数学物理方法

Methods of Mathematical Physics

第七章　行波法

travelling wave method

武 汉 大 学

物理科学与技术学院

问题的引入：

一无限长的均匀弦，因受其力密度为 bxt 的外力作用作振幅极其微小的横振动。若弦的初位移为0, 初速度为 $(l-x)$，试求该弦的振动规律。

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + bxt, \ -\infty < x < \infty \\ u\big|_{t=0} = 0, u_t\big|_{t=0} = l - x \end{cases} \qquad u(x,t) = ?$$

§ 7.2 纯强迫振动

Pure forced viberation

一、定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) & (1) \\ u|_{t=0} = 0 & (2) \\ u_t|_{t=0} = 0 & (3) \end{cases}$$

二、求解

1、思路：

化有源问题为无源问题，利用达朗贝尔公式求解。

附：叠加原理

1、**定义：** 在物理学中研究问题时，常将几种不同原因综合所产生的效果，用这些不同原因单独产生的效果的累加来代替，这就是叠加原理。

2、**在数学上：** 叠加原理对应于线性方程或线性定解条件。

设 L 为线性微分算符，则

$$\boxed{Lu = f}$$

表示线性方程或线性定解条件。

附：叠加原理

(1) 若 $Lu_i = f_i (i=1,2,\cdots,n)$，且 $u=\sum_{i=1}^{n} c_i u_i$，

则 $\boxed{Lu=\sum_{i=1}^{n} c_i f_i}$

(2) 若 $Lu_i = f_i (i=1,2,\cdots,n)$，且 $u=\sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i$ 一致收敛，

则 $\boxed{Lu=\sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i}$

(3) 若 $Lu = f(M,M_0)$，且 $U=\int u(M,M_0)dM_0$ 一致收敛，

则 $\boxed{LU=\int f(M,M_0)dM_0}$

二、求解

2、分析源 $f(x,t)$的作用性

瞬时力

瞬时力引起的振动

(1) $f(x,t)=\sum f(x,\tau),\ 0<\tau<t$

$$u(x,t)=\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{\tau=0}^{t} w(x,t;\tau)$$

(2) $f(x,\tau)$在$\Delta\tau$时间间隔内引起的振动为

$$\begin{cases} w_{tt}-a^2 w_{xx}=0 & \tau<t<\tau+\Delta\tau \\ w|_{t=\tau}=0 \\ w_t|_{t=\tau}=f(x,\tau)\Delta\tau \end{cases}$$

二、求解

2、分析源 $f(x,t)$的作用情况

设：$w(x,t;\tau)=v(x,t;\tau)\Delta\tau$

$$\begin{cases} w_{tt}-a^2w_{xx}=0 \\ w|_{t=\tau}=0 \\ w_t|_{t=\tau}=f(x,\tau)\Delta\tau \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=0 & (4) \\ v|_{t=\tau}=0 & (5) \\ v_t|_{t=\tau}=f(x,\tau) & (6) \end{cases}$$

$$(3)\ u(x,t)=\int_0^t v(x,t;\tau)d\tau$$

3、纯强迫振动的解：

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\alpha,\tau)d\alpha d\tau}$$

三、例题

求解初值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

解：

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \alpha d\alpha d\tau$$

$$= \frac{1}{2}xt^2$$

四、小结

1、对于纯强迫振动：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) & (1) \\ u|_{t=0} = 0 & (2) \\ u_t|_{t=0} = 0 & (3) \end{cases}$$

（1）先将有源问题按冲量原理化为无源问题；

（2）再利用迭加原理和达氏公式求解。

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0 \\ v|_{t=\tau} = 0 \\ v_t|_{t=\tau} = f(x,\tau) \end{cases}$$

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t;\tau)\,d\tau$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\alpha,\tau)\,d\alpha\,d\tau}$$

四、小结

2、对于一般强迫振动：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

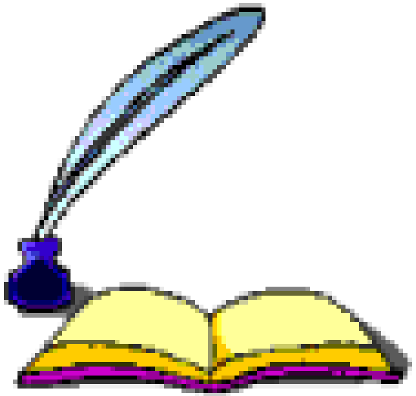
令 $u = u^I + u^{II}$， 使：

$$u^I : \begin{cases} u^I_{tt} - a^2 u^I_{xx} = 0 \\ u^I|_{t=0} = \varphi(x) \\ u^I_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

$$u^{II} : \begin{cases} u^{II}_{tt} - a^2 u^{II}_{xx} = f(x,t) \\ u^{II}|_{t=0} = 0 \\ u^{II}_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u = &\frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] \\ &+ \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)d\alpha \\ &+ \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\alpha,\tau)d\alpha d\tau \end{aligned}}$$

本节作业



习题 7.2：1（4）；

Good-by!