质点与杆的碰撞问题

问题 在光滑的水平面上，静止放置着质量为 M，长为 l 的均匀细杆，质量为 m 的小球以垂直于杆的水平速度 v_0 与杆的一端作完全非弹性碰撞．试求碰后系统的运动．

分析：因为桌面光滑，细杆和小球组成的系统 动量及角动量（对惯性系中的点）守恒 ⟩，碰撞后整体将随共同质心平动和绕过共同质心的轴转动．

重力与支持力在此运动中不起作用．

由动量守恒知，

$$mv_0 = (m+M)v_c$$

故质心的速度为

$$v_c = \frac{mv_0}{m+M}$$

解一 取⟨ 桌面与细杆质心相重合的点为参考点 ⟩，由角动量守恒知，

必须是惯性系中的参考点．

$$mv_0 \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{12}Ml^2\omega + m\langle \omega x\rangle \cdot \frac{l}{2} \tag{1}$$

思考一下，为什么要这样表示 m 的绝对速度？

其中，x 为 m 到瞬心的距离．

考虑二者共同质心的速度，有

$$\langle v_c = \frac{mv_0}{m+M} = [x - \frac{Ml}{2(M+m)}]\omega\rangle \tag{2}$$

共同质心速度已知，可以用来表示瞬心的位置．

由方程（1）、（2）可解得

$$\omega = \frac{6mv_0}{(M+4m)l}.$$

解二 若将细杆和小球视为两质点系统，质心 C 与两质点的距离为

$$\langle l_M = \frac{m}{m+M} \cdot \frac{l}{2},\ l_m = \frac{M}{m+M} \cdot \frac{l}{2}\rangle$$

按照定义计算即可．

因系统合外力为零，故在质心系中，碰撞前后，系统对质心 C 角动量守恒，规定垂直纸面向外为正，则碰撞前小球在质心系中的速度为

$$\langle v' = v_0 - v_c = \frac{Mv_0}{m+M}\rangle$$

所有的值都需要化成质心参考系中的值，下同．

则其对质心的角动量为

$$L_m = mv'l_m = \frac{M^2}{m+M} \cdot \frac{Mv_0}{m+M} \cdot \frac{l}{2}$$

⟨ 细杆在质心系中的速度为 ⟩

相对桌面，杆在碰前无运动，但是，相对质心系，它是运动的．

$$V' = 0 - v_c = -\frac{mv_0}{m+M}$$

则其对质心的角动量为

$$L_M = MV'l_M = \frac{Mm}{m+M} \cdot \frac{Mv_0}{m+M} \cdot \frac{l}{2}$$

故碰撞前系统对质心 C 的角动量为

$$\langle L_{rC0} = mv'l_m + MV'l_M = \frac{M}{m+M} \cdot \frac{l}{2} mv_0 \rangle$$

二质点体系相对于质心的角动量，$\vec{L}_c = \mu \vec{l} \times \vec{v}_r$.

碰撞后系统对质心 C 的角动量为

$$\langle L_{rC} = I_C\omega = (ml_m^2 + \frac{1}{12}Ml^2 + Ml_M^2)\omega = \frac{M(M+4m)l^2}{12(M+m)}\omega \rangle$$

转动惯量的定义结合平行轴定律可得.

根据角动量守恒，$L_{rC0} = L_{rC}$，可解得

$$\omega = \frac{6mv_0}{(M+4m)l}.$$

解三 取桌面上与细杆相碰的杆端相重合的点为参考点，对该点角动量守恒，碰前对该点角动量为零，即 $L_0 = 0$. 碰后，对该点的 角动量等于质心对该点的角动量和质心系中系统对质心的角动量的矢量和. 设垂直纸面向外为正，则碰后的角动量为

$$\begin{aligned} L &= \langle -r_C(M+m)v_C + I_C\omega \rangle \\ &= -(\frac{M}{M+m}\frac{l}{2})(M+m)\frac{mv_o}{M+m} + \frac{M(M+4m)l^2}{12(M+m)}\omega \\ &= -\frac{M}{M+m}\frac{l}{2}mv_o + \frac{M(M+4m)l^2}{12(M+m)}\omega \end{aligned}$$

直接应用 $\vec{L}_o = \vec{r}_c \times m\vec{v}_c + \vec{L}_c$ 这个结论.

根据角动量守恒则有

$$\langle 0 = -\frac{M}{M+m}\frac{l}{2}mv_o + \frac{M(M+4m)l^2}{12(M+m)}\omega \rangle$$

选取这个参考点后，m 碰撞前后对该点的角动量为零，角动量守恒的式子是在所有点的选择中最简单的.

解得

$$\omega = \frac{6mv_0}{(M+4m)l}.$$