数学物理方法

Mathematical Methods in Physics

第三章 无穷级数

Infinite Series

武汉大学

物理科学与技术学院

§3.2 幂级数

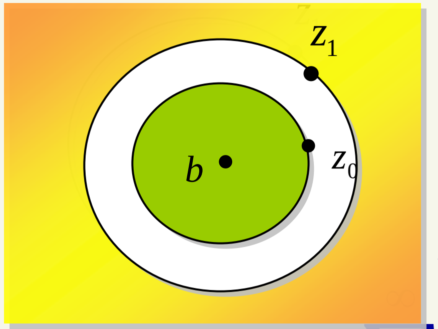
Power Series

一、定义

$$a_0 + a_1(z-b) + a_2(z-b)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-b)^k$$

二、收敛性

1.Able定理　若$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z-b)^k$在$z=z_0$点收敛，



则它在$|z-b|<|z_0-b|$内绝对收敛，

在$|z-z_0|\le\rho(\rho\le|z_0-b|)$上一致收敛。

2. 推论　若$\sum\limits_{k=0} a_k (z-b)^k$在$z=z_1$点发散，

则它在$|z-b|>|z_1-b|$内发散。

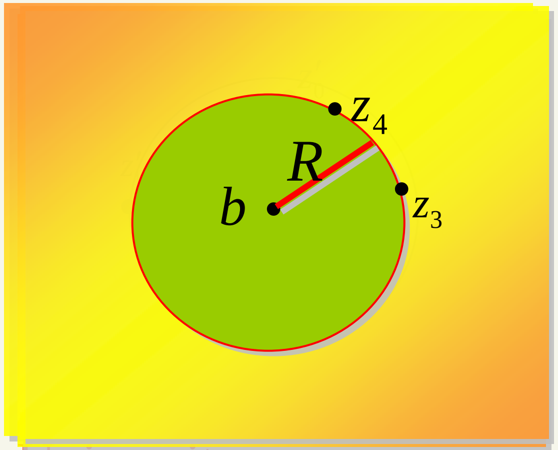
二、收敛性

3. 收敛圆和收敛半径

对于$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-b)^k$，存在一收敛圆$|z-b|=R$，当$|z-b|<R$，它绝对、一致收敛；当$|z-b|>R$，它发散；而在$|z-b|=R$上，其敛散性不定。$R$被称为它的的收敛半径。

4. 收敛半径公式

1) $R=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right|$; 2) $R=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$



例1 $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$的$R=?$，证$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} z^k=\dfrac{1}{1-z}, |z|<1}$

三、性质

1. 和函数解析

若 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-b)^k = f(z)$，则 $f(z) \in H(|z-b| < R)$, 且

$$\oint_l f(z)dz = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \oint_l (z-b)^k dz$$

$$R_{积} = R_{微} = R$$

$$\oint_l f^{(n)}(z)dz = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{d^n}{dz^n} \oint_l (z-b)^k dz$$

2. 可逐项相乘

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-b)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-d)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_k c_n (z-d)^{k+n}$$

本节作业

习 题 3. 2

1:(4); 2:(2) ;3:(2)

Good-by!


福娃 Friendlies
福娃贝贝
Beibei
福娃晶晶
Jingjing
福娃欢欢
Huanhuan
福娃迎迎
Yingying
福娃妮妮
Nini