

§3.6 一维谐振子

(一) 引言

(1) 何谓谐振子

(2) 为什么研究谐振子

(二) 谐振子

(1) 方程的建立

(2) 求解

(3) 应用标准条件

(4) 厄密多项式

(5) 求归一化系数

(6) 讨论

(三) 实例

(一) 引言

(1) 何谓谐振子

在经典力学中，当质量为 μ 的粒子，受弹性力 $F = -kx$ 作用，由牛顿第二定律可以写出运动方程为：

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \rightarrow \quad x'' + \omega^2 x = 0 \quad \text{其中} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

其解为 $x = A \sin(\omega t + \delta)$ 。这种运动称为简谐振动，作这种运动的粒子叫谐振子。

因为： $k = \mu \omega^2$

因为 $F = -\frac{dV}{dx}$ 所以 $V = \int kx dx = \frac{1}{2} kx^2 + V_0 = \frac{1}{2} \mu \omega^2 x^2 + V_0$

若取 $V_0 = 0$ ，即平衡位置处于势 $V = 0$ 点，则

$$V = \frac{1}{2} \mu \omega^2 x^2$$

量子力学中的线性谐振子就是指在该式所描述的势场中运动的粒子。

(2) 为什么研究谐振子

- 自然界广泛碰到简谐振动，任何体系在平衡位置附近的小振动，例如分子振动、晶格振动、原子核表面振动以及辐射场的振动等往往都可以分解成若干彼此独立的一维简谐振动。简谐振动往往还作为复杂运动的初步近似，所以简谐振动的研究，无论在理论上还是在应用上都是很重要的。例如双原子分子，两原子间的势 V 是二者相对距离 x 的函数，如图所示。在 $x = a$ 处， V 有一极小值 V_0 。在 $x = a$ 附近势可以展开成泰勒级数：

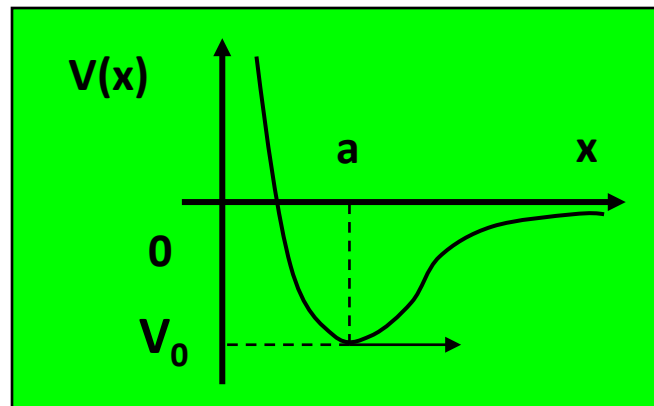
$$V(x) = V(a) + \frac{1}{1!} \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=a} (x-a) + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_{x=a} (x-a)^2 + \dots$$

\uparrow \uparrow

$$V(a) = V_0 \quad \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=a} = 0 \quad \approx V_0 + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_{x=a} (x-a)^2$$

其中： $k = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_{x=a}$

$$= V_0 + \frac{1}{2} k (x-a)^2$$



- 取新坐标原点为 (a, V_0) , 则势可表示为标准谐振子势的形式 :

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

可见 , 一些复杂的势场下粒子的运动往往可以用 (线性) 谐振动来近似描述。

(二) 线性谐振子

- (1) 方程的建立**
- (2) 求解**
- (3) 应用标准条件**
- (4) 厄密多项式**
- (5) 求归一化系数**
- (6) 讨论**

(1) 方程的建立

线性谐振子的 Hamilton量:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2 \\ &= -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2\end{aligned}$$

则 Schrodinger 方程可写为：

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + [E - \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2] \right\} \psi(x) = 0 \quad \text{或:} \quad \left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} [E - \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2] \right\} \psi(x) = 0$$

为简单计,

引入无量纲变量 ξ 代替 x ,

$$\text{令: } \xi = \alpha x$$

其中

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}},$$

则方程可改写为：

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + [\lambda - \xi^2]\psi(x) = 0$$

其中

$$\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}$$

此式是一变系数
二阶常微分方程

(2) 求解

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + [\lambda - \xi^2]\psi(x) = 0$$

为求解方程，我们先看一下它的渐近解，即当 $\xi \rightarrow \pm\infty$ 时波函数 ψ 的行为。在此情况下， $\lambda \ll \xi^2$ ，于是方程变为：

1. 渐近解

欲验证解的正确性，
可将其代回方程，

$$\xi = \alpha x$$

$$\frac{d^2\psi_\infty}{d\xi^2} - \xi^2\psi_\infty = 0$$

其解为： $\psi_\infty = \exp[\pm \xi^2/2]$,

$$\frac{d\psi_\infty}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} e^{\pm \xi^2/2} = \pm \xi e^{\pm \xi^2/2} = \pm \xi \psi_\infty$$

$$\xi^2 \gg \pm 1$$

$$\frac{d^2\psi_\infty}{d\xi^2} = \frac{d}{d\xi} [\pm \xi \psi_\infty] = \pm \psi_\infty \pm \xi \frac{d\psi_\infty}{d\xi} = [\xi^2 \pm 1]\psi_\infty \approx \xi^2 \psi_\infty$$

所以

$$\psi_\infty = c_1 e^{-\xi^2/2} + c_2 e^{\xi^2/2}$$

波函数有
限性条件：

当 $\xi \rightarrow \pm\infty$ 时，
应有 $c_2 = 0$ ，

因整个波函数尚未归一化，所以 c_1 可以令其等于1。最后渐近波函数为：

$$\psi_\infty = e^{-\xi^2/2}$$

为了使方程 $\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + [\lambda - \xi^2]\psi(x) = 0$ 的波函数 ψ

在无穷远处有 $\psi_\infty = e^{-\xi^2/2}$ 渐近形式，我们自然会令：

$$\psi(\xi) = H(\xi)e^{-\xi^2/2}$$

• 其中 $H(\xi)$ 必须满足波函数的单值、有限、连续的标准条件。即：

- ① 当 ξ 有限时， $H(\xi)$ 有限；
- ② 当 $\xi \rightarrow \infty$ 时， $H(\xi)$ 的行为要保证 $\psi(\xi) \rightarrow 0$ 。

2. $H(\xi)$ 满足的方程

$$H'' - 2\xi H' + (\lambda - 1)H = 0$$

将 $\psi(\xi)$ 表达式代入方程得
关于待求函数 $H(\xi)$
所满足的方程：

3.级数解

我们以级数形式来求解。
为此令：

$$H = \sum_{k=0} b_k \xi^k$$

$$H' = \sum_{k=0} b_k k \xi^{k-1} \quad 2\xi H' = \sum_{k=0} 2b_k k \xi^k$$

$$H'' = \sum_{k=0} b_k k(k-1) \xi^{k-2} = \sum_{k=2} b_k k(k-1) \xi^{k-2}$$

令 $k' = k - 2$ 则：

用 k 代替 k'

$$H'' = \sum_{k'=0} b_{k'+2} (k' + 1)(k' + 2) \xi^{k'}$$

$$= \sum_{k=0} b_{k+2} (k + 1)(k + 2) \xi^k$$

则方程 $H'' - 2\xi H' + (\lambda - 1)H = 0$ 变成：

$$\sum_k [b_{k+2} (k + 1)(k + 2) - b_k 2k + b_k (\lambda - 1)] \xi^k = 0$$

$$\sum_k [b_{k+2}(k+1)(k+2) - b_k 2k + b_k(\lambda - 1)]\xi^k = 0$$

即： $b_{k+2}(k+2)(k+1) - b_k 2k + b_k(\lambda - 1) = 0$

从而导出系数 b_k 的递推公式：

该式对任意 ξ 都成立，
故 ξ 同次幂前的系数均应为零，

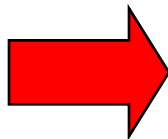
$$b_{k+2} = \frac{2k + 1 - \lambda}{(k + 1)(k + 2)} b_k$$

由上式可以看出：

b_0 决定所有角标 k 为偶数的系数；

b_1 决定所有角标 k 为奇数的系数。

因为方程是二阶微分方程，应有两个线性独立解。可分别令：



$$b_0 \neq 0, b_1 = 0. \rightarrow H^{\text{even}}(\xi);$$

$$b_1 \neq 0, b_0 = 0. \rightarrow H^{\text{odd}}(\xi).$$

只含偶次幂项

只含奇次幂项

则通解可记为：

$$H = c_o H^{\text{odd}} + c_e H^{\text{even}}$$

$$\psi = (c_o H^{\text{odd}} + c_e H^{\text{even}} e) \exp[-\xi^2/2]$$

(3) 应用标准条件

单值性和连续性二条件自然满足，
只剩下第三个有限性条件需要进行讨论。

因为 $H(\xi)$ 是一个幂级数，故应考虑他的收敛性。考虑一些特殊点，
即势场有跳跃的地方以及 $x=0, x \rightarrow \pm\infty$ 或 $\xi=0, \xi \rightarrow \pm\infty$ 。

(I) $\xi=0$

$$\exp[-\xi^2/2]|_{\xi=0} = 1$$

$$H^{\text{even}}(\xi)|_{\xi=0} = b_0$$

$$H^{\text{odd}}(\xi)|_{\xi=0} = 0$$

皆有限

(II) $\xi \rightarrow \pm\infty$ 需要考虑无穷级数 $H(\xi)$ 的收敛性

为此考察相邻
两项之比：

$$\frac{b_{k+2}\xi^{k+2}}{b_k\xi^k} = \frac{2k+1-\lambda}{(k+1)(k+2)}\xi^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{2}{k}\xi^2$$

$$\exp[\xi^2] = 1 + \frac{\xi^2}{1!} + \frac{\xi^4}{2!} + \cdots + \frac{\xi^k}{(\frac{k}{2})!} + \frac{\xi^{k+2}}{(\frac{k}{2}+1)!} + \cdots$$

考察幂级数 $\exp[\xi^2]$ 的
展开式的收敛性

相继两项之比：

$$\frac{\frac{\xi^{k+2}}{(\frac{k}{2}+1)!}}{\frac{\xi^k}{(\frac{k}{2})!}} = \frac{(\frac{k}{2})!}{(\frac{k}{2}+1)!}\xi^2 = \frac{1}{(\frac{k}{2}+1)}\xi^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{2}{k}\xi^2$$

比较二级数可知：
当 $\xi \rightarrow \pm\infty$ 时， $H(\xi)$ 的渐近
行为与 $\exp[\xi^2]$ 相同。

所以总波函数有如下发散行为：

$$\psi(\xi) = H(\xi) \exp[-\frac{1}{2}\xi^2] \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} \exp[\xi^2] \exp[-\frac{1}{2}\xi^2] = \exp[\frac{1}{2}\xi^2] \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} \infty$$

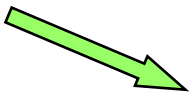
- 为了满足波函数有限性要求，幂级数 $H(\xi)$ 必须从某一项截断变成一个多项式。换言之，要求 $H(\xi)$ 从某一项（比如第 n 项）起以后各项的系数均为零，即 $b_n \neq 0, b_{n+2} = 0$.

$$b_{n+2} = \frac{2n+1-\lambda}{(n+1)(n+2)} b_n = 0$$

代入递推关系得：

因为 $b_n \neq 0$ ， 所以有：

$$2n+1-\lambda = 0$$

因为 $\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}$  $E = \frac{1}{2}\lambda\hbar\omega$

于是最后得：

$$E = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

结论
基于波函数
在无穷远处的
有限性条件导致了
能量必须取
分立值。

(4) 厄密多项式

附加有限性条件得到了 $H(\xi)$ 的一个多项式，该多项式称为厄密多项式，记为 $H_n(\xi)$ ，于是总波函数可表示为：

$$\psi_n = N_n \exp[-\frac{1}{2}\xi^2] H_n(\xi)$$

归一化系数

$$H'' - 2\xi H' + (\lambda - 1)H = 0$$

$$\lambda = 2n+1$$

$$H_n'' - 2\xi H_n' + 2nH_n = 0$$

$H_n(\xi)$ 也可写成封闭形式：

$$H_n(\xi) = (-1)^n \exp[\xi^2] \frac{d^n}{d\xi^n} \exp[-\xi^2]$$

由上式可以看出， $H_n(\xi)$ 的最高次幂是 n 其系数是 2^n 。

厄密多项式和谐振子波函数的递推关系：

从上式出发，可导出
厄密多项式的递推关系：

$$\frac{dH_n}{d\xi} = 2nH_{n-1}(\xi)$$

$$H_{n+1} - 2\xi H_n + 2nH_{n-1} = 0$$

应用
实例

例：已知 $H_0 = 1$, $H_1 = 2\xi$ ，则
根据上述递推关系得出：

$$\begin{aligned} H_2 &= 2\xi H_1 - 2nH_0 \\ &= 4\xi^2 - 2 \end{aligned}$$

基于厄密多项式的递推关系可以导出谐振子波函数 $\psi(x)$ 的
递推关系：

$$\begin{aligned} x\psi_n(x) &= \frac{1}{\alpha} \left[\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(x) + \sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(x) \right] \\ x^2\psi_n(x) &= \frac{1}{2\alpha^2} \left[\sqrt{n(n-1)}\psi_{n-2}(x) + (2n+1)\psi_n(x) + \sqrt{(n+1)(n+2)}\psi_{n+2}(x) \right] \\ \frac{d}{dx}\psi_n(x) &= \alpha \left[\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(x) - \sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(x) \right] \\ \frac{d^2}{dx^2}\psi_n(x) &= \frac{\alpha^2}{2} \left[\sqrt{n(n-1)}\psi_{n-2}(x) - (2n+1)\psi_n(x) + \sqrt{(n+1)(n+2)}\psi_{n+2}(x) \right] \end{aligned}$$

下面给出前几个厄密
多项式具体表达式：

$$H_0 = 1$$

$$H_2 = 4\xi^2 - 2$$

$$H_4 = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12$$

$$H_1 = 2\xi$$

$$H_3 = 8\xi^3 - 12\xi$$

$$H_5 = 32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi$$

(5) 求归一化系数

(I) 作变量代换, 因为 $\xi = \alpha x$,
所以 $d\xi = \alpha dx$;
(II) 应用 $H_n(\xi)$ 的封闭形式。

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \psi_n dx = \int_{-\infty}^{\infty} N_n^2 e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_n(\xi) d\xi \\ &= \frac{N_n^2}{\alpha} (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\xi) \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} d\xi \\ &= (-1)^n \frac{N_n^2}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\xi) \frac{d}{d\xi} \left[\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} e^{-\xi^2} \right] d\xi \end{aligned}$$

(分部积分)

该式第一项是一个多项式与 $\exp[-\xi^2]$ 的乘积, 当代入上下限 $\xi = \pm\infty$ 后, 该项为零。

$$\begin{aligned} &= (-1)^n \frac{N_n^2}{\alpha} H_n(\xi) \left[\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} e^{-\xi^2} \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad - (-1)^n \frac{N_n^2}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{d\xi} H_n(\xi) \right] \left[\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} e^{-\xi^2} \right] d\xi \\ &= (-1)^{n+1} \frac{N_n^2}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{d\xi} H_n(\xi) \right] \left[\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} e^{-\xi^2} \right] d\xi \\ &= (-1)^{n+n} \frac{N_n^2}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d^n}{d\xi^n} H_n(\xi) \right] e^{-\xi^2} d\xi \\ &= (-1)^{2n} \frac{N_n^2}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} 2^n n! e^{-\xi^2} d\xi \\ &= \frac{N_n^2}{\alpha} 2^n n! \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

继续分部积分到底

则谐振子
波函数为：

于是归一化系数

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\alpha^2 x^2 / 2} H_n(\alpha x)$$

$$e^{-\alpha^2 x^2 / 2} H_n(\alpha x)$$

所以

$$N_n = \sqrt{\frac{\alpha}{2^n n! \sqrt{\pi}}}$$

其中：
$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}$$

因为 H_n 的最高次项 ξ^n 的系数是 2^n , 所以 $d^n H_n / d\xi^n = 2^n n!$ 。

(6) 讨论

$$H_n(\xi) = (-1)^n \exp[\xi^2] \frac{d^n}{d\xi^n} \exp[-\xi^2]$$

1. 上式表明, $H_n(\xi)$ 的最高次项是 $(2\xi)^n$ 。所以:

当 n =偶, 则厄密多项式只含 ξ 的偶次项;

当 n =奇, 则厄密多项式只含 ξ 的奇次项。

2. ψ_n 具有 n 宇称

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\alpha^2 x^2 / 2} H_n(\alpha x)$$

上式描写的谐振子波函数所包含的 $\exp[-\xi^2/2]$ 是 ξ 的偶函数,
所以 ψ_n 的宇称由厄密多项式 $H_n(\xi)$ 决定为 n 宇称。

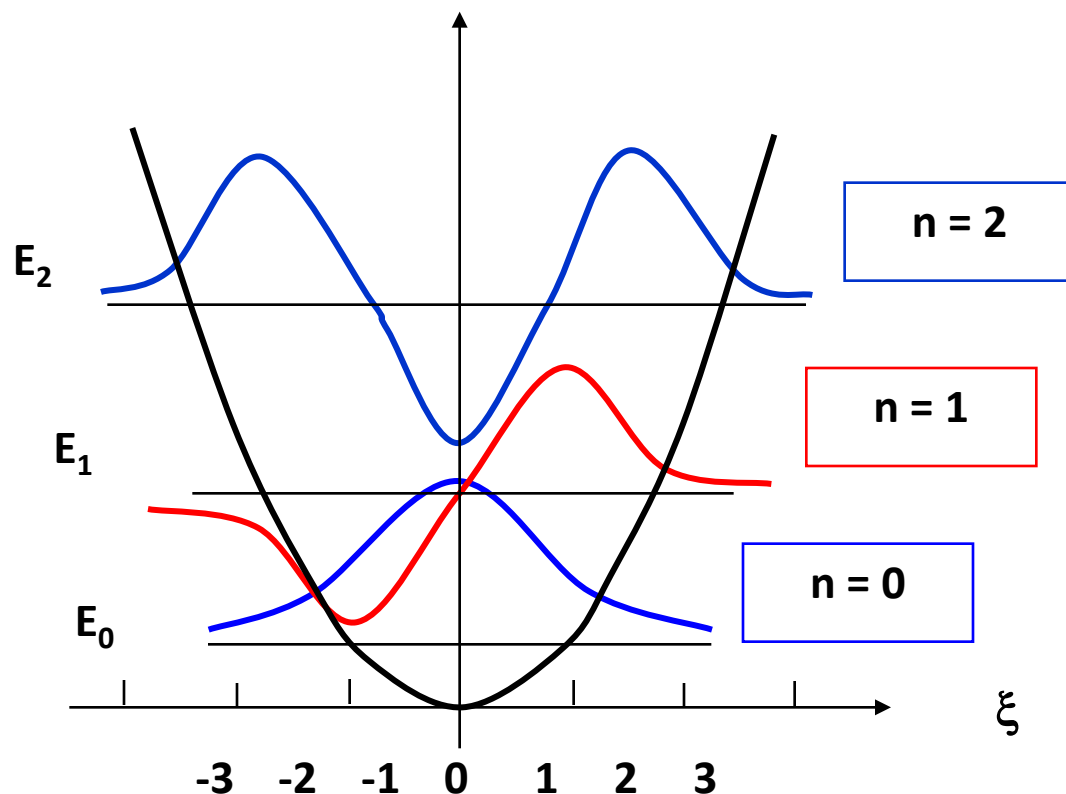
- 3. 对应一个谐振子能级只有一个本征函数, 即一个状态, 所以能级是非简并的。值得注意的是, 基态能量 $E_0 = \{1/2\} \hbar \omega \neq 0$, 称为零点能。这与无穷深势阱中的粒子的基态能量不为零是相似的, 是微观粒子波粒二相性的表现, 能量为零的“静止的”波是没有意义的, 零点能是量子效应。

4. 波函数

以基态为例，在经典情形下，粒子将被限制在 $|\alpha x| < 1$

范围中运动。这是因为振子在这一点 ($|\alpha x| = 1$) 处，其势能 $V(x) = (1/2) \mu \omega^2 x^2 = \{1/2\} \hbar \omega = E_0$ ，即势能等于总能量，动能为零，粒子被限制在阱内。

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\alpha^2 x^2 / 2} H_n(\alpha x)$$



然而，量子情况与此不同

对于基态，其几率密度是：

$$\omega_0(\xi) = |\psi_0(\xi)|^2 = N_0^2 \exp[-\xi^2]$$

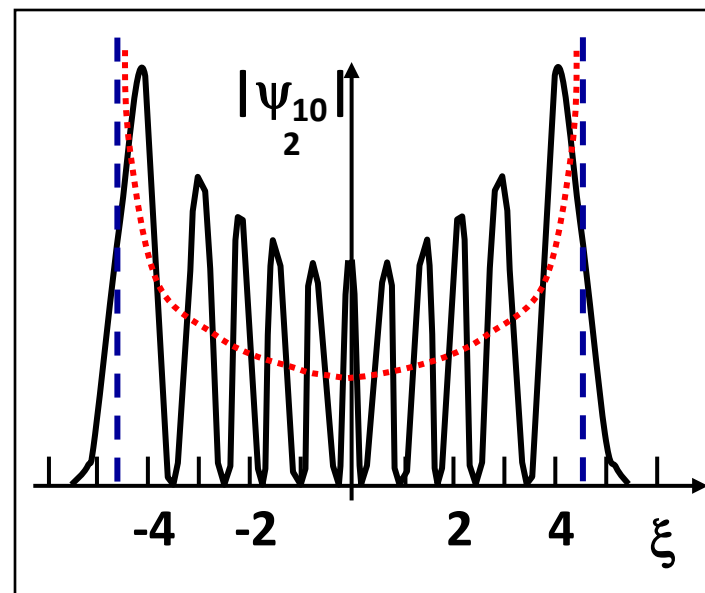
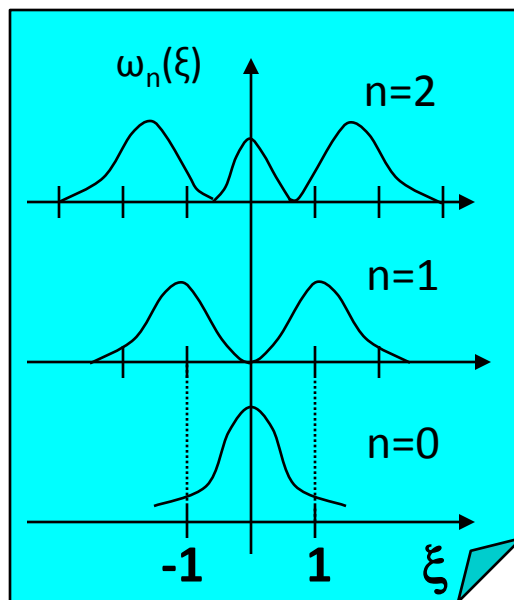
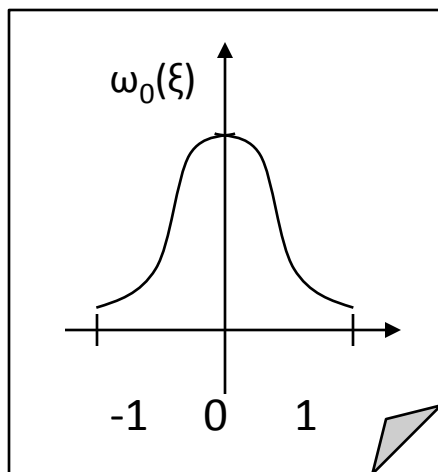
分析上式可知：一方面表明在 $\xi = 0$ 处找到粒子的几率最大；

另一方面，在 $|\xi| \geq 1$ 处，即在阱外找到粒子的几率不为零，

与经典情况完全不同。

5. 几率分布

分析波函数可知量子力学的谐振子波函数 ψ_n 有 n 个节点，在节点处找到粒子的几率为零。而经典力学的谐振子在 $[-a, a]$ 区间每一点上都能找到粒子，没有节点。



(三) 实例

例1. 求三维谐振子能级，并讨论它的简并情况

• 解：

1 (1) 三维谐振子 Hamilton 量

$$\begin{aligned}\hat{H} &= -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] + \frac{1}{2} \mu \omega^2 (x^2 + y^2 + z^2) \\ &= \hat{H}_x + \hat{H}_y + \hat{H}_z\end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases} \hat{H}_x = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} \mu \omega^2 x^2 \\ \hat{H}_y = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{2} \mu \omega^2 y^2 \\ \hat{H}_z = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{2} \mu \omega^2 z^2 \end{cases}$$

(2) 本征方程及其能量本征值

如 $\hat{H} = \hat{H}_x + \hat{H}_y + \hat{H}_z$ 写成

则必有：

因此，设能量本征方程的解为：

$$E_{n_1 n_2 n_3} = E_{n_1} + E_{n_2} + E_{n_3}$$
$$\Psi = \psi_{n_1}(x) \psi_{n_2}(y) \psi_{n_3}(z)$$

$$E = E_x + E_y + E_z$$

$$\Psi = \psi(x) \psi(y) \psi(z)$$

则波函数三方向的分量

分别满足如下三个方程：

解得能量本征值为：

$$E_{n_i} = (n_i + \frac{1}{2})\hbar\omega \quad i = 1, 2, 3$$

$$E_N = (n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2})\hbar\omega$$
$$= (N + \frac{3}{2})\hbar\omega$$

其中 $N = n_1 + n_2 + n_3$

$$\begin{cases} \hat{H}_x \psi_{n_1}(x) = E_{n_1} \psi_{n_1}(x) \\ \hat{H}_y \psi_{n_2}(y) = E_{n_2} \psi_{n_2}(y) \\ \hat{H}_z \psi_{n_3}(z) = E_{n_3} \psi_{n_3}(z) \end{cases}$$

(3) 简并度

$$E_N = (N + \frac{3}{2})\hbar\omega$$

其中 $N = n_1 + n_2 + n_3$

$$\Psi_{n_1 n_2 n_3}(\vec{r}) = \psi_{n_1}(x)\psi_{n_2}(y)\psi_{n_3}(z)$$

当 N 确定后，能量本征值确定，但是对应同一 N 值的 n_1, n_2, n_3 有多种不同组合，相应于若干不同量子状态，这就是简并。其简并度可决定如下：

对给定 $N = n_1 + n_2 + n_3$ 的组合方式数列表分析如下：						
n_1	n_2				\rightarrow	组合方式数
0	0,	1,	...	N	\rightarrow	$N+1$
1	0,	1,	...	$N-1$	\rightarrow	N
2	0,	1,	...	$N-2$	\rightarrow	$N-1$
...	\rightarrow	...
N	0,				\rightarrow	1
对给定 N ($N = n_1 + n_2 + n_3$), $\{n_1, n_2, n_3\}$ 的组合方式数						$(1/2)(N+1)(N+2)$

当 n_1, n_2 确定后， $n_3 = N - n_1 - n_2$ ，也就确定了，不增加不同组合的数目。故对给定 N ， $\{n_1, n_2, n_3\}$ 可能组合数即简并度为：

$$(N+1) + N + (N-1) + \dots + 1 = \frac{1}{2}(N+1)(N+2)$$

例2. 荷电 q 的谐振子，受到沿 x 向外电场 ε 的作用，其势场为：

$$V(x) = \frac{1}{2} \mu \omega^2 x^2 - q \varepsilon x$$

求能量本征值和本征函数。

解：Schrodinger方程：

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{2\mu}{\hbar^2} [E - V(x)] \psi(x) = 0$$

(1) 解题思路

势 $V(x)$ 是在谐振子势上叠加上 $-q \varepsilon x$ 项，该项是 x 的一次项，而振子势是二次项。如果我们能把这样的势场重新整理成坐标变量平方形式，就有可能利用已知的线性谐振子的结果。

- (2) 改写 $V(x)$

$$V(x) = \frac{1}{2} \mu \omega^2 x^2 - q \varepsilon x$$

$$= \frac{1}{2} \mu \omega^2 \left[x - \frac{q \varepsilon}{\mu \omega^2} \right]^2 - \frac{q^2 \varepsilon^2}{2 \mu \omega^2}$$

$$= \frac{1}{2} \mu \omega^2 (x - x_0)^2 - V_0$$

$$\text{其中： } x_0 = \frac{q \varepsilon}{\mu \omega^2} \quad V_0 = \frac{q^2 \varepsilon^2}{2 \mu \omega^2}$$

(3) Hamilton量

- 进行坐标变换:

$$x' = x - x_0$$

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx} = -i\hbar \frac{d}{dx'} = \hat{p}'$$

则 Hamilton 量变为:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2(x - x_0)^2 - V_0 \\ &= \frac{\hat{p}'^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x'^2 - V_0\end{aligned}$$

(4) Schrodinger方程

新坐标下 Schrodinger 方程改写为：

该式是一新坐标下一维
线性谐振子Schrodinger
方程，于是可以利用已
有结果得：

本征能量

$$E'_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$$

$$\rightarrow E_n = E'_n - V_0$$

$$= (n + \frac{1}{2})\hbar\omega - \frac{q^2 \varepsilon^2}{2\mu\omega^2}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\frac{d^2}{dx'^2} \psi(x') + \frac{2\mu}{\hbar^2} [E - \frac{1}{2} \mu \omega^2 x'^2 + V_0] \psi(x') = 0$$

$$\frac{d^2}{dx'^2} \psi(x') + \frac{2\mu}{\hbar^2} [E' - \frac{1}{2} \mu \omega^2 x'^2] \psi(x') = 0$$

$$\text{其中} \quad E' = E + V_0$$

本征函数

$$\psi_n(x') = N_n e^{-\alpha^2 x'^2 / 2} H_n(\alpha x')$$

$$= N_n e^{-\alpha^2 (x-x_0)^2 / 2} H_n(\alpha(x-x_0))$$

第三章作业

(I) 3.1, 3.2, 3.4, 3.6, 3.7,
3.9

(II) 3.11, 3.15, 3.19, 3.22,
3.24, 3.26