数学物理方法

Methods in Mathematical Physics

第十二章 非线性方程

Nonlinear Equations

武汉大学物理科学与技术学院

第十二章 非线性方程

Nonlinear Equations

§12.2 孤波和孤子

Solitary Waves

一、KdV方程

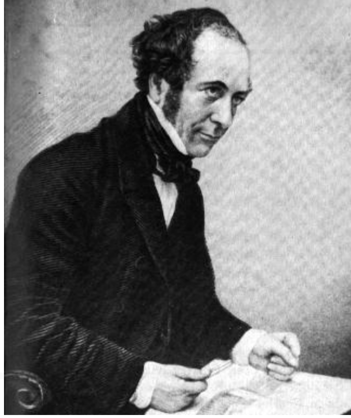
1、孤波的起源：

1834年：苏格兰的Scott. Russel追踪水波；

Fig.-5 Union运河边的Russell观察者

◆引言

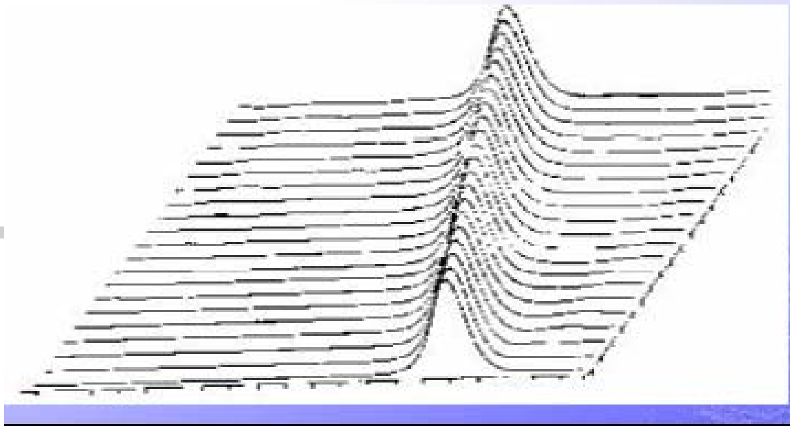
➢1834年，Scott.Russel报道：



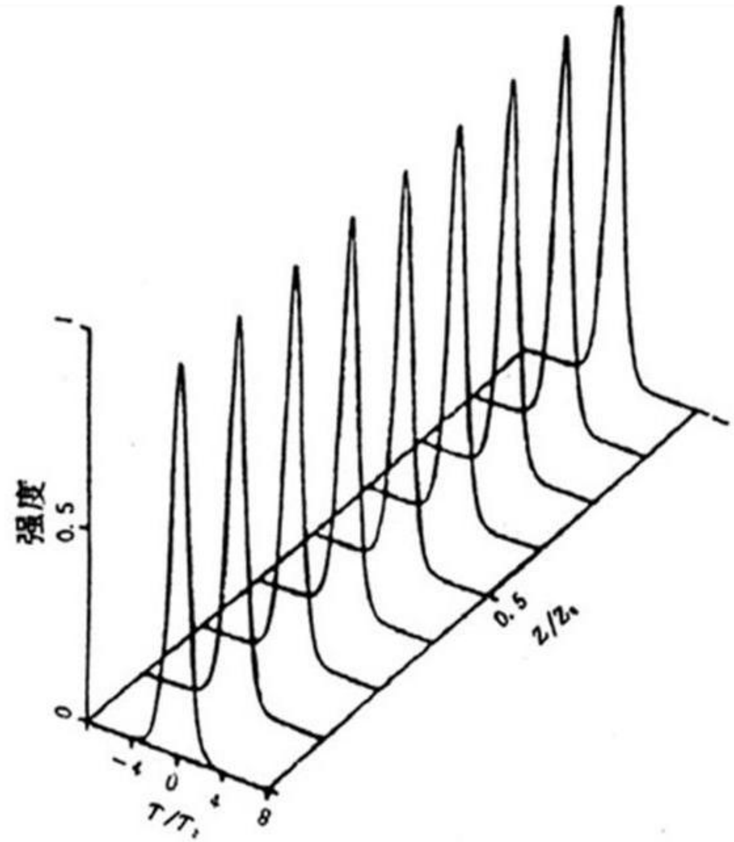
"我正在观察一条船的运动，这条船被两匹马拉着，沿着狭窄的河道匀速前进。船突然停止了，河道内被船体扰动的水团却没有停下来，而是以剧烈受激的状态聚集在船头周围，然后形成了一个巨大的圆而光滑的孤立水峰，突然离开船头，以极大速度向前推进，这水峰若有30英尺长，1～1.5英尺高，在河道中行进时一直保持着起初的形状，速度也未见减慢，我骑着马紧紧跟着，发觉它大约以每小时8～9英里的速度前进，后来波的高度渐渐减小，过了1～2英里后终于消失在蜿蜒的河道中。这就是我在1834年8月第一次偶然发现这奇异而美妙的现象的经过…"

一、KdV方程

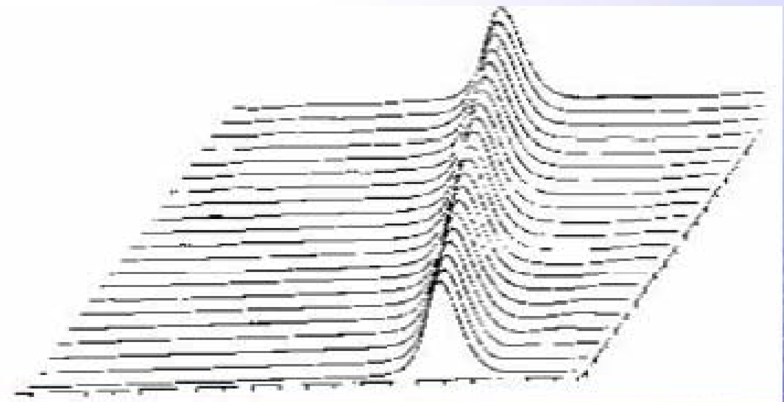
1、孤波的起源：



孤波：单峰行进，常速，波形不变。



一、KdV方程



1、孤波的起源：

孤波：单峰行进，常速，波形不变。

1895年：荷兰的Kortweg & de Vries 观察浅水沟中水波，总结得KdV方程：

$$u_\tau + u_\xi + 12uu_\xi + u_{\xi\xi\xi} = 0$$

一、KdV方程

2、孤波解：

$$u_\tau + u_\xi + 12uu_\xi + u_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (1)$$

令 $$\begin{cases} u = u(\theta) & (2) \\ \theta = a\xi - \omega\tau + \delta & (3) \end{cases}$$

其中，a－常数，δ－位相因子，$u^{(n)} \xrightarrow{|\theta|\to\infty} 0 (n = 1, 2, \cdots)$

则 $u_\tau = -\omega u_\theta$, $u_\xi = au_\theta$，$u_{\xi\xi\xi} = a^3 u_{\theta\theta\theta}$,

$$-\omega u_\theta + au_\theta + 12auu_\theta + a^3 u_{\theta\theta\theta} = 0$$

$$(1) \to u_{\theta\theta\theta} + \frac{12}{a^2}uu_\theta - \frac{\omega - a}{a^3}u_\theta = 0$$

取$\omega = a + a^3$, $\quad (1) \to u_{\theta\theta\theta} + \frac{12}{a^2}uu_\theta - u_\theta = 0 \quad (4)$

一、KdV方程

2、孤波解：

$$(1) \to u_{\theta\theta\theta} + \frac{12}{a^2} u u_\theta - u_\theta = 0 \quad (4)$$

$$\int (4) d\theta : \int \frac{d}{d\theta} u_{\theta\theta} d\theta + \frac{12}{a^2} \int u du - \int du \ = 0$$

$$\text{即} \quad u_{\theta\theta} + \frac{6}{a^2} u^2 - u + c_1 = 0 \quad (5)$$

$$\int (5) \cdot u_\theta d\theta : \int u_\theta du_\theta + \frac{6}{a^2} \int u^2 du - \int u du + c_1 \int du = 0$$

$$\frac{1}{2} u_\theta{}^2 + \frac{2}{a^2} u^3 - \frac{1}{2} u^2 + c_1 u + c_2 = 0$$

$$\text{使} u^{(n)} \xrightarrow{|\theta| \to \infty} 0 (n = 0,1,2,\cdots) \quad \to \boldsymbol{c_1 = c_2 = 0}$$

一、KdV方程

2、孤波解：$\rightarrow u_\theta^{\ 2} = u^2\left(1-\frac{4}{a^2}u\right) \rightarrow u_\theta = \frac{u}{a}\sqrt{a^2-4u}$

$$\rightarrow \frac{adu}{u\sqrt{a^2-4u}} = d\theta \quad \rightarrow \theta = \ln\frac{a-\sqrt{a^2-4u}}{a+\sqrt{a^2-4u}}$$

$$\rightarrow e^\theta = \frac{a-\sqrt{a^2-4u}}{a+\sqrt{a^2-4u}} \quad = \frac{a^2-2u-a\sqrt{a^2-4u}}{2u}$$

$$\rightarrow u = \frac{a^2 e^\theta}{(e^\theta+1)^2} = \frac{a^2}{e^\theta+e^{-\theta}+2}$$

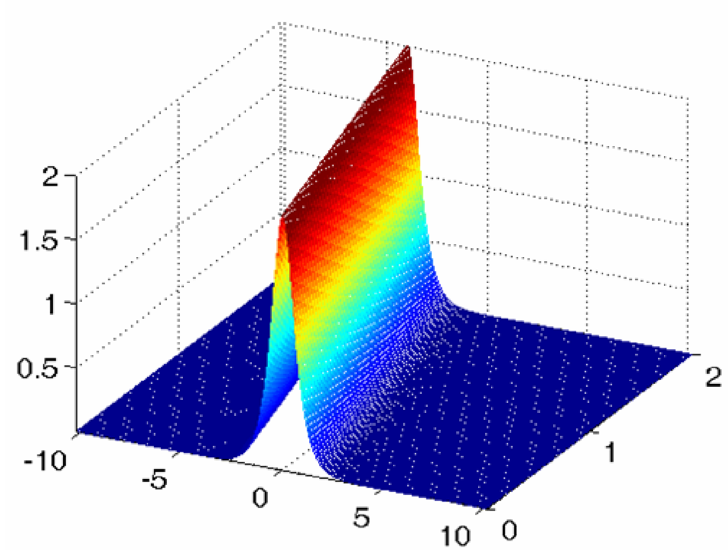
$$= \frac{a^2}{\left(e^{\frac{\theta}{2}}+e^{-\frac{\theta}{2}}\right)^2} = \frac{a^2}{4}\operatorname{sech}^2\frac{\theta}{2}$$

一、KdV方程

2、孤波解：

$$\boxed{\therefore u(\xi,\tau)=\frac{a^2}{4}\operatorname{sech}^2\frac{a}{2}[\xi-(1+a^2)\tau+\frac{\delta}{a}]}$$

常速：$1+a^2$ 振幅：$a^2/4$



二、正弦Gordon方程

$$\Phi_{xx} - \Phi_{tt} = \sin\Phi \quad (6)$$

1、引入变量代换

$$\xi = \frac{x-t}{2}, \tau = \frac{x+t}{2},$$

$$(6) \to \Phi_{\xi\tau} = \sin\Phi \quad (7)$$

令(3)的两线性无关的解为:

$$\begin{cases} \Phi = u(\xi,\tau) + v(\xi,\tau) & (8) \\ \overline{\Phi} = u(\xi,\tau) - v(\xi,\tau) & (9) \end{cases}$$

令 $$\begin{cases} u_\xi = f(v) & (10) \\ v_\tau = g(u) & (11) \end{cases}$$

二、正弦Gordon方程

2、确定$g(u), f(v)$:

$$\begin{cases}(10)\\(11)\end{cases} \rightarrow \begin{cases}u_{\xi\tau} = g(u)f'(v) & (12)\\ v_{\xi\tau} = f(v)g'(u) & (13)\end{cases}$$

$$(12)+(13):(u+v)_{\xi\tau} = g(u)f'(v)+g'(u)f(v)$$

$$(12)-(13):(u-v)_{\xi\tau} = g(u)f'(v)-g'(u)f(v)$$

$$\sin(u+v) = g(u)f'(v)+g'(u)f(v) \quad (14)$$

$$\sin(u-v) = g(u)f'(v)-g'(u)f(v) \quad (15)$$

二、正弦Gordon方程

2、确定$g(u), f(v)$:

$$(14)+(15): \quad g(u)f'(v)=\sin u\cos v$$

$$\rightarrow \frac{g(u)}{\sin u}=\frac{\cos v}{f'(v)}=\alpha \qquad \boxed{\rightarrow g(u)=\alpha\sin u \quad (16)}$$

$$(14)-(15): \quad g'(u)f(v)=\sin v\cos u$$

$$\rightarrow \frac{f(v)}{\sin v}=\frac{\cos u}{g'(u)}=\beta \qquad \boxed{\rightarrow f(v)=\beta\sin v=\frac{1}{\alpha}\sin v \quad (17)}$$

二、正弦Gordon方程

3、引入*Baklund*变换

$$(8)+(9): \quad u=\frac{1}{2}(\Phi+\overline{\Phi}) \quad (18)$$

$$(8)-(9): \quad v=\frac{1}{2}(\Phi-\overline{\Phi}) \quad (19)$$

故由(18),(10),(17) $\rightarrow$ $\boxed{\frac{1}{2}(\Phi+\overline{\Phi})_{\xi}=\frac{1}{\alpha}\sin\frac{\Phi-\overline{\Phi}}{2}}$ (20)

而由(19),(11),(16) $\rightarrow$ $\boxed{\frac{1}{2}(\Phi-\overline{\Phi})_{\tau}=\alpha\sin\frac{\Phi+\overline{\Phi}}{2}}$ (21)

—巴克朗德（Baklund)变换

二、正弦Gordon方程

4、正弦Gordon方程的解

由$\overline{\Phi}=0$有$(20)\rightarrow \quad \Phi_{\xi}=2\dfrac{1}{\alpha}\sin\dfrac{\Phi}{2} \quad (22)$

$(21)\rightarrow \quad \Phi_{\tau}=2\alpha\sin\dfrac{\Phi}{2} \quad (23)$

$$(22)\rightarrow\int\csc\frac{\Phi}{2}d\frac{\Phi}{2}=\frac{1}{\alpha}\int d\xi \quad \boxed{\rightarrow\frac{1}{\alpha}\xi=\ln\tan\frac{\Phi}{4}-c_1(\tau)}$$

$$\rightarrow\Phi=4\tan^{-1}\exp[\frac{1}{\alpha}\xi+c_1(\tau)]$$

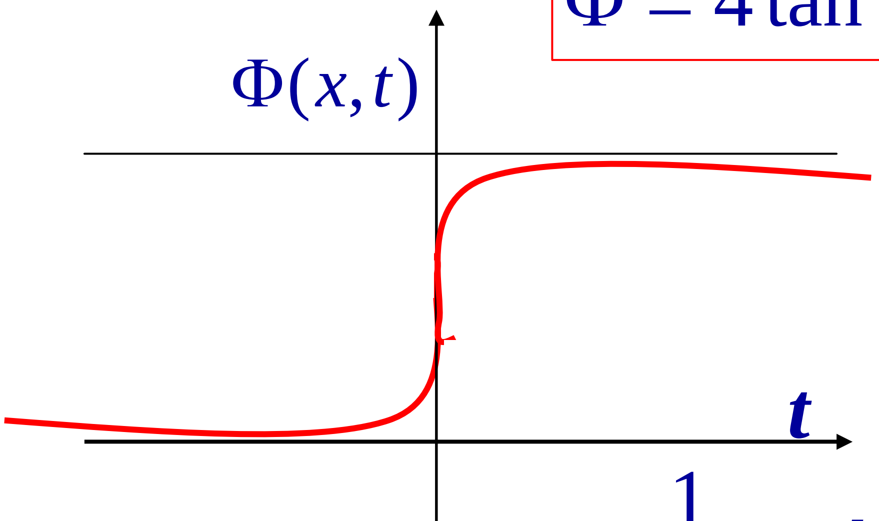
$$(23)\rightarrow\int\csc\frac{\Phi}{2}d\frac{\Phi}{2}=2\alpha\int d\tau \quad \boxed{\rightarrow\alpha\tau=\ln\tan\frac{\Phi}{4}-c_2(\xi)}$$

$$\rightarrow\begin{cases}c_1(\tau)=\alpha\tau+\delta\\ c_2(\xi)=\dfrac{1}{\alpha}\xi+\delta\end{cases} \quad \boxed{\Phi=4\tan^{-1}\exp[\frac{1}{\alpha}\xi+\alpha\tau+\delta]}$$

4、正弦*Gordon*方程的解

$$\Phi = 4\tan^{-1}\exp[\frac{x-t}{2\alpha} + \frac{\alpha}{2}(x+t) + \delta]$$

$$\boxed{\Phi = 4\tan^{-1}\exp[a(x-bt)+\delta]}$$



—扭结（孤波解）

$$a = \frac{\alpha^2+1}{2\alpha}, \quad b = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$$

$$\Phi_\xi = 4\frac{1}{\alpha}\sec h[a(x-bt)+\delta]$$

$$\Phi_\tau = 4\alpha\sec h[a(x-bt)+\delta]$$

三、非线性薛定谔方程

$$i\Phi_t + \Phi_{xx} + \beta\Phi\overline{\Phi}^2 = 0 \quad (25)$$

令 $$\begin{cases} \Phi = e^{i(kx-vt)}u(\theta) \\ \theta = x - bt \end{cases} \quad (26)$$

$$(25) \to u_{\theta\theta} + i(2k-b)u_\theta + (v-k^2)u + \beta u^3 = 0$$

选 $k = \dfrac{b}{2}, v = \dfrac{b^2}{4} - a^2 \to u_{\theta\theta} - a^2u + \beta u^3 = 0 \quad (27)$

$\int (27)\cdot u_\theta d\theta:\ u_\theta^2 = a^2u^2 - \dfrac{\beta}{2}u^4 + c$ 由 $|x| \to \infty, \Phi^{(n)}(x) \to 0$ 有: $c = 0$

$$\frac{du}{u\sqrt{a^2 - \frac{\beta}{2}u^2}} = d\theta \to \theta = -\frac{1}{a}\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - \frac{\beta}{2}u^2}}{u\sqrt{\frac{\beta}{2}}}$$

三、非线性薛定谔方程

$$i\Phi_t + \Phi_{xx} + \beta\Phi\overline{\Phi}^2 = 0 \quad (25)$$

$$e^{-a\theta} = \frac{a + \sqrt{a^2 - \frac{\beta}{2}u^2}}{u\sqrt{\frac{\beta}{2}}} \to \qquad u(\theta) = a\sqrt{\frac{2}{\beta}}\operatorname{sec}h\, a\theta$$

$$\boxed{\varphi(x,t) = a\sqrt{\frac{2}{\beta}}\exp\left\{i[\frac{1}{2}bx - (\frac{1}{4}b^2 - a^2)t]\right\}\operatorname{sec}h[a(x-bt)]}$$

—孤波解

四、小结

一、KdV方程： $$u_\tau + u_\xi + 12uu_\xi + u_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (1)$$

令 $\begin{cases} u = u(\theta) \\ \theta = a\xi - \omega\tau + \delta \end{cases}$ $$\boxed{u(\xi,\tau) = \frac{a^2}{4}\operatorname{sech}^2\frac{a}{2}[\xi - (1+a^2)\tau + \frac{\delta}{a}]}$$

二、非线性薛定谔方程 $$i\Phi_{tt} + \Phi_{xx} + \beta\Phi\overline{\Phi}^2 = 0 \quad (25)$$

令 $\begin{cases} \Phi = e^{i(kx-vt)}u(\theta) \\ \theta = x - bt \end{cases}$ $$\boxed{\varphi(x,t) = a\sqrt{\frac{2}{\beta}}\exp\left\{i[\frac{1}{2}bx - (\frac{1}{4}b^2 - a^2)t]\right\}\operatorname{sec}h[a(x-bt)]}$$

三、正弦Gordon方程 $$\Phi_{xx} - \Phi_{tt} = \sin\Phi \quad (6)$$

$$\frac{1}{2}(\Phi + \overline{\Phi})_\xi = \frac{1}{\alpha}\sin\frac{\Phi - \overline{\Phi}}{2}$$

$$\frac{1}{2}(\Phi - \overline{\Phi})_\tau = \alpha\sin\frac{\Phi + \overline{\Phi}}{2}$$

—巴克朗德（Baklund)变换

$$\boxed{\Phi = 4\tan^{-1}\exp[a(x-bt)+\delta]}$$

$$a = \frac{\alpha^2+1}{2\alpha}, \quad b = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$$

Good-by!