数学物理方法

Mathematical Methods in Physics

第三章 无穷级数

Infinite Series

物理科学与技术学院

问题的引入:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-b)^k \xrightarrow{|z-b|<R} \text{解析函数} f(z)$$

$$\xleftarrow[?]{\qquad\qquad}$$

$$a_k = ?$$

§3.3泰勒级数
Taylor Series

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, |z|<1$$

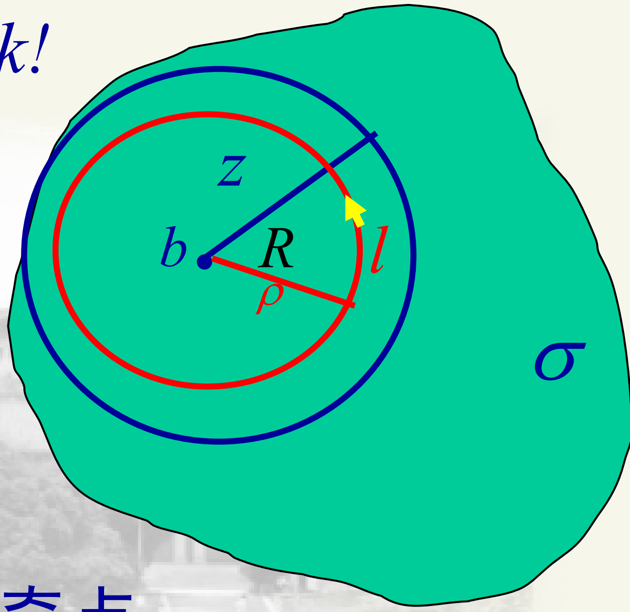
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

一、泰勒定理

若$f(z) \in H(\sigma)$,则在$|z-b| < R \in \sigma$内，有

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-b)^k, \text{其中 } a_k = \frac{f^{(k)}(b)}{k!}$$

且展开是唯一的。



二、收敛半径

1. $R = \lim\limits_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$

2. $R = |a-b|, a - f(z)$的距b最近的奇点

问题的结论:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-b)^k \underset{}{\overset{|z-b|<R}{\rightleftarrows}} \text{解析函数} f(z)$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(b)}{k!}$$

（唯一）

三、如何展开

1、直接用展开定理展开

例3　将e^z在$z=0$展开。　答: $$\boxed{e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!},|z|<\infty}$$

例4　将$\dfrac{1}{1-z}$在$z=0$展开。　答: $$\boxed{\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k,|z|<1}$$

2、利用已知级数展开式用各种方法展开

（1）变量代换法

例5　将$\sin z$在$z=0$展开。

答: $$\boxed{\sin z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1},|z|<\infty}$$

（2）逐项微分

例6 将 $\cos z$ 在 $z=0$ 展开。

答: $\boxed{\cos z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k},\ |z|<\infty}$

（3）分项分式

例7 将 $\frac{1}{1-z^2}$ 在 $z=0$ 展开。

答: $\frac{1}{1-z^2}=\sum_{k=0}^{\infty}z^{2k},\ |z|<1$

（4）逐项相乘

例8 将 $\frac{1}{1-z^2}$ 在 $z=0$ 展开。

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1
\end{array}$$

（5）待定系数

例9 将 $\sec z$ 在 $z=0$ 展开。

答:

$$\sec z=1+\frac{1}{2!}z^2+\frac{5}{4!}z^4+\cdots,\ |z|<\frac{\pi}{2}$$

四、多值函数的泰勒展开

例10 将$Ln(1+z)$的主值支$\ln(1+z)$在$z=0$展开。

$$\frac{d^k}{dz^k}[\ln(1+z)]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+z)^k},|z|<1$$

答: $$\ln(1+z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}z^k,|z|<1$$

小 结

一、 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k,\quad a_k=\frac{f^{(k)}(b)}{k!}$

$R=|a-b|,a-f(z)$的距b最近的奇点

二、 $\boxed{e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!},|z|<\infty}$ $\boxed{\sin z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1},|z|<\infty}$

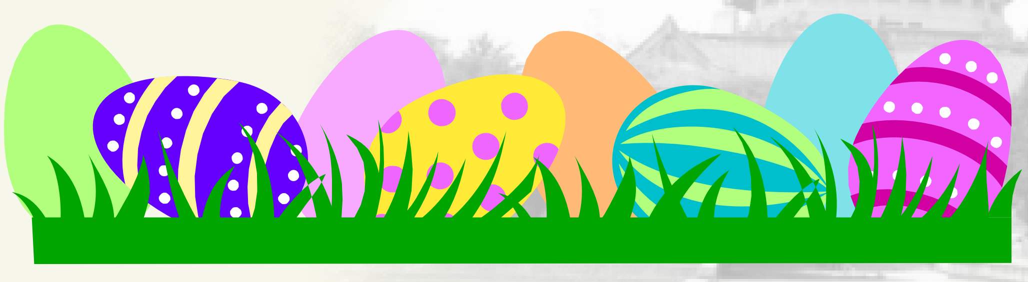
$\boxed{\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k,|z|<1}$ $\boxed{\cos z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k},|z|<\infty}$

三、 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k \xrightarrow{|z-b|<R}$ 解析函数 $f(z)$

$\xleftarrow[a_k=\frac{f^{(k)}(b)}{k!}]{}$

(唯一)

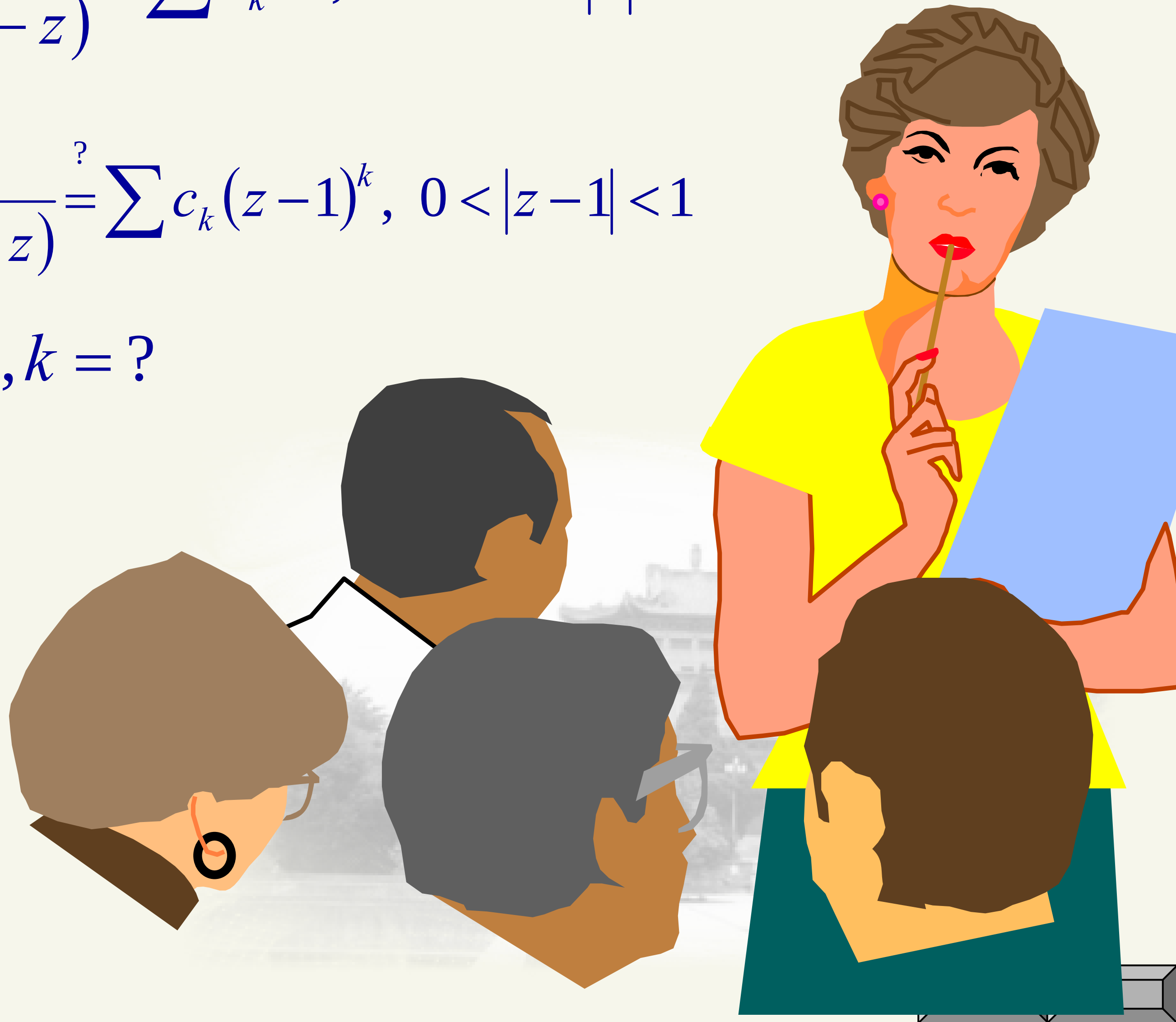
习题3.3：1(4)，2(4)，3(3)6(2)



$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}\overset{?}{=}\sum c_k z^k,\qquad 0<|z|<1$$

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}\overset{?}{=}\sum c_k (z-1)^k,\quad 0<|z-1|<1$$

若能$c_k=?,k=?$



Good-by!


福娃 Friendlies
福娃贝贝
Beibei
福娃晶晶
Jingjing
福娃欢欢
Huanhuan
福娃迎迎
Yingying
福娃妮妮
Nini