数学物理方法

Mathematical Methods in Physics

武汉大学

物理科学与技术学院

第三章 无穷级数
Infinite Series

中心： 解析函数与无穷级数的关系

目的：1、掌握有关复级数的概念、性质、定理

2、掌握Taylor级数与解析函数的密切关系及展开方式

3、掌握Laurant级数和奇点存在的关系及展开方法

4、孤立奇点的分类

§3.1复级数

Complex Series

一、复数项级数

1. 复数项级数定义

$$f_0+f_1+\cdots+f_k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad ,f_k-\text{复数}$$

2. 敛散定义

设 $F_k=\sum_{n=0}^{k} f_n$，若 $\lim\limits_{k\to\infty} F_k=F$，则称级数 $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ 收敛于 F.

3. 研究方法 可归结为对两个实级数的研究。

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \ , \quad \sum_{k=0}^{\infty} v_k$$

一、复数项级数

4. 收敛的充要条件 —Cauchy判据

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} f_k}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K, \text{使得} k > K \text{时有}$$

$$\left|F_{k+p} - F_k\right| = \left|f_{k+1} + f_{k+2} + \cdots f_{k+p}\right| < \boldsymbol{\varepsilon}, (p = 1,2,\cdots)$$

5. 收敛的必要条件

$$\lim_{k\to\infty} f_k = 0$$

$$e.g. \quad \sum_{k=1}^{\infty} az^{k-1} \ (a \neq 0), \quad |z| \geq 1 \to \left|az^{k-1}\right| \geq |a| \neq 0$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} az^{k-1} \ (a \neq 0) \text{不收敛。}$$

一、复数项级数

6. 绝对收敛

(1) 定义：若$\sum\limits_{k=0}^{\infty}|f_k|$收敛，则称$\sum\limits_{k=0}^{\infty}f_k$绝对收敛。

(2) 性质：1^0交换次序，2^0逐项相乘

3^0D'Alembert判别法：$\forall K, \exists k$, 当$k > K$时

若$\left|\dfrac{f_{k+1}}{f_k}\right| < \rho(\rho < 1)$，则$\sum\limits_{k=0}^{\infty}f_k$绝对收敛；特别是若$\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{f_{k+1}}{f_k}\right| = l$

则$\sum\limits_{k=0}^{\infty}f_k$当$l < 1$时，绝对收敛；当$l > 1$，发散；当$l = 1$，敛散性不定。

4^0高斯判别 若$\dfrac{f_k}{f_{k+1}} = 1 + \dfrac{\mu}{k} + O(\dfrac{1}{k^\lambda})$，$\lambda > 1$

则$\sum\limits_{k=0}^{\infty}|f_k|$，当$\mathrm{Re}\,\mu > 1$，收敛。

二、复变函数项级数

1. 复函级数定义 $f_0(z)+f_1(z)+\cdots+f_k(z)+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$

2. 一致收敛

(1). 定义： $\forall\varepsilon>0,\exists K(\varepsilon)$(与$z$无关)$,\ni$当$k>K$时，

对于一切$z\in\sigma$均满足 $\left|F(z)-F_k(z)\right|<\varepsilon$, 则称

$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$在$\sigma$上一致收敛于$F(z)$。

(2). 一致收敛的充要条件 —Cauchy判据

$\forall\boldsymbol{\varepsilon}>0,\exists K(\boldsymbol{\varepsilon}),\ni$当$k>K$时，对于一切$z\in\sigma$有

$$\left|F_{k+p}-F_k\right|=\left|f_{k+1}(z)+f_{k+2}(z)+\cdots f_{k+p}(z)\right|<\boldsymbol{\varepsilon},(p=1,2,\cdots)$$

二、复变函数项级数

3. 性质

(1) 的M判别法：若在σ内$|f_k(z)| \le M_k, M_k > 0$（与$z$无关），且$\sum\limits_{k=0}^{\infty} M_k$收敛，则$\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$绝对且一致收敛。

（2）和函数连续：若在σ内$f_k(z)$连续，$\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(z)$一致收敛于F(z)，则其和函数F(z)亦在内连续。

（3）逐项积分：若在l上$f_k(z)$连续，且$\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(z)$一致收敛于$F(z)$，则 $\oint_l F(z)dz = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \oint_l f_k(z)dz$

（4）逐项可导：若在σ上$f_k(z)$解析，在$\bar{\sigma}' \in \sigma$上$\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(z)$一致收敛于$F(z)$，则 $F^{(n)}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k^{(n)}(z)$

小 结

一、复数项级数

1. 复数项级数定义
2. 敛散定义
3. 研究方法
4. 收敛的充要条件
5. 收敛的必要条件
6. 绝对收敛

   (1) 定义

   (2) 性质:

   1) 交换次序, 2）逐项相乘

   3) 达氏判别, 4）高斯判别

二、复变函数项级数

1. 复变函数项级数定义
2. 一致收敛

   (1). 定义

   (2). 收敛的充要条件
3. 性质

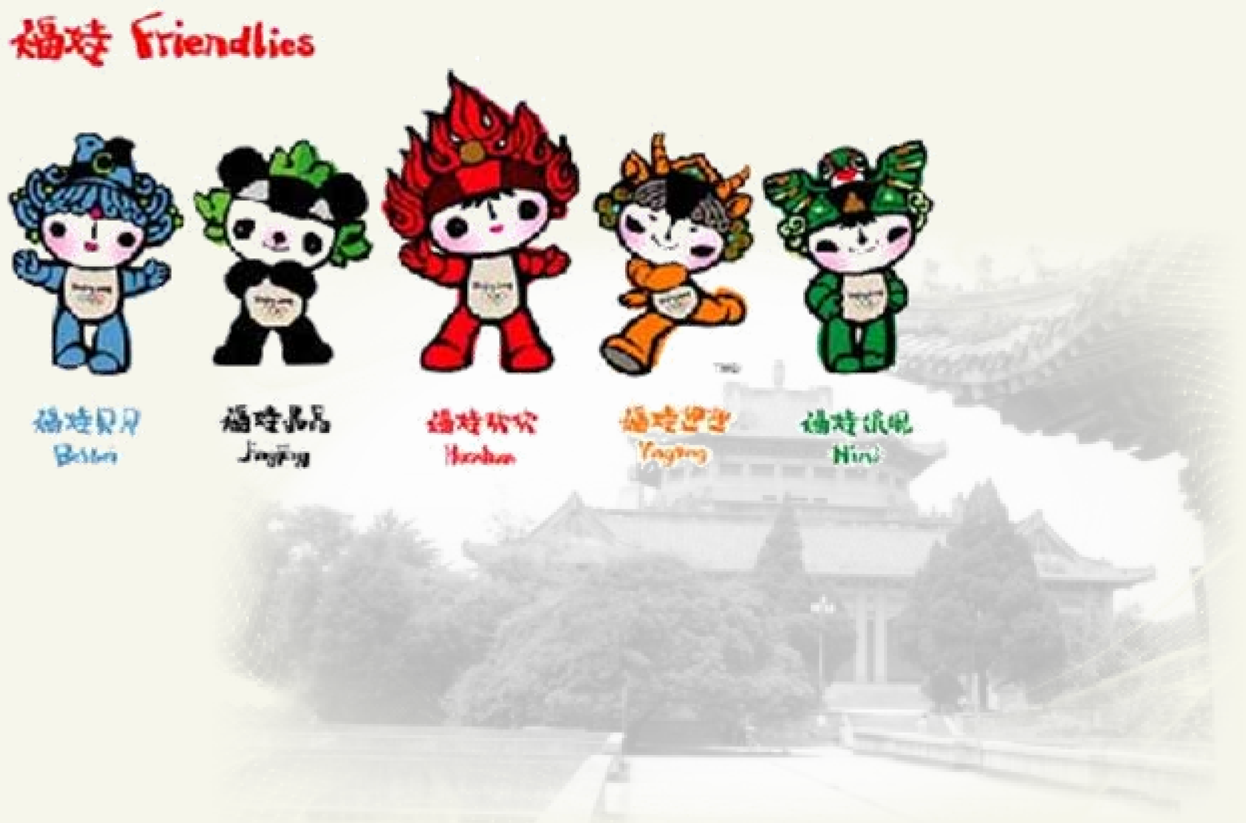
   (1). 一致收敛的M判别法

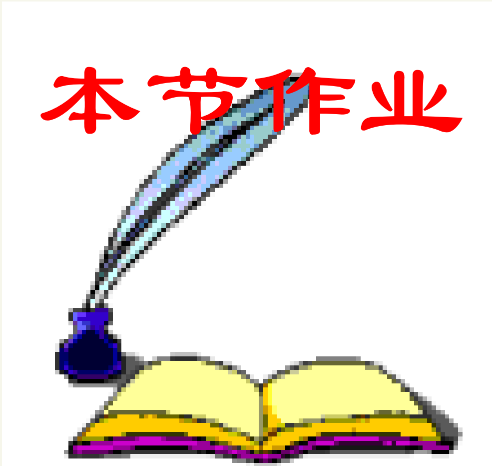
   (2). 和函数连续

   (3). 逐项积分,

   (4). 逐项可导

Good-by!





习题3.2：

1(4)；2(2)；3(2)