数学物理方法

Methods in Mathematical Physics

第十四章 勒让德多项式

Legendre polynomial

武汉大学物理科学与技术学院

第十四章 勒让德多项式

Legendre polynomial

§14.2 勒让德多项式的性质

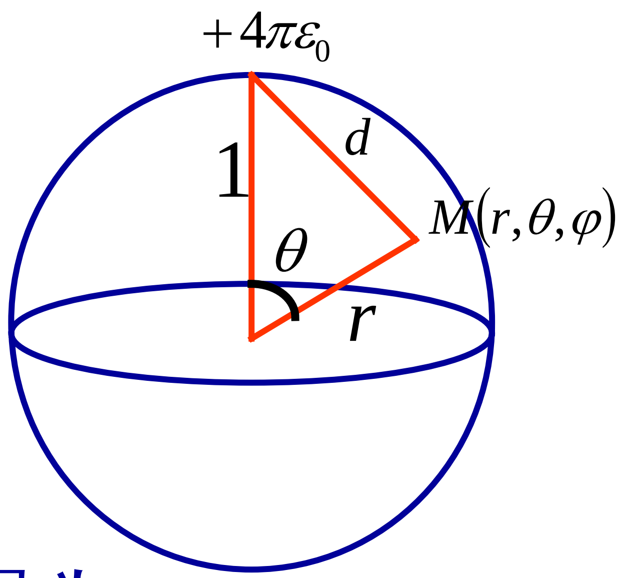
Properties of Legendre polynomial

在数学物理中，一个方法的成功，不是由于巧妙的谋略或幸运的偶遇，而是因为他表达着物理真理的某个方面。

——O.G.沙顿。

一、母函数关系式

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)t^l,|t|<1 \quad (1)$$



注：若$w(x,t)=\sum_n F_n(x)t^n$

则称$w(x,t)$为$F_n(x)$的母函数

物理背景：设在单位球北极置有电量为$4\pi\varepsilon_0$的正电荷，则在$r<1$内，任一点的电位u为：

$$\Delta u=0\,,r<1 \qquad 令\ u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$$

$$\rightarrow \begin{cases} r^2R''+2rR'-l(l+1)R=0 \\ (1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0,\left[x=\cos\theta,y(x)=\Theta(\theta)\right] \end{cases}$$

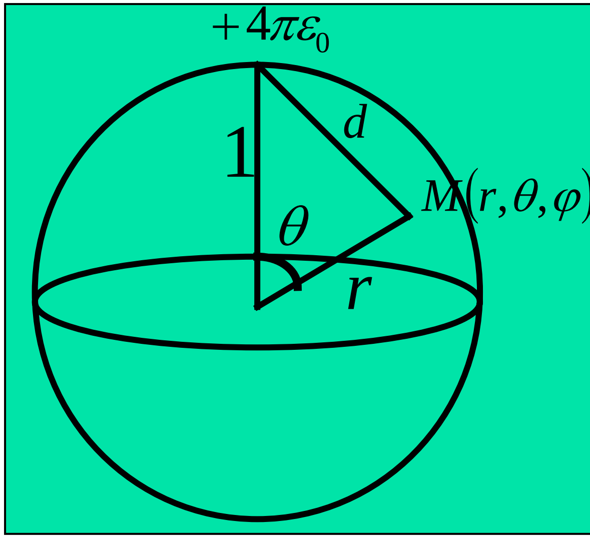
一、母函数关系式

$$r^2R''+2rR'-l(l+1)R=0 \to \quad R_l(r)=c_l r^l+d_l r^{-(l+1)}$$

$$(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0 \to \quad y(x)=P_l(x)$$

$$\therefore r<1: \quad u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}c_l r^l P_l(x)$$

又：$u=\dfrac{1}{d}=\dfrac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}$



$$\therefore \frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}c_l r^l P_l(x)$$

取 $x=1$: $\dfrac{1}{\sqrt{1-2r+r^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}c_l r^l \to \quad \dfrac{1}{1-r}=\sum_{l=0}^{\infty}c_l r^l$

一、母函数关系式

$$\because r<1,\ \frac{1}{1-r}=\sum_{l=0}^{\infty}r^l \to \sum_{l=0}^{\infty}r^l=\sum_{l=0}^{\infty}c_l r^l \to c_l\equiv 1, l=0,1,\ldots$$

于是：$$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)r^l,(r<1)$$

更一般：$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)t^l,|t|<1}$$

思考： 能否用其它方法证得此关系式？

用途： 可用来研究和导出 $p_l(x)$ 的其它性质

二、递推公式

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)t^l,|t|<1 \quad (1)$$

$$1.\ (l+1)P_{l+1}(x)-(2l+1)x\,P_l(x)+l\,P_{l-1}(x)=0 \quad (2)$$

$$2.\ (2l+1)P_l(x)=P'_{l+1}(x)-P'_{l-1}(x) \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt}(1)\to\quad \frac{x-t}{\left(1-2xt+t^2\right)^{3/2}}=\sum_{l=1}^{\infty}P_l(x)l\,t^{l-1}$$

两边$\times\left(1-2xt+t^2\right)\to$

$$(x-t)\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)t^l=\left(1-2xt+t^2\right)\sum_{l=1}^{\infty}l\,P_l(x)t^{l-1}$$

$$x\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)t^l-\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)t^{l+1}=$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}l\,P_l(x)t^{l-1}-2x\sum_{l=1}^{\infty}l\,P_l(x)t^l+\sum_{l=1}^{\infty}l\,P_l(x)t^{l+1}$$

比较等式两边t^l的系数即得（2）式

二、递推公式

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)t^l,|t|<1 \quad (1)$$

$$\boxed{1.\ (l+1)P_{l+1}(x)-(2l+1)x\,P_l(x)+l\,P_{l-1}(x)=0 \quad (2)}$$

$$\boxed{2.\ (2l+1)P_l(x)=P'_{l+1}(x)-P'_{l-1}(x) \quad (3)}$$

$$\frac{d}{dx}(1)\to \quad \frac{t}{\left(1-2xt+t^2\right)^{3/2}}=\sum_{l=0}^{\infty}P'_l(x)t^l$$

$$t\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)t^l=\left(1-2xt+t^2\right)\sum_{l=0}^{\infty}P'_l(x)t^l$$

$$t^{l+1}:P_l(x)=P'_{l+1}(x)\underline{-2xP'_l(x)}+P'_{l-1}(x) \quad (4)$$

$$\frac{d}{dx}(2)\to (l+1)P'_{l+1}(x)-(2l+1)P_l(x)-(2l+1)xP'_l(x)+l\,P'_{l-1}(x)=0$$

$$\to xP'_l(x)=P_l(x)-\frac{l+1}{2l+1}P'_{l+1}(x)-\frac{l}{2l+1}P'_{l-1}(x) \quad (5)$$

（5）代入（4） ⟶（3）

二、递推公式

$$1.\ (l+1)P_{l+1}(x)-(2l+1)x\,P_l(x)+l\,P_{l-1}(x)=0 \qquad (2)$$

$$2.\ (2l+1)P_l(x)=P'_{l+1}(x)-P'_{l-1}(x) \qquad (3)$$

用途：(1)可用低阶的勒让德多项式求高阶的勒德多项式之值。

如：$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x \xrightarrow{(2)} p_2(x)$

（2）可计算含$p_l(x)$的积分。

如：$\int_a^b P_l(x)dx=\frac{1}{2l+1}\int_a^b \left[P'_{l+1}(x)-P'_{l-1}(x)\right]dx$

$$=\frac{1}{(2l+1)}\left[P_{l+1}(x)-P_{l-1}(x)\right]_a^b$$

三、正交性

$$\boxed{\int_{-1}^{1} P_l(x)P_k(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{kl}, k,l = 0,1,2,\ldots, (6)}$$

$$\text{其中}\delta_{kl} = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ 1 & k = l \end{cases} \text{(克罗内克尔函数)}$$

$$\because \frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_l'(x)\right] + l(l+1)P_l(x) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_k'(x)\right] + k(k+1)P_k(x) = 0 \quad (8)$$

$$\int_{-1}^{1}\left[(7)\cdot P_k(x) - (8)\cdot P_l(x)\right]dx:$$

$$\underline{[k(k+1)-l(l+1)]\int_{-1}^{1} P_k(x)P_l(x)dx} = \int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_l'(x)\right]P_k(x)dx$$

$$-\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_k'(x)\right]P_l(x)dx \quad \underline{=0}$$

三、正交性

$$\boxed{\int_{-1}^{1} P_l(x)P_k(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{kl}, k,l = 0,1,2,\ldots, (6)}$$

$$\therefore \text{当} k \neq l, \quad \int_{-1}^{1} P_l(x)P_k(x)dx = 0$$

$$\text{当} k = l, \quad \frac{1}{\left(\sqrt{1-2xt+t^2}\right)^2} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l \cdot \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)t^k$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1-2xt+t^2}dx = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-1}^{1} P_l(x)P_k(x)dxt^{l+k}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\int_{-1}^{1} P_l^2(x)dxt^{2l}$$

三、正交性

$$\boxed{\int_{-1}^{1} P_l(x)P_k(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{kl}, k, l = 0,1,2,\ldots, (6)}$$

$$\text{左边} = \int_{-1}^{1} \frac{d\left(1-2xt+t^2\right)}{1-2xt+t^2} \cdot \frac{1}{-2t}$$

$$= \frac{1}{-2t}\ln\left(1-2xt+t^2\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2t}\ln\frac{(1+t)^2}{(1-t)^2} = \frac{1}{t}\ln\frac{1+t}{1-t}$$

$$\overset{T展}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2}{2l+1} t^{2l}$$

当 $k = l$： $\boxed{\int_{-1}^{1} P_l^2(x)dx = \frac{2}{2l+1}}$

$$\text{右边} = \sum_{l=0}^{\infty} \int_{-1}^{1} P_l^2(x)d\,x\,t^{2l}$$

三、正交性

$$\boxed{\int_{-1}^{1} P_l(x)P_k(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{kl}, k,l = 0,1,2,\ldots, (6)}$$

$$\text{其中} N_l = \sqrt{\frac{2}{2l+1}} \rightarrow P_l(x)\text{模}, \frac{1}{N_l} \rightarrow \text{归一化因子}$$

$$\because \text{若记 } P_L(x) = \frac{1}{N_l}P_l(x), P_K(x) = \frac{1}{N_k}P_k(x)$$

$$\int_{-1}^{1} P_L(x)P_K(x)dx = \delta_{KL}$$

—正交归一

归一化勒让德多项式

三、正交性

$$\boxed{\int_{-1}^{1} P_l(x)P_k(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{kl}, k,l = 0,1,2,\ldots, (6)}$$

用途： 可计算含$p_l(x)$的积分。

问： $\int_{-1}^{1} P_{199}(x)P_{300}(x)dx = ?$ $\boxed{0}$

$\int_{-1}^{1} P_8^{\,2}(x)dx = ?$ $\boxed{\left(\frac{2}{2\cdot 8+1} = \frac{2}{17}\right)}$

$\int_{-1}^{1} P_8(x)P_9(x)dx = ?$ $\boxed{0}$

$\int_{-1}^{1} xP_8(x)P_9(x)dx = ?$ $\boxed{= \frac{9}{17}\cdot\frac{2}{18+1}}$

四、广义傅氏展开

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}C_l P_l(x) \tag{9}$$

$$C_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_l(x)dx \tag{10}$$

用途：(1) 在物理中常需将作为表征的物理量展开为级数进行分析。

(2) 在求解数学物理方程时其解常是某函数的无穷级数，如稳恒电场的解，就是Legendre级数。

四、广义傅氏展开

例： 求一表面充电至电位为 $\left(1+3\cos^2\theta\right)$ 的单位空心球内任一点的电位。

解：
$$\begin{cases} \Delta u = 0, r<1 & (1) \\ u\big|_{r=1} = \left(1+3\cos^2\theta\right) & (2) \end{cases}$$
令 $u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$

$$(1)\to\begin{cases} r^2R''+2rR'-l(l+1)R=0\to R_l(r)=c_lr^l+d_lr^{-(l+1)} \\ \left(1-x^2\right)y''-2xy'+l(l+1)y=0\to y(x)=P_l(x) \end{cases}$$

$$(1)\to u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}C_lr^lP_l(\cos\theta)\to \sum_{l=0}^{\infty}C_lP_l(\cos\theta)=\left(1+3\cos^2\theta\right)$$

即 $\sum_{l=0}^{\infty}C_lP_l(x)=\left(1+3x^2\right)$ (3) $C_l=\dfrac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}\left(1+3x^2\right)P_l(x)dx$

四、广义傅氏展开

$$C_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}\left(1+3x^2\right)P_l(x)dx$$

$$1=P_0(x),\qquad P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)\to 3x^2=2P_2+P_0$$

$$\therefore C_l=\frac{(2l+1)}{2}\left[\int_{-1}^{1}P_0P_l(x)dx+2\int_{-1}^{1}P_2P_l(x)dx+\int_{-1}^{1}P_0P_l(x)dx\right]$$

$$=(2l+1)\left[\int_{-1}^{1}P_2P_l(x)dx+\int_{-1}^{1}P_0P_l(x)dx\right]$$

$$C_0=(2\cdot 0+1)\int_{-1}^{1}P_0^{\ 2}(x)dx=2\,,\quad C_2=(2\cdot 2+1)\int_{-1}^{1}P_2^{\ 2}(x)dx=2$$

$$\boldsymbol{C_l\equiv 0(l\neq 0,2)}\quad \boxed{\to u(r,\theta)=2r^0P_0(\cos\theta)+2r^2P_2(\cos\theta)}$$

四、广义傅氏展开

另一法： $\boxed{1 = P_0(x),}$ $\boxed{3x^2 = 2P_2 + P_0}$

$$(3) \to \sum_{l=0}^{\infty} C_l P_l(x) = 1 + 3x^2 = P_0(x) + 2P_2(x) + P_0(x)$$

$$= 2P_0 + 2P_2$$

$$\therefore C_0 = 2, C_2 = 2, C_l \equiv 0 \,(l \neq 0,2)$$

从而有： $u(r,\theta) = 2r^0 P_0(\cos\theta) + 2r^2 P_2(\cos\theta)$

$$= 2 + 2r^2 \frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$$

$$\boxed{= 2 + 3r^2\cos^2\theta - r^2}$$

五. 小结

一、母函数关系式

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)t^l,|t|<1 \quad (1)$$

二、递推公式

$$1.\ (l+1)P_{l+1}(x)-(2l+1)xP_l(x)+lP_{l-1}(x)=0 \quad (2)$$

$$2.\ (2l+1)P_l(x)=P'_{l+1}(x)-P'_{l-1}(x) \quad (3)$$

三、正交性

$$\int_{-1}^{1}P_l(x)P_k(x)dx=\frac{2}{2l+1}\delta_{kl},k,l=0,1,2,\ldots,(6)$$

四、广义傅氏展开

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}C_lP_l(x) \quad (9)$$

$$C_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_l(x)dx \quad (10)$$

本节作业

习题14.2 ： 2(2)(4)

4(1)

9

Good-by!