数学物理方法

Mathematical Methods for Physics

第六章　定解问题

Mathematical　Problem

武汉大学

物理科学与技术学院

第六章　定解问题习题课

内容小结（见教材）

一、建立导出数理方程

二、写出（或导出）定解问题、定解条件

一、建立导出数理方程

定解问题习题课

1、"指导"P153，例2：

设扩散物质源强为f 试导出三维扩散方程。

$$u = \frac{N}{v}$$

附：（1）粒子浓度：单位体积的粒子数

$$\vec{q} = \frac{N}{t\,S}$$

（2）粒子流密度：单位时间流过单位面积的粒子数

（3）扩散源强：单位时间单位体积所产生的扩散物质

$$F = \frac{N}{tV}$$

（4）扩散定理：在物体内浓度分布不均匀时会引起物质扩散运动。单位时间流过单位面积的粒子数，与浓度的下降率成正比。

$$\vec{q} = -D\nabla u$$

一、建立导出数理方程

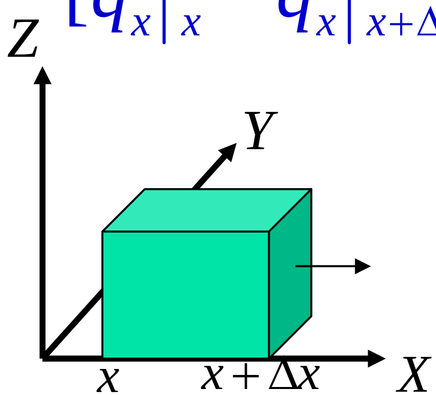
1、“指导”P153，例2：

设扩散物质源强为f试导出三维扩散方程。

解：考虑在Δt时间Δv中的粒子的流动： $\boxed{\vec{q} = -D\nabla u}$

沿x轴流入的净余物质为：

$$[q_x|_x - q_x|_{x+\Delta x}]\Delta t\Delta y\Delta z = D[u_x|_{x+\Delta x} - u_x|_x]\Delta t\Delta y\Delta z$$



$$y:\quad D[u_y|_{y+\Delta y} - u_y|_y]\Delta t\Delta x\Delta z$$

$$z:\quad D[u_z|_{z+\Delta z} - u_z|_z]\Delta t\Delta x\Delta y$$

$$f:\quad f\Delta t\Delta x\Delta y\Delta z$$

因浓度增加的物质为： $[u(x,t+\Delta t) - u(x,t)]\Delta x\Delta y\Delta z$

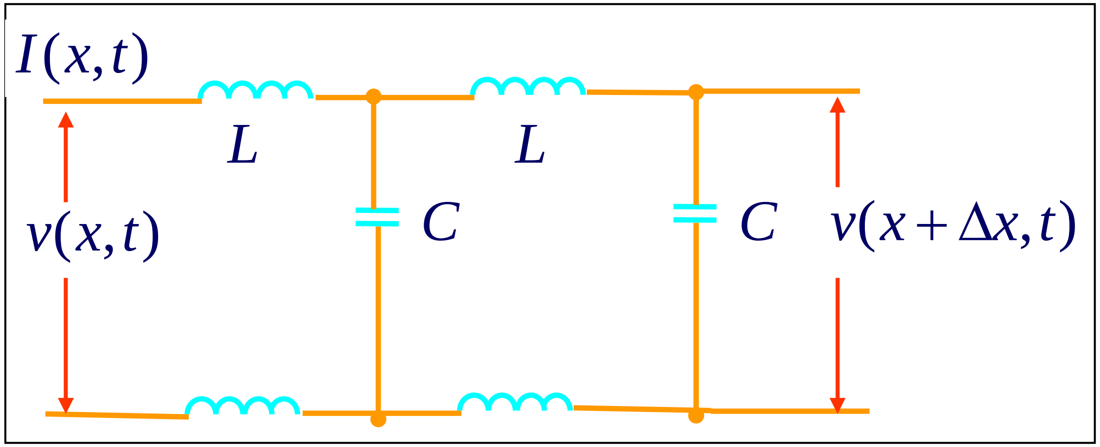
$$\boxed{u_t = D\Delta u + f}$$

一、建立导出数理方程

2、导出理想传输线的电报方程

设单位长度的电阻$=R$，电漏$=G$，电感$=L$，电容$=C$;

理想传输线：$R=G=0.$



一、建立导出数理方程

2、导出理想传输线的电报方程

设单位长度的电阻$=R$，电漏$=G$，电感$=L$，电容$=C$;

理想传输线：$R=G=0.$

解：考虑Δx段在时间Δt中的电流、电压

电位差为感生电动势：

$$v(x+\Delta x,t)-v(x,t)=-(L\Delta x)\frac{\partial I}{\partial t}$$

流进的电量等于电容充放电电量：

$$[I(x+\Delta x,t)-I(x,t)]\Delta t=-(c\Delta x)[v(x,t+\Delta t)-v(x,t)]$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-L\frac{\partial I}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x}=-C\frac{\partial v}{\partial t} \quad (2)$$

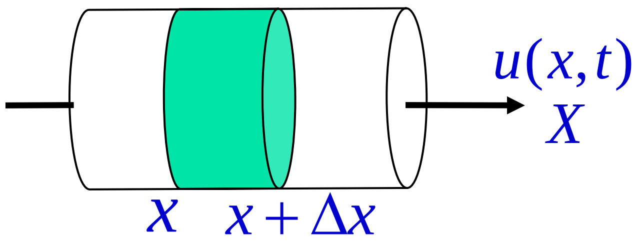
$$\boxed{\begin{aligned} v_{tt}&=a^2v_{xx} \\ I_{tt}&=a^2I_{xx} \end{aligned}}$$

$$a^2=\frac{1}{LC}$$

一、建立导出数理方程

3、导出流体力学的连续性方程。设在圆柱形管道中的理想气体发生微小纵向振动，并设在振动过程中气体总是沿圆柱体的轴向运动，且气体的速度、密度、压力在同一截面上的各点都是相同的，求管中气体的运动方程。 $u(x,t)-$速度 $\rho(x,t)-$密度

解： 考虑Δx段在时间Δt中的情况



流入的净质量：

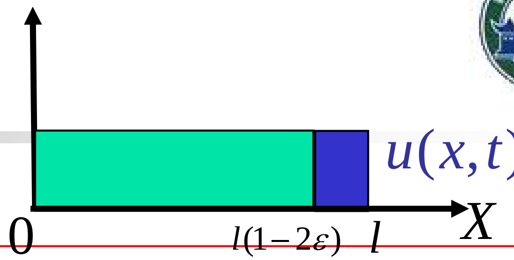
$$-\rho(x+\Delta x,t)u(x+\Delta x,t)\Delta t+\rho(x,t)u(x,t)\Delta t$$

因密度变化增加的质量：

$$[\rho(x,t+\Delta t)-\rho(x,t)]\Delta x$$

由质量守恒定律有：
$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0}$$

二、写出（或导出）定解问题



1、长为l 的杆，

（1）一端受压缩为$l(1-2\varepsilon)$ 答: $\boxed{(1)\quad u\big|_{t=0}=-2\varepsilon x\,,\quad u_t\big|_{t=0}=0}$

（2）两端受压缩为 $l(1-2\varepsilon)$ $\boxed{(2)\quad u\big|_{t=0}=\varepsilon(l-2x)\,,\quad u_t\big|_{t=0}=0}$

放手后任其振动，写出上两种振动的初始条件。

2、写出下两种情况的杆的导热问题的边界条件。

（1）杆的两端温度为0 答: $\boxed{u\big|_{x=0}=0\,,\quad u\big|_{x=l}=0}$

（2）杆的两端绝热 $\boxed{u_x\big|_{x=0}=0\,,\quad u_x\big|_{x=l}=0}$

3、分别写出以下两种情况下的定解问题

（1）长为 l 的杆，$x=0$ 端固定 $x=l$ 端受沿杆长方向的力 Q，开始时取消此力，求杆的纵振动

（2）长为 l 的杆，$x=0$ 端固定开始时 $x=l$ 端受沿杆长方向的力 Q，求杆的纵振动。

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u\big|_{x=0} = 0, u_x\big|_{x=l} = 0 \\ u\big|_{t=0} = \frac{Q}{Es} x, u_t\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u\big|_{x=0} = 0, u_x\big|_{x=l} = \frac{Q}{Es} \\ u\big|_{t=0} = 0, u_t\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

4、理想传输线远端开路，充电到电位差为 v_0 后将近端短路，试写出其定解问题。

5、长为 l 的均匀弦，弦上每一点受外力作用，其力密度为 bxt，若弦的两端自由，初位移为0，初速度为$(l-x)$，试写出其定解问题。

$$4:\begin{cases} v_{tt}=a^2v_{xx} \\ v\big|_{t=0}=v_0, v_t\big|_{t=0}=0 \\ v_x\big|_{x=l}=0, v\big|_{x=0}=0 \end{cases}$$

$$5:\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+bxt \\ u_x\big|_{x=0}=u_x\big|_{x=l}=0 \\ u\big|_{t=0}=0, u_t\big|_{t=0}=l-x \end{cases}$$

Good-by!