数学物理方法

Mathematical Methods in Physics

第五章　留数定理

The theorem of residues

武汉大学

物理科学与技术学院

Wuhan University

第五章 留数定理习题课

Exercise class on

The theorem of residues

第五章留数定理习题课

- 本章内容小结
- 习题求解与讨论

一、计算留数

二、用留数定理计算围道积分

三、计算实积分

四、计算多值函数的积分

五、其它

一、计算留数

1、公式：

$$resf(b_k)=\begin{cases} C_{-1} \\ \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{l_k} f(z)dz \end{cases} \qquad \mathrm{resf}(\infty)=\begin{cases} -C_{-1} \\ \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{l} f(z)dz \end{cases}$$

$$resf(b_k)=\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-b_k)^n f(z)]_{z=b_k},\ b_k-n\text{阶极点}$$

$\boxed{n=1}$

$$=\begin{cases} \lim\limits_{z\to b_k}[(z-b_k)f(z)] \\ \dfrac{\varphi(b_k)}{\psi'(b_k)} \end{cases}$$

一、计算留数

2、判断奇点的类型

（1）判断何点为奇点

（2）判断奇点是孤立奇点还是非孤立奇点

若为孤立奇点：

（a）$\lim\limits_{z\to b(\infty)} f(z)=?$ 若 $\lim\limits_{z\to b(\infty)} f(z)=\begin{cases}\infty，b(\infty)-\text{极}\\ \text{有限，}b(\infty)-\text{可去}\\ \text{不定，}b(\infty)-\text{本性}\end{cases}$

$$(b)\text{若}b\text{为极点,则当}\begin{cases} f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-b)^m} \\ \lim\limits_{z\to b}[(z-b)^m f(z)]=\text{非0有限} \\ g(z)=\dfrac{1}{f(z)}\text{以}b\text{为}m\text{阶0点}\end{cases}$$

b为m阶极点。

一、计算留数

3、计算留数：

1、$res[\frac{z}{z-1},1]=?$ （单极点） 答：1

2、$res[\frac{e^z-1}{\sin^3 z},0]=?$ （2阶极点） 答：$\frac{1}{2}$

3、$res[\Gamma(z),-n]=?$ （单极点） 答：$\frac{1}{(-1)^n n!}$

4、$res[ctgz, k\pi]=?$ （单极点） 答：1

5、$res[f(z\cdot\sin\frac{1}{z}),0]=?$ (本性) 答：0

$res[f(z\cdot\sin\frac{1}{z}),\infty]=?$ (可去) 答：0

一、计算留数

$$(2)\ res[\frac{e^z-1}{\sin^3 z},0]=?$$ （2阶极点） 答: $\frac{1}{2}$

法一:

$$res[\frac{e^z-1}{\sin^3 z},0]=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}[\frac{z^2(e^z-1)}{\sin^3 z}]_{z=0}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{(z^2+2z)e^z\sin z-2z\sin z-3z^2e^z\cos z+3z^2\cos z)}{\sin^4 z}$$

记 $\varphi(z)=(z^2+2z)e^z\sin z-2z\sin z-3z^2e^z\cos z+3z^2\cos z)$

$\psi(z)=\sin^4 z$

$\to\ \varphi(0)=\varphi'(0)=\varphi''(0)=\varphi'''(0);\quad \varphi^{(4)}(0)=12;$

$\psi(0)=\psi'(0)=\psi''(0)=\psi'''(0)=0;\ \psi^{(4)}(0)=24$

一、计算留数

$$(2)\ res[\frac{e^z-1}{\sin^3 z},0]=?$$ （2阶极点）

答: $\frac{1}{2}$

法二:

$$e^z-1=z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots$$

$$\sin^{-3} z=z^{-3}(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots)^{-3}$$

$$=z^{-3}[1+(-3)(-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots)+\frac{(-3)(-3-1)}{2!}(-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots)^2+\cdots]$$

$$=z^{-3}[1+\frac{1}{2}z^2-\frac{17}{120}z^4+\cdots)\rightarrow \sin^{-3} z=z^{-3}+\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{17}{120}z+O(z^3)$$

一、计算留数

(3) $res[\Gamma(z),-n]=?$（单极点） 答: $\dfrac{1}{(-1)^n n!}$

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+1)}{z}=\frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)}=\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)(z+n)}$$

$$resf(-n)=\lim_{z\to -n}\frac{(z+n)\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)(z+n)}$$

(4) $res[ctgz,k\pi]=?$ （单极点） 答: 1

$$res[ctgz,k\pi]=\frac{\cos z}{\sin' z}\bigg|_{z=k\pi}=1$$

二、用留数定理计算围道积分

$$1、\ I=\oint_{|z|=4}\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}dz$$

奇点：

$z=\pm i,$

$z=\sqrt[4]{2}e^{i\frac{(2k+1)\pi}{4}}$

$k=0,1,2,3$

$$I=\oint_{|z|=4}f(z)dz=2\pi i\sum_{n=1}^{6}resf(z_n)$$

答：　$2\pi i$

$$\sum_{k=1}^{6}resf(z_k)+resf(\infty)=0$$

$$|z|>4:\ \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}=\frac{z^{15}}{z^4(1+\frac{1}{z^2})^2z^{12}(1+\frac{2}{z^4})^3}$$

$$=\frac{1}{z}(1+\frac{1}{z^2})^{-2}(1+\frac{2}{z^4})^{-3}$$

$$=\frac{1}{z}[1+(-2)\frac{1}{z^2}+\frac{(-2)(-2-1)}{2}\frac{1}{z^4}+\cdots][1+(-3)\frac{2}{z^4}+\cdots]$$

三、计算实积分

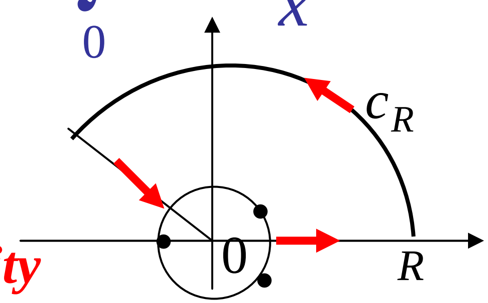
1、$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4-1}$ 答: $-\frac{\pi}{2}$

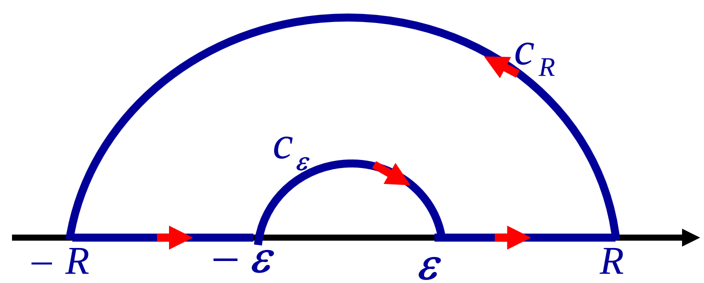
2、$I=\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^3}$ $\frac{\pi}{3\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

$$I=i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2-(4a+2)z+1}$$

3、$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a+\sin^2 x}dx$ 答: $\frac{\pi}{2\sqrt{a^2+a}}$

4、$I=\int_{0}^{\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx, a>0, b>0$ 答: $\frac{\pi}{2}(b-a)$





附: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 型积分的推广

原: 若$f(z)$在实轴上无奇点, 在$\mathrm{Im}\, z>0$中除有奇点$b_k(k=1,2,\cdots,n)$外单值解析, 且当$|z|\to\infty$时$|z\cdot f(z)|\to 0$, 则

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}\, f(b_k)\Big|_{\mathrm{Im}\, z>0}}$$

习题5.3之第1题: 若$f(z)$在实轴上有有限个一阶极点$a_j(j=1,2,\cdots,m)$, 在$\mathrm{Im}\, z>0$中除有奇点$b_k(k=1,2,\cdots,n)$外单值解析, 且当$|z|\to\infty$时$|z\cdot f(z)|\to 0$, 则

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}\, f(b_k)\Big|_{\mathrm{Im}\, z>0} + \pi i\sum_{j=1}^{m} \mathrm{res}\, f(a_j)\Big|_{\mathrm{Im}\, z=0}}$$

附：$\int_0^{\infty} f(x)\begin{Bmatrix}\cos px \\ \sin px\end{Bmatrix} dx$型积分的推广

原：若$f(z)$在实轴上无奇点，在$\operatorname{Im} z > 0$中除有奇点$b_k (k = 1,2,\cdots,n)$外单值解析，且当$|z| \to \infty$时$|f(z)| \to 0, p > 0$则

$$\boxed{\int_0^{\infty} f(x)\cos px dx = \pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\left[f(b_k)e^{ipb_k}\right]_{\operatorname{Im} z>0}}, f(x)\text{为偶函数；}$$

$$\boxed{\int_0^{\infty} f(x)\sin px dx = \pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\left[f(b_k)e^{ipb_k}\right]_{\operatorname{Im} z>0}}, f(x)\text{为奇函数。}$$

附：$\int_0^{\infty} f(x)\begin{Bmatrix}\cos px\\ \sin px\end{Bmatrix}dx$型积分 的推广

习题5.3之第2题：

若$f(z)$在实轴上有有限个一阶极点$a_j(j=1,2,\cdots,m)$，在$\operatorname{Im} z>0$中除有奇点$b_k(k=1,2,\cdots,n)$外单值解析，且当$|z|\to\infty$时$|f(z)|\to 0$，则

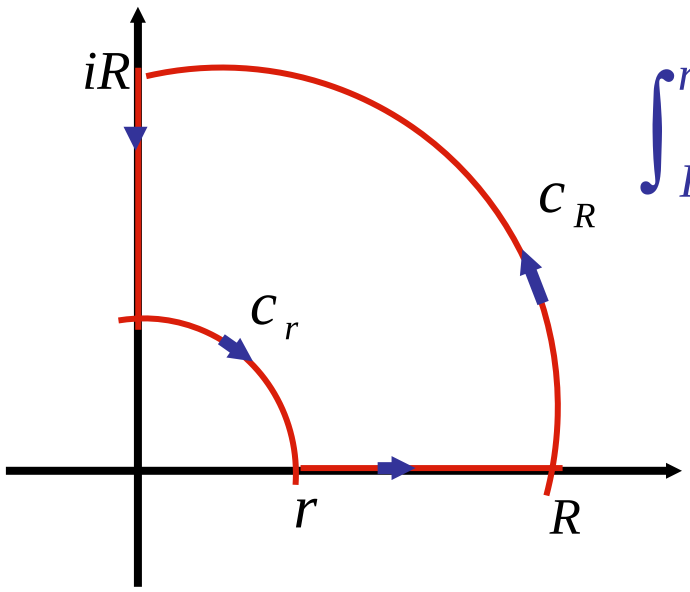
$$\int_0^{\infty} f(x)\cos px\,dx = \pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}\left[f(b_k)e^{ipb_k}\right]_{\operatorname{Im} z>0} + \frac{\pi i}{2}\sum_{j=1}^{m}\operatorname{res}\left[f(a_j)e^{ipa_j}\right]_{\operatorname{Im}=0},\quad f(x)\text{为偶函数；}$$

$$\int_0^{\infty} f(x)\sin px\,dx = \pi\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}\left[f(b_k)e^{ipb_k}\right]_{\operatorname{Im} z>0} + \frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^{m}\operatorname{res}\left[f(a_j)e^{ipa_j}\right]_{\operatorname{Im} z=0},\quad f(x)\text{为奇函数；}$$

四、计算多值函数的积分

计算 $I=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ 答: $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$$\int_r^R\frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}dx+\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}dz+\int_R^r\frac{e^{i(iy)}}{\sqrt{iy}}d(iy)+\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}dz=0$$

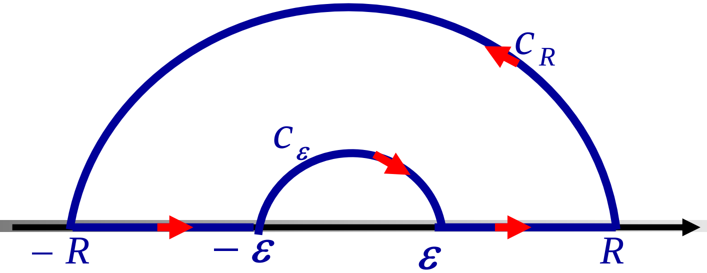


$$\int_R^r\frac{e^{i(iy)}}{\sqrt{iy}}d(iy)=-\frac{i}{\sqrt{i}}\int_r^R\frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}dy$$

$$\overset{\varphi=\sqrt{y}}{=}-\sqrt{i}\,2\int_0^{\infty}e^{-\varphi^2}d\varphi=-\sqrt{i}\sqrt{\pi}$$

$$=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi}$$

五、讨论



$$1.\ I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}dx=?\quad I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=?\qquad [\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$$

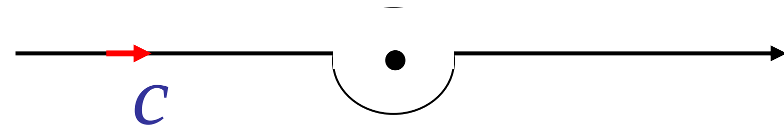
$$2.\ I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}dx=?,0<\alpha<1\qquad [\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}]$$

$$3.\ I=\int_{0}^{\infty}\frac{x}{e^x-1}dx=?\qquad [\frac{\pi^2}{6}]$$

$$4.\ I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\cosh x}dx=?\quad I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\cosh^3 x}dx=?\qquad [\pi,\frac{\pi}{2}]$$

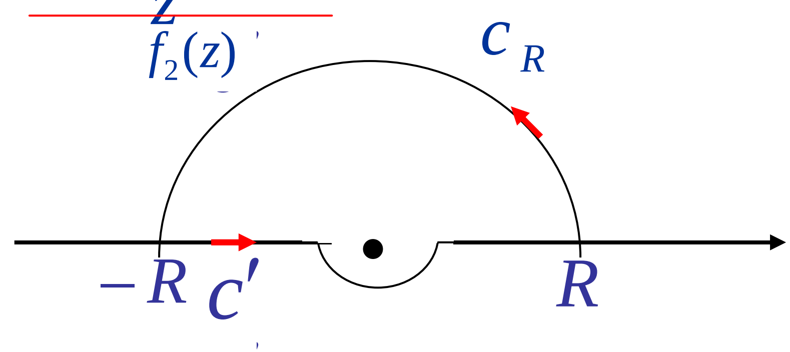
五、讨论

$$1.I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}dx=\int_c\frac{\sin^3 z}{z^3}dz$$



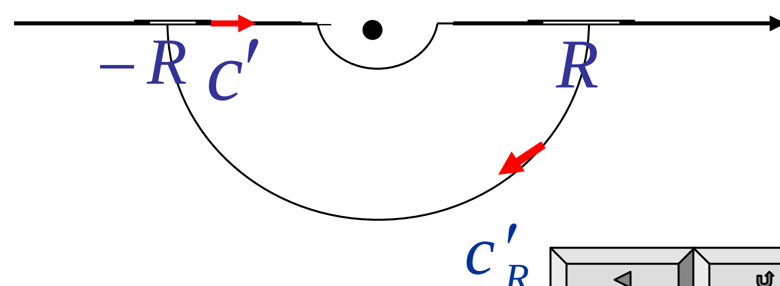
$$=\frac{1}{(2i)^3}[\int_c\underbrace{\frac{e^{i3z}-3e^{iz}}{z^3}}_{f_1(z)}dz+\int_c\underbrace{\frac{3e^{-iz}-e^{-i3z}}{z^3}}_{f_2(z)}dz]$$

$$res[f_1(z),0]=-3$$



$$\int_c\frac{e^{i3z}-3e^{iz}}{z^3}dz=-6\pi i$$

$$\int_c\frac{3e^{-iz}-e^{-i3z}}{z^3}dz=0$$



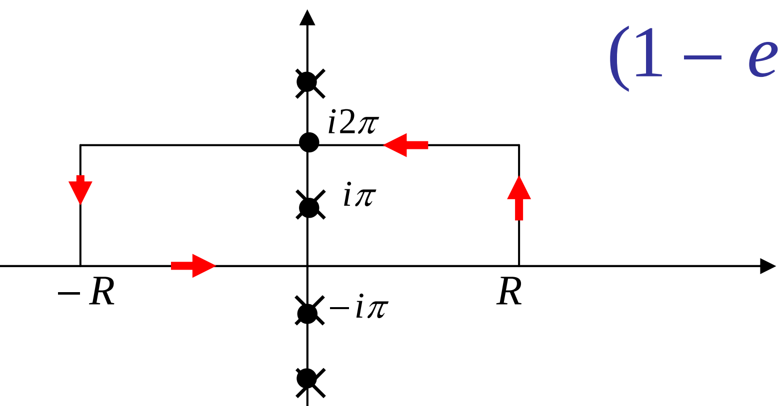
$$1.I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}dx=\frac{3}{4}\pi$$

五、讨论

$$2.\ I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha x}}{1+e^{x}}dx=?\ ,0<\alpha<1 \qquad [\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}]$$

$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{\alpha x}}{1+e^{x}}dx+\int_{0}^{2\pi}\frac{e^{\alpha(R+iy)}}{1+e^{(R+iy)}}d(iy)+\int_{R}^{-R}\frac{e^{\alpha(x+i2\pi)}}{1+e^{(x+i2\pi)}}dx$$

$$+\int_{2\pi}^{0}\frac{e^{\alpha(-R+iy)}}{1+e^{(-R+iy)}}d(iy)=2\pi i\,\mathrm{res}f\ (i\pi)$$



$$(1-e^{i2\pi\alpha})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha x}}{1+e^{x}}dx=-2\pi i e^{i\pi\alpha}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha x}}{1+e^{x}}dx=\frac{\pi}{\sin\ \alpha\pi}$$

复变函数论总结

复变函数

- 解析函数 $f(z)$
  - 表达式
    - $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$
    - $$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k,$$
      $$a_k=\frac{f^{(n)}(b)}{k!},|z-b|<R$$
  - 性质
    - C-R条件：
    - $\Delta u=0,\Delta v=0$
    - $\nabla u\cdot\nabla v=0$
  - 围道积分：$\oint_l f(z)dz=0$
- 有有限孤立奇点的函数 $f(z)$

复变函数论总结

复变函数

- 解析函数 $f(z)$
- 有有限孤立奇点的函数 $f(z)$
  - 表达式
    - $f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(z-b)^k, r<|z-b|<R$
    - $c_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)}{(z-b)^{k+1}}dz$
  - 性质
    - $f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(z-b)^k, 0<|z-b|<R$
    - $resf(b)=c_{-1}$
    - 奇点：可去、极点、本性
  - 围道积分：$\oint_l f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}resf(b_k)$

再
见
！