数学物理方法

Mathematical Methods in Physics

武汉大学

物理科学与技术学院

数学物理方法

Methods in Mathematical Physics

第十五章 贝塞尔函数

Bessel Function

武汉大学物理科学与技术学院

第十五章 贝塞尔函数
Bessel Function

§15.3 其它柱函数
Other Cylindrical Function

一、三类柱函数

1、第一类柱函数—Bessel函数

（1）定义

$$J_{\pm\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\pm\nu+k+1)}(\frac{x}{2})^{2k\pm\nu} \quad (1)$$

—第一类柱函数

(2) 当$\nu\neq n$时，$J_\nu(x)$与$J_{-\nu}(x)$是线性无关的。

2、第二类柱函数—Neuman函数

（1）定义

$$N_\nu(x)=\frac{\cos\nu\pi\, J_\nu(x)-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \quad (2)$$

—第二类柱函数

一、三类柱函数

2、第二类柱函数—Neuman函数

(2) 无论$\nu = n$与否，$J_\nu(x)$与$N_\nu(x)$均为ν阶的*Bessel*方程的线性无关的解。

通解：

$$\boxed{y_C(x) = A_\nu J_\nu(x) + B_\nu N_\nu(x)}$$

$\boxed{\because 当\nu \neq n:}$

$$\frac{N_\nu(x)}{J_\nu(x)} = \frac{\cos\nu\pi\, J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi J_\nu(x)}$$

$$= \frac{1}{\sin\nu\pi}[\cos\nu\pi - \frac{J_{-\nu}(x)}{J_\nu(x)}] \neq 常数$$

$\boxed{当\nu = n:}$

$$\boxed{1^0 \ N_n(x) = \frac{1}{\pi}[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}]_{\nu=n} \qquad (3)}$$

一、三类柱函数

2、第二类柱函数—Neuman函数

$\boxed{当 \nu = n:}$

$$2^0 \ N_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \ln\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}[\psi(k+1)+\psi(n+k+1)]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

$$\psi(1) = -\nu = -0.577216,\ \psi(k+1) = -\nu + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}$$

$3^0 \ N_n(x)$是n阶$Bessel$的解；

因为由下可知(3)式满足贝塞尔方程.

一、三类柱函数

2、第二类柱函数—Neuman函数

$$x^2 J''_{\pm\nu}(x) + xJ'_{\pm\nu}(x) + (x^2 - \nu^2)J_{\pm\nu}(x) = 0 \quad (1)$$

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} + x\frac{d}{dx}\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} + (x^2 - \nu^2)\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} - 2\nu J_\nu(x) = 0 \qquad (2)$$

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} + x\frac{d}{dx}\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} + (x^2 - \nu^2)\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} - 2\nu J_{-\nu}(x) = 0 \qquad (3)$$

$$[(2) - (-1)^n \cdot (3)]\frac{1}{\pi} : (\nu \to n)$$

$$x^2 N''_n(x) + xN'_n(x) + (x^2 - n^2)N_n(x) = 0 \quad (4)$$

$$1^0 \;\; N_n(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}\right]_{\nu=n} \qquad (3)$$

一、三类柱函数

2、第二类柱函数—Neuman函数

4^0 $N_n(x)$与$J_n(x)$线性无关；

$$\because x \to 0: J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \to 1 \ ,$$

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \to 0, n \geq 1$$

$$x \to 0: N_0(x) \approx \frac{2}{\pi} J_0(x) \ln\frac{x}{2} \approx \frac{2}{\pi} \ln\frac{x}{2} \to \infty \ ,$$

$$N_n(x) \approx -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \to -\infty$$

一、三类柱函数

3、第三类柱函数—Hankel函数

（1）定义 $$\boxed{\begin{cases} H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x) \\ H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x) \end{cases} \quad (4)}$$ —第三类柱函数

(2) 无论$\nu = n$与否，时，$H_\nu^{(1)}(x)$与$H_\nu^{(2)}(x)$均为ν阶的$Bessel$方程的线性无关的解。

一、三类柱函数

4、三类柱函数的关系

(1) $H_\nu^{(1)}(x), H_\nu^{(2)}(x), J_\nu(x), N_\nu(x)$互相之间均线性无关。

(2) 三类柱函数的关系为

$$\begin{cases} H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x) \\ H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x) \\ J_\nu(x) = \dfrac{H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)}{2} \\ N_\nu(x) = \dfrac{H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)}{2i} \end{cases}$$

二、球Bessel函数

1、球Bessel方程及其解

$$\Delta u + \lambda u = 0 \xrightarrow{\text{令}u=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)}$$

$$\begin{cases} \Phi'' + m^2\Phi = 0 & \Phi_m(\varphi) = A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi \\ \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left[l(l+1) - \dfrac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta = 0 & \Theta(\theta) = p_l^m(\cos\theta) \\ r^2R'' + 2rR' + [k^2r^2 - l(l+1)]R = 0 \quad (5) & R(r) = ? \end{cases}$$

$$\downarrow \boxed{x = kr, y(x) = R(r)}$$

$$x^2y'' + 2xy' + [x^2 - l(l+1)]y = 0 \qquad (6) \longrightarrow \boxed{\text{球Bessel方程}}$$

$$\downarrow \boxed{y(x) = {}^{v(x)}\!/\!_{\sqrt{x}}}$$

$$x^2v'' + xv' + [x^2 - (l+\frac{1}{2})^2]v = 0 \qquad (7) \qquad y(x) = ?$$

二、球Bessel函数

1、球Bessel方程及其解

$$x^2y''+2xy'+[x^2-l(l+1)]y=0 \qquad (6)$$

$$\Big\downarrow \boxed{y(x)=v(x)/\sqrt{x}}$$

$$x^2v''+xv'+[x^2-(l+\frac{1}{2})^2]v=0 \qquad (7)$$

$$(7)\to v(x)=J_{l+\frac{1}{2}}(x),\ N_{l+\frac{1}{2}}(x),\ H^{(1)}_{l+\frac{1}{2}}(x),\ H^{(2)}_{l+\frac{1}{2}}(x),$$

$$(6)\to y(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}J_{l+\frac{1}{2}}(x),\frac{1}{\sqrt{x}}N_{l+\frac{1}{2}}(x),\frac{1}{\sqrt{x}}H^{(1)}_{l+\frac{1}{2}}(x),\frac{1}{\sqrt{x}}H^{(2)}_{l+\frac{1}{2}}(x)$$

二、球Bessel函数

2、球Bessel函数

（1）定义

$$\begin{cases} j_l(x)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}J_{l+\frac{1}{2}}(x) \\ n_l(x)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}N_{l+\frac{1}{2}}(x) \\ h_l^{(1)}(x)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) \\ h_l^{(2)}(x)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}H_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}(x) \end{cases}$$

— l 阶球Bessel函数

—l 阶球Neuman函数

—l 阶球Hankel函数

(2) $j_l(x), n_l(x), h_l^{(1)}(x), h_l^{(2)}(x)$, 均为球*Bessel*方程(6)的线性无关的解。

$$\boxed{n_l(x)\xrightarrow{x=0}\infty}$$

$$\boxed{(6)\rightarrow y_c(x)=A_l j_l(x)+B_l n_l(x)}$$

二、球Bessel函数

3、球Bessel方程的本征值问题

$$j_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{l+\frac{1}{2}}(x)$$

$$\begin{cases} r^2R''+2rR'+[k^2r^2-l(l+1)]R=0 & (5) \\ R(a)=0 \end{cases}$$

$$\boxed{x=kr,\ y(x)=R(r)}$$

$$\begin{cases} x^2y''+2xy'+[x^2-l(l+1)]y=0 & (6) \\ y(ka)=0 \end{cases}$$

$$(k_m^{l+\frac{1}{2}})^2=(\frac{x_m^{(l+\frac{1}{2})}}{a})^2,\ R(r)=j_l(\frac{x_m^{(l+\frac{1}{2})}}{a}r),\ \ m=1,2,\cdots$$

其中，
$$\int_0^a j_l(\frac{x_m^{(l+\frac{1}{2})}}{a}r)j_l(\frac{x_n^{(l+\frac{1}{2})}}{a}r)r^2dr=\left\|j_n^l\right\|^2\delta_{mn}$$

$$\left\|j_n^l\right\|^2=\frac{\pi}{2k_n^{(l+\frac{1}{2})}}\left\|J_n^{(l+\frac{1}{2})}\right\|^2=\frac{\pi}{2k_n^{(l+\frac{1}{2})}}\int_0^a J^2_{l+\frac{1}{2}}(k_n^{l+\frac{1}{2}}r)rdr$$

三、虚宗量的Bessel函数

1、虚宗量的Bessel方程及其解

$$\left.\begin{array}{r}\Delta u+\lambda u=0\\ \Delta u=0\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{令}u=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)}$$

$$\begin{cases}\Phi''+n^2\Phi=0\\ Z''+\mu Z=0\\ \rho^2R''+\rho R'+(k^2\rho^2-n^2)R=0 \quad (8)\end{cases}$$

(8) ⟶ n阶Bessel方程

$\downarrow x=k\rho, R(\rho)=y(x), n\to\nu$，设 $k^2=\lambda-\mu\geq 0$

$$x^2y''(x)+xy'(x)+(x^2-\nu^2)y(x)=0 \quad (9)$$

$$\boxed{\text{若}\left\{\begin{matrix}\lambda-\mu\\ -\mu\end{matrix}\right.<0,\quad \text{记}\left.\begin{matrix}\lambda-\mu\\ -\mu\end{matrix}\right\}=-k^2}$$

$$(9)\longrightarrow \boxed{x^2y''(x)+xy'(x)-(x^2+\nu^2)y(x)=0 \quad (10)}$$

—虚宗量Bessel方程

三、虚宗量的Bessel函数

1、虚宗量的Bessel方程及其解

$$\boxed{x^2y''(x)+xy'(x)-(x^2+\nu^2)y(x)=0 \quad (10)}$$ —虚宗量Bessel方程

$$\downarrow z=ix$$

$$z^2y''(z)+zy'(z)+(z^2-\nu^2)y(z)=0 \quad (11)$$

$$y=J_{\pm\nu}(ix),N_\nu(ix),H_\nu^{(1)}(ix),H_\nu^{(2)}(ix),$$ —虚宗量Bessel方程的解

2、虚宗量的柱函数

（1）定义 $$\boxed{\begin{cases} I_\nu(x)=i^{-\nu}J_\nu(ix) \\ I_{-\nu}(x)=i^{\nu}J_{-\nu}(ix) \end{cases}}$$ —第一类虚宗量的柱函数（虚宗量Bessel函数）

$$\boxed{1^\circ \text{ 当 } \nu\neq n: \quad y_C(x)=A_\nu I_\nu(x)+B_\nu I_{-\nu}(x)}$$

$$\boxed{2^\circ \text{ 当 } \nu=n: \quad I_{-n}(x)=I_n(x)}$$

$$\boxed{I_{-\nu}(x)\xrightarrow{x=0}\infty}$$

三、虚宗量的Bessel函数

2、虚宗量的柱函数

（2）定义

$$\boxed{K_\nu(x)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x)+I_\nu(x)}{\sin\nu\pi}}$$

—第二类虚宗量的柱函数（Macdona函数）

(3) 无论 $\nu=n$ 与否，

$$\boxed{y_C(x)=c_\nu I_\nu(x)+d_\nu K_\nu(x)}$$

$$\boxed{K_\nu(x)\xrightarrow{x=0}\infty}$$

1° 当 $\nu\neq n$： $I_\nu(x)$ 与 $K_\nu(x)$ 线性无关；

2° 当 $\nu=n$： $$\boxed{K_n(x)=\frac{(-1)^n}{2}\left[\frac{\partial I_{-\nu}(x)}{\partial\nu}-\frac{\partial I_\nu(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}}$$

四、小结

其它柱函数

- 第二类柱函数

$$N_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\nu\pi\, J_\nu(x)-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi J_\nu(x)}$$

- 第三类柱函数

$$\begin{cases} H_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x)+iN_\nu(x) \\ H_\nu^{(2)}(x)=J_\nu(x)-iN_\nu(x) \end{cases}$$

- 球Bessel函数

$$j_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{l+\frac{1}{2}}(x),\quad n_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}N_{l+\frac{1}{2}}(x),$$

$$h_l^{(1)}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}H^{(1)}_{l+\frac{1}{2}}(x),\quad h_l^{(2)}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}H^{(2)}_{l+\frac{1}{2}}(x)$$

- 第一类虚宗量的柱函数

$$\begin{cases} I_\nu(x)=i^{-\nu}J_\nu(ix) \\ I_{-\nu}(x)=i^{\nu}J_{-\nu}(ix) \end{cases}$$

- 第二类虚宗量的柱函数

$$K_\nu(x)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x)+I_\nu(x)}{\sin\nu\pi}$$

四、小结

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2) y(x) = 0 \quad (9)$$

$$\to y(x) = J_{\pm\nu}(x), N_\nu(x), H_{\pm\nu}(x)$$

$$x^2 y'' + 2xy' + [x^2 - l(l+1)] y = 0 \quad (6)$$

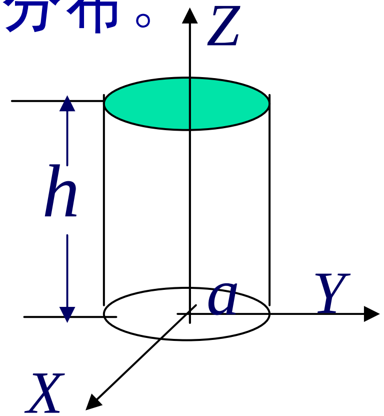
$$\to y(x) = j_l(x), n_l(x), h_l^{(1)}(x), h_l^{(2)}(x)$$

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - (x^2 + \nu^2) y(x) = 0 \quad (10)$$

$$\to y(x) = I_\nu(x), K_\nu(x)$$

五、例题

1. 一半径为a高为h的均匀圆柱体，其上、下底面保持温度为零度，而侧面温度为u_0，试求柱内的稳定温度分布。



$$\begin{cases} \Delta u = 0,\ 0 \le \rho \le a, & (1) \\ u(a,z) = u_0 & (2) \\ u(\rho,0) = 0 & (3) \\ u(\rho,h) = 0 & (4) \end{cases}$$

解： 1) 令 $u(\rho,z) = R(\rho)Z(z)$

$$(1) \to \begin{cases} Z'' + \mu Z = 0 & (5) \\ \rho^2 R'' + \rho R' + (-\mu\rho^2 - 0)R = 0 & (6) \end{cases}$$

$$(3) \to Z(0) = 0 \quad (7) \qquad (4) \to Z(h) = 0 \quad (8)$$

五、例题

2)解本征值问题(5)(7)(8)：

$$\begin{cases} Z''+\mu Z=0 & (5) \\ Z(0)=0 & (7) \\ Z(h)=0 & (8) \end{cases} \to \mu=\frac{m^2\pi^2}{h^2}, m=1,2,\cdots$$

$$\boxed{Z_m(z)=c_m\sin\frac{m\pi}{h}z}$$

3)解关于ρ的方程(6):

$\because -\mu=-\frac{m^2\pi^2}{h^2}<0$, 故记 $-\mu=-k^2, x=k\rho, y(x)=R(\rho)$

$$(6)\to x^2y''(x)+xy'(x)-(x^2+0)y(x)=0$$

$$\boxed{\to R_m(\rho)=y_m(x)=a_mI_0(k_m^0\rho),} \quad k_m^0=\frac{m\pi}{h}, m=1,2,\cdots$$

4)叠加，定系数:

$$\boxed{u(\rho,z)=\sum_{m=1}^{\infty}A_mI_0(k_m^0\rho)\sin\frac{m\pi}{h}z}$$

五、例题

4)叠加，定系数:

$$u(\rho,z)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m I_0(\frac{m\pi}{h}\rho)\sin\frac{m\pi}{h}z$$

$$u_0=\sum_{m=1}^{\infty}A_m I_0(\frac{m\pi}{h}a)\sin\frac{m\pi}{h}z$$

$$A_m I_0(\frac{m\pi}{h}a)=\frac{2}{h}\int_0^h u_0\sin\frac{m\pi}{h}zdz \quad =\frac{2u_0}{m\pi}[1-(-1)^m]$$

$$A_{2n}=0, \qquad A_{2n+1}=\frac{4u_0}{(2n+1)\pi I_0(\frac{2n+1}{h}\pi a)}$$

$$u(\rho,z)=\frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{2n+1}{h}\pi\cdot I_0(\frac{2n+1}{h}\pi\rho)}{(2n+1)I_0(\frac{2n+1}{h}\pi a)}$$

五、例题

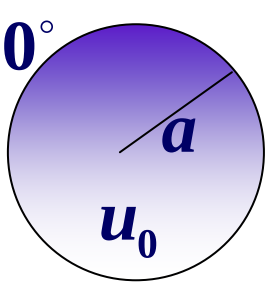
2、半径为a的均匀导热介质球，原来的温度为u_0，将它放在冰水中，使球面温度保持为零度，求球内温度的变化。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = 0 & (1) \\ u\big|_{r=0} \to \text{有限} & (2) \\ u\big|_{r=a} = 0 & (3) \\ u\big|_{t=0} = u_0 & (4) \end{cases}$$

1) 令 $u(r,t) = R(r)T(t) \quad (5)$

$$\to \begin{cases} T'(t) + \lambda D T(t) = 0 & (6) \\ r^2 R''(r) + 2rR'(r) + \lambda r^2 R(r) = 0 & (7) \\ R(0) \to \text{有限，} \; R(a) = 0 & (8) \end{cases}$$

2)解本征值问题(7)(8)：



$$\lambda = k^2 = \left(\frac{x_m^{0+\frac{1}{2}}}{a}\right)^2, R(r) = j_0\left(\frac{x_m^{\frac{1}{2}}}{a} r\right), m = 1,2,\cdots$$

$$\boxed{\lambda = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2, R_m(r) = \frac{a}{m\pi r}\sin\frac{m\pi r}{a}, m = 1,2,\cdots}$$

五、例题

3)解关于*t*的方程(6):

$$\boxed{T_m(t)=c_m e^{-(\frac{m\pi}{a})^2 Dt}}$$

4)叠加，定系数：

$$u(r,t)=\sum_{m=1}^{\infty} c_m \frac{a}{m\pi r}\sin\frac{m\pi r}{a} e^{-(\frac{m\pi}{a})^2 Dt}$$

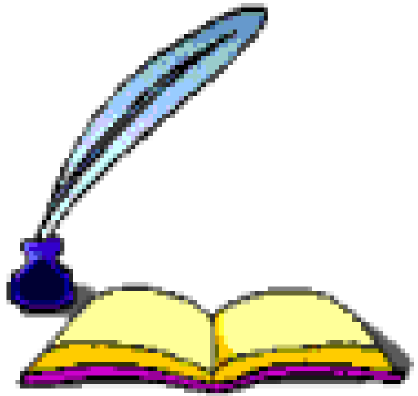
$$u(r,0)=\sum_{m=1}^{\infty} c_m \frac{a}{m\pi r}\sin\frac{m\pi r}{a}=\sum_{m=1}^{\infty} c_m j_0(\frac{m\pi r}{a})=u_0$$

$$c_m=\frac{1}{\left\|j_m^{(0)}\right\|^2}\int_0^a u_0 j_0(\frac{x_m^{\frac{1}{2}}}{a}r)r^2 dr=\frac{u_0 a}{\left\|j_m^{(0)}\right\|^2 m\pi}\int_0^a r\sin\frac{m\pi r}{a}dr$$

$$=2u_0(-1)^{m-1}$$

$$\boxed{u(r,t)=\frac{2au_0}{\pi r}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\sin\frac{m\pi r}{a}e^{-(\frac{m\pi}{a})^2 Dt}}$$

本节作业



习题15.3 ：

3（1）（3）

Good-by!