数学物理方法

Methods in Mathematical Physics

第九章　积分变换法

The Method of Integral Transforms

武汉大学物理科学与技术学院

第九章　积分变换法

The Method of Integral Transforms

§9.3－§9.4

拉普拉斯变换法

The Method of LaplaceTransforms

一、拉氏变换

问题的引入： $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$ 难！

若$\beta>0$;当$t<0$时 $f(t)=0$ 则$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)e^{-\beta t}\right|dt<\infty$ 易

此时： $F\left[f(t)e^{-\beta t}\right]=\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-\beta t}e^{-i\omega t}dt$

而： $f(t)e^{-\beta t}=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F\left[f(t)e^{-\beta t}\right]e^{i\omega t}d\omega$

1、定义 记 $p=\beta+i\omega$，$F(p)=F\left[f(t)e^{-\beta t}\right]$,则 $dp=id\omega$

$$F(p)=\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-pt}dt \qquad -f(t)\text{的拉氏变换}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}F(p)e^{pt}dp-F(p)\text{的拉氏逆变换}$$

一、拉氏变换及存在定理

2、存在条件

(1) $f(t)$及导数除有限个第一类间断点外连续

(2) $|f(t)| \le Me^{\beta_0 t}$ $(M, \beta_0 \ge 0$ ；β_0是增长指数)

例：(1) $L[e^{at}] = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt \boxed{= \frac{1}{p-a}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a}$

$$\boxed{(2) \quad L[t^k] = \frac{k!}{p^{k+1}} = \frac{\Gamma(k+1)}{p^{k+1}}, \qquad \operatorname{Re} p > 0}$$

$$L[t^0] = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{0t} e^{-pt} dt = \frac{1}{p}, \operatorname{Re} p > 0$$

$$L[t^1] = \int_0^{\infty} t e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} \int_0^{\infty} t de^{-pt} = \frac{1}{p^2}, \operatorname{Re} p > 0$$

二、拉氏变换性质

1.线性：$L[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha L[f_1(t)]+\beta L[f_2(t)]$

2.延迟：$L[e^{p_0 t}f(t)]=F(p-p_0)$　记$L[f(t)]=F(p)$

3.位移：$L[f(t-\tau)]=e^{-p\tau}F[p]$

4.相似：$L[f(at)]=\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{p}{a}\right),a>0$

5.微分：$L[f^{(n)}(t)]=p^n F(p)-p^{n-1}f(0)-\boldsymbol{p}^{n-2}\boldsymbol{f}'(0)-\ldots-\boldsymbol{f}^{(n-1)}(0)$

6.积分：$L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\dfrac{1}{p}L[f(t)]$

7.卷积：$L[f_1(t)*f_2(t)]=L[f_1(t)]\cdot L[f_2(t)]$

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

附：傅氏变换性质

1. $F[\alpha f_1+\beta f_2]=\alpha F[f_1]+\beta F[f_2]$

2. $F[e^{i\omega_0 x}f(x)]=G(\omega-\omega_0)\quad$ [设$F[f(x)]=G(\omega)$]

3. $F[f(x\pm x_0)]=e^{\pm i\omega x_0}F[f(x)]$

4. $F[f^{(n)}(x)]=(i\omega)^n F[f(x)],\quad f^{(n-1)}(x)\xrightarrow{|x|\to\infty}0, n=1,2,\ldots$

5. $F\left[\int_{x_0}^{x}f(\xi)d\xi\right]=\frac{1}{i\omega}F[f(x)]$

6. $F[f_1*f_2]=F[f_1]\cdot F[f_2]$–卷积定理

7. $F[f_1\cdot f_2]=\frac{1}{2\pi}F[f_1]*F[f_2]$–像函数卷积

其中 $f_1*f_2=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\xi)f_2(x-\xi)d\xi\to$ 卷积

W

二、拉氏变换性质

例

$$(1)L[\sin kt]=L\left[\frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2i}\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p-ik}-\frac{1}{p+ik}\right]\boxed{=\frac{k}{p^2+k^2}},\mathrm{Re}\,p>0$$

$$(2)L\left[\sin\left(t-\frac{2\pi}{3}\right)\right]=e^{-\frac{2\pi}{3}p}L[\sin t]=e^{-\frac{2\pi}{3}p}\frac{1}{p^2+1}$$

$$(3)L[\cos kt]=L\left[\frac{1}{k}\frac{d}{dt}\sin kt\right]=\frac{1}{k}p\cdot\frac{k}{p^2+k^2}$$

$$\boxed{=\frac{p}{p^2+k^2}}$$

二、拉氏变换性质

例 (4)已知$F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+1)^2}$，求$L^{-1}[F(p)]=?$

$$L^{-1}[F(p)]=L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1}\right]$$

$$=L^{-1}\cdot L[\cos t*\cos t]=\int_0^t\cos\tau\cos(\tau-t)d\tau$$

$$=\int_0^t\frac{1}{2}[\cos(2\tau-t)+\cos t]d\tau$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\int_0^t\cos\alpha d\alpha+\frac{1}{2}t\cos t$$

$$\boxed{=\frac{1}{2}(t\cos t+\frac{1}{2}\sin t)}$$

三、原函数存在定理

若$F(p)$单值，在$0 \le \arg z \le 2\pi$中当$p \to \infty$ $F(p) \to 0$

则$\boxed{f(t) = \sum_k \mathrm{res}\left[F[p_k]e^{p_k t}\right]}$， $p_k \to$全平面奇点

(拉氏反演及展开定理)

例： $F(p) = \dfrac{1}{(p+1)(p-3)^2}$，求$f(t) = ?$

$$f(t) = res\left[\frac{e^{pt}}{(p+1)(p-3)^2}, -1\right] + res\left[\frac{e^{pt}}{(p+1)(p-3)^2}, 3\right]$$

$$= \frac{e^{pt}}{(p-3)^2}\bigg|_{p=-1} + \frac{d}{dp}\left[\frac{e^{pt}}{p+1}\right]_{p=3} = \frac{e^{-t}}{16} + \frac{te^{3t}}{4} - \frac{e^{3t}}{16}$$

思考： 还可用其它法做吗？

四、解数理方程

1. $$\begin{cases} T''(t)+\left(\dfrac{n\pi a}{l}\right)^2 T(t)=f(t) \\ T(0)=0 \\ T'(0)=0 \end{cases}$$

记 $L[T(t)]=\int_0^\infty T(t)e^{-pt}dt=\tilde{T}(p)$,

$$L[f(t)]=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt=\tilde{f}(p)$$

则 $p^2\tilde{T}(p)-pT(0)-T'(0)+\left(\dfrac{n\pi a}{l}\right)^2\tilde{T}(p)=\tilde{f}(p)$

$$\therefore \tilde{T}(p)=\frac{\tilde{f}(p)}{p^2+\left(\dfrac{n\pi a}{l}\right)^2}=L\left[f(t)*\frac{l}{n\pi a}\sin\frac{n\pi a}{l}t\right]$$

$$\boxed{T(t)=\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f(\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)d\tau}$$

四、解数理方程

2. 解混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 < x < \infty, t > 0 \\ u(0,t) = f(t), \quad \lim\limits_{x\to\infty} u(x,t) = 0 \quad (t \geq 0) \\ u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

记 $L[u(x,t)] = \tilde{u}(x,p), L[f(t)] = \tilde{F}(p)$

则 $$\begin{cases} p^2\tilde{u}(x,p) - pu(x,0) - u_t(x,0) = a^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{u}(x,p) \\ \tilde{u}(0,p) = \tilde{F}(p), \qquad \lim\limits_{x\to\infty}\tilde{u}(x,p) = 0 \end{cases}$$

拉普拉斯变换法

四、解数理方程

2. 解混合问题

即
$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dx^2}\tilde{u}(x,p) - \dfrac{p^2}{a^2}\tilde{u}(x,p) = 0 \\ \tilde{u}(0,p) = \tilde{F}(p) \\ \lim\limits_{x\to\infty}\tilde{u}(x,p) = 0 \end{cases}$$

$$\tilde{u} = c_1(p)e^{-\frac{p}{a}x} + c_2(p)e^{\frac{p}{a}x}$$

由 $\tilde{u}(0,p) = \tilde{F} \to c_1(p) + c_2(p) = \tilde{F}(p)$

由 $\tilde{u}(\infty,p) = 0 \to c_2(p) = 0$

$$\tilde{u}(x,p) = \tilde{F}(p)e^{-\frac{p}{a}x} \to u(x,t) = L^{-1}\left[\tilde{F}(p)\cdot e^{-\frac{p}{a}x}\right]$$

$$u(x,t) = L^{-1}L\left[f\left(t-\frac{x}{a}\right)\right] = f\left(t-\frac{x}{a}\right)$$

四、解数理方程

3、
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \ -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

(1) 令 $F[u(x,t)] = \tilde{u}(\omega,t), F[\varphi(x)] = \tilde{\varphi}(\omega),$

$$F[\psi(x)] = \tilde{\psi}(\omega)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\tilde{u}}{dt^2} + a^2\omega^2\tilde{u}(\omega,t) = 0 \ \ t > 0 \\ \tilde{u}(\omega,0) = \tilde{\varphi}(\omega), \\ \tilde{u}_t(\omega,0) = \tilde{\psi}(\omega) \end{cases}$$

四、解数理方程

(2) 记 $L[\tilde{u}(\omega,t)]=U(\omega,p)$

则 $p^2U(\omega,p)-p\tilde{u}(\omega,0)-\tilde{u}_t(\omega,0)+a^2\omega^2U(\omega,p)=0$

即 $p^2U(\omega,p)-p\tilde{\varphi}(\omega)-\tilde{\psi}(\omega)+a^2\omega^2U(\omega,p)=0$

(3) $U(\omega,p)=\dfrac{p\tilde{\varphi}(\omega)+\tilde{\psi}(\omega)}{p^2+a^2\omega^2}$

$$=\tilde{\varphi}(\omega)\frac{p}{p^2+a^2\omega^2}+\frac{\tilde{\psi}(\omega)}{a\omega}\frac{a\omega}{p^2+a^2\omega^2}$$

(4) $\tilde{u}(\omega,t)=\tilde{\varphi}(\omega)\cos a\omega t+\dfrac{\tilde{\psi}(\omega)}{a\omega}\sin a\omega t$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha$$

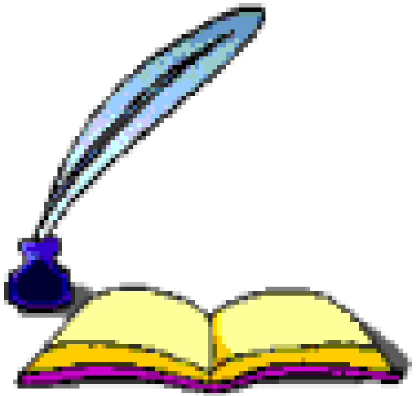
本章小结

变换 \ 主要内容	积分变换法	
	傅氏变换	拉氏变换
象函数	$G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$	$F(p)=\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt,$ $p=\beta+i\omega$
原函数	$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{i\omega x}d\omega$	$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(p)e^{pt}dp,$
解数理方程的步骤	1. 对方程和定解条件（关于某个变量）取变换 2. 解变换后的像函数的常微方程或代数方程的定解问题。 3. 求像函数的逆变换（反演）即得原定解问题的解。	

本章小结

求逆变换方法	1. 查表并利用变换的性质(如卷积定理等) 2. 由逆变换公式求，常常要用留数定理计算积分	
解法优点	1. 减少了自变量个数，使偏微方程化为常微方程，常微方程化为代数方程求解，而使问题大为简化； 2. 不必考虑方程(边界条件)的齐次与否，都采用一种固定的步骤求解，易于掌握。	
缺点	对函数要求苛刻(绝对可积)	有些逆变换难求
常用于求解	没有边界条件的初值问题(对空间变量变换)	带有初始条件的混合问题，特别是半无界问题(对时间变量变换)

本节作业



习题 9.3：4（1）6；

习题 9.4：1

再见！