数学物理方法

Mathematical Methods in Physics

第三章 无穷级数

Infinite Series

武汉大学

物理科学与技术学院

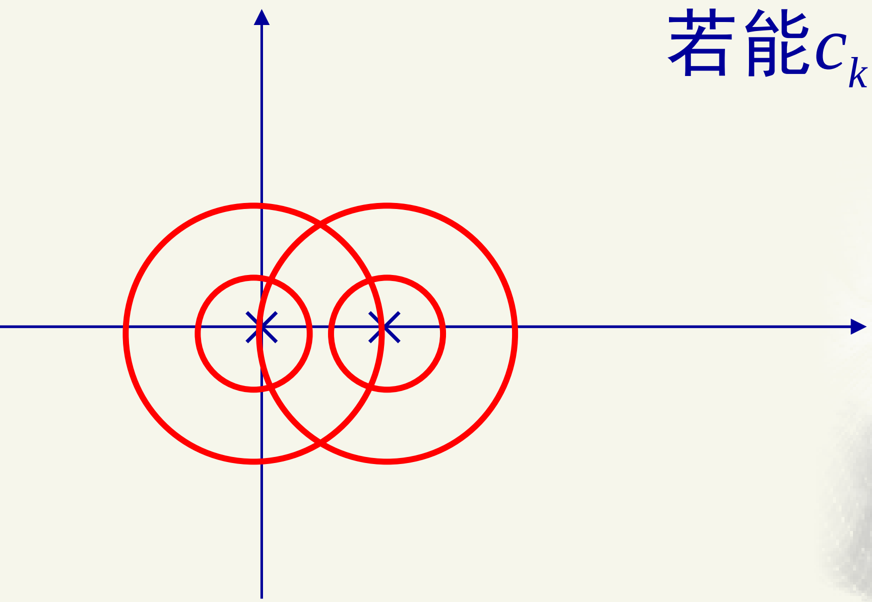
Wuhan University

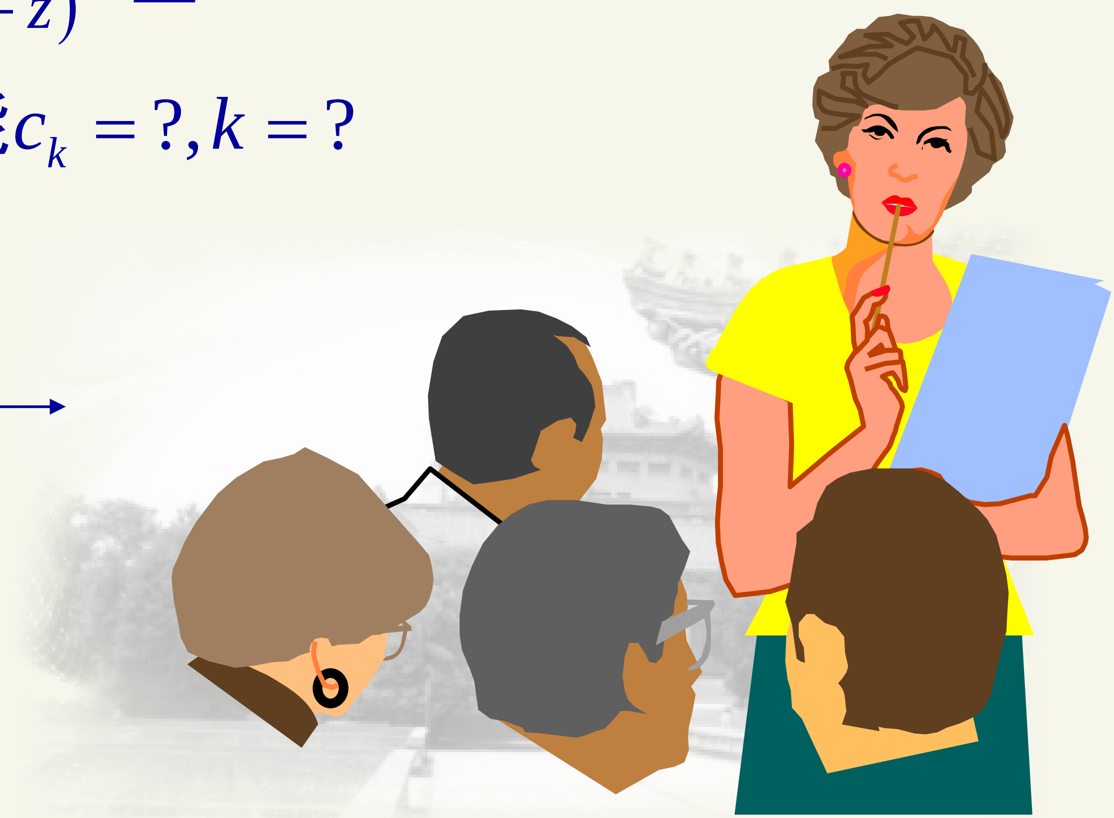
问题的引入:

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}\overset{?}{=}\sum c_k z^k,\qquad 0<|z|<1$$

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}\overset{?}{=}\sum c_k (z-1)^k,\quad 0<|z-1|<1$$

若能$c_k=?,k=?$





§3.4罗朗级数

定义： 称 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-b)^k = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-b)^k}_{\text{主部}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-b)^k}_{\text{正则部分}}$ 为罗朗级数。

一、定理

罗朗级数存在一收敛环域：$r < |z-b| < R$。在收敛环域 $r < |z-b| < R$ 内的和函数是一解析函数，且在其较小的同心闭环域 $r' \le |z-b| \le R' (r' < r < R' < R)$ 上一收敛。

二、Laurant展开定理

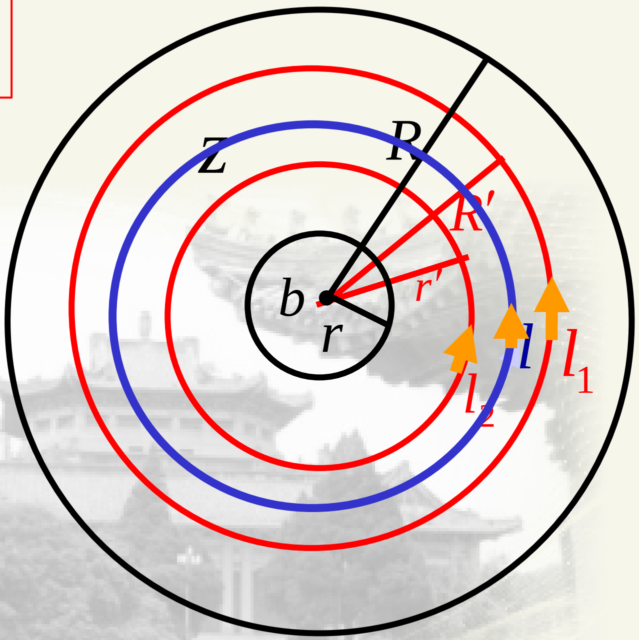
若 $f(z)$在$r<|z-b|<R$内解析，则

$$\boxed{f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(z-b)^k, r<|z-b|<R}$$

其中，$c_k=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_l \dfrac{f(z)}{(z-b)^{k+1}}dz$

$$l:|z-b|=\rho,(r<r'<\rho<R'<R)$$

且展开是唯一的。



二、Laurant展开定理

注意：（1）展开中心b不一定是函数的奇点

如，在 $2<|z|<\infty$ 中

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(2^{k-1}-1\right)\frac{1}{z^k}$$

（2）展开系数公式 $c_k \neq \dfrac{f^{(k)}(b)}{k!}$

（3）唯一性不能用求微商证

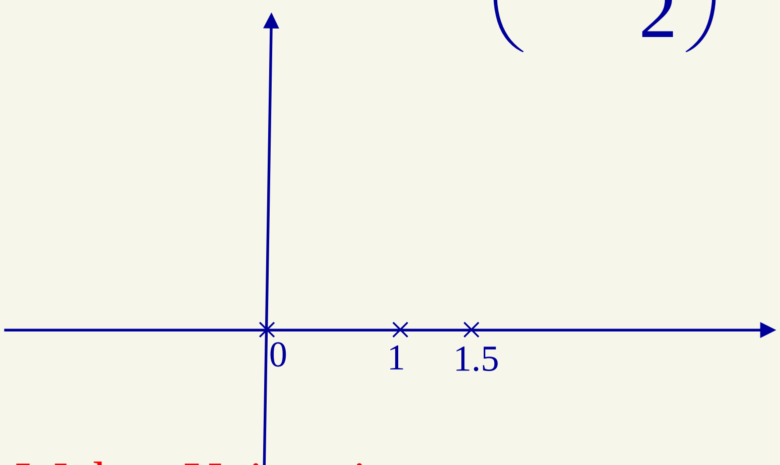
三、收敛范围

设a和a'为$f(z)$的两个相邻的奇点,则

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-b)^k$ 在$|a-b|<|z-b|<|a'-b|$

$(|a'-b|>|a-b|$包括$a=b)$中收敛,如

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)\left(z-\frac{3}{2}\right)}$$



$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k,$$

$$(0<|z|<1;1<|z|<1.5;1.5<|z|)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-1)^k,$$

$$(0<|z-1|<0.5;0.5<|z-1|)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-1.5)^k$$

$$(0<|z-1.5|<0.5;0.5<|z-1.5|)$$

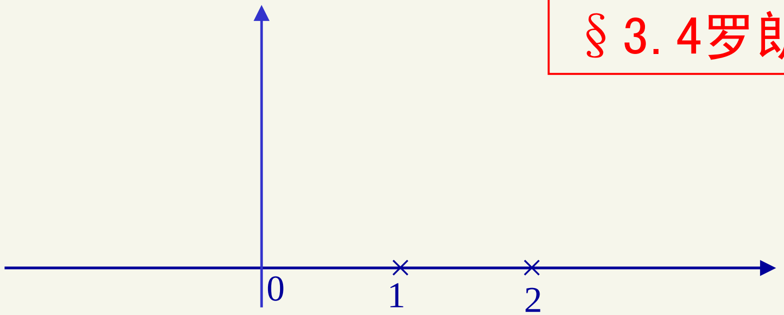
四、展开方法

1. 直接利用展开定理(较少用)

例1　证明　$$ch(z+\frac{1}{z})=c_0+\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z^k+z^{-k})$$

其中　$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos k\varphi\, ch(2\cos\varphi)d\varphi$$

$$\boxed{f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(z-b)^k,\ r<|z-b|<R,}\quad \boxed{c_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(z)}{(z-b)^{k+1}}dz}$$



四、展开方法

2. 利用常用函数的T展开公式通过种种手段展开

例2 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z-1}$

(1) 在 $z=0$ 的邻域中展开

(2) 以 $z=0$ 为中心展开

(3) 在环域 $|z-1|>1$ 中展开

（4）在奇点的去心邻域展开

（5）以奇点为中心展开

$$|z|<1:\ f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)z^{k};$$

$$1<|z|<2:\ f(z)=-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}z^{k}\right);$$

$$|z|>2:\ f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(2^{k}-1)\frac{1}{z^{k+1}};$$

$$|z-1|>1:\ f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^{k+1}};$$

$$0<|z-1|<1;\ 0<|z-2|<1;$$

小 结

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-b)^k \rightleftharpoons f(z) \in H(\sigma : r < |z-b| < R)$$

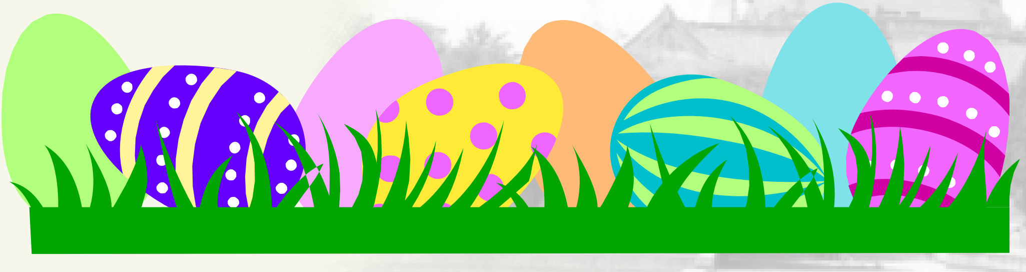
其中，$c_k = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_l \dfrac{f(z)}{(z-b)^{k+1}} dz$

设a和a'为$f(z)$的两个相邻的奇点,则

$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-b)^k \text{ 在} |a-b| < |z-b| < |a'-b|}$ 收敛。

习题3.4：1(1)，2(1)，

5(5)，(7)



Good-by!


福娃 Friendlies
福娃贝贝
Beibei
福娃晶晶
Jingjing
福娃欢欢
Huanhuan
福娃迎迎
Yingying
福娃妮妮
Nini