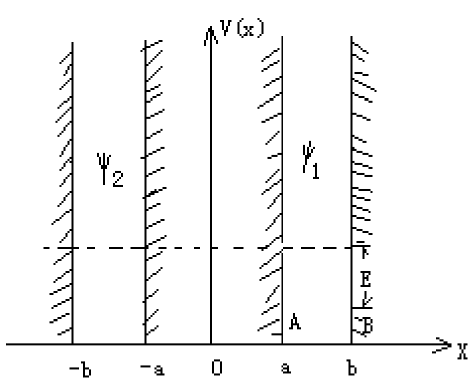
$$\frac{4n^2a\pi\hbar^2}{(a^2p^2-n^2\pi^2\hbar^2)^2}\sin^2\frac{pa}{2\hbar}, \qquad \text{(n 偶数)}$$

#

[11]设粒子处在对称的双方势阱中

$$V(x)=\begin{cases}\infty & |x|>b \\ \mathbf{0} & a<|x|<b \\ V_0 & |x|<a\end{cases}$$

在$V_0\to\infty$情况下求粒子能级，并证明能级是双重简并。（证明V_0取有限值情 况下，简并将消失。）



（解）本题的势场相对于原点 0 来说是对称的，因此波函数具有字称。

设总能量是 E，又设 $k=\sqrt{2mE}/\hbar$ 在区间$(-\infty,-b\ )$ (-a , a) (b， ∞)之中波函数都是零，

在区间(a ,b)，设波函数是：

$$\psi(x)=A\sin(kx+\alpha)=0 \qquad (1)$$

考虑 x=a, x=b 二连续条件：（势阱外面$\psi=0$）

$$\begin{cases}\psi(a)=A\sin(ka+\alpha)=0\\ \psi(b)=A\sin(kb+\alpha)=0\end{cases} \qquad (2)$$

从这里得到，因而得 $ka+\alpha=n\pi$ ，$kb+\alpha=n'\pi$ ，因而得

$\alpha=-ka+n\pi$或$-kb+n'\pi$ ，n，n' 是整数，满足边界条件的解是:

$$\psi_1(x)=A\sin[k(x-a)+n\pi]=\begin{cases}A\sin k(x-a)\\ -A\sin k(x-a)\end{cases}$$

再考虑区间$(-b,-a)$，设波函数：

$$\psi_2(x)=B\sin(kx+\beta) \qquad (5)$$

代入$(x=-a)x=-b$ 在二点的连续条件得

$B\sin(-ka+\beta)=0, B\sin(-kb+\beta)=0$

得：$-ka+\beta=p\pi\ ,-kb+\beta=-p'\pi$,但 p,p' 整数,因此区间$(-b,-a)$的波函数:

$$\psi_2(x)=B\sin[k(x+a)+p\pi]=\begin{cases}B\sin k(x+a) & (6)\\ -B\sin k(x+a) & (7)\end{cases}$$

$\psi_1(x)$ 和 $\psi_2(x)$ 之间要满足奇或偶宇称的要求，才能成为一组合理的解，若令

$\psi_1(-x)=\psi_2(x)$,得 A=B,相应的一组偶宇称解是:

$$\begin{cases}\psi_1(x)=A\sin k(x-a)\\ \end{cases}$$

$$\psi_2(x) = -A\sin k(x+a)$$

同理令 $\psi_1(-x) = -\psi_3(x)$,得到一组奇宇称解是

$$\begin{cases} \psi_1(x) = +A\sin k(x-a) \\ \psi_2(x) = A\sin k(x+a) \end{cases} \quad (9)$$

$\psi_1(x)$ 和 $\psi_2(x)$ 是线性不相关的解,但却有相同的波数 k ,因而也有相同的能级 $E = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$.能级是分立的,这可以从边界条件式 $\psi_1(a) = 0, \psi_2(b) = 0$ 同时满足的要求看到,这两式推得

$$ka + \alpha = n\pi, kb + \alpha = n'\pi$$

相减得 $k(b-a) = (n'-n)\pi = n''\pi$,从中解出 k

n'' 是整数,可作为能级编号.

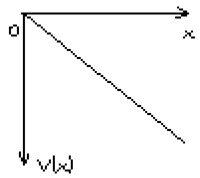
$$k_{n''} = \frac{n''\pi}{b-a}$$

因此能级是

$$E_{n''} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{n''}{b-a}\right)^2$$ 是二度简并的 (n^prime prime,正负均可)

[16]在 p 表象中，求解均匀 V（x）=-Fx 中粒子的能量本征函数。（设 F>0）

(线性势中的游离态)



（解）建立动量表象中的一维薛定谔方程式。根据第二章第 15 题以及本章第 10 题的方法，薛定谔方程式用一维动量 p 作自变量时，形式是：（定态）

$$\left[\frac{p^2}{2m} + V\left(\hbar i\frac{\partial}{\partial p}\right)\right]\varphi(p) = E\varphi(p)$$

在势能这一项上，将 V 看作一个算符，V 中原来含有的 x 应更换成 $\hbar i\dfrac{\partial}{\partial p}$ ，然后将这样

构成的势能算符作用到动能波函数 φ（p）上，因而在本题情形：

$$\frac{p^2}{2m}\varphi（p）-\hbar iF\frac{\partial\varphi}{\partial p}=E\varphi（p）$$

（2）

此式容易分离变量：

$$\hbar iFd\varphi=（\frac{p^2}{2m}-E）\varphi dp$$

$$\frac{d\varphi}{\varphi}=（\frac{p^2}{2m\hbar iF}-\frac{E}{\hbar iF}）dp$$

积分得：

$$\ln\phi=\frac{p^2}{6m\hbar iF}-\frac{Ep}{\hbar iF}+\text{常数}$$

$$\phi_E=Ce^{\frac{p^2}{6m\hbar iF}-\frac{Ep}{\hbar iF}}$$

（3）

积分常数 C 用动量波函数归一化决定：

$$\int_p\phi_E{}^*\phi_{E'}dp=\delta(E-E^{/})$$

（4）

这种计算是所谓“δ 函数归一化”。原因是波函数（3）实际上是平面波包，当 $p\to\pm\infty$ 时

φ（p）不趋近于 0，所以（3）实际上是不能归一化的，而只能令几率积分等于 δ，这样

$$\int\varphi^*(p，E)\cdot\varphi（p，E^{/}）dp=C^*C\int_p e^{\frac{p}{\hbar iF}(E-E^{/})}dp$$

$$= C^* C\ (2\pi\hbar F) \cdot \frac{1}{2\pi} \int e^{i\frac{p}{\hbar F}(E' - E)} \cdot \frac{dp}{\hbar F}$$

$$= C^* C\ (2\pi\hbar F)\ \delta\ (E - E')$$

因而 $$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar F}}$$

本题可参看 Davydov: Quantum Mechanics （1965）

---

[17]粒子处在δ势阱$V(x) = -V_0\delta(x)$ （V_0>0）中，用动量表象中的薛定谔方程式，求解其束缚态的能量本征值及其相应的本征函数。

（解）（甲法）：

薛定谔方程式的确定，与第二章习题 15、本章习题 10 的方法类似，但是不能简单地用

$$V(x) = V\left(\hbar i \frac{\partial}{\partial p}\right)$$

来得到结果，因为本题的情形

$$V(x) = -V_0\delta(x) = -V_0\delta\left(\hbar i \frac{\partial}{\partial p}\right)$$

这种算符运用不便，可以用第二章 15 题方法；写下坐标表象薛氏方程式（定态）：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V(x)\ \Psi = E\Psi$$

遍乘以 $\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar}$ ，再对坐标积分：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_x e^{-ipx/\hbar}\frac{d^2\Psi}{dx^2}dx + \int_x \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar} V(x)\ \Psi(x)\ dx$$

$$= \frac{E}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_x e^{-ipx/\hbar}\Psi(x)\ dx$$

等号左方第二项被积函数中的$\Psi(x)$再用傅立叶变换使成为p的积分。左方第一项和右方

一项按逆变换变成动量波函数的项：

$$\frac{p^2}{2m}\varphi(p)+\int_x \frac{1}{2\pi\hbar}e^{-ipx/\hbar}\int_{p'} e^{ip'x/\hbar}\varphi(p')dp'dx\cdot V(x)=E\varphi(p)$$

即

$$\frac{p^2}{2m}\varphi(p)+\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{p'}[\int_x e^{i(p'-p)x/\hbar}V(x)\,dx]\varphi(p')\,dp'=E\varphi(p)$$

利用δ函数的变换性质 $\int_x f(x)\delta(x-x')\,dx=f(x)$，有

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{i(p'-p)x/\hbar}V(x)\,dx=-V_0\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{i(p'-p)x/\hbar}\delta(x)\,dx$$

$$=-V_0e^{i(p'-p)*0/\hbar}=-V_0$$

不能把势能通过傅立叶变换，变成动量空间的势能算符：

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{ipx}V(x)\,dx=-V_0\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{ipx}\delta(x)\,dx$$

$$=-V_0e^{ip*0}=-V_0$$

前 式 中 扩 号 左 方 的 积 分 $= -\frac{V_0}{2\pi\hbar}\int\limits_{p'=-\infty}^{\infty}\varphi（p'）dp' = 常数A$

（4）

动 量 表 象 的 薛 氏 方 程 式 成 为 ： $\frac{p^2}{2m}\phi(p) + A = E\phi(\mathrm{p})$

（5）

不 需 积 分 就 得 到 动 量 表 象 的 波 函 数 ： $\varphi（p）= \frac{2mA}{2mE - p^2}$

（6）

首先确定能量的本征值E（即允许的值），在本题中因为没有寻常的势阱问题中的边界条件可以利用，这只能依靠积分式（4）来解决，将式（6）代入（4），得：

$$-\frac{V_0}{2\pi\hbar}\int\limits_{p=-\infty}^{\infty}\frac{2mA}{2mE - p^2}dp = A$$

（6）

消去A，并注意到在束缚态情形$E<0$，可令$-E = E' > 0$，前一式成为：

$$\frac{mV_0}{\pi\hbar}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{2mE' + p^2} = \frac{mV_0}{\pi\hbar}\cdot\frac{1}{\sqrt{2mE'}}\cdot tg^{-1}\frac{p}{\sqrt{2mE'}}\Bigg|_{p=-\infty}^{p=\infty}$$

$$= \frac{m}{\sqrt{2E'}}\cdot\frac{V_0}{\pi\hbar}\cdot\pi = 1$$

即 $E' = \frac{mV_0^2}{2\hbar^2}$，$E = -\frac{mV_0^2}{2\hbar^2}$ （7）

常数A可以将波函数（5）通过归一化计算来定

$$\int\limits_p \varphi^2(p)\ dp = 1 \qquad\qquad (2mA)^2\int\limits_p\frac{dp}{(2mE' + p^2)^2} = 1$$

（8）

利用不定积分公式

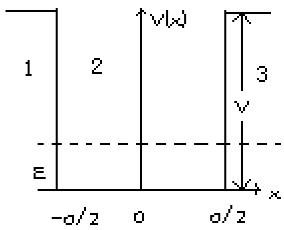
$$\int\limits_p\frac{dp}{(a^2 + p^2)^2} = \frac{1}{2a^2}[\frac{p}{a^2 + p^2} + \frac{1}{a}tg^{-1}\frac{p}{a}]$$

从（8）式求得：

$$A=(\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}}(2mE^{/})^{\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}\cdot(\frac{mV_0}{\hbar})^3}$$

（9）

[18]设粒子在一维无限高势垒中运动，试求作用在势垒壁上的平均力。



（解）与经典力学中的力相对应，量子力学力是一个算符用$-\nabla V$（$\bar{r}$）（三维）或$-\frac{\partial}{\partial x}V$（$x$）表示，在某位置$\bar{r}$上的力由该点单值决定，它的平均值指空间所有范围内的平均值（假定空间各点上受力）

$$\bar{F}=-\iiint_{\tau}\Psi^*(\bar{r}, t)\nabla V(r)\Psi(\bar{r}, t)d^2r$$

或 $$F=-\int_x\Psi^*(x, t)\frac{\partial V}{\partial x}\Psi(x, t)dx$$

在如图示的对称有限深势垒的情形，因为势垒内部势能无变化，外部也无变化，故只有这势能突变点（$-\frac{a}{2}$）（$\frac{a}{2}$）处受力，该两点的力为无限大：

$$\frac{\Delta V}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{V_0-0}{\Delta x}\to\infty$$

此外，又发现在包括$-\frac{a}{2}$（或$\frac{a}{2}$）点在内的小范围中力的积分是有限值：

$$\int_{\frac{a}{2}-\tau}^{\frac{a}{2}+\tau}Fdx=\int_{\frac{a}{2}-\tau}^{\frac{a}{2}+\tau}-\frac{\partial V}{\partial x}dx=-V_0$$

而 $$\frac{1}{V_0}\int_{+\frac{a}{2}-\tau}^{\frac{a}{2}+\tau}-\frac{\partial V}{\partial x}dx=1$$

因此在该二点上的力满足δ函数的三个主要性质，所以每一点上的力表示为一个δ函数

$$\hat{F}(x)=V_0\delta(x-\frac{a}{2})-V_0\delta(x+\frac{a}{2}) \qquad (1)$$

可以分别计算一壁的平均力，在$x=\frac{a}{2}$处的平均力：

$$\overline{F}=\int_{x=\frac{a}{2}-\tau}^{\frac{a}{2}+\tau}\Psi^{*}(x)\ V_{0}\delta(x-\frac{a}{2})\ \Psi(x) \qquad (2)$$

这里Ψ（x）是归一化的一维有限深度（V_0）势垒中粒子的波函数。象附图那样取坐标，并

设 $k=\sqrt{2mE}/\hbar \qquad k'=\sqrt{2m(V_0-E)}/\hbar$

并注意Ψ（x）具有奇或偶的宇称。

（1） 奇宇称：可设Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三个区间的波函数依次是：

$$Ae^{k'x},\quad B\sin kx,\quad Ae^{-k'x}$$

在点 $x=\frac{a}{2}$ 处的连续条件是

$$B\sin\frac{ka}{2}=Ae^{-\frac{k'a}{2}},\quad B=e^{-\frac{k'a}{2}}A/\sin\frac{ka}{2}$$

写出归一化条件：

$$A^2\{\int_{-\infty}^{\frac{a}{2}}e^{2k'x}dx+\frac{e^{-k'a}}{\sin^2\frac{ka}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\sin^2 kxdx+\int_{\frac{a}{2}}^{\infty}e^{-2k'x}dx\}=1$$

得 $$A^2=\frac{e^{k'a}}{\frac{a}{2}cse^2\frac{ka}{2}+\frac{1}{k'}-\frac{1}{k}ctg\frac{ka}{2}}$$

$$B^2=\frac{1}{\frac{a}{2}+\frac{1}{k'}\sin^2\frac{ka}{2}-\frac{1}{k}\sin\frac{ka}{2}\cos\frac{ka}{2}} \qquad (4)$$

现在根据这个结果代入平均力公式（2），就求得 $x=\frac{a}{2}$ 壁上的平均力，至于式中的波

函数Ψ（x），则用 $B\sin kx$ 或 $Ae^{-k'x}$ 都是等效的，我们有：

$$\overline{F}=V_0B^2\int_{\frac{a}{2}-\tau}^{\frac{a}{2}+\tau}\sin^2 kx\cdot\delta（x-\frac{a}{2}）dx=V_0B^2\sin^2\frac{ka}{2}$$

$$=\frac{V_0}{\frac{a}{2}cse^2\frac{ka}{2}+\frac{1}{k'}-\frac{1}{k}ctg\frac{ka}{2}}$$

（5）

(2)偶宇称：在有限深势阱的情形，在 $x<-\frac{a}{2},-\frac{a}{2}<x<\frac{a}{2}$， $x>\frac{a}{2}$ 三个区间中的波函数是：

$$Ae^{+k'x}，B\cos kx，Ae^{-k'x}$$

在 $x=\frac{a}{2}$ 处的波函数连续条件：

$$B\cos\frac{ka}{2}=Ae^{-k'a/2} \quad （8）$$

归一化条件：

$$A^2\{\int_{-\infty}^{-\frac{a}{2}}e^{2k'x}dx+\frac{e^{-2k'a}}{\cos^2\frac{ka}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\cos^2 kxdx+\int_{\frac{a}{2}}^{\infty}e^{-2k'x}dx\}=1$$

$$A^2=\frac{e^{k'a}}{\frac{a}{2}\sec^2\frac{ka}{2}+\frac{1}{k'}+\frac{1}{k}tg\frac{ka}{2}}$$

$$B^2=\frac{1}{\frac{a}{2}+\frac{1}{k'}\cos^2\frac{ka}{2}+\frac{1}{k}\sin\frac{ka}{2}\cos\frac{ka}{2}} \quad （9）$$

又根据 $x=\frac{a}{2}$ 点上波函数及其一阶导数的连续条件，得能量量子化条件 $k'=ktg\frac{ka}{2}$ 。平均力： $\overline{F}=V_0B^2\int_{a-\frac{\tau}{2}}^{a+\frac{\tau}{2}}\cos^2 kx\delta（x-\frac{a}{2}）dx=V_0B^2\cos^2\frac{ka}{2}$ ，代入 B 的结果，得：

$$=\frac{V_0}{\frac{a}{2}\sec^2\frac{ka}{2}+\frac{1}{k'}+\frac{1}{k}tg\frac{ka}{2}}=\frac{V_0}{\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{k'}\right)\left(1+\frac{k'^2}{k^2}\right)}$$

$$=\frac{E}{\frac{a}{2}+\frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0-E)}}}$$

这个结果同于（7）。

当$V_0\to\infty$时，亦得到$\overline{F}=\frac{2E}{a}$

对于$x=-\frac{a}{2}$的势垒壁上，由于对称性，力的平均值是相同的。