数学物理方法

Methods in Mathematical Physics

第十四章 勒让德多项式

Legendre polynomial

武汉大学物理科学与技术学院

第十四章 勒让德多项式

Legendre polynomial

§14.3 球函数

Spherecal harmonics

—缔合勒让德方程的解

问题的引入：

由第二篇第八章分离变量法有：

$$\Delta u=0 \xrightarrow{\text{令}u=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)}$$

$$r^2R''+2rR'-l(l+1)R=0\rightarrow R(r)=c_l r^l+d_l r^{-(l+1)}$$

$$\Phi''+m^2\Phi=0\rightarrow\Phi_m(\varphi)=A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta=0\rightarrow\Theta(\theta)=?$$

$$\text{令 }x=\cos\theta,\ y(x)=\Theta(\theta)$$

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0\rightarrow y(x)=?$$

问题的引入：

物理背景：

半径为a的均匀球，表面温度保持$u_0 \sin^2\theta \cos 2\varphi$，$u_0$一常数，求球内稳定温度分布。

$$\begin{cases} \Delta u(r,\theta,\varphi)=0, r<a & (1) \\ u\big|_{r=a}=u_0 \sin^2\theta\cos 2\varphi & (2) \end{cases}$$

$$u(r,\theta,\varphi)=?,\quad r<a$$

一、缔合勒让德方程的本征值问题

1、缔合勒让德函数

$$\begin{cases}\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\left[l(l+1)-\dfrac{m^2}{1-x^2}\right]y=0 & (1)\\ y\big|_{x=\pm1}\to 有限, & x=0-常点\end{cases}$$

令 $y(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}v(x)$ (2)， 代入(1)得:

$$\left(1-x^2\right)v''(x)-2(m+1)x\,v'(x)+\left[l(l+1)-m(m+1)\right]v=0 \quad (3)$$

又 $\left(1-x^2\right)p_l''(x)-2xP_l'(x)+l(l+1)P_l(x)=0$ (4)

$$\frac{d^m}{dx^m}(4):\ \boxed{\begin{aligned}&\left(1-x^2\right)\left[P_l^{(m)}(x)\right]''-2(m+1)x\left[P_l^{(m)}(x)\right]'\\&\qquad+\left[l(l+1)-m(m+1)\right]P_l^{(m)}(x)=0 \quad (5)\end{aligned}}$$

对比(3)(5）式: $v(x)=P_l^{(m)}(x)\to$

一、缔合勒让德方程的本征值问题

1、缔合勒让德函数

$$\begin{cases}\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\left[l(l+1)-\dfrac{m^2}{1-x^2}\right]y=0 & (1)\\ y\big|_{x=\pm1}\to 有限,\end{cases}$$

记 $\boxed{p_l^m(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}p_l^{(m)}(x)}$ —称为缔合Legendre函数

本征值： $\boxed{l(l+1),\ l=0,1,2,\cdots}$

本征函数： $\boxed{y(x)=P_l^m(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\dfrac{d^m}{dx^m}P_l(x),m=0,1,\ldots l\ (6)}$

一、缔合勒让德方程的本征值问题

$$\boxed{y(x)=P_l^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x),\, m=0,1,\ldots l \quad (6)}$$

$$P_l^0(x)=P_l(x)$$

$$P_1^1(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}P_1(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}, \quad or \ p_1^1(\cos\theta)=\sin\theta$$

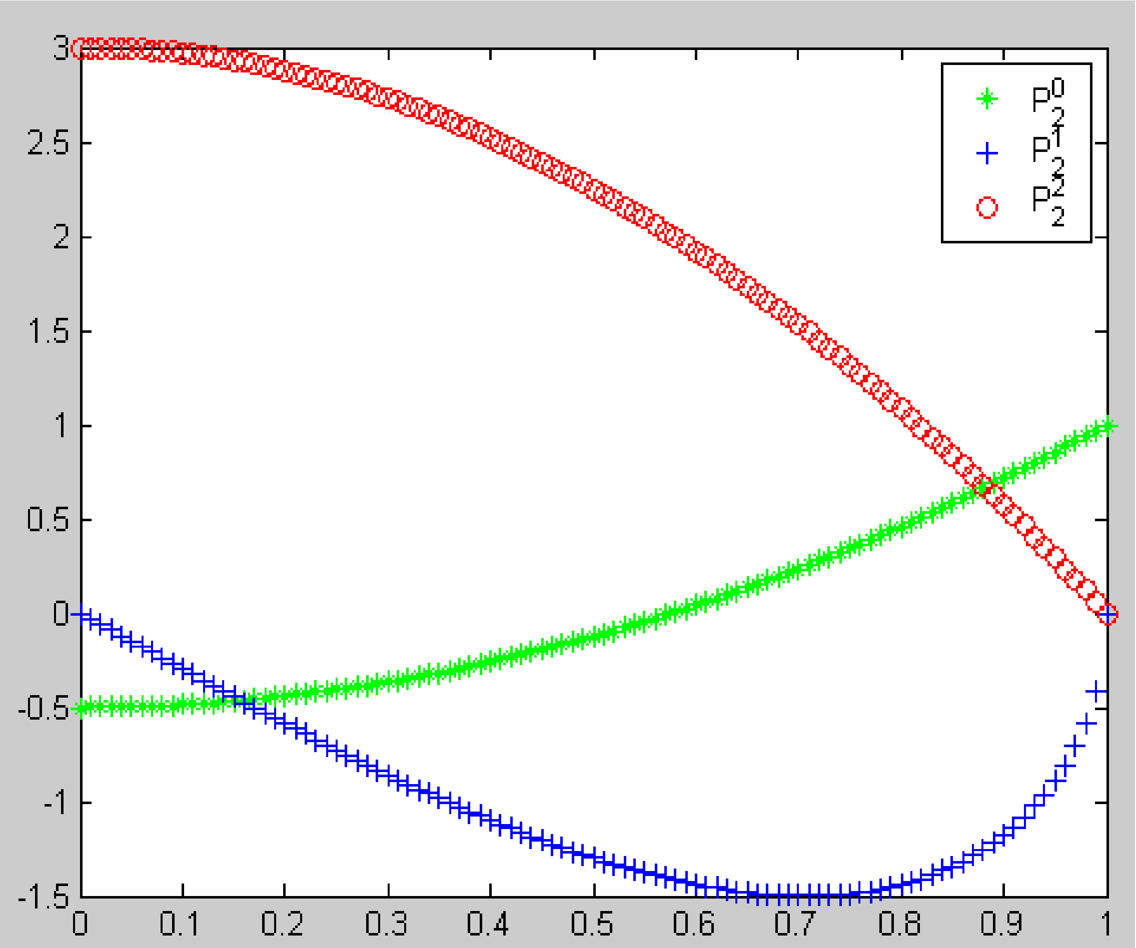
$$p_2^1(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}P_2(x)=3(1-x^2)^{\frac{1}{2}}x, \ or \ p_2^1(\cos\theta)=\frac{3}{2}\sin 2\theta$$

$$P_2^2(x)=(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}p_2(x)=3(1-x^2), \quad or \ P_2^2(\cos\theta)=3\sin^2\theta$$

$$\boxed{P_0(x)=1, \quad P_1(x)=x, \; p_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1), \; p_l(1)\equiv 1}$$

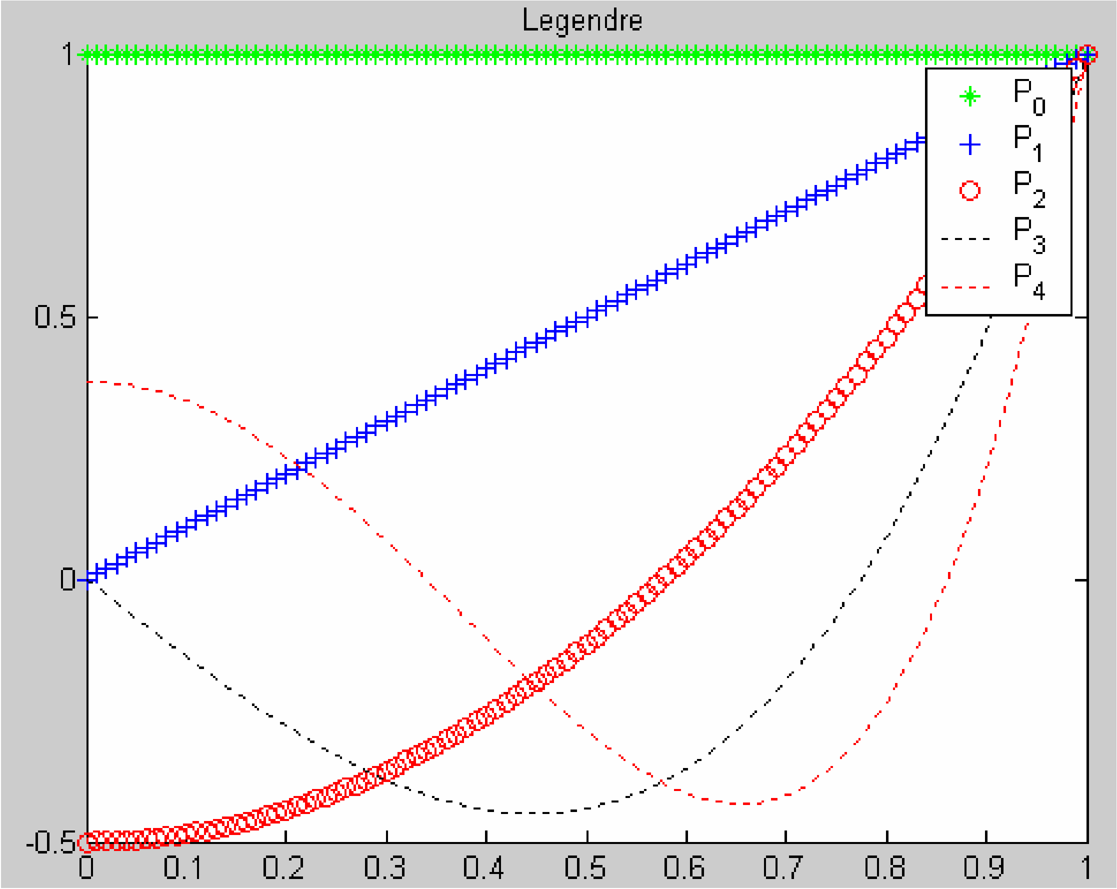
一、缔合勒让德方程的本征值问题

二阶缔合勒让德函数图形



一、缔合勒让德方程的本征值问题

对比0-4阶勒让德函数图形：



一、缔合勒让德方程的本征值问题

2、缔合勒让德函数$P_l^m(x)$的微分式

$$P_l^m(x)=\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}\left(x^2-1\right)^l \qquad (7)$$

$$P_l^{-m}(x)=\frac{\left(1-x^2\right)^{-\frac{m}{2}}}{2^l l!}\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}\left(x^2-1\right)^l$$

$$P_l^{-m}(x)=(-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x)$$

3、缔合勒让德函数$P_l^m(x)$的积分式

$$P_l^m(x)=\frac{\left(1-x^2\right)^{-\frac{m}{2}}}{2^l l!}\frac{(l+m)!}{2\pi i}\oint_{l^*}\frac{\left(\xi^2-1\right)^l}{(\xi-x)^{l+m+1}}d\xi \qquad (8)$$

二、缔合勒让德函数的性质

1、母函数关系式：

$$\frac{(2m-1)!!}{(1-2xt+t^2)^{m+1/2}}=\sum_{l=m}^{\infty}p_l^m(x)t^{l-m}$$

2. 递推公式：

$$\boxed{(l+1-m)P_{l+1}^m(x)-(2l+1)xP_l^m(x)+(l+m)P_{l-1}^m(x)=0 \quad (9)}$$

$$\because (l+1)P_{l+1}(x)-(2l+1)xP_l(x)+lP_{l-1}(x)=0 \qquad (A)$$

$$\frac{d^m}{dx^m}(A):\quad (l+1)P_{l+1}^{(m)}(x)-(2l+1)xP_l^{(m)}(x)$$

$$\underline{-m(2l+1)P_l^{(m-1)}(x)}+lP_{l-1}^{(m)}(x)=0 \qquad (10)$$

又 $(2l+1)P_l(x)=P'_{l+1}(x)-P'_{l-1}(x)$

$$\therefore\quad -m(2l+1)P_l^{(m-1)}(x)=-mp_{l+1}^{(m)}(x)+mp_{l-1}^{(m)}(x) \qquad (11)$$

$$[(11)\text{代入}(10)]\cdot(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\Rightarrow \quad (9)$$

二、缔合勒让德函数的性质

3、正交性

$$\boxed{\int_{-1}^{1} P_l^m(x) P_k^m(x) dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{kl}}$$

证明：记 $I_{l,k}^m = \int_{-1}^{1} P_l^m(x) P_k^m(x) dx$

$$= \int_{-1}^{1} (1-x^2)^m P_l^{(m)}(x) \frac{d}{dx} P_k^{(m-1)}(x) d\,x$$

$$= (1-x^2)^m P_l^{(m)}(x) P_k^{(m-1)}(x) \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_k^{(m-1)}(x) \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^m P_l^{(m)}(x)\right] d\,x$$

$$= -\int_{-1}^{1} P_k^{(m-1)}(x) \underline{\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^m P_l^{(m)}(x)\right] d\,x}$$

二、缔合勒让德函数的性质

又：

$$\boxed{\left(1-x^2\right)\left[P_l^{(m)}(x)\right]''-2x(m+1)\left[P_l^{(m)}(x)\right]' +\left[l(l+1)-m(m+1)\right]P_l^{(m)}(x)=0 \quad (5)}$$

$$(5)\cdot\left(1-x^2\right)^m:$$

$$\left(1-x^2\right)^{m+1}P_l^{(m+2)}(x)-2x(m+1)\left(1-x^2\right)^m P_l^{(m+1)}(x) +\left[l(l+1)-m(m+1)\right]\left(1-x^2\right)^m P_l^{(m)}(x)=0$$

即 $$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)^{m+1}P_l^{(m+1)}(x)\right] =-\left[l(l+1)-m(m+1)\right]\left(1-x^2\right)^m P_l^{(m)}(x)$$

亦即 $$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)^{m}P_l^{(m)}(x)\right] =-\left[l(l+1)-m(m-1)\right]\left(1-x^2\right)^{m-1} P_l^{(m-1)}(x)$$

二、缔合勒让德函数的性质

3、正交性

$$\boxed{\int_{-1}^{1} P_l^m(x)P_k^m(x)dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{kl}}$$

证明：记 $I_{l,k}^m = \int_{-1}^{1} P_l^m(x)P_k^m(x)dx$

$$= \int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^m P_l^{(m)}(x)\frac{d}{dx}P_k^{(m-1)}(x)d\,x$$

$$= \left(1-x^2\right)^m P_l^{(m)}(x)P_k^{(m-1)}(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_k^{(m-1)}(x)\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)^m P_l^{(m)}(x)\right]d\,x$$

$$= -\int_{-1}^{1} P_k^{(m-1)}(x)\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)^m P_l^{(m)}(x)\right]d\,x$$

$$= \left[l(l+1)-m(m-1)\right]\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{m-1} P_l^{(m-1)}(x)P_k^{(m-1)}(x)d\,x$$

$$= \left[l(l+1)-m(m-1)\right]I_{l,k}^{m-1} \quad = (l+m)(l-m+1)I_{l,k}^{m-1}$$

二、缔合勒让德函数的性质

3、正交性:

记 $I_{l,k}^{m}=\int_{-1}^{1}P_l^m(x)P_k^m(x)dx$

$$=(l+m)(l-m+1)I_{l,k}^{m-1}$$

$$=\underline{(l+m)}(l-m+1)\underline{(l+m-1)}(l-m+2)I_{l,k}^{m-2}$$

$$=[(l+m)(l+m-1)\cdots(l+m-m+1)]$$

$$\cdot[(l-m+1)(l-m+2)\cdots(l-m+m)]I_{l,k}^{m-m}$$

$$=\frac{(l+m)!}{l!}\frac{l!}{(l-m)!}\int_{-1}^{1}P_l(x)P_k(x)dx$$

$$\boxed{\int_{-1}^{1}P_l^m(x)P_k^m(x)dx=\begin{cases}0, l\neq k\\ \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}, l=k\end{cases}}$$

二、缔合勒让德函数的性质

4、广义傅氏展开

$$\boxed{f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}C_l^m P_l^m(x),}$$

$$\boxed{C_l^m=\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_l^m(x)dx}$$

二、缔合勒让德函数的性质

$$P_2^2(\cos\theta)=3\sin^2\theta$$

4. 例题： 半径为a的均匀球，表面温度保持 $u_0\sin^2\theta\cos 2\varphi, u_0$—常数，求球内稳定温度分布。

解：

$$\begin{cases}\Delta u(r,\theta,\varphi)=0, r<a & (1)\\ u\big|_{r=a}=u_0\sin^2\theta\cos 2\varphi & (2)\end{cases}$$

$$u=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(A_l^m\cos m\varphi+B_l^m\sin m\varphi\right)r^l P_l^m(\cos\theta)$$

$$\to\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(A_l^m a^l\cos m\varphi+B_l^m a^l\sin m\varphi\right)P_l^m(\cos\theta)$$

$$=u_0\sin^2\theta\cos 2\varphi=\frac{1}{3}u_0P_2^2(\cos\theta)\cos 2\varphi$$

$$\therefore A_2^2a^2=\frac{1}{3}u_0, A_l^m a^l=0(m,l\neq 2), B_l^m a^l\equiv 0$$

即 $A_2^2=\dfrac{u_0}{3a^2}, A_l^m=0(l,m\neq 2), B_l^m\equiv 0\to$ $\boxed{u(r,\theta,\varphi)=\dfrac{u_0r^2}{a^2}\sin^2\theta\cos 2\varphi}$

三、球函数

1. 定义: $\Delta u=0 \xrightarrow{\text{令}u=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)}$

$$u_{l,m}=\left(c_l r^l+d_l r^{-(l+1)}\right)\underline{\left(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi\right)P_l^m(\cos\theta)}$$

记 $y_l^m(\theta,\varphi)=P_l^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}, m=0,1,\cdots,l;\ l=0,1,\cdots$

$$\boxed{\text{或}\quad y_l^m(\theta,\varphi)=P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}, m=0,\pm1,\ldots,\pm l}$$

–称之为l阶球函数

(独立的$y_l^m(\theta,\varphi)$共有$2l+1$个)

$$\boxed{u=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(c_l r^l+d_l r^{-(l+1)}\right)y_l^m(\theta,\varphi)}$$

三、球函数

$$P_2^2(\cos\theta)=3\sin^2\theta$$

2、性质

(1) 正交归一性：定义归一化的球函数为：

$$y_{l,m}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

$$m=0,\pm1,\ldots,\pm l;\ l=0,1,\ldots$$

易于证明：

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}y_{l,m}(\theta,\varphi)\overline{y_{k,n}(\theta,\varphi)}\sin\theta d\varphi d\theta=\delta_{kl}\delta_{nm}$$

$$y_{l,-m}(\theta,\varphi)=(-1)^m\overline{y_{l,m}(\theta,\varphi)}$$

$$y_{0,0}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}},\ y_{1,\pm1}=\mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\varphi},\ y_{2,\pm2}=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm i2\varphi}$$

三、球函数

2、性质

$$\boxed{\Delta u = 0 \to u = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(c_l r^l + d_l r^{-(l+1)}\right) y_{l,m}(\theta,\varphi)}$$

（2）广义傅氏展开：

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} C_{l,m} y_{l,m}(\theta,\varphi)$$

$$C_{l,m} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)\overline{y_{l,m}(\theta,\varphi)}\sin\theta d\theta d\varphi$$

三、球函数

$$y_{l,m}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

3. 例题：用球函数重新表示上述例的解

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}C_{l,m}r^l y_{l,m}(\theta,\varphi)$$

$$u\big|_{r=a}=u_0\sin^2\theta\cos 2\varphi=\frac{u_0}{2}\sin^2\theta\left[e^{i2\varphi}+e^{-i2\varphi}\right]$$

$$=\frac{u_0}{2}\sqrt{\frac{32\pi}{15}}\left[\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\, e^{i2\varphi}+\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\, e^{-i2\varphi}\right]$$

$$=\sqrt{\frac{8\pi}{15}}u_0\left[y_{2,2}(\theta,\varphi)+y_{2,-2}(\theta,\varphi)\right]$$

$$y_{2,\pm2}=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\, e^{\pm i2\varphi}$$

$$\therefore\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}C_{l,m}a^l y_{l,m}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{8\pi}{15}}u_0\left[y_{2,2}(\theta,\varphi)+y_{2,-2}(\theta,\varphi)\right]$$

$$\therefore C_{2,2}a^2=C_{2,-2}a^2=\sqrt{\frac{8\pi}{15}}u_0 \text{ 即 } C_{2,\pm2}=\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\frac{u_0}{a^2},\ C_{l,m}\equiv 0\left(l\neq 2, m\neq\pm 2\right)$$

$$\therefore u(r,\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{8\pi}{15}}u_0\frac{r^2}{a^2}\left[y_{2,2}(\theta,\varphi)+y_{2,-2}(\theta,\varphi)\right]$$

本次课内容小结

一、$P_l(x)$:

1、母函数关系式

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)t^l,|t|<1 \quad (1)$$

2、递推公式

$$1.(l+1)P_{l+1}(x)-(2l+1)xP_l(x)+lP_{l-1}(x)=0 \quad (2)$$

$$2.(2l+1)P_l(x)=P'_{l+1}(x)-P'_{l-1}(x) \quad (3)$$

3、正交性

$$\int_{-1}^{1}P_l(x)P_k(x)dx=\frac{2}{2l+1}\delta_{kl},k,l=0,1,2,\ldots,(6)$$

4、广义傅氏展开

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}C_lP_l(x) \quad (9)$$

$$C_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_l(x)dx \quad (10)$$

本次课内容小结

二、$P_l^m(x)$:

1、$\begin{cases} (1-x^2)y''-2xy'+\left[l(l+1)-\dfrac{m^2}{1-x^2}\right]y=0 \\ y\big|_{x=\pm1} \to 有限, \end{cases}$

本征值: $\boxed{l(l+1),\ l=0,1,2,\cdots}$

本征函数: $\boxed{y(x)=P_l^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\dfrac{d^m}{dx^m}P_l(x), m=0,1,\ldots l\ (6)}$

2、$\boxed{(l+1-m)P_{l+1}^m(x)-(2l+1)xP_l^m(x)+(l+m)P_{l-1}^m(x)=0\ \ (9)}$

3、$\boxed{\int_{-1}^{1}P_l^m(x)P_k^m(x)dx=\dfrac{(l+m)!}{(l-m)!}\dfrac{2}{2l+1}\delta_{kl}}$

4、$\boxed{f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}C_l^m P_l^m(x),}$ $\boxed{C_l^m=\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}\dfrac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_l^m(x)dx}$

本次课内容小结

三、$y_{l,m}(\theta,\varphi)$:

$$y_{l,m}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

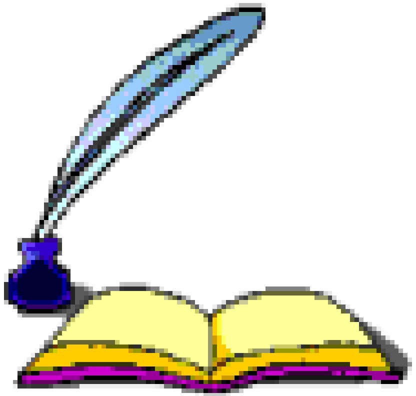
$$\Delta u=0\rightarrow u=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(c_l r^l+d_l r^{-(l+1)}\right)y_{l,m}(\theta,\varphi)$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}y_{l,m}(\theta,\varphi)\overline{y_{k,n}(\theta,\varphi)}\sin\theta d\varphi d\theta=\delta_{kl}\delta_{nm}$$

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}C_{l,m}y_{l,m}(\theta,\varphi)$$

$$C_{l,m}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)\overline{y_{l,m}(\theta,\varphi)}\sin\theta d\theta d\varphi$$

本节作业



习题14.3 ： 2

Good-by!