2016-09-02

普通物理A：力学

数学预备知识B 矢量分析初步

本部分内容可参阅

❍梁绍荣、管靖，《基础物理学》“第二章 矢量”，高等教育出版社，2002年8月第1版

❍赵凯华、罗蔚茵，《新概念物理教程 力学》“ 附录B 矢量”，高等教育出版社，2004年7月第2版

2016年秋季学期 东北师范大学

B.1 标量与矢量

❍**标量** 有大小，**加法满足代数运算**的量

如：$m, l, t, \rho, E, T, I, \varepsilon\cdots$

❍**矢量** 有**大小**，有**方向**，**加法满足平行四边形法则**的量

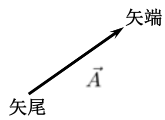
如： $\Delta\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}, \vec{p}, \vec{L}, \vec{M}, \vec{E}, \vec{B}\cdots$

❍**矢量的表示**

❍作图表示：有向线段

❍书写：$\vec{A}$ （字母加箭头）

❍印刷：$\boldsymbol{A}$ （黑体字）



B.1 标量与矢量

❍**模：矢量的大小**

$$|\vec{A}| = A$$

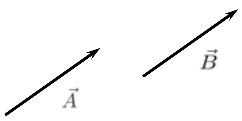
❍**单位矢量：大小为1的矢量，**常用来表示矢量的方向

e_A 或 $\hat{\vec{A}}$ 表示方向与矢量$\vec{A}$ 同向的单位矢量

❍**零矢量：大小为0的矢量**

❍**矢量相等：大小相等，方向相同**

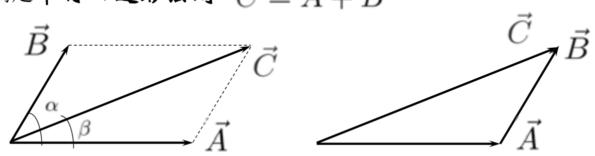
$$\vec{A} = \vec{B}$$



B.2 矢量的加减法

❍**矢量的加法**

满足**平行四边形法则** $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

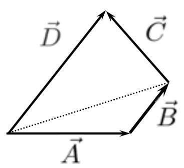


大小：$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\alpha}$

方向：$\tan\beta = \dfrac{B\sin\alpha}{A + B\cos\alpha}$

B.2 矢量的加减法

推广：多个矢量相加满足多边形法则



$$\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

运算规则

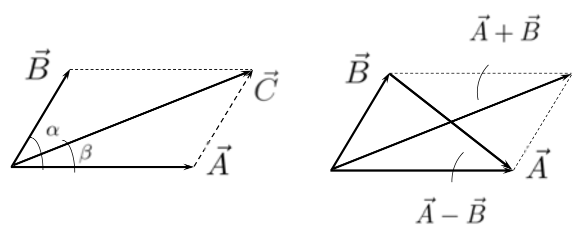
交换律： $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

结合律： $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$

B.2 矢量的加减法

❍**矢量的减法** 矢量加法的**逆运算**

若 $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$，则 $\vec{B} = \vec{C} - \vec{A}$



B.3 矢量的数乘

❍**数乘**

矢量与一标量（实数）相乘 $\Longrightarrow$ 矢量

$$\vec{C}=\lambda\vec{A}\begin{cases}\text{模：}|\lambda\vec{A}|=|\lambda|\,|\vec{A}|\\ \text{方向：}\begin{cases}\lambda>0,\ \text{与}\vec{A}\text{同向}\\ \lambda=0,\ \text{零矢量}\\ \lambda<0,\ \text{与}\vec{A}\text{反向}\end{cases}\end{cases}$$

B.3 矢量的数乘

运算规则

分配律： $\lambda(\vec{A}+\vec{B})=\lambda\vec{A}+\lambda\vec{B}$

$(\lambda+\mu)\vec{A}=\lambda\vec{A}+\mu\vec{A}$

交换律： $\lambda(\mu\vec{A})=\mu(\lambda\vec{A})=(\lambda\mu)\vec{A}$

单位矢量

$$\vec{\mathrm{e}}_A=\frac{\vec{A}}{A}\ \Longrightarrow\ \vec{A}=A\vec{\mathrm{e}}_A$$

矢量的减法 $\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$

B.4 矢量的正交分解

❍**矢量的分解**

根据**平行四边形法则**，矢量合成的结果是唯一的，但一般情况下矢量的分解不是唯一的

❍**正交分解**

限定分矢量均沿给定正交坐标系的单位矢量方向

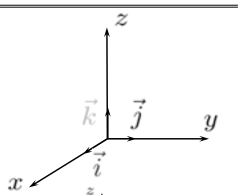
同一矢量在不同的坐标系中的分解是不同的，但是在一固定坐标系中的**分解是唯一的**

B.4 矢量的正交分解

❍**矢量在直角坐标系中的正交分解**

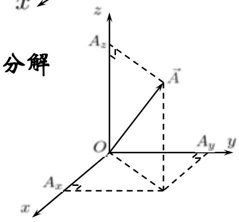
❍**直角坐标系**

对于固定不动的直角坐标系 $O-xyz$，单位矢量 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ 是大小方向不变的常矢量.



❍**任意矢量在直角坐标系中的正交分解**

$$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$$



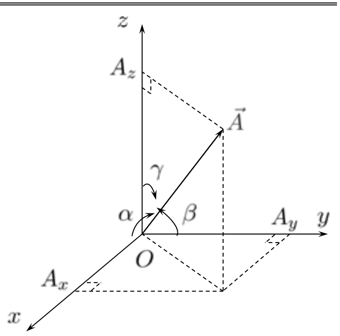
B.4 矢量的正交分解

$$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$$

大小 $A=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$

方向 由方位角 α,β,γ 决定

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{A_x}{A}\\ \cos\beta&=\frac{A_y}{A}\\ \cos\gamma&=\frac{A_z}{A}\end{aligned}\right\}\text{方向余弦}$$



$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

B.4 矢量的正交分解

利用矢量的正交分解式进行矢量的加减运算

$$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}\qquad \vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}$$

$$\begin{aligned}\vec{C}&=\vec{A}\pm\vec{B}\\ &=(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k})\pm(B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k})\\ &=(A_x\pm B_x)\vec{i}+(A_y\pm B_y)\vec{j}+(A_z\pm B_z)\vec{k}\\ &=C_x\vec{i}+C_y\vec{j}+C_z\vec{k}\end{aligned}$$

由正交分解的唯一性可知 $C_\alpha=A_\alpha\pm B_\alpha\quad(\alpha=x,\,y,\,z)$

B.4 矢量的正交分解

❍ **矢量在平面极坐标系中的正交分解**

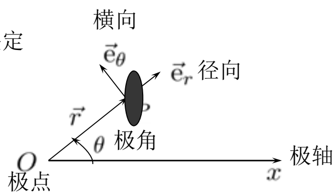
❍ **平面极坐标系**

平面上一点的位置由 r 和 θ 决定

径向单位矢量 $\vec{e}_r$

横向单位矢量 $\vec{e}_\theta$

$\vec{e}_r \perp \vec{e}_\theta$ 正交坐标系



单位矢量只是 θ 的函数，即

$$\vec{e}_r = \vec{e}_r(\theta),\ \vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta(\theta)$$

B.4 矢量的正交分解

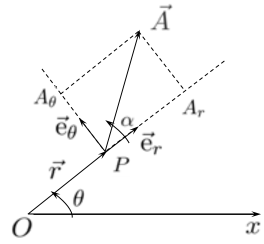
❍ **任意矢量在平面极坐标系中的正交分解**

$$\vec{A} = A_r\vec{e}_r + A_\theta\vec{e}_\theta$$

$A_r(A_\theta)$ 为径向(横向)投影或分量

大小 $A = \sqrt{A_r^2 + A_\theta^2}$

方向 由方位角 α 决定 $\cos\alpha = \dfrac{A_r}{A}$



同一矢量矢尾对应不同点时分解结果不同

B.4 矢量的正交分解

利用矢量的正交分解式进行矢量的加减运算

$$\vec{A} = A_r\vec{e}_r + A_\theta\vec{e}_\theta \quad \vec{B} = B_r\vec{e}_r + B_\theta\vec{e}_\theta$$

为两个对应相同 $P(r,\theta)$ 点的矢量，则

$$\vec{C} = \vec{A} \pm \vec{B} = (A_r\vec{e}_r + A_\theta\vec{e}_\theta) \pm (B_r\vec{e}_r + B_\theta\vec{e}_\theta)$$

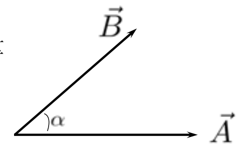
$$= (A_r \pm B_r)\vec{e}_r + (A_\theta \pm B_\theta)\vec{e}_\theta$$

由正交分解的唯一性可知 $C_\alpha = A_\alpha \pm B_\alpha \quad (\alpha = r,\ \theta)$

B.5 矢量的标积（点乘）

❍ **矢量的标积**

两矢量的标积是一个标量，它等于两矢量的模与二者夹角余弦的乘积，记作



$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\alpha$$

如：

力的功：$\delta A = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$

电动势：$\mathrm{d}\varepsilon = \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

矢量的标积是可正可负的标量，其正负取决于二者之间的夹角

B.5 矢量的标积（点乘）

运算规则

交换律：$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$

分配律：$(\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{C} = \vec{A}\cdot\vec{C} + \vec{B}\cdot\vec{C}$

结合律：$\lambda(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\lambda\vec{A})\cdot\vec{B} = \vec{A}\cdot(\lambda\vec{B})$

一些结论

❍矢量 $\vec{A}$ 沿任意方向的投影即为 $\vec{A}$ 与该方向单位矢量的标积

$$\vec{A}\cdot\vec{e}_\alpha = A_\alpha \quad (\alpha = x,\ y,\ z\ldots)$$

❍矢量与自身的标积等于其模的平方 $\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2$

B.5 矢量的标积（点乘）

❍矢量与自身的标积等于其模的平方 $\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2$

❍若 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 均不是零矢量，而 $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$，则可知 $\vec{A}\perp\vec{B}$

❍正交坐标系的单位矢量是正交归一的

$$\vec{e}_\alpha\cdot\vec{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha,\ \beta = x,\ y,\ z \text{或} r,\ \theta)$$

❍求两已知矢量之间的夹角

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta \Longrightarrow \theta = \arccos\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$$

B.5 矢量的标积（点乘）

利用矢量的正交分解式计算标积

直角坐标系

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k})\cdot(B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k})$$

$$=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

$$=\sum_{\alpha=x,y,z}A_\alpha B_\alpha=A_\alpha B_\alpha$$ **爱因斯坦求和规则**

平面极坐标系（对应同一点的两个矢量）

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_r\vec{e}_r+A_\theta\vec{e}_\theta)\cdot(B_r\vec{e}_r+B_\theta\vec{e}_\theta)$$

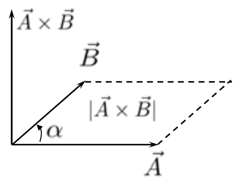
$$=A_rB_r+A_\theta B_\theta=A_\alpha B_\alpha$$

B.6 矢量的矢积（叉乘）

❍**矢量的矢积**

两矢量的标积是一个矢量，记作

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$$



如：洛伦兹力：$\vec{f}=q\vec{v}\times\vec{B}$

圆周运动的线速度：$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$

角动量：$\vec{L}_o=\vec{r}\times m\vec{v}$

大小：$C=AB\sin\alpha$ 以$\vec{A}$, $\vec{B}$为邻边的平行四边形的面积

方向：$\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$呈**右手螺旋**关系，$\vec{C}$垂直$\vec{A}$, $\vec{B}$组成的平面

B.6 矢量的矢积（叉乘）

运算规则

分配律：$\vec{C}\times(\vec{A}+\vec{B})=\vec{C}\times\vec{A}+\vec{C}\times\vec{B}$

结合律：$\lambda(\vec{A}\times\vec{B})=(\lambda\vec{A})\times\vec{B}=\vec{A}\times(\lambda\vec{B})$

一些结论

❍矢量$\vec{A}$其自身的矢积为零矢量：$\vec{A}\times\vec{A}=0$

❍两非零矢量$\vec{A}$与$\vec{B}$平行的充要条件是 $\vec{A}\times\vec{B}=0$

❍ 两矢量矢积顺序颠倒后，矢积大小不变，方向反向

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$$

B.6 矢量的矢积（叉乘）

❍正交坐标系的单位矢量间的矢积关系

$$\vec{e}_\alpha\times\vec{e}_\beta=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\vec{e}_\gamma\quad(\alpha,\ \beta,\ \gamma=x,\ y,\ z\text{或}r,\ \theta,\ z\text{或}r,\ \theta,\ \varphi)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}=\begin{cases}1, & \alpha\beta\gamma=xyz,yzx,zxy\\ -1, & \alpha\beta\gamma=xzy,yxz,zyx\\ 0, & \text{其他情况}\end{cases}$$ Levi-Civita符号

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\tau}=2\delta_{\gamma\tau}\qquad\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\lambda\mu\gamma}=\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu}-\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda}$$

❍点P到已知直线之间的距离

$$d=|\overrightarrow{OP}\times\vec{e}_\alpha|$$ O为直线上一点，$\vec{e}_\alpha$为沿该直线方向的单位矢量

B.6 矢量的矢积（叉乘）

利用正交分解式计算矢量的矢积

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B}&=(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k})\times(B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k})\\&=(A_yB_z-A_zB_y)\vec{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\vec{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\vec{k}\\&=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}A_\alpha B_\beta\vec{e}_\gamma\end{aligned}$$

矢量的矢积也可以用行列式表示

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}$$

B.6 矢量的矢积（叉乘）

❍**混合积**

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix}A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\\C_x&C_y&C_z\end{vmatrix}$$

如：

动生电动势：$\mathrm{d}\varepsilon=(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}$

❍轮换性：$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$

❍几何意义：绝对值等于以$\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$为边的平行六面体的体积

❍ $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$三矢量共面的必要条件为$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=0$

B.6 矢量的矢积（叉乘）

❍三重矢积

$$\vec A\times(\vec B\times\vec C)=(\vec A\cdot\vec C)\vec B-(\vec A\cdot\vec B)\vec C$$

如：惯性离心力：$\vec f_{\text{惯离}}=-m\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)$

两电流元之间的安培力：$\mathrm{d}\vec f_{21}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}I_2\mathrm{d}\vec l_2\times\dfrac{I_1\mathrm{d}\vec l_1\times\vec e_{12}}{r^2}$

证明：

$$\begin{aligned}
[\vec A\times(\vec B\times\vec C)]_\lambda &= \varepsilon_{\lambda\mu\nu}A_\mu(\vec B\times\vec C)_\nu=\varepsilon_{\lambda\mu\nu}\varepsilon_{\nu\alpha\beta}A_\mu B_\alpha C_\beta\\
&= (\delta_{\lambda\alpha}\delta_{\mu\beta}-\delta_{\lambda\beta}\delta_{\mu\alpha})A_\mu B_\alpha C_\beta\\
&= A_\mu C_\mu B_\lambda - A_\mu B_\mu C_\lambda\\
&= (\vec A\cdot\vec C)B_\lambda-(\vec A\cdot\vec B)C_\lambda
\end{aligned}$$

B.7 矢量的导数

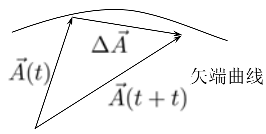
❍矢量函数

若矢量$\vec A$随标量t的变化而变，则称$\vec A$是标量t的一个矢量函数

$$\vec A=\vec A(t)$$

设t时刻矢量为$\vec A(t)$，经过Δt时间后，于$t+\Delta t$时刻，矢量为$\vec A(t+\Delta t)$，在$t\to\Delta t$时间内，

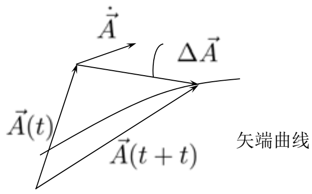
$$\Delta\vec A=\vec A(t+\Delta t)-\vec A(t)$$



B.7 矢量的导数

❍平均变化率

$$\frac{\Delta\vec A}{\Delta t}=\frac{\vec A(t+\Delta t)-\vec A(t)}{\Delta T}$$



❍矢量导数

矢量函数在Δt时间内的平均变化率，当$\Delta t\to 0$时的极限，记为

$$\dot{\vec A}=\frac{\mathrm{d}\vec A}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec A}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec A(t+\Delta t)-\vec A(t)}{\Delta t}$$

称为**矢量函数对t的导数**

B.7 矢量的导数

❍矢量导数的基本运算法则

$$\frac{\mathrm{d}\vec C}{\mathrm{d}t}=0 \quad \text{（$\vec C$是常矢量）}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec A+\vec B)=\frac{\mathrm{d}\vec A}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec B}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\vec A)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\vec A+f\frac{\mathrm{d}\vec A}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec A\cdot\vec B)=\frac{\mathrm{d}\vec A}{\mathrm{d}t}\cdot\vec B+\vec A\cdot\frac{\mathrm{d}\vec B}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec A\times\vec B)=\frac{\mathrm{d}\vec A}{\mathrm{d}t}\times\vec B+\vec A\times\frac{\mathrm{d}\vec B}{\mathrm{d}t}$$

B.7 矢量的导数

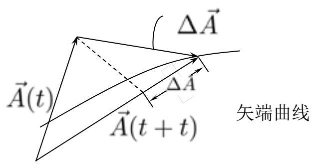
在直角坐标系中

$$\vec A(t)=A_x(t)\vec i+A_y(t)\vec j+A_z(t)\vec k$$

$$\dot{\vec A}=\frac{\mathrm{d}\vec A}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\vec i+\frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\vec j+\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\vec k$$

一般情况下

$$|\dot{\vec A}|\neq\dot A$$



2016-09-02

本章结束

The End!

2016年秋季学期 东北师范大学