

文章编号: 1009-4490(2002) 03-0023-06

关于塞曼效应的三种解释法的异同

苏燕飞

(广东茂名学院(光华校区)物理系,广东 茂名 525000)

摘要: 讨论塞曼效应的三种解释法的异同,发现三种解释法所得结果一致,但经典理论所得结果与其他两种理论所得结果其含义稍有差别.

关键词: 塞曼效应;能级分裂;简谐振动

中图分类号: O562 文献标识码: A

关于塞曼效应的解释,普通教材都采用半经典半量子理论和量子理论进行解释,其实也可用经典理论解释,下面分别用三种方法对塞曼效应进行解释,并讨论其异同及结果的含义.

1 塞曼效应的经典理论

在氢原子或类氢原子中,核外电子处在磁感应强度为 B 的均匀静磁场中,当它处在 r 轨道时,受原子核对它的作用力为 $F = -m k_0^2 r$,这里 k_0 是它在 r 轨道上的固有圆频率,设电子绕核运动的速率 $v \ll c$,即 $k_0 \gg \frac{eB}{m}$ 时,并且辐射阻尼力可略去,这时电子运动状态和它沿磁场方向和垂直于磁场方向发生的辐射的频率和偏振状态可求出.

根据电子运动过程中受核作用和磁场的作用可知,电子的运动方程为

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -m k_0^2 \mathbf{r} + \left| -e \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \times \mathbf{B} \quad (1.1)$$

以电子的平衡点为原点取笛卡儿坐标系,使 z 轴沿 B 的方向,则上式的三个分量应为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k_0^2 x - \left| \frac{-eB}{m} \frac{dy}{dt} \right| = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + k_0^2 y + \left| \frac{-eB}{m} \frac{dx}{dt} \right| = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + k_0^2 z = 0 \quad (1.4)$$

对 (1.2) (1.3) 两式,我们求得下列形式的解

收稿日期: 2002-01-20

作者简介: 苏燕飞 (1960-),女,广东茂名人,广东茂名学院物理系讲师,主要从事理论物理的教学和研究.

$$x = ae^{-ik_+ t} \quad (1.5)$$

$$y = a'e^{-ik_+ t} \quad (1.6)$$

式中 a, a' 是任意常数, k 为待定常数, 下面先求 k , 现将 (1.5) 和 (1.6) 代入 (1.2) 和 (1.3) 两式得

$$(k_0^2 - k^2)a + \left| \frac{-ieBk}{m} a' \right| = 0 \quad (1.7)$$

$$(k_0^2 - k^2)a' + \frac{ieBk}{m} = 0 \quad (1.8)$$

由 (1.7) 和 (1.8) 得

$$(k_0^2 - k^2)^2 = \left| \frac{-eBk}{m} \right|^2 \quad (1.9)$$

所以

$$k_0^2 - k^2 = \mp \left| \frac{eBk}{m} \right| \quad (1.10)$$

即

$$k = \pm \frac{eB}{2m} \pm \sqrt{k_0^2 + \left| \frac{eB}{2m} \right|^2} \quad (1.11)$$

因 $k > 0$, 故上式根号前只能取正号, 又因 $k_0 \gg \frac{eB}{m}$, 故 $\left| \frac{eB}{2m} \right|^2$ 项可略去, 于是得

$$k = k_0 \pm \frac{eB}{2m} \quad (1.12)$$

最后便得所求的圆频率为

$$\left| \begin{array}{l} k_+ = k_0 + \frac{eB}{2m} \\ k_- = k_0 - \frac{eB}{2m} \end{array} \right. \quad (1.13)$$

$$(1.14)$$

现再求 a 与 a' 的关系, 由 (1.7) 式得

$$a = + \frac{ieBk}{m(k_0^2 - k^2)} a' \quad (1.15)$$

对 k_+ 来说由 (1.10)、(1.13)、(1.15) 得

$$a' = -ia \quad (1.16)$$

于是得所求解为

$$x = ae^{-ik_+ t} \quad y = -iae^{-ik_+ t} \quad (1.17)$$

对于 k_- 来说, 由 (1.10)、(1.14)、(1.15) 得 $a' = ia$, 为了区别不同的解, 把对于 k_- 的 a, a' 换为 b 和 b' 即 $b' = ib$.

故得所求解

$$x = be^{-ik_- t} \quad y = ibe^{-ik_- t} \quad (1.18)$$

再解方程 (1.4) 得

$$z = ce^{-ik_0 t} \quad (1.19)$$

最后得 (1.1) 的通解为

$$\mathbf{r}(t) = a(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)e^{-ik_+t} + b(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)e^{-ik_-t} + c\mathbf{e}_ze^{-ik_0t} \quad (1.20)$$

其中 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ 分别为 x, y, z 轴的单位矢量.

(1.20)结果表明,原子核外电子运动可以分解成三种不同频率(k_+, k_0, k_-)的简谐振动,因此,它所发出的辐射便含有三种频率 k_+, k_-, k_0 .

下面讨论辐射和偏振状态:

(1)沿磁场 $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ 进行的辐射,频率为 k_0 的辐射是沿磁场方向(z 轴方向)的简谐振动发出的,根据带电粒子作简谐振动发生辐射的规律,沿振动方向(即 z 轴方向)辐射强度为零^[1].频率为 k_+ 的辐射由(1.20)式可见,是由振动 $x = ae^{-ik_+t}, y = ae^{i(k_+t - \frac{c}{2})}$ 发出的,其中

y 方向的振动比 x 方向的振动超前 $\frac{c}{2}$,故射入观察者的

眼睛时,观察者观察到它是右旋圆偏振的,如图 1.

频率为 k_- 的辐射则是由振动

$$x = be^{-ik_-t} \quad y = be^{-i(k_-t - \frac{c}{2})}$$

发出的,其中 y 方向振动比 x 方向的振动落后 $\frac{c}{2}$,故射入

观察者的眼睛时,观察者观察到它是左旋圆偏振的.所以

结果在 \mathbf{B} 方向上的观察者只观察到两种频率的辐射,右

旋圆偏振的 k_+ 和左旋圆偏振的 k_- .

(2)垂直于磁场 \mathbf{B} 进行(如沿 x 轴进行)的辐射.这时沿 x 方向振动所发出的辐射强度为零,故只有沿 y 和 z 两个方向的振动所发出的辐射.结果在 x 轴方向的观察者便观察到三种辐射 k_0, k_+, k_- ,其中 k_0 是平行于 z 轴的线偏振波,而 k_+ 和 k_- 则都是平行于 y 轴的线偏振波.这就解释了塞曼效应现象.

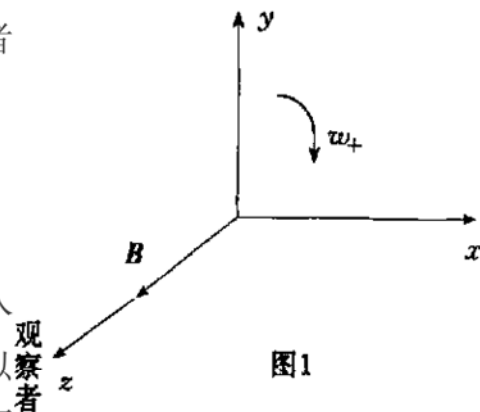


图1

2 塞曼效应的半经典半量子理论^[2]

2.1 原子总磁矩

由于原子中的电子绕核(轨道)运动,这时电子具有轨道磁矩,它的数值是: $\mu_l = \frac{e}{2m} P_l$ 方向同 P_l 相反.

用量子力学的 P_l 值

$$\mu_l = \sqrt{l(l+1)}\mu_B \quad (2.1)$$

其中 μ_B 为玻尔磁子.

另外,由于电子还有自旋,故具有自旋磁矩,它的数值: $\mu_s = \frac{e}{m} P_s$ 方向同 P_s 相反,(量

子值) $\mu_s = \sqrt{\frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}+1\right|} 2\mu_B = \sqrt{3}\mu_B$.

这时原子中电子总磁矩为电子的轨道磁矩和自旋磁矩的合成.(略去核磁矩)对单电子原子的总磁矩为

$$\mu_j = g \frac{e}{2m} P_j \quad P_j = \sqrt{j(j+1)}\hbar \quad g = \left| 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)} \right|$$

(其他多电子原子按 $L-S$ 或 j, j 耦合算出 g .)

2.2 拉莫尔旋进

原子有磁矩 μ_j , 处在磁场中就要受磁场的作用, 其效果是磁矩绕磁场的方向作旋进. 旋进引起能量的增减.

2.3 原子受磁场作用的附加能量—能级分裂

由于原子受磁场作用而旋进引起的附加能量, 可证明是

$$\Delta E = -\mu_j B \cos \theta = g \frac{e}{2m} P_j B \cos \theta$$

(在量子力学中有证明, 而在原子物理中只能假设) μ_j 和 P_j 在磁场中的取向是量子化的, 故它只能取如下数值, $P_j \cos \theta = M \frac{h}{2\pi}, M$ 称为磁量子数.

M 只能取 $M = j, j-1, \dots, -j$, 共有 $2j+1$ 个值. 所以

$$\Delta E = Mg \frac{he}{4\pi m} B = Mg_B B \quad (2.2)$$

因此在稳定的磁场下 ΔE 有 $2j+1$ 个可能的数值, 即是无磁场时的一个能级, 因有磁场的作用要再加能量 ΔE , 而 ΔE 有 $2j+1$ 个不同的可能值, 所以这能级裂成 $2j+1$ 层, 且从同一能级分裂的诸能级的间隔是相等的, 但从不同的原子能级分裂出来的能级间隔彼此不一定相同, 因为 g 因子不一定相同.

这样在没有磁场时由能级 E_2 和 E_1 之间的跃迁产生的光谱线频率同能级的关系为 $h\nu_0 = E_2 - E_1$, 而在磁场中, 上下两能级一般都要分裂, 因此新的光谱线频率同能级有下列关系

$$\begin{aligned} h\nu &= (E_2 + \Delta E_2) - (E_1 + \Delta E_1) = (E_2 - E_1) + (\Delta E_2 - \Delta E_1) \\ &= h\nu_0 + (M_2 g_2 - M_1 g_1) \mu_B B \\ \nu &= \nu_0 + (M_2 g_2 - M_1 g_1) \frac{Be}{4\pi m} \end{aligned} \quad (2.3)$$

上式表达塞曼效应中分裂后的谱线同原谱线的频率关系.

根据跃迁选择定则: $\Delta M = 0$, 产生 π 型偏振线 ($M_2 = 0 \rightarrow M_1 = 0$ 除外). $\Delta M = \pm 1$, 产生 σ 型偏振能.

例 ($\text{Cd } 6438\text{\AA}$ 谱线的塞曼效应) 从 $^1D_2 \rightarrow ^1P_1$ 跃迁时, $g_1 = g_2 = 1, M_2 = 2, 1, 0, -1, -2, M_1 = 1, 0, -1$.

所以 $M_2 g_2 - M_1 g_1 = (-1, 0, 1)$, 所以出现三条分支谱线, 中间那条谱线 $M_2 g_2 - M_1 g_1 = 0$, 这时 $\nu = \nu_0$, 即 $k = k_0$ 仍在原谱线位置, 左右二条同中间一条 (原来谱线) 的频率关系为

$$\nu = \nu_0 \pm \frac{Be}{4\pi m}$$

即

$$k = 2\pi\nu = k_0 \pm \frac{Be}{2m} \quad (2.4)$$

上式就是塞曼效应的半经典半量子理论的解释.

3 塞曼效应的量子理论^[3]

在这里只讨论简单塞曼效应的量子理论,即考虑氢原子或类氢原子在均匀外磁场中的情况.由于电子的轨道磁矩和自旋磁矩受到磁场的作用,电子除了在原子中所具有的动能和势能外,还有磁场引起的附加能量.另外,电子的自旋和轨道运动之间也有相互作用能量,我们假设外磁场较强,以致它和外磁场引起的附加能量比较起来可略去.

取磁场方向为 z 轴,则磁场引起的附加能是

$$\Delta U = -(\mu_l + \mu_s) \cdot \mathbf{B} = \frac{e}{2m}(\hat{L} + 2\hat{S}) \cdot \mathbf{B} = \frac{e}{2m}(\hat{L}_z + 2\hat{S}_z)B$$

于是体系的定态薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \psi + u(r)\psi + \frac{eB}{2m}(\hat{L}_z + 2\hat{S}_z)\psi = E\psi \quad (3.1)$$

这方程左边有自旋算符 \hat{S}_z ,但无自旋轨道相互作用项,故 ψ 的形式应为 $\psi = \psi_1 \chi_{\frac{1}{2}} = \begin{vmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{vmatrix}$,或 $\psi = \psi_2 \chi_{-\frac{1}{2}} = \begin{vmatrix} 0 \\ \psi_2 \end{vmatrix}$,其中 ψ_1, ψ_2 是无自旋时的波函数,现将上两式代入 (3.1) 得到 ψ_1 和 ψ_2 所满足的方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \psi_1 + u(r)\psi_1 + \frac{eB}{2m}(\hat{L}_z + \hbar)\psi_1 = E\psi_1 \quad (3.2)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \psi_2 + u(r)\psi_2 + \frac{eB}{2m}(\hat{L}_z - \hbar)\psi_2 = E\psi_2 \quad (3.3)$$

当外磁场不存在时,方程 (3.2), (3.3) 的解是

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_{nlM} = R_{nl}(r)y_{lM}(\theta, \varphi) \quad (3.4)$$

在氢原子的情况下, $u(r)$ 是库仑势, ψ_{nlM} 所属的能级 E_n 仅与总量子数 n 有关,在碱金属原子 (如 Li, Na) 的情况下,核外电子对核的库仑场有屏蔽作用,这时 ψ_{nlM} 所属的能级 E_{nl} 不仅与 n 有关,而且与角量子数 l 也有关.即

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \psi_{nlM} + u(r)\psi_{nlM} = E_{nl}\psi_{nlM} \quad (3.5)$$

当有外磁场时,由于 ψ_{nlM} 是 \hat{L}_z 的本征函数

$$\hat{L}_z \psi_{nlM} = M\hbar \psi_{nlM}$$

M 有 $2l+1$ 个值.所以 ψ_{nlM} 仍是方程 (3.2) 和 (3.3) 的解.将 (3.4) 代入 (3.2) 和 (3.3) 两方程得到

$$\left. \begin{aligned} S_z = \frac{\hbar}{2} \text{ 时, } E_{nlM} &= E_{nl} + \frac{\hbar}{2m}B(M+1) \\ S_z = -\frac{\hbar}{2} \text{ 时, } E_{nlM} &= E_{nl} + \frac{\hbar}{2m}B(M-1) \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

由此可见在外磁场中,能级与 M 有关,原来 M 不同而能量相同的简并现象被外磁场消除.其次由于外磁场的存在,能量与自旋有关.

当原子处于 S 态时 $l=M=0$,因而原来的能级 E_{nl} 分裂为两个能级, P 态时, $l=1, M=1, 0, -1$, 在外磁场 \mathbf{B} 作用下分裂为三个能级,所以由 (3.6) 式可知,在外磁场中电子由能级 E_{nlM} 跃迁到 $E_{n'l'M}$ 时,谱线频率为

$$k = \frac{E_{n'lM} - E_{n'l'M'}}{\hbar} \omega_0 + \frac{eB}{2m} \Delta M$$

式中 $k_0 = \frac{E_{n'l} - E_{n'l'}}{\hbar}$ 是没有外磁场时的跃迁频率. $\Delta M = M - M'$ 是跃迁中的磁量子数的改变.

由选择定则知 $\Delta M = 0, \pm 1$, 所以 k 可以取三个值

$$k = k_0, k = k_0 \pm \frac{eB}{2m} \quad (3.7)$$

即是在没有外磁场时的一条谱线在外磁场中将分裂为三条, 这就是简单塞曼效应.

4 结果比较

以 (1.12)、(1.20) 和 (2.3) 及 (3.7) 式可知, 三种解释法的结果是一样的, 但三种解释法的出发点不同, 其含义稍有不同.

解释 (1) 是从经典牛顿力学理论出发, 求解电子运动方程所得的结果. 结果的含义是反映带电粒子 (电子) 的运动是有三种不同频率 (k 、 k_0 、 k) 的简谐振动合成的, 因此电子的这种振动所发的辐射便含有三种频率的辐射谱线. 在这里不涉及到能量性质问题. 也就未能反映原子内部客观本质. 但这种解释比较直观、简单、清晰、易懂.

解释 (2) 中的 (2.3) 式是利用了玻尔理论的量子假设和 \underline{L}_j 和 P_j 在磁场中的取向量子化的假设: $P_z = P_j \cos \theta = M \frac{h}{2\pi}$. 这样原子受磁场作用而旋进所引起的附加能量使原子能级分裂而得出的结果.

解释 (3) 的 (3.9) 式是直接考虑原子系统在磁场中的总能量, 运用体系的定态薛定谔方程, 解方程确定本征值 (3.6) 式得知原子能级在外磁场作用下分裂的结果.

解释 (2) 和解释 (3) 的含义都是反映了能量是量子化的, 塞曼效应是原子能级在磁场作用下分裂. 引起不同能级间 (按选择定则) 跃迁而发射不同频率的谱线. 虽然这两种解释涉及的问题较多, 且较复杂, 但这两种解释直接反映了原子内部本质.

参考文献:

- [1] 郭硕鸿. 电动力学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1978. 176.
- [2] 褚圣麟. 原子物理 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1988. 170~186.
- [3] 周世勋. 量子力学教程 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1986. 204~206.

About the Differences among the Three Interpretations to Zeeman Effect

SU Yan-fei

Abstract It discusses the differences among the three interpretations to Zeeman Effect, so as to find out that the results of the three interpretations are the same. But, there are some differences between the result resulting from classical theory and the results resulting from the other two theories.

Key words Zeeman Effect; Energy level fission; Simple harmonic oscillation