第10章：力学量的代数解法

2017年6月20日 20:08

一维谐振子的代数解法

$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$

定义 $\hat{a}=\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega x+i\hat{p})$，

逆变换 $x=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger),\ \hat{p}=\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a}^\dagger-\hat{a})$

由 $[x,p]=i\hbar$ 有 $[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=1$

则有

$\hat{H}=\hbar\omega\left[\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right]$

定义厄米算符 $\hat{N}=\hat{a}^\dagger\hat{a}$

则有 $\hat{N}|n\rangle=n|n\rangle$

$[\hat{N},\hat{a}]=-\hat{a}$

$[\hat{N},\hat{a}^\dagger]=\hat{a}^\dagger$

$\hat{H}=\hbar\omega\left[\hat{N}+\frac{1}{2}\right]$

假设 $\hat{N}|n\rangle=n|n\rangle$

升降算符：升算符$\hat{a}^\dagger$，降算符 $\hat{a}$

在能量表象$\{|n\rangle\}$中有

$\hat{N}\hat{a}|n\rangle=(\hat{a}\hat{N}-\hat{a})|n\rangle=\hat{a}(\hat{N}-1)|n\rangle=(n-1)\hat{a}|n\rangle$

$\hat{a}^\dagger|n\rangle=\sqrt{n+1}|n+1\rangle$

$\hat{a}|n\rangle=\sqrt{n}|n-1\rangle$

与

$$x|n\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\left[\sqrt{\frac{n}{2}}|n-1\rangle+\sqrt{\frac{n+1}{2}}|n+1\rangle\right]$$

$$\hat{p}|n\rangle=-i\sqrt{\hbar m\omega}\left[\sqrt{\frac{n}{2}}|n-1\rangle-\sqrt{\frac{n+1}{2}}|n+1\rangle\right]$$

相一致

对于基态有 $\hat{a}|0\rangle=0$

第n个本征态可写为

$$|n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$$

角动量的代数解法

角动量$\hat{\boldsymbol{J}}^2$,$\hat{J}_z$的共同本征态

定义 $\hat{J}_\pm=\hat{J}_x\pm i\hat{J}_y$

逆变换 $\hat{J}_x=\frac{1}{2}(\hat{J}_++\hat{J}_-),\ \hat{J}_y=\frac{1}{2i}(\hat{J}_+-\hat{J}_-)$

由$[\hat{J}_\alpha,\hat{J}_\beta]=i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{J}_\gamma$

有 $[\hat{J}_z,\hat{J}_\pm]=\pm\hbar\hat{J}_\pm$

$[\hat{\boldsymbol{J}}^2,\hat{J}_\pm]=0$

假设$\hat{\boldsymbol{J}}^2,\hat{J}_z$的共同本征态为$|\lambda m\rangle$，即

$\hat{\boldsymbol{J}}^2|\lambda m\rangle=\lambda\hbar^2|\lambda m\rangle$，$\hat{J}_z|\lambda m\rangle=\mu\hbar|\lambda m\rangle$

(λ,μ)无量纲

由 $[\hat{\boldsymbol{J}}^2,\hat{J}_\pm]=0$

$\hat{\boldsymbol{J}}^2(\hat{J}_\pm|\lambda m\rangle)=\hat{J}_\pm\hat{\boldsymbol{J}}^2|\lambda m\rangle=\lambda\hat{J}_\pm|\lambda m\rangle$

于是$\hat{J}_\pm|\lambda m\rangle$也是$\hat{\boldsymbol{J}}^2$本征值为$\lambda$的本征态

由 $[\hat{J}_z,\hat{J}_\pm]=0$

$\hat{J}_z(\hat{J}_\pm|\lambda m\rangle)=(\hat{J}_\pm\hat{J}_z\pm\hbar\hat{J}_\pm)|\lambda m\rangle=(m\pm1)\hbar\hat{J}_\pm|\lambda m\rangle$

于是$\hat{J}_\pm|\lambda m\rangle$是 $\hat{J}_z$ 本征值为$m\pm1$的本征态

所以有升降算符$\hat{J}_\pm$

由于角动量分量不可能大于角动量大小，也不可能小于零

所以上升和下降都有限制，m既有上限又有下限

- 假设上限为j

$\hat{J}_z|\lambda j\rangle=j\hbar|\lambda j\rangle$; $\hat{\boldsymbol{J}}^2|\lambda l\rangle=\lambda\hbar^2|\lambda j\rangle$

由$\hat{J}_\pm\hat{J}_\mp=(\hat{J}_x\pm i\hat{J}_y)(\hat{J}_x\mp i\hat{J}_y)=\hat{J}_x^2+\hat{J}_y^2\mp i(\hat{J}_x\hat{J}_y-\hat{J}_y\hat{J}_x)=\hat{\boldsymbol{J}}^2-\hat{J}_z^2\pm\hbar\hat{J}_z$有

$\hat{\boldsymbol{J}}^2|\lambda j\rangle=(\hat{J}_-\hat{J}_++\hat{J}_z^2+\hbar\hat{J}_z)|\lambda j\rangle=(j^2\hbar^2+j\hbar)|\lambda j\rangle=\lambda\hbar^2|\lambda j\rangle$

于是有$\lambda=j(j+1)$

这告诉我们可以用$\hat{J}_z$的最大本征值来表示$\hat{\boldsymbol{J}}^2$的本征值。

- 假设下限为$\bar{j}$

$\hat{J}_z|\lambda\bar{j}\rangle=\bar{j}\hbar|\lambda\bar{j}\rangle$; $\hat{\boldsymbol{J}}^2|\lambda\bar{j}\rangle=\lambda\hbar^2|\lambda\bar{j}\rangle$

$\hat{\boldsymbol{J}}^2|\lambda\bar{j}\rangle=(\hat{J}_+\hat{J}_-+\hat{J}_z^2-\hbar\hat{J}_z)|\lambda\bar{j}\rangle=(\bar{j}^2\hbar^2-\bar{j}\hbar)|\lambda\bar{l}\rangle=\lambda\hbar^2|\lambda\bar{j}\rangle$

于是有$\lambda=\bar{j}(\bar{j}-1)=j(j+1)$

所以有$\bar{j}=-j$

所以m上限为j下限为$-j$,假设作用N次上升算符可以从上限到下限，则有

$2j=N$

于是

$j=N/2$可以取整数或半整数

$\hat{J}_\pm|jm\rangle=\sqrt{(j\pm m+1)(j\mp m)}|jm\pm1\rangle$