数理方法 CH5 作业解答

P82 习题 5.1

1．求下列函数在指定点处的留数

（1）$\dfrac{z}{(z-1)(z+1)^2}$，在 $z=\pm1$，∞

解：①对于 $z=1$

$z=1$ 是单极点，由公式 $resf(b)=\lim\limits_{z\to b}(z-b)f(z)$，得

$$resf(1)=\lim_{z\to1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to1}\frac{z}{(z+1)^2}=\frac{1}{4}$$

②对于 $z=-1$

$z=-1$ 是二阶极点，由公式 $resf(b)=\dfrac{1}{(n-1)!}\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-b)^n f(z)]_{z=b}$，得

$$resf(-1)=\frac{d}{dz}[\frac{z}{z-1}]_{z=-1}=[\frac{1}{z-1}-\frac{z}{(z-1)^2}]_{z=-1}=-\frac{1}{4}$$

③对于 $z=\infty$

根据“全平面的留数之和为零”，知

$$resf(\infty)=-[resf(1)+resf(-1)]=0$$

(2) $e^{\frac{1}{z-1}}$，在 $z=1$，∞

解：将 $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$ 在 $z=1$ 的去心邻域展开为：

$$f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{-k}}{k!}\qquad |z-1|<\infty$$

可见，$(z-1)^{-1}$ 的系数为 1，则 $resf(1)=1$，

根据全平面的留数之和为零，知 $resf(\infty)=-resf(1)=-1$

（3）$\dfrac{e^z-1}{\sin^3 z}$，在 $z=0$

解：$e^z-1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}-1=z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots$

$$\sin^3 z=[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}]^3=(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots)^3$$

则 $\sin^{-3} z=(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots)^{-3}=z^{-3}[1+(-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\ldots)]^{-3}$

$$=z^{-3}[1+(-3)(-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\ldots)+\frac{-3\cdot(-4)}{2}(-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\ldots)^2+\ldots]$$

$$=z^{-3}+\frac{1}{2}z^{-1}+c_1 z+c_3 z^3+\ldots$$

（上式中倒数第二步用了二项式定理，最后一步不需要写出很多项，只要写出对最后 $f(z)=(e^z-1)\sin^{-3} z$ 的展开式中的 z^{-1} 项有贡献的项就够了，可以看出，对最后 $f(z)=(e^z-1)\sin^{-3} z$ 的展开式中的 z^{-1} 项有贡献的项其实只有第一项 z^{-3}）

至此，可断定函数 $f(z)=(e^z-1)\sin^{-3} z$ 的展开式中 z^{-1} 项的系数为 $\frac{1}{2}$

所以 $resf(0)=\frac{1}{2}$

解法之二：

$f(z)=\frac{e^z-1}{\sin^3 z}=\frac{\frac{1}{\sin^3 z}}{\frac{1}{e^z-1}}=\frac{f(z)}{y(z)}$， 其中 $f(z)=\frac{1}{\sin^3 z}$， 以 $z=0$ 为 3 阶极点；$y(z)=\frac{1}{e^z-1}$，以 $z=0$ 为一阶极点，则 $f(z)$ 以 $z=0$ 为二阶极点。（这里用到一个结论：设函数 $f(z)$ 与 $y(z)$ 分别以 $z=a$ 为 m 阶与 n 阶极点，若 $m>n$，则函数 $\frac{f(z)}{y(z)}$ 以 $z=a$ 为 $m-n$ 阶极点。）

则由计算留数的公式，有：$resf(0)=\frac{d}{dz}[\frac{z^2(e^z-1)}{\sin^3 z}]_{z=0}$ ，得到一阶导数表达式后，令 $z\to 0$，取极限，并连续四次运用罗必塔法则，就得到 $resf(0)=\frac{1}{2}$

相比之下，第一种解法比较简单。

（4）$\dfrac{z}{\cos z}$ ，在 $z=(2k+1)\dfrac{p}{2}$ （$k=0,\pm1,\pm2...$）

解：函数 $f(z)=\dfrac{z}{\cos z}$ 的奇点为 $z=(2k+1)\dfrac{p}{2}$ （$k=0,\pm1,\pm2...$）；

函数 $\dfrac{1}{f(z)}=\dfrac{\cos z}{z}$ 以 $z=(2k+1)\dfrac{p}{2}$ 为一阶零点，所以，$z=(2k+1)\dfrac{p}{2}$ 为函数 $f(z)=\dfrac{z}{\cos z}$ 的单极点。

将函数记作：$f(z)=\dfrac{f(z)}{y(z)}$，其中 $f(z)=z$，$y(z)=\cos z$，运用单极点的留数公式：$resf(b)=\dfrac{f(b)}{y'(b)}$ 得到

$$resf((2k+1)\frac{p}{2})=\frac{(2k+1)\frac{p}{2}}{-\sin(2k+1)\frac{p}{2}}=\frac{(2k+1)\frac{p}{2}}{-(-1)^k}=(-1)^{k+1}(2k+1)\frac{p}{2}$$

2.求下列函数在其孤立奇点和无穷远点的留数

（3）$\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$

解：奇点为 $z=-1$，是 3 阶极点。

$$resf(-1)=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}[(z+1)^3 f(z)]_{z=-1}=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}[\sin 2z]_{z=-1}=2\sin 2$$

根据全平面的留数之和为零，知 $resf(\infty)=-resf(-1)=-2\sin 2$

（5）$\dfrac{z^2+1}{e^z}$

解：函数在全平面只有一个奇点 $z=\infty$，根据全平面的留数之和为零，知 $resf(\infty)=0$

（6）$\cos\sqrt{\dfrac{1}{z}}$

解：函数的奇点为 $z=0$，将函数在 $z=0$ 的去心邻域展开，得

$$\cos\sqrt{\frac{1}{z}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\sqrt{\frac{1}{z}})^{2k}}{(2k)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{-k}}{(2k)!}\qquad z^{-1}\text{的系数为：}C_{-1}=-\frac{1}{2}$$

所以 $resf(0)=-\dfrac{1}{2}$ ， $resf(\infty)=\dfrac{1}{2}$

2.计算下列围道积分

（2） $\displaystyle\oint_l\frac{zdz}{(z-1)(z-2)^2}\qquad l:|z-2|=\frac{1}{2}$

解：函数 $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ 的奇点有两个：$z_1=2$ 和 $z_2=1$，其中只有奇点 $z_1=2$ 在围道内，它是2阶极点。

$$resf(2)=\frac{d}{dz}[(z-2)^2f(z)]_{z=2}=\frac{d}{dz}[\frac{z}{z-1}]_{z=2}=-1$$

由留数定理， $\displaystyle\oint_l\frac{zdz}{(z-1)(z-2)^2}=-2pi$

（3） $\displaystyle\oint_l\frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$ ， $l:\ |z|=2$

解：函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-3)(z^5-1)}$ 的奇点为： $z=3$ 以及 $z_k=e^{\frac{i2kp}{5}}$ （$k=0$，1,2,3,4）

奇点 $z=3$ 在围道 $|z|=2$ 之外，奇点 $z_k=e^{\frac{i2kp}{5}}$ 在围道内，即围道内有五个奇点，计算其留数时较为繁琐，根据“全平面的留数之和为零”，知

$\displaystyle\sum_{k=0}^{5}resf(z_k)+resf(3)+resf(\infty)=0$，可转为求 $resf(3)$ 和 $resf(\infty)$

$z=3$ 是单极点， $\displaystyle resf(3)=\lim_{z\to3}(z-3)f(z)=\lim_{z\to3}\frac{1}{z^5-1}=\frac{1}{242}$

对于 $resf(\infty)$ ，可将 $f(z)=\dfrac{1}{(z-3)(z^5-1)}$ 在无穷远点展开，寻找其负一次幂的系数：

$$f(z)=\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}=\frac{1}{z(1-\frac{3}{z})}\cdot\frac{1}{z^5(1-\frac{1}{z^5})}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k}{z^k}\cdot\frac{1}{z^5}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{5k}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k}{z^{k+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{5(k+1)}}$$

$$=(\frac{1}{z}+\frac{3}{z^2}+...)(\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^{10}}+...)$$

可见，展开式中没有 z^{-1} 项，所以 $resf(\infty)=-C_{-1}=0$

所以，$\sum_{k=0}^{4} resf(z_k)=-[resf(3)+resf(\infty)=0]=-\frac{1}{242}$

根据留数定理，$\oint_l\frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}=2pi\cdot\sum_{k=0}^{4}resf(z_k)=-\frac{pi}{121}$

（4） $\frac{1}{2pi}\oint_l \sin\frac{1}{z}dz \qquad l:|z|=r$

解：函数 $f(z)=\sin\frac{1}{z}$ 的奇点为 $z=0$，此题将函数直接展开求负一次幂项的系数较为方便。

利用已知的展开式 $\sin z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ ，得到

$\sin\frac{1}{z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\frac{1}{z})^{2k+1}}{(2k+1)!}$ ，其负一次幂项的系数为 $C_{-1}=1$

故 $\oint_l \sin\frac{1}{z}dz=2piresf(0)=2pi$ 则 $\frac{1}{2pi}\oint_l\sin\frac{1}{z}dz=1$

P87 习题 5.2

1.计算下列积分

（1） $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$

解：属于类型 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$，其中 $f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$，则 $f(z)=\frac{1+z^2}{1+z^4}$，满足条件：①在实轴上无奇点；②在上半平面除有限个奇点外单值解析；③当 $|z|\to\infty$ 时，$|zf(z)|\to 0$

则$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx = 2pi\{f(z)$在上半平面的奇点的留数之和$\}$

$f(z)=\frac{1+z^2}{1+z^4}$ 的奇点为：$z=e^{\frac{i(2k+1)p}{4}}$，分别为：$\begin{cases} z_1 = e^{i\frac{p}{4}} \\ z_2 = e^{i\frac{3p}{4}} \\ z_3 = e^{i\frac{5p}{4}} \\ z_4 = e^{i\frac{7p}{4}} \end{cases}$

其中，上半平面有两个奇点，分别为 $z_1 = e^{i\frac{p}{4}}$ 和 $z_2 = e^{i\frac{3p}{4}}$，它们都是函数 $f(z)$ 的单极点，由公式 $resf(b)=\frac{f(b)}{y'(b)}$，得函数在这两个奇点的留数分别为：

$$resf(z_1)=\frac{1+z_1^{\;2}}{4z_1^{\;3}}=\frac{1+e^{i\frac{p}{2}}}{4e^{i\frac{3}{4}p}}=\frac{-i}{2\sqrt{2}}$$

$$resf(z_2)=\frac{1+z_2^{\;2}}{4z_2^{\;3}}=\frac{1+e^{i\frac{3p}{2}}}{4e^{i\frac{9}{4}p}}=\frac{-i}{2\sqrt{2}}$$

则$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx = 2pi\{resf(z_1)+resf(z_2)\}=\sqrt{2}p$

（2） $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{irk}}{k^2+m^2}dk \qquad (r>0)$

解：属于类型$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{ipx}dx$

$f(z)=\frac{1}{z^2+m^2}$ 满足条件：①在实轴上无奇点；②在上半平面除有限个奇点外单值解析；③当$|z|\to\infty$时，$|f(z)|\to 0$

所以$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{irk}}{k^2+m^2}dk = 2pi\left\{\text{函数}\frac{e^{irz}}{z^2+m^2}\text{在上半平面的奇点的留数之和}\right\}$

函数$\frac{e^{irz}}{z^2+m^2}$在上半平面有一个奇点：$z_1 = mi$ 是单极点。由公式 $resf(b)=\frac{f(b)}{y'(b)}$，

得函数在这个奇点的留数为：

$$res[\frac{e^{irz}}{z^2+m^2}, z_1] = \frac{e^{irz_1}}{2z_1} = \frac{e^{irmi}}{2mi} = \frac{e^{-mr}}{2mi}$$

则 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{irk}}{k^2+m^2} dk = 2pi \cdot \frac{e^{-mr}}{2mi} = \frac{pe^{-mr}}{m}$

（3） $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^4} dx \qquad (a>0)$

解：属于类型 $\int_0^{\infty} f(x)\cos pxdx$ 其中 $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ 是偶函数。$f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ 满足条件：①在实轴上无奇点；②在上半平面除有限个奇点外单值解析；③当 $|z| \to \infty$ 时，$|f(z)| \to 0$

所以 $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^4} dx = pi\left\{函数 \frac{e^{iaz}}{1+z^4} 在上半平面的奇点的留数之和\right\}$

函数 $\frac{e^{iaz}}{1+z^4}$ 在上半平面有两个奇点：分别为 $z_1 = e^{i\frac{p}{4}}$ 和 $z_2 = e^{i\frac{3p}{4}}$，它们都是函数 $f(z)$ 的单极点，由公式 $resf(b) = \frac{f(b)}{y'(b)}$，得函数在这两个奇点的留数分别为：

$$resf(z_1) = \frac{e^{iaz_1}}{4z_1^3} = \frac{e^{ia(\cos\frac{p}{4}+i\sin\frac{p}{4})}}{4e^{i\frac{3}{4}p}}$$

$$resf(z_2) = \frac{e^{iaz_2}}{4z_2^3} = \frac{e^{ia(\cos\frac{3p}{4}+i\sin\frac{3p}{4})}}{4e^{i\frac{9}{4}p}}$$

化简整理得： $resf(z_1)+resf(z_2) = \frac{-i}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}(\cos\frac{a}{\sqrt{2}}+\sin\frac{a}{\sqrt{2}})$

所以 $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^4} dx = pi\{resf(z_1)+resf(z_2)\} = \frac{p}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}(\cos\frac{a}{\sqrt{2}}+\sin\frac{a}{\sqrt{2}})$

（4） $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+a^2}\sin bxdx \qquad (a>0, b>0)$

解：属于类型$\int_0^{\infty} f(x)\sin pxdx$ 其中$f(x)=\dfrac{x}{x^2+a^2}$ 是奇函数；$f(z)=\dfrac{z}{z^2+a^2}$，满足条件：①在实轴上无奇点；②在上半平面除有限个奇点外单值解析；③当$|z|\to\infty$时，$|f(z)|\to 0$

所以$\int_0^{\infty}\dfrac{x}{x^2+a^2}\sin bxdx = p\left\{函数\dfrac{ze^{ibz}}{z^2+a^2}在上半平面的奇点的留数之和\right\}$

函数$\dfrac{ze^{ibz}}{z^2+a^2}$在上半平面有一个奇点：$z_1=ai$ 是单极点。由公式$resf(b)=\dfrac{f(b)}{y'(b)}$，得函数在这个奇点的留数为：

$$res[\frac{ze^{ibz}}{z^2+a^2},z_1]=\frac{z_1e^{ibz_1}}{2z_1}=\frac{e^{-ab}}{2}$$

则$\int_0^{\infty}\dfrac{x}{x^2+a^2}\sin bxdx=\dfrac{pe^{-ab}}{2}$

2．求下列积分：

（1）$\int_0^{2p}\dfrac{1}{1-2b\cos q+b^2}dq \qquad |b|<1$

解：属于类型$\int_0^{2p}R(\cos q,\sin q)dq$

令$z=e^{iq}$，则$\cos q=\dfrac{1}{2}(z+z^{-1})$， $dq=\dfrac{dz}{iz}$

代入被积函数中，并化简整理，得到关于 z 的函数的围道积分：

$$\int_0^{2p}\frac{1}{1-2b\cos q+b^2}dq=\oint_{|z|=1}f(z)dz=\oint_{|z|=1}\frac{i}{bz^2-(b^2+1)z+b}dz=\oint_{|z|=1}\frac{i}{b[z^2-(b+\frac{1}{b})z+1]}dz$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{i}{b(z-b)(z-\frac{1}{b})}dz=2pi\{函数在围道内奇点的留数之和\}$$

被积函数有两个奇点$z_1=b$， $z_2=\dfrac{1}{b}$， 由于$|b|<1$，所以在围道内只有一个奇点$z_1=b$，是单极点。$resf(b)=\lim\limits_{z\to b}(z-b)\cdot f(z)=\lim\limits_{z\to b}\dfrac{i}{b(z-\frac{1}{b})}=\dfrac{i}{b^2-1}$

则$\int_0^{2p}\dfrac{1}{1-2b\cos q+b^2}dq=2pi\cdot\dfrac{i}{b^2-1}=\dfrac{2p}{1-b^2}$

（2） $\int_0^{2p} \frac{1}{1+\cos^2 q} dq$

解：将 $\cos^2 q = \frac{1}{2}(1+\cos 2q)$ **代入，得**

$$\int_0^{2p} \frac{1}{1+\cos^2 q} dq = \int_0^{2p} \frac{2}{3+\cos 2q} dq = \int_0^{2p} \frac{1}{3+\cos 2q} d(2q) = \int_0^{4p} \frac{1}{3+\cos\Theta} d\Theta$$

$$= 2\int_0^{2p} \frac{1}{3+\cos\Theta} d\Theta$$

在上式中记 $2q = \Theta$，

令 $z = e^{i\Theta}$，则 $\cos\Theta = \frac{1}{2}(z+z^{-1})$， $d\Theta = \frac{dz}{iz}$

代入被积函数中，并化简整理，得到关于 z 的函数的围道积分：

$$\int_0^{2p} \frac{1}{3+\cos\Theta} d\Theta = \oint_{|z|=1} \frac{-2i}{z^2+6z+1} dz$$

函数 $f(z) = \frac{-2i}{z^2+6z+1}$ 有两个奇点，分别是 $z_1 = -3+2\sqrt{2}$， $z_2 = -3-2\sqrt{2}$

围道内只有一个奇点 $z_1 = -3+2\sqrt{2}$，

$$resf(z_1) = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z) = \lim_{z\to z_1}\frac{-2i}{z-z_2} = \frac{-2i}{z_1-z_2} = \frac{-i}{2\sqrt{2}}$$

$$\int_0^{2p} \frac{1}{3+\cos\Theta} d\Theta = \oint_{|z|=1} \frac{-2i}{z^2+6z+1} dz = 2piresf(z_1) = \frac{p}{\sqrt{2}}$$

则 $\int_0^{2p} \frac{1}{1+\cos^2 q} dq = 2\int_0^{2p} \frac{1}{3+\cos\Theta} d(\Theta) = \frac{2p}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}p$

（3） $\int_0^{\frac{p}{2}} \frac{1}{a+\sin^2 x} dx \qquad (a>0)$

解：将 $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ 代入，得

$$\int_0^{\frac{p}{2}} \frac{1}{a+\sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{1}{a+\frac{1}{2}(1-\cos 2x)} dx = \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{1}{2a+1-\cos 2x} d2x = \int_0^{p} \frac{1}{2a+1-\cos q} dq$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2p} \frac{1}{2a+1-\cos q} dq$$

在上式中，已记 $2x = q$

令 $z=e^{iq}$，则 $\cos q=\frac{1}{2}(z+z^{-1})$， $dq=\frac{dz}{iz}$

代入被积函数中，并化简整理，得到关于 z 的函数的围道积分：

$$\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{1}{a+\sin^2 x}dx==\frac{1}{2}\int_0^{2p}\frac{1}{2a+1-\cos q}dq=i\oint_{|z|=1}\frac{1}{z^2-(4a+2)z+1}dz$$

函数 $f(z)=\frac{1}{z^2-(4a+2)z+1}$ 有两个奇点 $z_1=2a+1-2\sqrt{a(a+1)}$，

$z_2=2a+1+2\sqrt{a(a+1)}$，围道内仅有一个单极点 $z_1=2a+1-2\sqrt{a(a+1)}$

$$resf(z_1)=\lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z)=\lim_{z\to z_1}\frac{1}{z-z_2}=\frac{1}{z_1-z_2}=\frac{1}{-4\sqrt{a(a+1)}}$$

$$\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{1}{a+\sin^2 x}dx=i\oint_{|z|=1}\frac{1}{z^2-(4a+2)z+1}dz=i2pi\frac{1}{-4\sqrt{a(a+1)}}=\frac{p}{2\sqrt{a(a+1)}}$$

（4） $\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$

解： 由第（2）题已经解出 $\int_0^{2p}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx=\sqrt{2}p$

$$\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx=\frac{1}{4}\int_0^{2p}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\sqrt{2}}{4}p$$

P92 习题 5.3

3.计算下列积分

(1) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4-1}$

解：属于类型 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$，其中 $f(x)=\frac{1}{x^4-1}$，则 $f(z)=\frac{1}{z^4-1}$，它有四个奇点，

分别是：$z_1=1$，$z_2=-1$，$z_3=i$，$z_4=-i$，满足条件：①在实轴上有有限个单极点；②在上半平面有有限个奇点；除此之外单值解析；③当 $|z|\to\infty$ 时，$|zf(z)|\to 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4-1}=2piresf(i)+pi\{resf(1)+resf(-1)\}$$

$$resf(i)=resf(i)=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\lim_{z\to i}\frac{1}{(z-1)(z+1)(z+i)}=\frac{i}{4}$$

$$resf(1)=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{1}{(z+1)(z^2+1)}=\frac{1}{4}$$

$$resf(-1)=\lim_{z\to -1}(z+1)f(z)=\lim_{z\to -1}\frac{1}{(z-1)(z^2+1)}=-\frac{1}{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4-1}=2pi\frac{i}{4}+pi\left\{\frac{1}{4}+(-\frac{1}{4})\right\}=-\frac{p}{2}$$

（2） $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x(x+1)(x^2+1)}$

解：属于类型$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$，其中 $f(x)=\frac{1}{x(x+1)(x^2+1)}$， 则 $f(z)=\frac{1}{z(z+1)(z^2+1)}$，

满足条件：①在实轴上有有限个单极点；②在上半平面有有限个奇点；除此之外单值解析；③当$|z|\to\infty$时，$|zf(z)|\to 0$

函数 $f(z)$在实轴上有两个单极点 $x=0$ 和 $x=-1$；在上半平面有一个奇点 $z=i$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x(x+1)(x^2+1)}=2piresf(i)+pi\{resf(0)+resf(-1)\}$$

$$resf(i)=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\lim_{z\to i}\frac{1}{z(z+1)(z+i)}=\frac{i-1}{4}$$

$$resf(0)=\lim_{z\to 0}(z-0)f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{(z+1)(z^2+1)}=1$$

$$resf(-1)=\lim_{z\to -1}(z+1)f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z(z^2+1)}=-\frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x(x+1)(x^2+1)}=2pi\cdot\frac{i-1}{4}+pi(1-\frac{1}{2})=-\frac{p}{2}$$

2.计算下列积分

（2） $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+a^2)}dx$， $a>0$

解 ： 属 于 类 型 $\int_0^{\infty} f(x)\sin pxdx$ 其 中 $f(x)=\dfrac{1}{x(x^2+a^2)}$ 是 奇 函 数 ；

$f(z)=\dfrac{1}{z(z^2+a^2)}$，它有三个奇点：$z_1=0$；$z_2=ai$，$z_3=-ai$；满足条件：①在实轴上有有限个单极点；②在上半平面除有限个奇点外单值解析；③当$|z|\to\infty$时，$|f(z)|\to 0$

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+a^2)}dx = presF(ai)+\frac{p}{2}resF(0)$$，其中 $F(z)=f(z)e^{iz}=\dfrac{e^{iz}}{z(z^2+a^2)}$

$$resF(ai)=\lim_{z\to ai}(z-ai)F(z)=\lim_{z\to ai}\frac{e^{iz}}{z(z+ai)}=-\frac{e^{-a}}{2a^2}$$

$$resF(0)=\lim_{z\to 0}(z-0)F(z)=\lim_{z\to 0}\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}=\frac{1}{a^2}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+a^2)}dx = p\cdot(-\frac{e^{-a}}{2a^2})+\frac{p}{2}\cdot\frac{1}{a^2}=\frac{p}{2a^2}(1-e^{-a})$$

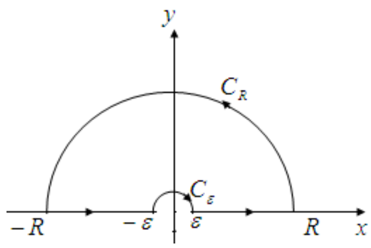
(4) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx \qquad a\ge 0,\ b\ge 0$

解： 因为 $z=0$ 是实轴上的 2 阶极点，所以此题不能套用已有的那些公式，只能按最基本的方法构造一个合适的围道来求解。

此题还要用到小圆弧引理：

设 C_r 是以 $z=a$ 为圆心，r 为半径，夹角为 q_2-q_1 的圆弧，即 $z-a=re^{iq}$ $(q_1\le q\le q_2)$，若函数 $f(z)$ 在 $z=a$ 点的去心邻域内连续，且 $\lim\limits_{r\to 0}[(z-a)f(z)]=l$，（$l$ 为常数，包括 0），则 $\lim\limits_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)dz = il(q_2-q_1)$

积分沿逆时针方向进行。（详见教材 P91 图 5.8）



对于本题，考虑 函数 $f(z)=\dfrac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z^2}dz$

沿图示围线的围道积分，因函数在围道内解析，故

$$\oint_l\frac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z^2}dz=\int_{-R}^{-e}\frac{e^{iax}-e^{ibx}}{x^2}dx+\int_{C_e}\frac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z^2}dz+\int_e^R\frac{e^{iax}-e^{ibx}}{x^2}dx+\int_{C_R}\frac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z^2}dz=0$$

①

$$\int_{-R}^{-e}\frac{e^{iax}-e^{ibx}}{x^2}dx=\int_{R}^{e}\frac{e^{ia(-x)}-e^{ib(-x)}}{(-x)^2}d(-x)=-\int_{e}^{R}\frac{e^{ia(-x)}-e^{ib(-x)}}{(-x)^2}d(-x)=\int_{e}^{R}\frac{e^{-iax}-e^{-ibx}}{x^2}dx$$

则 $\int_{-R}^{-e}\frac{e^{iax}-e^{ibx}}{x^2}dx+\int_{e}^{R}\frac{e^{iax}-e^{ibx}}{x^2}dx=\int_{e}^{R}\frac{e^{-iax}-e^{-ibx}}{x^2}dx+\int_{e}^{R}\frac{e^{iax}-e^{ibx}}{x^2}dx$

$$=2\int_{e}^{R}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx \qquad ②$$

对于 $\int_{C_e}\frac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z^2}dz$

由于 $\lim\limits_{e\to 0}[(z-0)f(z)]=\lim\limits_{e\to 0}[z\cdot\frac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z^2}]\overset{\text{罗比塔法则}}{=}\lim\limits_{e\to 0}\frac{iae^{iaz}-ibe^{ibz}}{1}=i(a-b)$

故由小圆弧引理有

$$\lim_{e\to 0}\int_{C_e}\frac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z^2}dz=-ip\cdot i(a-b)=p(a-b) \qquad ③$$

对于 $\int_{C_R}\frac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z^2}dz$，由约当引理有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iaz}}{z^2}dz=0 \quad ; \quad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{ibz}}{z^2}dz=0 \qquad ④$$

综上，将②③④代入①，得

$2\int_{e}^{R}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx+p(a-b)=0$ ，故得 $\int_{e}^{R}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx=\frac{p}{2}(b-a)$