数学物理方法

Mathematical Methods in Physics

武汉大学

物理科学与技术学院

第一篇 复变函数论

Theory of Complex Variable Functions

第一章 解析函数论

Theory of Analytic Functions

第一章解析函数习题课

本章小结:(见课本本章小结)

一、复变数关系的几何性质

二、复数及其复变数的运算

三、多值函数的性状

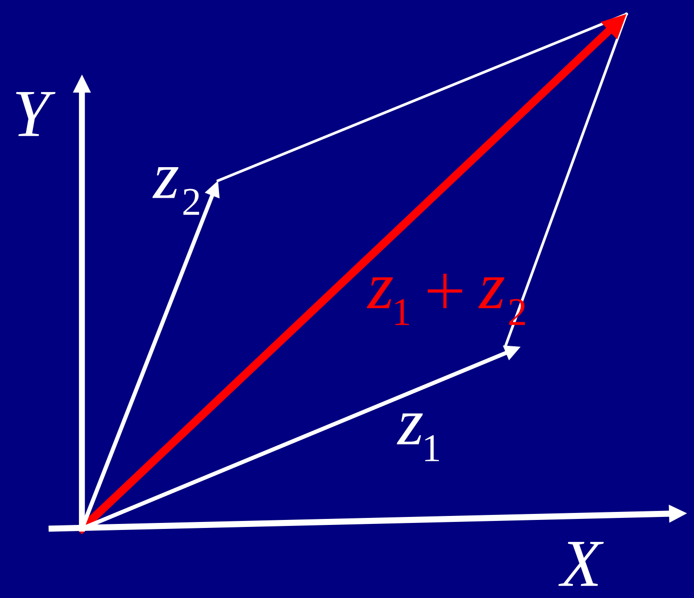
四、解析函数的性质及应用

一、复变数关系的几何性质

1、指导书，P13，例2（2）

证明： $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

并解释其几何意义。



法一：

令： $z_1 = x_1 + iy_1 \,, z_2 = x_2 + iy_2$

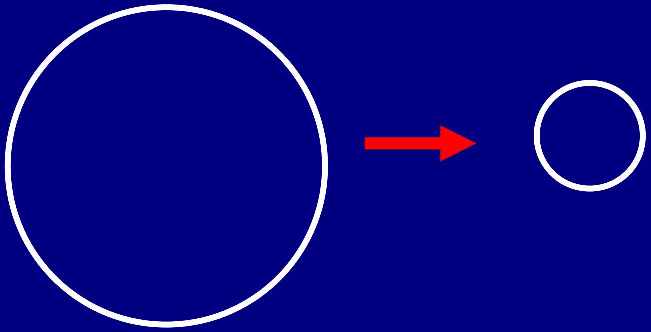
法二：向量加法

一、复变数关系的几何性质

2、指导书，P17，例5（1）

函数 $w=\dfrac{1}{z}$ 将Z平面的线 $x^2+y^2=4$

变成W平面的什么曲线？



答： $u^2+v^2=\dfrac{1}{4}$

二、复数及其复变数的运算

1、指导书，P21，例8（1）

求下列复数的实部、虚部、模与幅角主值

$$1-\cos\alpha+i\sin\alpha,\ 0\le\alpha\le\pi$$

答: $\arg z=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2}$

2、指导书，P25，例13（1）

求解下列方程

$$z^2+2z\cos\lambda+1=0,\ 0<\lambda<\pi$$

答：$z=-\cos\lambda\pm i\sin\lambda$

三、多值函数的性状

1、指导书，P27，例16（3）

判断函数 $\dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ 是单值还是多值？若是多值是几值？其支点是什么？

答：单值

2、指导书，P32，例19

对于 $w = Ln(1-z^2)$ 规定 $z=0$ 处 $w=0$

求 $w(2)=?$

答：$w(2)=\ln 3 + i\pi$

$$C-R:\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases}$$

四、解析函数的性质及应用

1、指导书，P36，例23(1)

已知解析函数的实部 $u=x^2-y^2+xy,\ f(i)=-1+i$，求解析函数 $f(z)$

答：$f(z)=z^2(1-\frac{i}{2})+\frac{i}{2}$

2、指导书，P40，例25

已知一平面静电场的电力线是与实轴相切于原点的圆，求等势线族，并求此电场的复势。

电力线：$x^2+(y-c)^2=c^2$

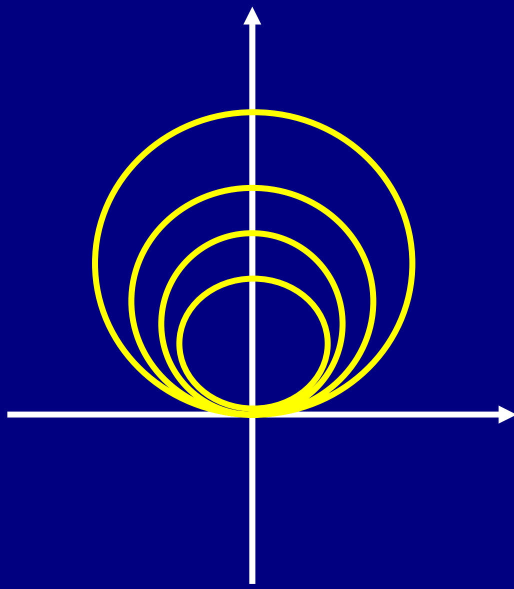
$$x^2+(y-c)^2=c^2 \to \frac{y}{x^2+y^2}=\frac{1}{2c}\overset{令}{=}c_1$$

令 $u=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ 即 $u=\dfrac{y}{x^2+y^2}=c_1$ —电力线族

$$\because \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \to \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{6x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \to \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{-6x^2y+2y^3}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\to \Delta u=0$$



等势线？ $\rightarrow v = c_2$ ？

$$\because \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad \rightarrow \Delta v = 0$$

$$\rightarrow v(x, y) = \int \frac{\partial v}{\partial y} dy + \varphi(x) = \int \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy + \varphi(x)$$

$$= \frac{x}{(x^2 + y^2)} + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(x^2 + y^2)} + \varphi'(x) = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \varphi'(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow \varphi'(x) = 0 \rightarrow \varphi(x) = c_3$$

$$\therefore v = \frac{x}{(x^2 + y^2)} + c_3$$

等势线？ $\rightarrow v = c_2$ ？ $\rightarrow \Delta v = 0$

$$\therefore v = \frac{x}{(x^2+y^2)} + c_3 \quad , \quad u = \frac{y}{x^2+y^2} = c_1$$

$$\rightarrow f(z) = u + iv = \frac{y}{x^2+y^2} + i\frac{x}{(x^2+y^2)} + ic_3$$

$$= \frac{i}{z} + ic_3 = \frac{c_4}{z} + c_5$$

Good-by!