数理方法 CH3 作业解答

P51 习题 3.2

1. 确定下列级数的收敛半径：

（2）$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}z^k$　　　　（4）$\sum_{k=0}^{\infty}(k+a^k)z^k$

解：（2）$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}z^k$

收敛半径为：$R=\lim_{k\to\infty}|\frac{a_k}{a_{k+1}}|=\lim_{k\to\infty}|\frac{k}{2^k}/(\frac{k+1}{2^{k+1}})|=\lim_{k\to\infty}\frac{2k}{k+1}=2$

（4）$\sum_{k=0}^{\infty}(k+a^k)z^k$

解：收敛半径为：$R=\lim_{k\to\infty}|\frac{a_k}{a_{k+1}}|=\lim_{k\to\infty}|\frac{k+a^k}{(k+1)+a^{k+1}}|$若$|a|\le 1$，则

$$\lim_{k\to\infty}|\frac{k+a^k}{(k+1)+a^{k+1}}|=1$$

若$|a|>1$，则

$$\lim_{k\to\infty}|\frac{k+a^k}{(k+1)+a^{k+1}}|\overset{\text{罗比塔法则}}{=}\lim_{k\to\infty}|\frac{1+ka^{k-1}}{1+(k+1)a^k}|\overset{\text{罗比塔法则}}{=}\lim_{k\to\infty}|\frac{k(k-1)a^{k-2}}{(k+1)ka^{k-1}}|=\frac{1}{|a|}$$

2. $\sum_{k=1}^{\infty}a_kz^k$ 的收敛半径为 $R\ (0\le R<\infty)$，确定下列级数的收敛半径：

（1）$\sum_{k=0}^{\infty}k^na_kz^k$

解：收敛半径为:$\lim_{k\to\infty}|\frac{k^na_k}{(k+1)^na_{k+1}})|=\lim_{k\to\infty}|(\frac{k}{k+1})^n|\cdot|\frac{a_k}{a_{k+1}}|=\lim_{k\to\infty}|(\frac{k}{k+1})^n|\cdot\lim_{k\to\infty}|\frac{a_k}{a_{k+1}}|$

而　$\lim_{k\to\infty}|(\frac{k}{k+1})^n|=1$　　　　$\lim_{k\to\infty}|\frac{a_k}{a_{k+1}}|=R$

所以，所求收敛半径为 R

P55 习题 3.3

1.将下列函数在 $z=0$ 点展开成幂级数，并指出其收敛范围：

（1）$\dfrac{1}{(1-z)^2}$

解：解法之一：利用多项式的乘法：

	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4	z^5
z^0	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4	z^5
z^1	z^1	z^2	z^3	z^4	z^5	z^6
z^2	z^2	z^3	z^4	z^5	z^6	z^7
z^3	z^3	z^4	z^5	z^6	z^7	z^8
z^4	z^4	z^5	z^6	z^7	z^8	z^9
z^5	z^5	z^6	z^7	z^8	z^9	z^{10}

已知 $\dfrac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty} z^k \qquad |z|<1$，

$$\frac{1}{(1-z)^2}=(\sum_{k=0}^{\infty} z^k)\cdot(\sum_{k=0}^{\infty} z^k)$$

$$=1+2z+3z^2+4z^3+\ldots+(k+1)z^k+\ldots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^k$$

解法之二：逐项求导：

$$\frac{1}{(1-z)^2}=(\frac{1}{1-z})'$$

则 $\dfrac{1}{(1-z)^2}=(\sum_{k=0}^{\infty} z^k)'=\sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}==1+2z+3z^2+4z^3+\ldots+kz^{k-1}+\ldots$

由于 $\dfrac{1}{(1-z)^2}$ 在复平面内有唯一的奇点 $z=1$，它与展开中心的距离为 1，故该级数的收敛范围为 $|z|<1$

（2）$\dfrac{1}{az+b}$

解：$\dfrac{1}{az+b}=\dfrac{1}{b(1+\frac{a}{b}z)}=\dfrac{1}{b}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\frac{a}{b}z)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{a^k}{b^{k+1}}z^k$

收敛范围：$|\frac{a}{b}z|<1$ 即 $|z|<|\frac{b}{a}|$

（5）$\dfrac{1}{1+z+z^2}$

解：$\dfrac{1}{1+z+z^2}=\dfrac{1-z}{1-z^3}=\dfrac{1}{1-z^3}-\dfrac{z}{1-z^3}$

令 $t=z^3$，则 $\dfrac{1}{1-t}=\sum_{k=0}^{\infty}t^k$ ， 故

$$\frac{1}{1-z^3}=\sum_{k=0}^{\infty}z^{3k} \qquad \frac{z}{1-z^3}=\sum_{k=0}^{\infty}z^{3k+1}$$

所以，$\frac{1}{1+z+z^2}=\sum_{k=0}^{\infty}z^{3k}-\sum_{k=0}^{\infty}z^{3k+1}$ 收敛范围为$|z|<1$

2. 将下列函数按$(z-1)$的幂展开，并指明其收敛范围：

（1） $\cos z$

解： $\cos z=\cos[(z-1)+1]=\cos(z-1)\cos 1-\sin(z-1)\sin 1$

$$=\cos 1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z-1)^{2k}}{(2k)!}-\sin 1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z-1)^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \text{收敛范围：}\ |z-1|<\infty$$

3.应用泰勒级数求下列积分：

（3） $Siz=\int_0^z\frac{\sin z}{z}dz$

解：利用正弦函数的泰勒展开式：

$\sin z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ ，得到 $\frac{\sin z}{z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)!}$ 则

$$\int_0^z\frac{\sin z}{z}dz=\int_0^z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)!}dz=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^z\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)!}dz=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)}$$

4.函数$(1+z)^a$在a不等于整数时是多值函数，试证明普遍的二项式定理：

$$(1+z)^a=1^a[1+\frac{a}{1!}z+\frac{a(a-1)}{2!}z^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}z^3+\ldots]$$

式中，a为任意复数；$1^a=e^{ia2kp}$

解： $(1+z)^a=e^{aLn(1+z)}=e^{a[\ln(1+z)+i2kp]}=e^{ia2kp}\cdot e^{a\ln(1+z)}$

下面将$e^{a\ln(1+z)}$在$|z|<1$中作泰勒展开：

记 $f(z)=e^{a\ln(1+z)}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$ ， 其中，$a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

$$f'(z)=\frac{a}{1+z}e^{a\ln(1+z)}=\frac{a}{1+z}f(z) \quad ① \quad \Rightarrow \quad f'(0)=a$$

同时由①式有： $(1+z)f'(z)=af(z)$ ②

将②式两边再对z求导：

$(1+z)f''(z)+f'(z)=af'(z)$ 得到 $(1+z)f''(z)=(a-1)f'(z)$ ③

得 $f''(0)=a(a-1)$

将③式两边再对 z 求导得：

$(1+z)f^{(3)}(z)+f''(z)=(a-1)f''(z)$　得到 $(1+z)f^{(3)}(z)=(a-2)f''(z)$

得　$f^{(3)}(0)=a(a-1)(a-2)$

以此类推，得　$f^{(k)}(0)=a(a-1)(a-2)\ldots(a-k+1)$

则 $a_k=\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}=\dfrac{1}{k!}a(a-1)(a-2)\ldots(a-k+1)$

所以

$$e^{a\ln(1+z)}=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}a(a-1)(a-2)\ldots(a-k+1)z^k$$

则 $(1+z)^a=e^{ia2kp}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!}a(a-1)(a-2)\ldots(a-k+1)z^k$

$$=1^a[1+\frac{a}{1!}z+\frac{a(a-1)}{2!}z^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}z^3+\ldots]\qquad |z|<1$$

5.将 $Ln(1+z)$ 在 $z=0$ 的邻域内展开为泰勒级数。

解：$Ln(1+z)=\ln(1+z)+i2kp$

将 $\ln(1+z)$ 展开时，既可用泰勒定理直接展开，也可用逐项积分法。下面用逐项积分法：

$$\ln(1+z)=\int_0^z\frac{1}{1+z}dz=\int_0^z\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kz^kdz=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_0^zz^kdz=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{k+1}}{k+1}$$

则　$Ln(1+z)=\ln(1+z)+i2kp=2kpi+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{z^{k+1}}{k+1}$

P61 习题 3.4

3. 将函数 $\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$　$(0<|a|<|b|)$，在 $z=0$，$z=a$ 的邻域内以及在圆环 $|a|<|z|<|b|$ 内展开为洛朗级数。

解：$f(z)=\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}=\dfrac{1}{a-b}(\dfrac{1}{z-a}-\dfrac{1}{z-b})$

①在 $z=0$ 的邻域，即 $|z|<a$

$$\frac{1}{z-a}=-\frac{1}{a}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{a}}\right)=-\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^k$$

$$\frac{1}{z-b}=-\frac{1}{b}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{b}}\right)=-\frac{1}{b}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^k$$

所以 $f(z)=\frac{1}{a-b}\left(-\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^k+\frac{1}{b}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^k\right)=\frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{a^{k+1}}-\frac{1}{b^{k+1}}\right)z^k$

②在 $z=a$ 的邻域，即 $0<|z-a|<|b-a|$，

$$\frac{1}{z-b}=\frac{1}{(z-a)-(b-a)}=-\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{b-a}}=-\frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{b-a}\right)^k=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-a)^k}{(b-a)^{k+1}}$$

所以 $f(z)=-\frac{1}{z-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-a)^k}{(b-a)^{k+1}}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-a)^{k-1}}{(b-a)^{k+1}}$

③在圆环 $|a|<|z|<|b|$，

$$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{a}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{z^{k+1}}$$

$$\frac{1}{z-b}=-\frac{1}{b}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{b}}\right)=-\frac{1}{b}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^k=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{b^{k+1}}$$

所以 $f(z)=\frac{1}{a-b}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a^k}{z^{k+1}}+\frac{z^k}{b^{k+1}}\right)$

5.将函数 $f(z)=\frac{1}{z(1-z)}$ 在下列区域中展开为级数：

（1）$0<|z|<1$　　（4）$|z-1|>1$　　（6）$1<|z+1<2|$

解：（1）$0<|z|<1$

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}z^k$$

（4）$|z-1|>1$

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=-\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z-1+1}=-\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}}=-\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(z-1)^k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(z-1)^{k+2}}$$

（6）$1<|z+1|<2$

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{1-z}+\frac{1}{z}$$

其中，$\frac{1}{z}=\frac{1}{(z+1)-1}=\frac{1}{z+1}\cdot(\frac{1}{1-\frac{1}{z+1}})=\frac{1}{z+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{k+1}}$

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{2-(z+1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z+1)^k}{2^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z+1)^k}{2^{k+1}}$$

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}[\frac{1}{(z+1)^{k+1}}+\frac{(z+1)^k}{2^{k+1}}]$$

P66 习题 3.5

4.求出下列函数的奇点（包括 $z=\infty$），确定它们是哪一类的奇点（对于极点，要指出它们的阶）。

（2）$\frac{z^5}{(1-z)^2}$　　（4）$\frac{1-e^z}{1+e^z}$　　（6）z^2　　（7）$\frac{z}{z+1}$　　（8）$\frac{e^z}{1+z^2}$

解：（2）$\frac{z^5}{(1-z)^2}$

$z=1$ 为二阶极点。判据之一：$f(z)$ 在 $z=1$ 的去心邻域内能表示成 $f(z)=\frac{f(z)}{(z-1)^2}$

$z=\infty$ 为三阶极点。判据：令 $t=\frac{1}{z}$，则 $f(t)=\frac{\frac{1}{t^5}}{(1-\frac{1}{t})^2}=\frac{1}{t^3(t-1)^2}=\frac{\frac{1}{(t-1)^2}}{t^3}$，可见，$t=0$ 是函数的三阶极点，即 $z=\infty$ 是函数的三阶极点。

（4）$\dfrac{1-e^z}{1+e^z}$

解：　令分母$1+e^z=0$得到奇点：$z=(2k+1)pi$，它是一阶极点。判据：

$g(z)=\dfrac{1}{f(z)}=\dfrac{1+e^z}{1-e^z}$是以$z=(2k+1)pi$为一阶零点。

$z=\infty$为非孤立奇点。判据：令$t=\dfrac{1}{z}$，则$f(t)=\dfrac{1-e^{\frac{1}{t}}}{1+e^{\frac{1}{t}}}$，其一个奇点为$t=0$，

另外，令$1+e^{\frac{1}{t}}=0$，得到其它奇点为$t=\dfrac{1}{(2k+1)pi}$，当k足够大时，$\dfrac{1}{(2k+1)pi}$可以任意接近于零，即在$t=0$的无论多小的邻域内总可找到其它奇点，所以$t=0$是非孤立奇点，即$z=\infty$为非孤立奇点。

（6）z^2

解：$z=\infty$为二阶极点。判据：令$t=\dfrac{1}{z}$，则$f(t)=\dfrac{1}{t^2}$，显然，$t=0$是函数的二阶奇点，即$z=\infty$为二阶极点。

（7）$\dfrac{z}{z+1}$

解：$z=-1$为一阶极点；判据之一：$f(z)$在$z=-1$的去心邻域内能表示成

$f(z)=\dfrac{f(z)}{z+1}$；或者：$g(z)=\dfrac{1}{f(z)}=\dfrac{z+1}{z}$以$z=-1$为一阶零点。

$z=\infty$为可去奇点。判据：$\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z}{z+1}=1$，存在并且有限，所以，$z=\infty$为可去奇点。

（8）$\dfrac{e^z}{1+z^2}$

解：$z=\pm i$为一阶极点；判据之一：$g(z)=\dfrac{1}{f(z)}=\dfrac{1+z^2}{e^z}$以$z=\pm i$为一阶零点

$z=\infty$为本性奇点，判据之一：z沿正实轴趋于无穷时，$\lim\limits_{z\to+\infty}\dfrac{e^z}{1+z^2}=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{e^z}{2z}$

$=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{e^z}{2}=+\infty$；$z$沿负实轴趋于无穷时，$\lim\limits_{z\to-\infty}\dfrac{e^z}{1+z^2}=0$；故$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$　不存在，

所以 $z=\infty$ 为本性奇点。

7. 下列函数在指定点的去心邻域内能否展开为洛朗级数？

（1）$\cos\frac{1}{z}$， $z=0$

（2）$\cos\frac{1}{z}$， $z=\infty$

（3）$\sec\frac{1}{z-1}, z=1$

(4) $\cot z, z=\infty$

解答：

（1）$\cos\frac{1}{z}$， $z=0$

解：函数 $f(z)=\cos\frac{1}{z}$ 有唯一奇点 $z=0$，它是函数的孤立奇点，故 $f(z)=\cos\frac{1}{z}$ 能在 $z=0$ 的去心邻域 $0<|z|<\infty$ 内展开为洛朗级数。

（2）$\cos\frac{1}{z}$， $z=\infty$

解：（2）$\cos\frac{1}{z}$， $z=\infty$

解：函数 $f(z)=\cos\frac{1}{z}$ 有唯一奇点 $z=0$，它是函数的孤立奇点，故 $f(z)=\cos\frac{1}{z}$ 能在 $z=0$ 的去心邻域 $0<|z|<\infty$ 内展开为洛朗级数，这实际上等价于在无穷远点展开为洛朗级数。

（3）$\sec\frac{1}{z-1}, z=1$

解：$f(z)=\sec\frac{1}{z-1}=\frac{1}{\cos\frac{1}{z-1}}$，其奇点为 $z=1$ 和 $z=\frac{2}{(2k+1)p}+1$；k 足够大时，$\frac{2}{(2k+1)p}+1$ 可以任意接近于 1，即在 $z=1$ 的无论多小的邻域内总含有其它奇点，所以 $z=1$ 是非孤立奇点，故在 $z=1$ 的去心邻域中不能将 $f(z)$ 进行洛朗展开。

(4) $\cot z, z=\infty$

解：令 $t=\frac{1}{z}$ $f(t)=\cot\frac{1}{t}=\frac{\cos\frac{1}{t}}{\sin\frac{1}{t}}$，其奇点为 $t=0$ 和 $t=\frac{1}{kp}$， k 足够大时， $\frac{1}{kp}$ 可以任意接近于 0，即在 $t=0$ 的无论多小的邻域内总含有其它奇点，所以 $t=0$ 是非孤立奇点，即 $z=\infty$ 是非孤立奇点，故在 $z=\infty$ 不能将 $f(z)$ 进行洛朗展开。