# 第七章　刚体 作业及练习参考答案

## I.　课堂练习

**Exercise 1:** Two unstretched springs with spring constants $k_1$ and $k_2$ are attached to a solid cylinder of mass as in fig. 1. When the cylinder is slightly displaced and released it will perform small oscillations about the equilibrium position. Assuming that the cylinder rolls without sliding, find the time period.

**Solution:** Let at any instant the centre of the cylinder be displaced by $x$ towards right. Then the spring at $C$ is compressed by $x$ while the spring at $P$ is elongated by $2x$. If $v = \dot{x}$ is the velocity of the centre of mass of the cylinder and $\omega = \dot{\theta}$ its angular velocity, ⟨the total energy⟩ in the displaced position will be

利用机械能守恒是处理此类问题最有效的手段之一，可以避开静摩擦力方向的判定，计算也较为简单．需要注意两个弹簧的伸长或压缩量如何处理．

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_c\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2(2x)^2 \tag{1}$$

Substituting $x = r\theta$, $\dot{x} = r\dot{\theta}$, and $I_c = 1/2mr^2$, where $r$ is the radius of the cylinder, (1) becomes

$$\begin{aligned}
E &= \frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}r^2(k_1 + 4k_2)\theta^2 = \text{constant} \\
\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \frac{3}{2}mr^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + (k_1 + 4k_2)\theta\dot{\theta} = 0 \\
\ddot{\theta} &+ \frac{2}{3m}(k_1 + 4k_2)\theta = 0
\end{aligned}$$

which is the equation for angular ⟨SHM⟩ with $\omega^2 = \frac{2}{3m}(k_1 + 4k_2)$.

Simple Harmonic Motion, 简谐振动

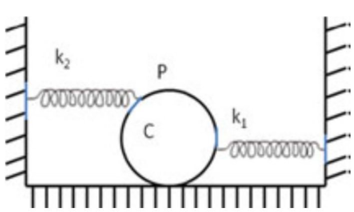


图 1

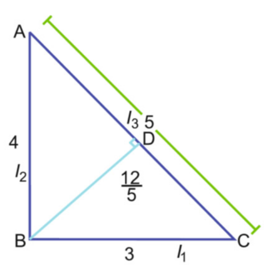


图 2

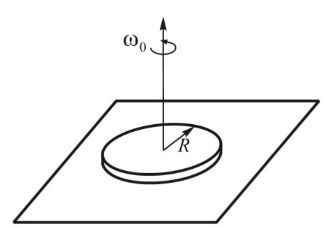


图 3

**Exercise 2:** Lengths of sides of a right angle triangular lamina are 3, 4 and 5 cm, and the moment of inertia of the lamina about the sides ⟨$I_1$⟩, $I_2$ and $I_3$ , respectively (fig. 2). Show that $I_1 > I_2 > I_3$. .

很多书上将转动惯量表示成 $I$，要注意区分．

**Solution:** The moment of inertia about any side of a triangle is given by the product of the one-sixth mass $m$ of the triangle and the square of the distance ($p$) from the opposite vertex, i.e. $\langle I = mp^2/6 \rangle$. The perpendicular BD on AC is found to be equal to 12/5 from the geometry of fig. 2.

这个结论可以通过平行轴定理求出，不用积分.

$$I_1 = \frac{m}{6}(AB)^2 = \frac{m}{6}4^2 = \frac{8m}{3}$$
$$I_2 = \frac{m}{6}(BC)^2 = \frac{m}{6}3^2 = \frac{3m}{2}$$
$$I_3 = \frac{m}{6}\langle (BD) \rangle^2 = \frac{m}{6}(\frac{12}{5})^2 = \frac{24m}{25}$$
$$\therefore \quad I_1 > I_2 > I_3.$$

看成两个直角三角形的组合即可.

## II. 作业

**7-3** 在粗糙的水平面上，一半径为 $R$、质量为 $m$ 的均质圆盘绕过其中心、且与盘面垂直的铅垂轴转动，如图 3所示．已知圆盘的初角速度为 $\omega_0$，圆盘与水平面间的摩擦系数为 $\mu$，若忽略圆盘轴承处的摩擦，问经过长时间圆盘将静止？

**解**：以过圆盘中心垂直圆盘平面为转轴，对圆盘运用〈 角动量定理 〉

转动定律.

$$\int_0^t M\mathrm{d}t = \Delta L = 0 - J\omega_0, \quad J = \frac{1}{2}mr^2$$

〈 距离转轴 $r$、宽度为 $\mathrm{d}r$ 的小圆环所受摩擦力对转轴的力矩为 〉

思考一下，为什么这么处理？

$$\mathrm{d}M = -\mu(\frac{m}{\pi R^2}2\pi r\mathrm{d}r)g \cdot r$$

总的摩擦力对转轴的力矩

$$M = \int \mathrm{d}M = \int_0^R \mu(\frac{m}{\pi R^2}2\pi r\mathrm{d}r)g \cdot r = -\frac{2}{3}\mu mgR$$

联立解得

$$\Delta t = \frac{3R\omega_0}{4\mu g}.$$

**7-5** 质量为 $m$、半径为 $r$ 的均质球置于粗糙的水平面上，球与水平面之间的摩擦系数为 $\mu$．开始时，〈 球的转动角速度为 $\omega_0$ 而质心静止 〉．试问：

初始时刻，质心速度为零，但每点均相对于质心有转动，因此接地点速度不为零，所以为滑动摩擦.

（1）经过多少时间球开始作纯滚动？

（2）球作纯滚动时质心的速度为多大？

**解**：开始时小球既滚又滑，受滑动摩擦力．设 $\omega_0$ 转动的方向为转动的正方向，小球质心初始运动的方向为平动的正方向．

应用质心运动定律，有

$$\mu mgt = mv_c - 0$$

考虑以过质心的水平轴为轴，应用角动量定理有

$$\langle -\mu mgrt = J\omega - J\omega_0 \rangle, \quad J = \frac{2}{5}mr^2$$

力矩为常数.

求得

$$v_c = \mu g t, \quad \omega = \omega_0 - \frac{5\mu g t}{2r}.$$

经过时间 $t$ 后，满足纯滚动条件

$$\langle v_c = \omega r \rangle$$

这个约束条件在所有涉及到纯滚动的问题里面都要用到.

解得

$$t = -\frac{2\omega_0 r}{7\mu g}, \quad v_c = \frac{2}{7}\omega_0 r.$$

所以经过 $t = -\frac{2\omega_0 r}{7\mu g}$ 后，球开始作纯滚动. 此时，小球的质心速度为 $v_c = \frac{2}{7}\omega_0 r$.

**7-7** 质量为 $m$ 的子弹，以速度 $v_0$ 射入质量为 $m_0$、半径为 $R$ 的圆盘的边缘，并留在该处. $v_0$ 的方向与入射处的半径垂直，如图 4所示. 试就以下两种情况：

（1）盘心装有一与盘面垂直的光滑固定轴；

（2）圆盘是自由的.

求子弹射入后圆盘系统总动能之比 $E_{k1}/E_{k2}$.

**解：** 以地面为参考系，子弹与圆盘构成的系统为研究对象，设垂直纸面向外为转动的正方向.

（1）若圆盘固定，入射过程中，系统⟨ 对圆盘中心角动量守恒 ⟩：

对轴的角动量守恒

$$m v_0 R = J_1 \omega_1 = \langle (mR^2 + \frac{1}{2}m_0 R^2) \rangle \omega_1$$

系统整体对圆盘中心轴的转动惯量.

解得

$$\omega_1 = \frac{2 m v_0}{(2m + m_0)R}, \quad E_{K1} = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 = \frac{m^2 v_0^2}{2m + m_0}.$$

（2）若圆盘自由，子弹入射后，子弹和圆盘组成的系统质心与圆盘中心的距离

$$r_c = \frac{mR}{m + m_0}$$

入射过程动量守恒

$$m v_0 = (m + m_0) v_c$$

系统对⟨ 与圆盘质心重合的空间固定点 ⟩角动量守恒

对圆盘质心角动量不守恒.

$$m v_0 R = \langle (m + m_0) v_c r_c + J\omega \rangle$$

应用的是 $\vec{L}_o = \vec{r}_c \times m\vec{v}_c + \vec{L}_c$，这个结论在处理质点系相关问题时经常使用. 思考一下，这样处理是最简单的吗？

其中，

$$J = \frac{1}{2}m_0 R^2 + m_0 r_c^2 + m(R - r_c)^2$$

动能

$$E_{k2} = \frac{1}{2}(m_0 + m)v_c^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

联立解得

$$E_{k2} = \frac{3m^2 v_0^2}{2(m_0 + 3m)}$$

与（1）结果相对比得

$$\frac{E_{k1}}{E_{k2}} = \frac{2(m_0+3m)}{3(m_0+2m)}.$$

**7-13** 在光滑水平面上，质量均为 $m_0$ 的两小球由一长为 $l$ 的轻杆相连．另一质量为 $m$ 的小球以 $v_0$ 的速率向着与杆成 角的方向运动，并与某一 $m_0$ 发生碰撞，碰后 $m$ 以 $v_0/2$ 的速率沿原路线反弹．试求碰撞后轻杆系统绕其质心转动的角速度 $\omega$，参见图 5.

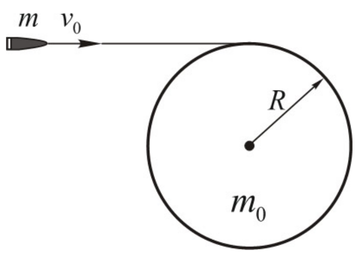


图 4

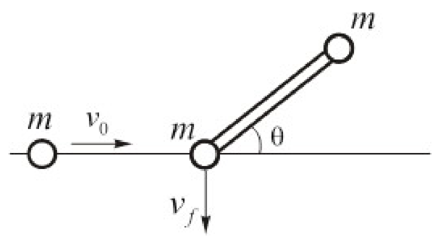


图 5

**解**：以质量均为 $m_0$ 的两个小球和质量为 $m$ 的小球为研究对象组成系统，以地面为参考系，垂直纸面向外为转动的正方向．

动量守恒

$$mv_0 = -m\frac{1}{2}v_0 + 2m_0v_c$$

⟨ 以与 $m$ 相碰的 $m_0$ 球的所在点为固定参考点 ⟩，角动量守恒

这是最简单的选择参考点的方式．

$$0 = -2m_0v_c \cdot \frac{l}{2}\sin\theta + 2m_0\frac{\omega l}{2} \cdot \frac{l}{2}$$

联立解得

$$\omega = \frac{3mv_0\sin\theta}{2m_0l}.$$

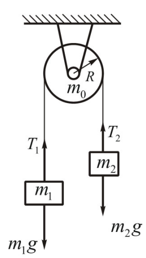


图 6

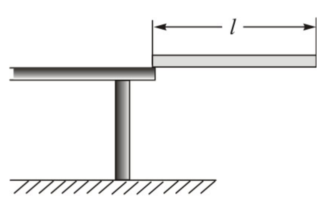


图 7

**7-19** 如图 6所示的阿特武德机中，两物体质量分别是 $m_1$ 和 $m_2$，滑轮半径为 $R$，质量为 $m_0$．若物体运动时，滑轮与绳之间有相对滑动，两者之间的摩擦系数为 $\mu$．设绳不可伸长，忽略滑轮轴承处的摩擦．试求：

（1）$m_1$ 与 $m_2$ 的加速度；

（2）滑轮的角加速度 $\alpha$.

**解：** 分别以竖直方向上和垂直纸面向外为运动和转动的正方向.

对 $m_1$、$m_2$ 分别应用牛顿第二定律，有

$$T_1 - m_1 g = m_1 a_1$$
$$T_2 - m_2 g = m_2 a_2$$

依据牛顿第三定律，绳对物体的拉力、绳对滑轮的拉力均等于绳内的张力，滑轮与绳之间有相对滑动，两者之间的摩擦系数为 $\mu$，因此，滑轮两侧绳内的力满足关系

$$\langle T_1 = T_2 \mathrm{e}^{\pm\mu\theta} \rangle$$

这是借用在处理牛顿第二定律时一道例题的结论，相当于增加了一个方程．但是这里，绳与滑轮之间有相对滑动，角加速度与物体之间加速的不存在约束关系了，又减少一个方程，整体方程个数未变，未知数个数未变，不影响求解.

其中，$\mathrm{e}^{\pm\mu\theta}$ 中的 $\pm$ 号分别对应 $m_1 > m_2$（$m_1$ 向下运动、$m_2$ 向上运动）和 $m_1 < m_2$（$m_1$ 向上运动、$m_2$ 向下运动）两种情况，本题中 $\theta = \pi$.

对滑轮应用转动定律有

$$(T_1 - T_2)R = \frac{1}{2} m_0 R^2 \alpha$$

联立解得

$$a = \frac{m_2 \mathrm{e}^{\pm\mu\pi} - m_1}{m_1 + m_2 \mathrm{e}^{\pm\mu\pi}} g, \quad \alpha = \frac{4 m_1 m_2 g (\mathrm{e}^{\pm\mu\pi} - 1)}{m_0 R (m_1 + m_2 \mathrm{e}^{\pm\mu\pi})}.$$

**7-28** 质量为 $m_0$，长为 $l$ 的均质细棒以一端为支点悬挂起来．一质量为 $m$ 的子弹以 $v_0$ 的水平速度射入棒的另一端，且留在棒内．试求在子弹射入棒后，棒的最大偏转角 $\theta$．设在棒偏转时，支点处的摩擦可忽略.

**解：** 以子弹和杆构成的系统为研究对象，偏转方向为转动的正方向，子弹与杆碰撞前后对转轴角动量守恒

$$m v_0 l = J\omega$$

其中

$$J = \frac{1}{12} m_0 l^2 + m_0 (\frac{1}{2} l)^2 + m l^2 = \frac{1}{3} m_0 l^2 + m l^2$$

碰后系统在转动过程中机械能守恒，设最大偏角为 $\theta$．则

$$\frac{1}{2} J \omega^2 = m_0 g \frac{l}{2} (1 - \cos\theta) + m g l (1 - \cos\theta)$$

解得

$$\omega = \frac{3 m v_0}{m_0 l + 3 m l}, \quad \theta = \cos^{-1}\left[1 - \frac{3 m^2 v_0^2}{(m_0 + 3m)(m_0 + 2m) g l}\right].$$

**7-30** 将一根长 $l$、质量为 $m$ 的均匀杆的一端搁在桌边，另—端用手托住，使杆处于水平位置，如图 7所示．试求将手释放瞬间杆对桌边的作用力.

**解：** 突然放手瞬时，将杆看作平面平行运动，设向下和垂直纸面向外为正方向.

质心运动定律

$$mg - N = ma_c$$

绕过质心的轴的转动定理

$$\langle -N\frac{l}{2} = J\alpha = \frac{1}{12}ml^2\alpha \rangle$$

再以过瞬心的轴，写出转动定律，与此式相除，即可得到桌面给予的支持力.

杆与桌面接触点静止条件

$$a_c = \frac{l}{2}\alpha$$

联立解得

$$N = \frac{1}{4}mg$$

方向向上.

**7-34** 一根长为 $l$，质量为 $m$ 的均匀细棒，放置在光滑的水平桌面上，一个水平的冲量 $I$ 突然垂直的作用于棒的另一端. 试问：

（1）当棒旋转了 $360°$ 时，其质心运行了多远？

（2）冲击后棒的动能为多大？

**解**：（1）在水平冲量作用后，质心以恒定速度运动，同时棒绕过质心的轴转动. 水平冲量作用前后，质心动量定理

$$I = \int f\mathrm{d}t = mv_c$$

水平冲量作用前后，质心角动量定理

$$\int f\frac{l}{2}\mathrm{d}t = J\omega = \frac{1}{12}ml^2\omega$$

〈 当棒旋转了 $360°$ 时，质心运动的距离 〉

思考一下，如果是一个质点与此杆发生碰撞，使杆获得运动，碰撞后，杆与质点还有无机会发生第二次碰撞？

$$\Delta x = v_c\Delta t = v_c\frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{3}\pi l.$$

（2）冲击后棒的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv_c^2 = \frac{2}{m}I^2.$$