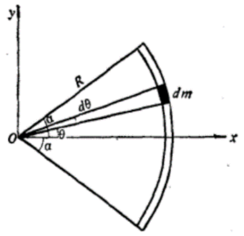
第四章 动量守恒定律　习题课习题参考答案

(源自原材料提供答案，未作修改，仅供参考)

质心的计算



1.1 解：如图所示，取弧形的圆心为坐标原点，其对称轴为Ox，圆弧所在平面为xy平面。由图形的几何对称性可以推知，此细杆的质心必在x轴上，即$y_c = 0$，而x_c则必须由积分求出。

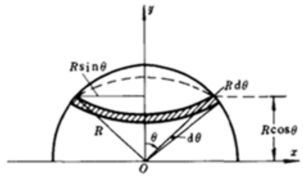
设细杆的线密度为λ，取小质元$\mathrm{d}m = \lambda R \mathrm{d}\theta$，该小质元的$x$坐标为$R\cos\theta$，所以

$$x_c = \frac{\int_m x \mathrm{d}m}{\int_m \mathrm{d}m} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} x\lambda R \mathrm{d}\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \lambda R \mathrm{d}\theta} = \frac{\lambda R^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta \mathrm{d}\theta}{\lambda R \int_{-\alpha}^{\alpha} \mathrm{d}\theta} = \frac{R\sin\alpha}{\alpha}.$$

即此圆弧形细杆的质心在$x_c = \frac{R\sin\alpha}{\alpha}$, $y_c = 0$处。

当此细杆弯成半圆形时，$\alpha = \pi/2$，则$x_c = \frac{2R}{\pi}$, $y_c = 0$。

当此细杆弯成圆形时，$\alpha = \pi$，则$x_c = 0, y_c = 0$，即在圆心处。



1.2 解：选如图所示的坐标轴．由于球壳对Oy轴对称，质心显然位于图中的Oy轴上．在半球壳上取一圆环，圆环的平面与Oy轴垂直．圆环的面积为$\mathrm{d}S = 2\pi R\sin\theta R\mathrm{d}\theta$．设匀质薄球壳的质量面密度为$\sigma$，圆环的质量则为

$$\mathrm{d}m = \sigma 2\pi R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta$$

由对称性可得匀质薄球壳的质心处于

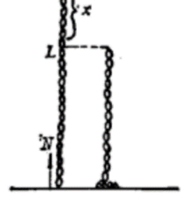
$$y_c = \frac{\int y\mathrm{d}m}{m} = \frac{\int y\sigma 2\pi R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta}{m}$$

从图可见，$y = R\cos\theta$，所以上式为

$$y_c = R\int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}R$$

即质心位于$y_c = R/2$处，其位置矢量为$\vec{r}_c = R/2\vec{j}$.

质心运动定律



2.1 **解一** 取逗留在空中的那一段链条为变质量系统，把链条总长作为总体(就是一个恒定质量系统，因此外力就是作用在整个链条上的力)。则变质量系统运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{dift} = \vec{F} + (\vec{u} - \vec{v})\frac{\mathrm{d}m}{dift}$$

这里$m = \rho(L-x)$，$u = 0$，$v = \sqrt{2gx}$，$\vec{F} = M\vec{g} + \vec{N}$，其中$\rho$为链条的线密度，$M$为链条总质量。

若取竖直向下作为坐标轴正方向，则运动方程可改写成

$$\rho(L-x)\tfrac{\mathrm{d}v}{dift} = MgN - v\tfrac{\mathrm{d}}{dift}[\rho(L-x)]$$

$$\rho(L-x)g = MgN - +\rho v^2$$

$$N = \rho LgMg + \rho gx + 2\rho(2gx) = \rho gx + 2\rho gx = 3\rho gx$$

可见，桌面受到的压力$N = 3\rho gx$形，它可以分成两部分，其中ρgx是在桌面上的那一部分链条给于的静压力，而$2\rho gx$则是下落中的动压力。

解二 若取逗留在空中的那一段链条为变质量系统，而把它与$t \to \ t+\mathrm{d}t$时间内落下的一部分看作总体，即$\rho g(L-x)+\rho g\mathrm{d}x$，这时外力中的压力就是动压力部分$N'$，所以有

$$\rho(L-x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -N' + \rho g(L-x) - v\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\rho(L-x)]$$

化简后得

$$N' = \rho v^2 = 2\rho gx.$$

解三 从不变质量的质心运动定理得：

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\rho(L-x)\cdot\frac{L+x}{2} + \rho xL\right] = Mg - N$$

$$-\rho x\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - \rho(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2 + \rho L\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = Mg - N$$

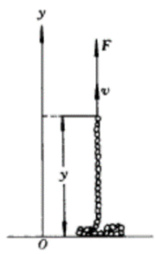
$$N = Mg + \rho gx + \rho(2gx) - \rho Lg = 3\rho gx.$$

解四 从碰撞观点考虑，在$t \to t+\mathrm{d}t$时间内落到桌面上的那一段$\mathrm{d}m$的速度突然减为零，它所受到的冲力为N'。由于末动量为零，初动量为$\mathrm{d}m\ v$，故有

$$0 - \mathrm{d}mv = -N'\mathrm{d}t$$

$$N' = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v = \rho\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}v = \rho v^2 = 2\rho gx.$$

这就是下落时的动压力。



2.2 **解**：取地面为惯性参考系，地面上一点为坐标原点O．竖直向上的轴为Oy正向．以整个链条为一系统．设在时刻t，链条一端距原点的高度为y，其速率为v．由于在地面部分的链条的速度为零，故在时刻t，链条的动量为

$$\vec{p}(t) = \lambda yv\vec{j}$$

由于λ和$\vec{v}$均为常量，故链条的动量随时间的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \lambda v\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} = \lambda v^2\vec{j}$$

作用于整个链条上的外力，有手的提力$\vec{F}$，重力$\lambda y\vec{g}$和$\lambda(l-y)\vec{g}$以及地面对$(l-y)$长链条的支持力$\vec{F}_N$．由牛顿第三定律知$\vec{F}_N$与$\lambda(l-y)\vec{g}$的大小相等、方向相反，所以系统所受的合外力为

$$\vec{F} + \lambda y\vec{g} = (F - \lambda yg)\vec{j}$$

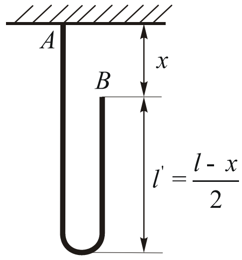
由上面两式得

$$(F - \lambda yg)\vec{j} = \lambda v^2\vec{j}$$

有

$$F = \lambda v^2 + \lambda v g.$$

2.3 **解**：如图所示，以支点A的位置为原点，竖直向下为正方向，建立坐标系．对全绳应用质心运动定理可得



$$Mg - f = Ma_c$$

其中$M = \lambda x$.

当B端下落了x时，质心位置为：

$$r_c = \frac{\frac{l+x}{2}\lambda \cdot \frac{l+x}{4} + \frac{l-x}{2} \cdot \left(\frac{l-x}{4} + x\right)\lambda}{l\lambda} = -\frac{x^2}{4l} + \frac{x}{2} + \frac{l}{4}$$

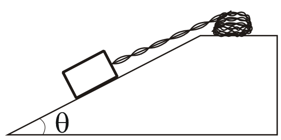
B端自由下落

$$x = \frac{1}{2}gt^2$$

联立解得

$$\begin{aligned} r_c &= -\frac{\frac{1}{4}g^2t^4}{4l} + \frac{gt^2}{4} + \frac{l}{4} \\ a_c &= \ddot{r}_c = -\frac{g^2t^3}{4l} + \frac{gt}{2} \\ f &= Mg - Ma_c = -\frac{l+x}{2}\lambda g + \lambda x g. \end{aligned}$$

2.4 **解**：以地球为参考系，以物体和滑下的绳作为研究对象，只考虑沿斜面的力，沿斜面向下为正方向．根据变质量质点运动方程可得：



$$(m + \lambda x)g\sin\theta - v\frac{\mathrm{d}(m+\lambda x)}{\mathrm{d}t} = (m+\lambda x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

整理得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g\sin\theta - \frac{\lambda v^2}{m + \lambda x}$$

其中$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

令$u = v^2$，上式化为：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{2\lambda u}{m + \lambda x} = 2g\sin\theta$$

积分得

$$v = \sqrt{u} = \sqrt{\frac{2g\sin\theta}{3\lambda} \cdot \frac{(m+\lambda x)^3 + c}{(m+\lambda x)^2}}.$$

当$x = 0$时，$v = 0$，可知$c = -m^3$，则

$$v = \sqrt{\frac{2g\sin\theta}{3\lambda} \cdot \frac{(m+\lambda x)^3 m^3}{(m+\lambda x)^2}}.$$

动量定理与动量守恒定律

3.1 **解**：显然，整个火车组成的系统动量守恒．这里我们不像往常一样，选取地面为参考系．因为相对位移与参考系的选择无关，所以，在这里我们选取质心为参考系．那么体系的总动量自然为零．所以根据动量守恒有

$$(M-m)\vec{v}_1+m\vec{v}_2=0$$

两边同时乘以时间$\mathrm{d}t$，并对全过程积分，即二者的位移满足关系

$$(M-m)\Delta\vec{r}_1+m\Delta\vec{r}_2=0$$

在这里，二者位移只需知道一个，结合上式，我们就可以得到相对位移$|\Delta\vec{r}_1-\Delta\vec{r}_2|$的大小．需要指出的是，这里的位移都是相对质心的，而我们知道脱节车厢相对于地面的位移$|\Delta\vec{r}_2'|=s$，因此我们在这里需要一个变换．在地面上来看，m速度从初速度$\vec{v}$均匀变化到 0，在质心系里来看，其速度是从 0 均匀变化到$-\vec{v}$，加速度一样，时间一样，所以在这两个参考系里面的位移大小也一样，即有

$$|\Delta\vec{r}_2|=|\Delta\vec{r}_2'|=s$$

可以求得

$$|\Delta\vec{r}_1-\Delta\vec{r}_2|=\frac{M}{M-m}s.$$

3.2 **解**：（1）如图所示，以质量分别为m和m_0的物体构成的系统为研究对象，$v_1=\sqrt{2gy}$为物体m在绳拉紧前的速率，v_2为绳刚好拉紧后两物体共同的速率

分别对m和m_0为应用动量定理，有

$$\int_0^{\Delta t}(mg-T_1)\mathrm{d}t=mv_2-mv_1 \qquad \int_0^{\Delta t}(T_2-m_0g)\mathrm{d}t=m_0v_2-0$$

由于m和m_0在极短时间内动量的增量为有限值，而$\Delta t\to 0$，则其受到的拉力远大于重力，故有

$$-\int_0^{\Delta t}T_1\mathrm{d}t=mv_2-mv_1 \qquad \int_0^{\Delta t}T_2\mathrm{d}t=m_0v_2-0$$

本题轻绳内张力处处相等，故有$T_1=T_2$，则上面两式相加，有

$$mv_2-mv_1=m_0v_2$$

即

$$(m+m_0)v_2=mv_1$$

解得

$$v_2=\frac{m}{m+m_0}v_1=\frac{m}{m+m_0}\sqrt{2gy}.$$

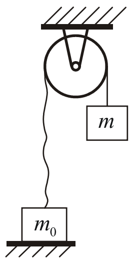
由牛顿第二定律可求得加速度 $a=\dfrac{m-m_0}{m+m_0}g$

得出系统回到原处所花的时间满足

$$0=v_2t+\frac{1}{2}at^2$$

联立解得

$$t=\frac{2m}{m_0-m}\sqrt{\frac{2y}{g}}.$$



（2）动能减少的部分为：

$$\frac{\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{1}{2}(m_0+m)v_2^2}{\frac{1}{2}mv_1^2}=\frac{m_0}{m_0+m}.$$

守恒定律综合应用

4.1 **解一** 小球与环组成的系统水平方向不受外力作用，相互作用后动量守恒：

$$2mv_0=2mv_1+mv_2$$

系统无能量损失：

$$\frac{1}{2}\cdot 2m\cdot v_0^2=\frac{1}{2}\cdot 2m\cdot v_1^2+\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_2^2$$

由上面两式得两组解：

$$v_1=v_0,\quad v_2=0$$
$$v_1=\frac{1}{3}v_0,\quad v_2=\frac{4}{3}v_0.$$

对应两种情况：

(1)小球动能足够大，将穿过小环以v_0匀速运动，小车速度为0；

(2)小球动能不够大，将穿不过小环，以$v_0/3$匀速运动，小车以速度为$4v_0/3$运动.

解二 由题意知，小球与小车组成的系统**动量守恒、机械能守恒**，质心速度不变，即有

$$2m\vec{v}_0=2m\vec{v}_1+m\vec{v}_2 \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}\cdot 3m\cdot v_c^2+\frac{1}{2}\cdot \mu v_{r1}^2=\frac{1}{2}\cdot 3m\cdot v_c^2+\frac{1}{2}\cdot \mu v_{r2}^2 \tag{2}$$

由(2)式可知，二者**相对速度大小不变**，即

$$v_{r2}=v_1-v_2=\pm v_{r1}=\pm v_0 \tag{3}$$

由（1）（3）两式可解得

当v_0足够大，可以克服二者之间的相互作用时，$v_2=v_0$，$v_1=0$

当v_0不够大，不能克服二者之间的相互作用时，$v_1=\frac{1}{3}v_0$，$v_2=\frac{4}{3}v_0$.

4.2 **解** 当弹簧有最大压缩量时，m_1和m_2达共同速度v．由m_1和m_2组成的系统水平方向不受外力作用，动量守恒：

$$m_2v_0=(m_1+m_2)v$$

系统机械能守恒：

$$\frac{1}{2}m_2v_0^2=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2+\frac{1}{2}k\Delta x^2$$

可得：

$$\Delta x=v_0\sqrt{\frac{m_1m_2}{k(m_1+m_2)}}.$$