数学物理方法

Mathematical Methods in Physics

武汉大学

物理科学与技术学院

问题的引入：

若 $f(z)=u+iv\in H(\sigma)$

$$C-R:\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases}$$

（1） $\Delta u=0\,,\Delta v=0$ 且由C-R联系着

（2） $\nabla u\cdot\nabla v=0$

（3） 已知 u（或v）均可求出解析函数

第二章 解析函数积分

Integrals of Analytic Function

中心内容：解析函数积分

学习目的：1、掌握复积分的概念、性质和计算方法

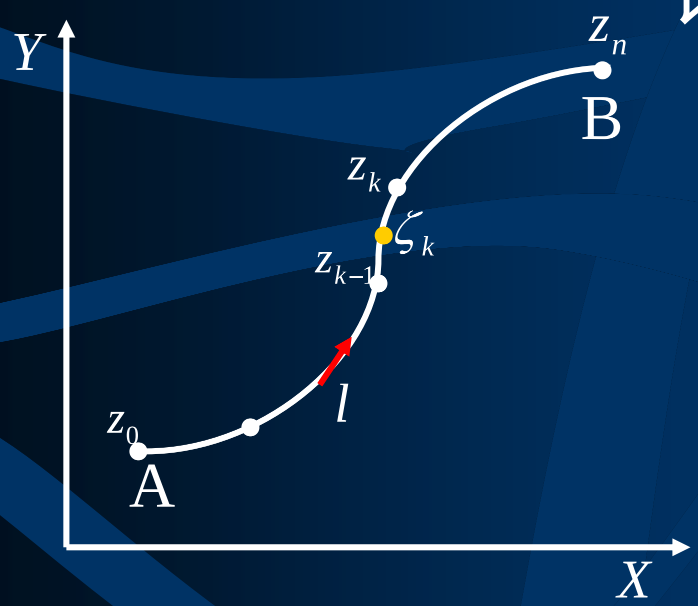
2、掌握解析函数的基本定理—Cauchy定理及其应用

3、掌握解析函数的基本公式—Cauchy公式及其应用

§ 2. 1复变函数的积分

Integrals of Function of a Complex Variable

一、复积分定义：



记 $$\boxed{\int_l f(z)\,dz = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max|\Delta z_k|\to 0}} \sum_{k=0}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k}$$

—称 $f(z)$沿l从A到B的积分。

$$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$$

$f(z)$—— 被积函数

l —— 积分路径

$$\int_l f(z)\,dz = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max|\Delta z_k|\to 0}} \sum_{k=0}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

二、复积分存在条件

令 $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k,\ \Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$

则 $f(\zeta_k) = u(\xi_k,\eta_k) + iv(\xi_k,\eta_k) = u_k + iv_k$

$$f(\zeta_k)\Delta z_k = (u_k + iv_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k)$$

$$= (u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + i(v_k\Delta x_k + u_k\Delta y_k)$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}(u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + i\sum_{k=1}^{n}(v_k\Delta x_k + u_k\Delta y_k)$$

则有 $\boxed{\int_l f(z)\,dz = \int_l udx - vdy + i\int_l vdx + udy}$

二、复积分存在条件

$$\boxed{\int_l f(z)\,dz = \int_l u\,dx - v\,dy + i\int_l v\,dx + u\,dy}$$

存在条件

1、l 分段光滑

2、$f(z)$ 在 l 上连续

$$\int_l f(z)\,dz = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max|\Delta z_k|\to 0}} \sum_{k=0}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

三、复积分性质

$$\left.\begin{aligned}
&1.\ \int_l \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_l f_k(z)\,dz \\
&2.\ \int_l f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{l_k} f(z)\,dz\ , \quad l = \sum_{k=1}^{n} l_k \\
&3.\ \int_{l_{AB}} f(z)\,dz = -\int_{l_{BA}} f(z)\,dz
\end{aligned}\right\} \leftarrow \text{由积分定义}$$

$$4.\left|\int_l f(z)\,dz\right| \le \begin{cases} \int_l |f(z)|\cdot|dz|, \quad |dz| = ds \\ Ms, M \ge |f(z)|, s = l\text{的长度。} \end{cases} \longleftarrow \text{由积分定义}+ \boxed{|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|}$$

$$\int_l f(z)\,dz = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max|\Delta z_k|\to 0}} \sum_{k=0}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

三、复积分性质

$$4.\ \left|\int_l f(z)\,dz\right| \le \begin{cases} \int_l |f(z)|\cdot|dz|, & |dz| = ds \\ Ms,\ M \ge |f(z)|,\ s = l\text{的长度。} \end{cases}$$

$\longleftarrow$ 由积分定义＋ $\boxed{|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|}$

$$\because \left|\sum_{k=0}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=0}^{n} |f(\zeta_k)|\cdot|\Delta z_k| \le M\sum_{k=0}^{n}|\Delta z_k|$$

例1 $\displaystyle \lim_{r\to 0}\int_{|z|=r}\frac{z^3}{1+z^2}\,dz = ?$

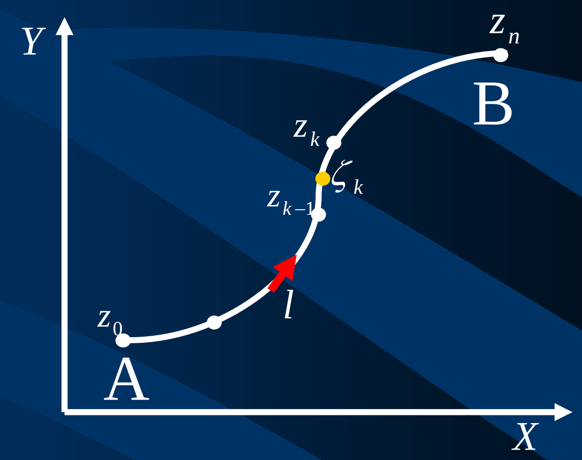
$$\left|\int_{|z|=r}\frac{z^3}{1+z^2}\,dz\right| \le \int_{|z|=r}\left|\frac{z^3}{1+z^2}\right||dz| \le \frac{r^3}{1-r^2}\cdot 2\pi r \xrightarrow{r\to 0} 0$$

$$\int_l f(z)\,dz = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max|\Delta z_k|\to 0}} \sum_{k=0}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

四、计算方法

1、用定义计算

例2　计算： $I = \int_l z\,dz\,,\quad l: z_0 \to z_n$



1）选 $\zeta_k = z_{k-1}\qquad f(z) = z, \Delta z_k = z_k - z_{k-1}$

$$I = \int_l z\,dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[z_{k-1}(z_k - z_{k-1})\right]$$

2）选 $\zeta_k = z_k$

$$I = \int_l z\,dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[z_k(z_k - z_{k-1})\right]$$

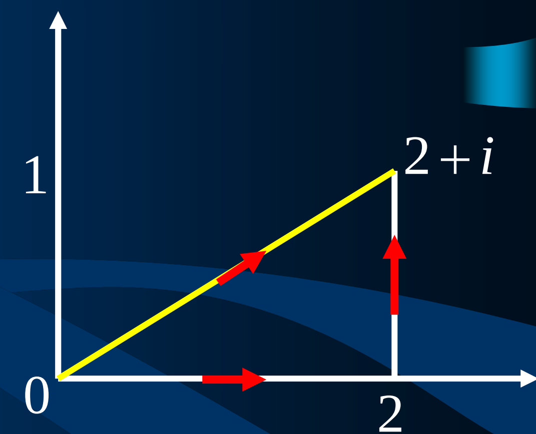
$$I = \int_l z\,dz = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[z_{k-1}(z_k - z_{k-1})\right] + \sum_{k=1}^{n}\left[z_k(z_k - z_{k-1})\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[z_k^2 - z_{k-1}^2\right] = \frac{1}{2}\left[z_n^2 - z_0^2\right]$$

$$\int_l f(z)\,dz = \int_l udx - vdy + i\int_l vdx + udy$$

四、计算方法

2、通过计算实线积分来计算



例3 **计算：**$I = \int_l \mathrm{Re}\, z\, dz$

$$l: 1)\ 0 \to 2+i;\ \ 2)\ 0 \to 2 \to 2+i$$

$$I = \int_l \mathrm{Re}\, z\, dz = \int_l x\, d(x+iy) = \int_l x\, dx + i\int_l x\, dy$$

$$\boxed{l: 1)\ 0 \to 2+i:}\ \ x = 2y,\ y: 0 \to 1$$

$$I = \int_l \mathrm{Re}\, z\, dz = \int_0^1 2y\,d(2y) + i\int_0^1 2y\,dy\ \boxed{= 2+i}$$

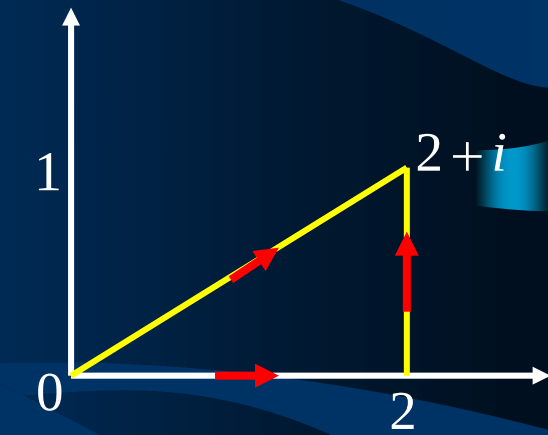
$$\boxed{l: 2)\ 0 \to 2 \to 2+i:}\quad l_1: y = 0,\ x: 0 \to 2;\quad l_2: x = 2,\ y: 0 \to 1$$

$$I = \int_l \mathrm{Re}\, z\, dz = \int_{l_1+l_2} x\, dx + i\int_{l_1+l_2} x\, dy = \int_0^2 x\, dx + i\int_0^1 2\, dy$$

$$\boxed{= 2+2i}$$

四、计算方法

2、通过计算实线积分来计算



例4 计算：$I=\int_l z\,dz$,

$$l:1)\ 0\to 2+i;\quad 2)0\to 2\to 2+i$$

答： $1),2):I=\dfrac{3}{2}+2i$

3、用极坐标计算

例5 证明：$\displaystyle\boxed{\oint_l \frac{dz}{(z-a)^n}=\begin{cases}2\pi i\,,n=1\\ 0\,,n\neq 1\end{cases},\quad l:|z-a|=r}$ *

思考：什么样的积分与路径有关？什么样的积分与路径无关？什么样的积分之值为零？

小结

2.1

一、复积分定义：

$$\int_l f(z)\,dz = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max|\Delta z_k|\to 0}} \sum_{k=0}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

二、存在条件

$$\int_l f(z)\,dz = \int_l udx - vdy + i\int_l vdx + udy$$

三、复积分性质

$$\left|\int_l f(z)\,dz\right| \le \int_l |f(z)|\cdot|dz| \le Ms$$

四、计算方法 1. 用定义；2. 用实线积分；3. 用极坐标

$$\oint_l \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i\,, & n=1 \\ 0\,, & n\ne 1 \end{cases}, \quad l: |z-a| = r$$

思考：什么样的积分与路径有关？什么样的积分与路径无关？什么样的积分之值为零？

习题2.1：3(2);5.