数学物理方法

Methods of Mathematical Physics

第七章　行波法

travelling wave method

武 汉 大 学

物理科学与技术学院

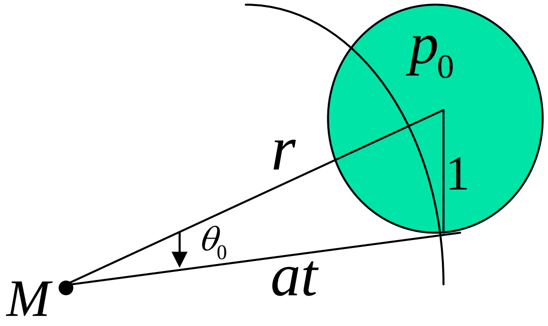
Wuhan University

问题的引入：

设大气中有一个半径R为1的球形薄膜，薄膜内的压强超过大气压的数值为 p_0 ，假定薄膜突然消失，试求球外任意位置的附加压强 p 。

定解问题：

$$\begin{cases} p_{tt} - a^2 \Delta p = 0 \\ p\big|_{t=0} = \begin{cases} p_0, R<1 \\ 0, \ R>1 \end{cases} \\ p_t\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$



§7.4–§7.5：三维无界波动问题

3-D non-bounded wave problems

一、定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u & (1) \\ u|_{t=0} = \varphi(M) & (2) \\ u_t|_{t=0} = \psi(M) & (3) \end{cases}$$

$$M = M(x, y, z)$$

$$-\infty < x, y, z < \infty$$

二、求解

1、思路：

化三维问题为一维问题，利用§7.1的方法和结果求解。

二、求解

2、平均值方法：

（1）定义：

$$\bar{u}(r,t)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S_r^{M_0}} u\,ds=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_r^{M_0}} u\,d\Omega$$

称为函数$u(M,t)$在以M_0为中心,r为半径的球面$S_r^{M_0}$上的平均值.其中,$d\Omega=ds/r^2=\sin\theta d\theta d\varphi$为立体角元.

（2）由定义可知：

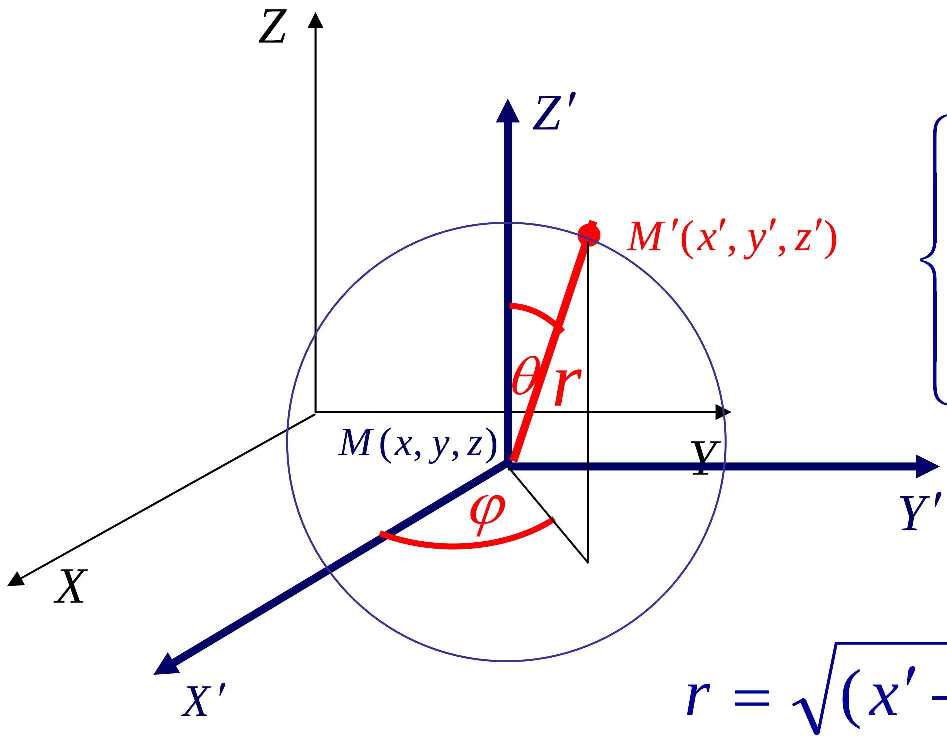
$$u(M_0,t_0)=\lim_{r\to 0,t\to t_0}\bar{u}(r,t)$$

$\therefore$要求$u(M_0,t_0)$，只需求$\bar{u}(r,t)$即可

——平均值方法

二、求解

2、平均值方法：



$$\begin{cases} x' = x + r\sin\theta\cos\varphi \\ y' = y + r\sin\theta\sin\varphi \\ z' = z + r\cos\theta \end{cases}$$

$$r = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$$

二、求解

3、求波动方程的通解：

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S u_{tt}d\Omega=\frac{a}{4\pi}\iint_S \Delta u d\Omega$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{1}{4\pi}\iint_s ud\Omega=a^2\Delta(\frac{1}{4\pi}\iint_s ud\Omega)$$

$$\overline{u}(r,t)_{tt}=a^2\Delta\overline{u}(r,t)$$

在直角坐标系中：$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

$$\to \Delta\overline{u}=\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial z^2}$$

二、求解

3、求波动方程的通解：

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}=\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\frac{x-x_0}{r}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}=\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\frac{r^2-(x-x_0)^2}{r^3}+\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2}\left(\frac{x-x_0}{r}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}=\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\frac{r^2-(y-y_0)^2}{r^3}+\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2}\left(\frac{y-y_0}{r}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}=\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\frac{r^2-(z-z_0)^2}{r^3}+\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2}\left(\frac{z-z_0}{r}\right)^2$$

$$\rightarrow \Delta \bar{u}=\frac{2}{r}\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}+\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\bar{u})$$

二、求解

3、求波动方程的通解：

令 $(r\bar{u}) = v(r,t)$， 则 $u_{tt} = a^2 \Delta u \;\rightarrow\; v_{tt} = a^2 v_{rr}$

$$\rightarrow\; v(r,t) = f_1(r+at) + f_2(r-at)$$

由 $v(r,t)$ 有 $\quad v(0,t) = 0 \rightarrow$

$$f_1(at) + f_2(-at) = 0 \rightarrow$$

$$f_1'(at) = f_2'(-at)$$

$$u(M_0,t_0) = \lim_{r\to 0} \bar{u}(r,t_0) = \lim_{r\to 0} \frac{v(r,t)}{r} = 2f'(at_0)$$

二、求解

4、三维波动问题的解—泊松（Poisson)公式

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{u}) = f_1'(r+at) + f_2'(r-at)$$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}(r\bar{u}) = f_1'(r+at) - f_2'(r-at)$$

取$r = at_0, t = 0$代入初始条件得

$$2f'(at_0) = \frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint_{s_{at}^M}\frac{\varphi(M')}{at}ds + \iint_{s_{at}^M}\frac{\psi(M')}{at}ds\right]$$

$$\boxed{u(M,t) = \frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint_{s_{at}^M}\frac{\varphi(M')}{at}ds + \iint_{s_{at}^M}\frac{\psi(M')}{at}ds\right]}$$

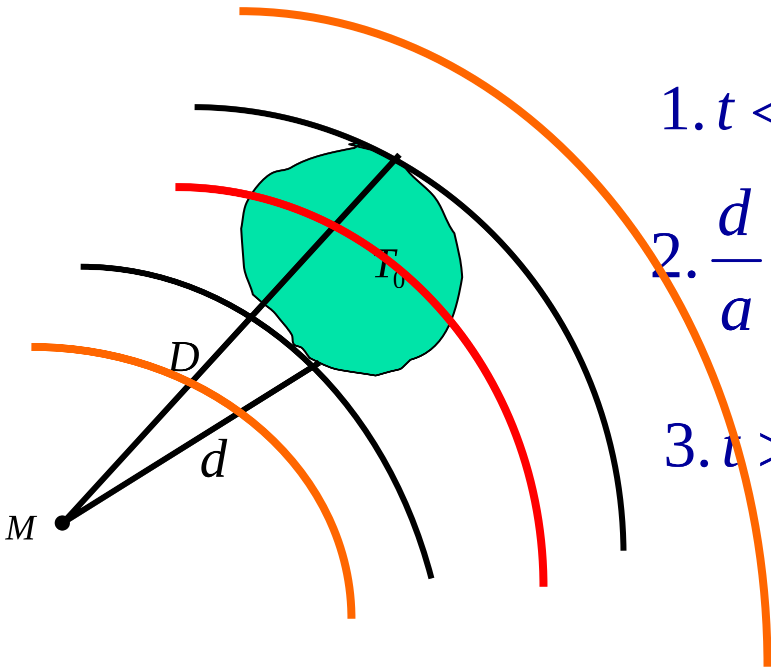
–泊松公式

s_{at}^M –以M为中心at为半径的球面；

$M' = M'(x', y', z')$–球面s_{at}^M上的点；

三、泊松公式物理意义

设初始扰动限于空间某区域T_0，



1. $t < \dfrac{d}{a}$, $u(M,t) = 0$, 扰动前锋未传到。

2. $\dfrac{d}{a} < t < \dfrac{D}{a}$, $u(M,t) \neq 0$, 扰动正经过。

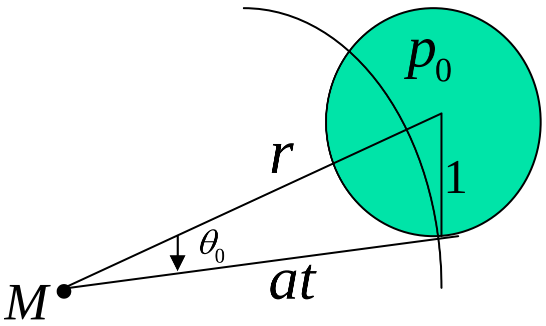
3. $t > \dfrac{d}{a}$, $u(M,t) = 0$, 扰动振尾已经过。

$$\boxed{u(M,t) = \frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{at}^{M}} \frac{\varphi(M')}{at}\,ds + \iint_{S_{at}^{M}} \frac{\psi(M')}{at}\,ds\right]}$$

四、例题

§7.3-§7.4：三维无界波动问题

求解 $\begin{cases} p_{tt} - a^2 \Delta p = 0 \\ p\big|_{t=0} = \begin{cases} p_0, & R<1 \\ 0, & R>1 \end{cases} \\ p_t\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$



1) $r-1 < at < r+1$:

$$\iint_{s_{at}^M} \frac{\varphi(M')}{at} ds = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{p_0 (at)^2 \sin\theta}{at} d\theta d\varphi$$

$$= -\frac{\pi p_0}{r} [(r-at)^2 - 1]$$

$$p(M,t) = \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{s_{at}^M} \frac{\varphi(M')}{at} ds \quad = \frac{p_0}{2r}(r-at)$$

2) $at < r-1$ or $at > r+1$: $\qquad p(M,t) = 0$

五、推迟势

1、定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(M,t) \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

2、三维纯有源波动问题的解—推迟势

仿照一维，由冲量原理有：

$$u(M,t) = \int_0^t v(M,t;\tau)\,d\tau; \qquad \begin{cases} v_{tt} - a^2 \Delta v = 0 \\ v|_{t=\tau} = 0 \\ v_t|_{t=\tau} = f(M,\tau) \end{cases}$$

五、推迟势

由poisson公式可求得：

$$u(M,t)=\frac{1}{4\pi a}\iint_{S^M_{a(t-\tau)}}\frac{f(M',\tau)}{a(t-\tau)}ds\rightarrow$$

$$\boxed{u(M,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{T^M_{at}}\frac{[f]}{r}dv}\text{—推迟势}$$

其中，$[f]=f(M',t-\frac{r}{a}),$

T^M_{at}：以 M 为中心 at 为半径的球体，

M' 是 T^M_{at} 面上的点。

五、推迟势

3、物理意义

三维纯有源波动问题在 M 点 t 时刻的解，由源在球体 T_{at}^{M} 中的影响的累加得到，且源的发出时间要比 t 早的时间 $(t-\frac{r}{a})$ 发出，即 M 点受到的影响比源发出的时刻 $(t-\frac{r}{a})$ 晚了 $\frac{r}{a}$，故此解被称为推迟势。

五、推迟势

4、例题：求解 $\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 2(y-t) \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$

$$\because\ y' = y + r\sin\theta\cos\varphi$$

$$u(M,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{T_{at}^M} \frac{2[y' - (t - \frac{r}{a})]}{r} dv$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{T_{at}^M} \frac{2[y + r\sin\theta\cos\varphi - (t - \frac{r}{a})]}{r} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr$$

$$u(M,t) = yt^2 - \frac{t^3}{3}$$

六、小结

1、平均值法： $\boxed{u(M_0,t_0)=\lim\limits_{r\to 0,t\to t_0}\overline{u}(r,t)}$

$$\boxed{\overline{u}(r,t)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S_r^{M_0}}u\,ds=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_r^{M_0}}u\,d\Omega}$$

2、$\begin{cases} u_{tt}=a^2\Delta u & (1)\\ u|_{t=0}=\varphi(M) & (2)\\ u_t|_{t=0}=\psi(M) & (3)\end{cases}$ 的解为：

$$\boxed{u(M,t)=\frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{at}^M}\frac{\varphi(M')}{at}ds+\iint_{S_{at}^M}\frac{\psi(M')}{at}ds\right]}$$

—泊松公式

六、小结

3、一般三维波动问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(M,t) \\ u\,|_{t=0} = \varphi(M) \\ u_t\,|_{t=0} = \psi(M) \end{cases}$$

其解为：

$$\boxed{u(M,t) = \frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{at}^{M}} \frac{\varphi(M')}{at}\,ds + \iint_{S_{at}^{M}} \frac{\psi(M')}{at}\,ds\right] + \frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{T_{at}^{M}} \frac{[f]}{r}\,dv}$$

本节作业

习题 7.3：2

Good-by!