静电场中的电像法

胡显词

［摘　要］本文较全面地介绍了电像法的理论依据，并用例题来说明电像法的实质、解题步骤以及使用这种方法时应当注意的事项。

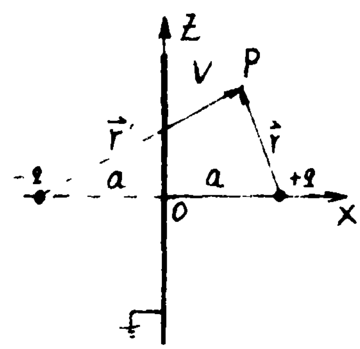
电像法是求解静电学边值问题的一种特殊方法，它的理论依据是静电问题解的唯一性定理和场的迭加原理。在实际问题中，经常需要讨论电荷附近有导体面或介质面存在的情况，这种问题的物理状况是：一方面这些电荷本身在空间要激发电场；另一方面，由于这些电荷的存在在边界面上要引起感应电荷（极化电荷）分布，这种感应（或极化）电荷分布同样也要在空间激发电场，空间的总场应该是这两部份场的迭加。电像法就是用假想的简单电荷分布（称为像电荷）来等效地代替导体面（或介质面）上的感应（或极化）电荷对电场的贡献，这里提到的等效是指像电荷的引入既不改变电场原来所满足的方程式，又要满足问题给定的边界条件。下面用例题来说明电像法的实质、解题步骤以及使用这种方法时应当注意的事项。

（一）电荷的平面镜像

电荷的平面镜像主要讨论导体面和介质分界面是呈无限延伸平面的静电问题，从“产生”像电荷的角度看，这时的分界面和光学中的平面镜极为相似，此时假想的电荷往往可置于相对于界面对称于原电荷的位置上，故称为电荷的平面镜像。

例1　一接地无限大导体平面附近有一电量为q的点电荷，求空间的电位分布、任一点的电场强度、导体面上的感应电荷面密度和总的感应电荷、系统的相互作用能及点电荷所受的力。

解　选取如图一所示的直角坐标，导体平面（$x=0$）将整个空间V分成两个部份。根据静电屏蔽可判断出左半空间没有电场，只有右半空间V中有电场，在V中有$\nabla^2\psi=-\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(x-a,y,z)$，V的边界面是无限大导体平板面S（其电位$\varphi|_s=0$）和无限远处的边界面$S\infty$且$\psi|_{s\infty}=0$，右半空间的电场是q及S上的面感应电荷$\sigma_f$共同激发的，但是$\sigma_f$的分布不能预先知道，如果能用一个假想的点电荷$q'$来等效地代替$\sigma_f$，那么等效的条件是什么呢？若$q'$和q共同激发的电位$\psi$就是$\sigma_f$和q产生的电位，那么$\psi$必须满足以下条件：



图一

$$\begin{cases}\nabla^2\psi=-\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(x-a,\ y,\ z)\\ \psi|_s=\psi|_{s\infty}=0\end{cases}$$

为了满足上式中第一个条件，q'必须在左半空间，这样才能使原来的方程不变，然后我们从上式的第二个条件$\psi|_s=0$来求出q'的电量和位置，第三个条件$\psi|_{s\infty}=0$总是满足的，显然$q'=-q$，q'位于$(-a,0,0)$点。

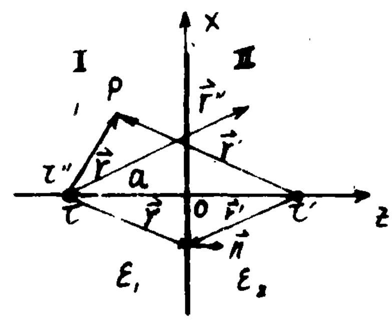
右半空间的电位是两个点电荷q与q′的电位迭加，如图一中P点的电位ψ为：$\psi(p)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\{\frac{1}{[(x-a)^2+y^2+z^2]^{1/2}}-\frac{1}{[(x+a)^2+y^2+z^2]^{1/2}}\}$任一点P的场强，$\vec{E}(p)=-\nabla\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{\vec{r}}{r^3}-\frac{\vec{r}'}{r'^3})$无限大导体面上的感应电荷密度$\sigma f$，感应电荷Q为

$$\sigma_f=-\varepsilon_0\frac{\partial\psi}{\partial x}|_{x=0}=-\frac{q}{2\pi}\frac{a}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$\therefore Q=\iint\sigma_f ds=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{-aq}{2\pi(a^2+y^2+z^2)^{3/2}}rdrd\alpha=-q$，点电荷q与导体面上感应电荷Q之间相互作用能$U_i=\frac{1}{2}q\varphi'$，$\varphi'=\frac{q'}{8\pi\varepsilon_0 a}$，于是作用于点电荷q上的力应为$\vec{F}=-\nabla U_i=\frac{\partial u_i}{\partial a}\vec{i}=-\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{i}$

由本题可知，平面上的感应电荷总量与像电量相等，但应注意：Q与q′不能同时用，因为电像法的实质是用q′代替Q；q′只能代替σ在右半空间起的作用，却不能代替σ在左半空间的作用，因为q′的存在已经改变了左半空间的场方程。由此看来，电像法就是用假想的点电荷代替导体面上的感应面电荷，在代替时，必须保证原有的场方程，边界条件全都不变，这样用电像和点是荷求出来的解，根据唯一性定理，就是所要求的解，所以在作题时，必须首先把解应满足的场方程和边界条件搞清楚。

例2 介电常数为ε_1和ε_2的两种介质的分界面是一无限大平面，在ε_1介质中距界面a处有一线电荷密度为τ的无限长带电直线，此直线与界面平等，求电位和场强分布，界面上的极化电荷面密度及带电直线单位长上所受的力。



图二

解 (a)此题场所满足的方程和边界条件。建立如图二所示的坐标系，介质分界面将空间分成两个区域Ⅰ、Ⅱ，则电位应满足

$\nabla^2\varphi_1=-\frac{\tau}{\varepsilon_0}\delta(x, z+a)$ $(z<0)$

$\nabla^2\varphi_2=0$ $(z>0)$

在介质分界面上

$$\varphi_1=\varphi_2\quad,\quad n\cdot\vec{D}_1=n\cdot\vec{D}_2$$

(b)像电荷的位置及电荷分布

先讨论区域Ⅰ，为了不改变电位所满足的方程式，以界面为对称面，在原带电直线的对称位置(区域Ⅱ内)处，设想有一条与原带电线共面且平行的线电直线作为像电荷，其线密度τ'待定，还认为此时整个空间充满介电常数为ε_1的介质，这样在所考虑的区域Ⅰ内任一点的电位就是线电荷τ及其周围极化电荷共同产生的位和线电荷τ'及其周围极化电荷共同产生的位的迭加，若选0点为电位参考点，则

$$\varphi_1=-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1}ln\frac{r}{a}-\frac{\tau'}{2\pi\varepsilon_0}l_n\frac{r'}{a}$$

同理可求得区域Ⅱ的电位$\varphi_2=-\frac{\tau+\tau''}{2\pi\varepsilon_2}l_n\frac{r''}{a}$(设$\tau''$与$\tau$重合如图二)

现由边界条件定出τ'和τ''，在界面上有$\varphi_1=\varphi_2$，又有$(n\cdot\vec{D}_1)=(\hat{n}\cdot\vec{D}_2)$，且有 $r=r'=r''$，

$\hat{n}\cdot r''=\hat{n}\cdot\vec{r}=a$，$\hat{n}\cdot\vec{r'}=-a$.则可得出 $\tau'=-\tau''=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\tau$

所以：

$$\varphi_1=-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1}[l_n\frac{r}{a}+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}l_n\frac{r'}{a}]\ (z\leqslant 0)$$

$$\varphi_1=-\frac{\tau}{\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_1)}l_n\frac{r''}{a}\qquad (z\geqslant 0)$$

$$\vec{E}_1=-\nabla\varphi_1=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1}[\frac{\vec{r}}{r^2}+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{\vec{r'}}{r'^2}]$$

$$\vec{E}_1=-\nabla\varphi_1=\frac{\tau}{\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\frac{\vec{r''}}{r''}$$

分界面上的极化电荷面密度为

$$\sigma_P=-\hat{n}\cdot(\vec{p}_1-\vec{p}_1)=\hat{n}\cdot[(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\vec{E}_1-(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\vec{E}_1]$$
$$=\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\varepsilon_0 a\tau}{\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}$$

从上式看出，介质分界面上极化电荷的大小和符号不仅决定于原电荷 τ，而且还决定于介质的性质，即当 $\varepsilon_1>\varepsilon_2$ 时，$\sigma_P>0$；当 $\varepsilon_1<\varepsilon_2$ 时，则 $\sigma_P<0$。

由于考虑区域 I 时，曾认为整个空间充满 ε_1 的介质，这就意味着一些原来只适用于无限均匀介质的公式，均可推广用于电像法的处理之中，因此带电直线单位长度上所受力为

$$\vec{f}=\tau\vec{E'}=-\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\tau^2}{4\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^a}\hat{\kappa}$$

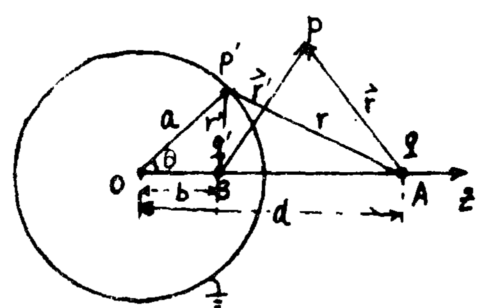
二)电荷的球面镜像

当分界面是球面时，我们仍然用像电荷来等效地代替分界面上的感应电荷对电位的贡献，而出发点依然是电位所满足的方程和边界条件。

例 3　一电量为 q 的点电荷和一半径为 a 的接地导体球的球心相距为 d(d>a)，试求空间的电位分布、电场强度、球面上感应电荷。

解　球外空间的电位 φ 由 q 及球面上感应电荷 σ 共同激发，φ 应满足：$\nabla^2\varphi=-\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(x,y,z-d)$ 在球面上，$\varphi|_s=0$，在无限远处，$\varphi\to 0$

用一点电荷 q′ 来代替球面上的感应电荷，为了不改变原方程，q′ 必须在球内，离球心的距离是 b，现用 $\varphi|_s=0$ 的条件来求 q′ 和 b 的大小，$\varphi|_s=0$ 就要求 q 和 q′ 在球面上任一点 P′ 的 φ 为零，即 $\frac{q}{r}+\frac{q'}{r'}=\frac{q}{(a^2+d^2-2ad\cos\theta)^{1/2}}+\frac{q'}{(a^2+b^2-2ab\cos\theta)^{1/2}}=0$，如图三所示，解上式关于 θ 的恒等式，就可得到符合题意的解为 $b=\frac{a^2}{d}$，$q'=-\frac{a}{d}q$ 故所求空间中任一点 P 的电位为



图三

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r}+\frac{q'}{r'}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{a}{d}\cdot\frac{1}{r'}\right)$$

场强 $\vec{E}=-\nabla\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}-\frac{a}{d}\cdot\frac{\vec{r}'}{r'^3}\right)$

球面上感应电荷面密度为

$$\sigma_f=n\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\varepsilon_0 n\cdot\vec{E}=-\frac{q}{4\pi r^3}\left(1-\frac{d^2}{a^2}\right)$$

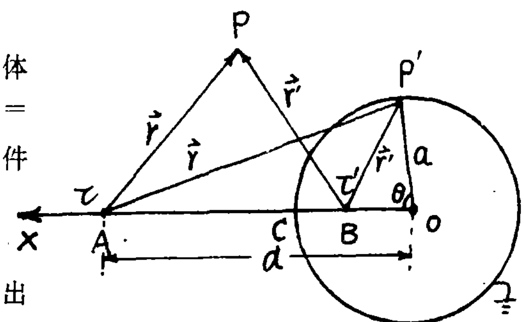
总的感应电荷 $Q=\oiint\sigma_f ds=-q'$.

当导体球不接地或带电量 Q，或导体球的电位为 U_0，其他条件不变时，同样可以利用迭加原理求解，这里同样要利用球面镜像法。

（三）电荷的柱面镜像

柱面镜像主要讨论无限长园柱与平行的无限长带电直线的问题，其方法也同平面、球面镜像类似。

例 4　有一线电荷密度为 τ 的无限长带电直线与半径为 a 的接地无限长导体园柱轴线平行，直线到园柱轴线的距离为 $d(d>a)$，试求空间的电位和场强，柱面上的电荷面密度和单位长上的总电量及带电直线单位长度上所受的力。



图四

解　(a)此题所满足的方程和边界条件，由于导体柱面把整个空间分成柱内、柱外区域，在柱内有，φ 内$=0$，$\vec{E}=0$；在柱外有，$\nabla^2\varphi=-\frac{\tau}{\varepsilon_0}\delta(x-d, y)$，其边界条件是在柱面 s 上有 $\varphi|_s=0$。

(b)像电荷的位置、电荷分布。

处于带电直线的是场中的导体园柱，其柱面上要出现感应电荷，空间任一点的电位应是带电直线和感应电荷分别产生电位的迭加，而且它在柱内满足 $\varphi_{内}=0$，在柱外满足所给的条件，感应电荷的分布应具有面对称性，带电直线和园柱轴线所决定的平面就是对称面。因此，感应电荷的等效中心应在对称面上，且位于带电线和园柱轴线之间，并和他们平行的带电直线。我们假定像电荷的线密度为 τ'，它到轴线的距离为 b，由于是无限长带电直线和园柱体，我们只讨论一个横截面上的电位分布就可以了。如图四所示，其中 A 为原电荷，B 为像电荷，若取 OA 的连线与园的交点 C 为参考点，则园柱外空间任一点的电位可表示为：

$$\varphi_{外}=\frac{-\tau}{2\pi\varepsilon_0}l_n\frac{r}{d-a}+\frac{\tau'}{2\pi\varepsilon_0}l_n\frac{r'}{a-b}$$

由边界条件 $\varphi_s=0$，可求得

$$\tau'=\tau,\ b=\frac{a^2}{d}$$

将 τ' 和 b 的值代入上式可得

$$\varphi_{外}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}l_n\frac{r'd}{ra}\qquad\vec{E}=-\nabla\varphi_{外}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{r}}{r^2}-\frac{\vec{r}'}{r'^2}\right)$$

柱面上的感应电荷面密度

$$\sigma_f = \varepsilon_0(n \cdot \vec{E}) = \frac{\tau}{2\pi}\left[\frac{n \cdot \vec{r}}{r^2} - \frac{n \cdot \vec{r'}}{r'^2}\right] = \frac{-\tau(d^2 - a^2)}{2\pi a(a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta)}$$

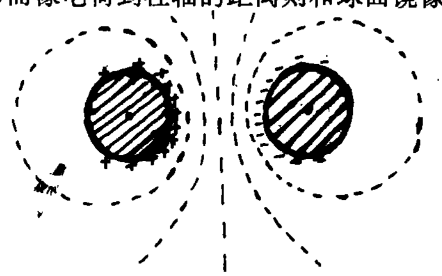
柱面上单位长度的总感应电荷为：

$$\lambda' = \iint \sigma_f ds = -\frac{\tau(d^2 - a^2)}{2\pi a}\int_0^1 dz \int_0^{2\pi} \frac{a d\theta}{(a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta)} = -\tau$$

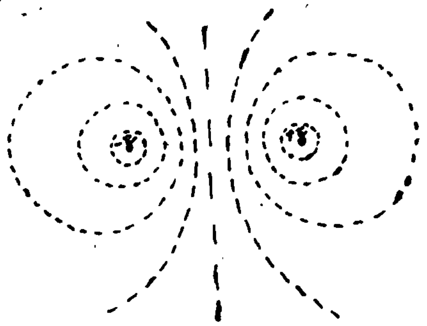
原带电直线单位长度所受的力

$$\vec{F} = \tau\vec{E'} = -\frac{\tau^2 d}{2\pi\varepsilon_0(d^2 - a^2)} i$$

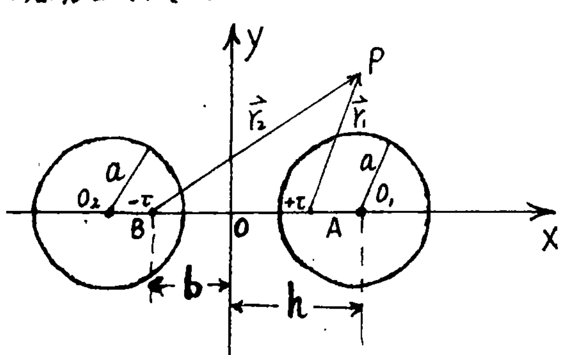
由本题可知，柱面镜像的结果好像是平面镜像和球面镜像的结合，其像电荷的大小和平面镜像类似，而像电荷到柱轴的距离则和球面镜像类似。



(a) 电荷非均匀地分布在圆柱导体表面上

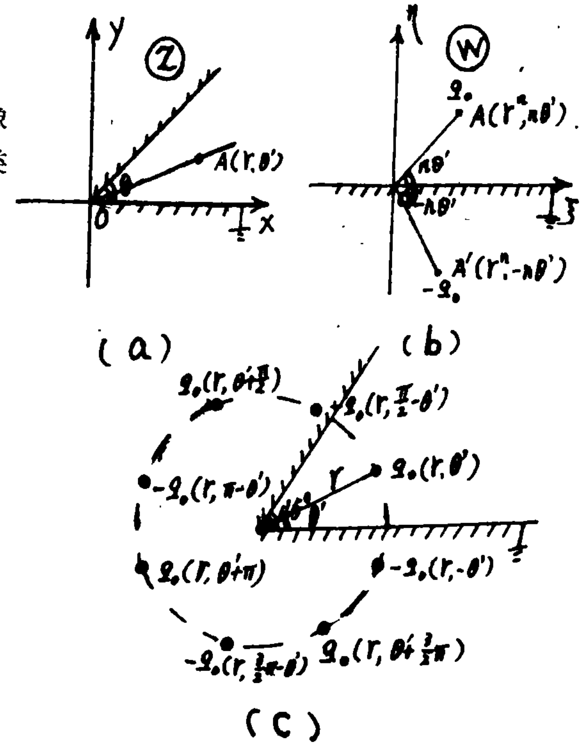


(b) 镜像电荷被收缩在两条直线上



(c) 等效电轴位置的确定 $b=(h^2-a^2)^{1/2}$

图六



图五

（四）用保角变换求电像

对于角域内的静电问题，可通过保角变换来用电像法求解。

例 5　有两个相交的接地导体平面，共夹角为 θ，若在所夹区域内有一电量为 q 的点电荷，对平行园柱周围的等位和它们的等价镜像求所夹区域内的电位。

解　我们把 X 轴固定在角域的一边上，记 A 点的位置为 $Z=re^{i\theta'}$，我们对 Z 平面作保角变换 $W=Z^n$，使得 $n\theta=\pi$，这样上面的角域就变为 W 平面上的上半平面，角域的边界就变为 W 平面上的 ξ 轴，而 A 点变为 $W(z)=r^n e^{in\theta'}$，A 点的电荷所带的电量仍为 q_0。在 W 平面上，点电荷 A 的电像位置为 $W'=r^n e^{-in\theta'}$，它所带的电量为 $-q_0$。由此可知，在 Z 平面上，带电量为 q_0 的像电荷的位置为 $Z=re^{i(\theta'+2k\theta)}$，(k=1，2，3，…n−1)，共有 (n−1) 个，带电量为 $-q_0$ 的像电荷的位置为

$Z'=re^{i(-\theta+2k\theta)}$，$(k=1,2,3,\cdots n-1)$，共有 n 个，所以共有$(2n-1)$个像电荷，它们都在同一个园周上，而角域内的场可由这$(2n-1)$个像电荷和原有电荷 q_0 分别产生的场的迭加。如图五(C)就是 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，像电荷的位置及个数。

一般说来，只要 θ 满足 $2\pi/\theta=$偶数的情形，都可用电像法求解，此时像电荷的个数等于$(2\pi/\theta-1)$，加上原来的电荷总共是 $2\pi/\theta$ 个。这些点电荷都在过原点与两导体面的交线垂直的面内，而且都在此垂面与交线的交点为园心，交点到原电荷处的距离为半径的园周上。若 θ 不满足 $2\pi/\theta=$偶数这个条件，则像电像电荷就会出现在所考虑的区域内，从而改变了该区域内电位所满足的泊松方程，因而不能用电像法求解。

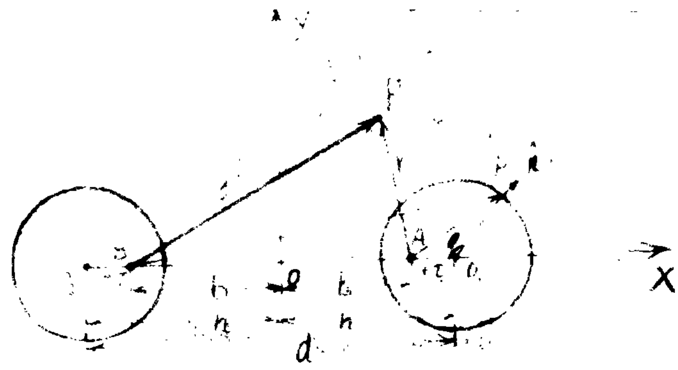
(五)电轴法

电轴法根据两根带异号等量电荷的无限长直线的等位面是一系列园柱面，在一定条件下同带等量异号电荷的无限长导体园柱的等位面相吻合的特性，用两根带等量异号电荷的无限长直线(称为电轴)等效地代替两带电园柱(如图六)，这样就把求解电荷分布不均匀的带电园柱产生的位和场的问题，变成了求解两电轴在所考虑区域内产生的位和场的问题，而后者是已知的。因此，电轴法的实质是把电像法应用于解决带电的平行导体园柱所产生的电场的一类问题。

对于用电轴法求解的区域，要确定等效电轴的位置和单位长度上的电量 τ，确定等效电轴位置使用公式 $b=\sqrt{h^2-a^2}$，而确定电轴单位长度上的电量 τ 时，则需要区别不同情况，对于给定园柱单位长电量 $\pm\tau$ 的情况，它就是等效电轴单位长的电量；对于给定两园柱电位差的情况，就要由电轴计算电位的公式分别计算两园柱面上的电位，由此得到 U 和园柱面上的 τ 之间关系，从而也就得到了电轴单位长的电量。

例 6　有两个半径均为 a，其轴线之间距离为 $d(d>2a)$的平行长直园柱导体，设它们单位长度上所带的电量分别 $\pm\tau$，试求电位和电场强度。

解　由于两个园柱互相影响，因此柱面上的电荷分布不是均匀的，在两个园柱内部 $\vec{E}=0$，可以不考虑，故只需考虑柱外空间，对于电荷分布不均匀，而且又是未知的情况，用电轴法求解较合适，而问题的关键是确定电轴的位置和电量的大小。



图七

电轴的位置 $b=\sqrt{(h^2-a^2)}=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-a^2}$，而电轴单位长度上的电量就等于给定的园柱单位长的电量 $\pm\tau$，于是轴外空间任一点的电位 $\varphi=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}l_n\frac{r_2}{r_1}$，$r_1$、$r_2$ 分别表示正、负电轴到观察点的距离(如图七)。

所以　$\vec{E}=-\nabla\varphi=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}(\frac{\vec{r}_1}{r_1^2}-\frac{\vec{r}_2}{r_2^2})$。

结束语

综上所述，电像法的理论依据是解的唯一性定理和电位的迭加原理。其方法是用一个或若干个

假想的简单电荷分布(点电荷、线电荷、偶极子等)来等效地代替分界面上未知的感应电荷或极化电荷对电位的贡献,于是在所考虑的区域内电位为

$$\varphi=\varphi_0+\varphi'.$$

其中 φ_0 是给定的电荷所产生的电位,φ' 是像电荷所产生的电位。

在用电像法解题时应注意:

(1).像电荷是假想的、虚构的,并不是真实存在的.它只是用来等效地代替未知电荷对电位和场强的贡献,像电荷不真实性表现在:(一)当有介质分界面时,像电荷的位置随所考虑的区域不同而不同;(二)像电荷的大小并不一定等于它所代替的电荷总量。原则上说,在无介质存在时,当被代替的电荷分布的界面完全包围像电荷时,像电荷的代数和就等于所代替的总电荷,否则不等;(三)包含有像电荷在内的带电体系的相互作用能只与由真实电荷组成的带电体系的相互作用能之比为1/2,但不影响作用力;

(2).像电荷的引入,不能改变考虑区域电位所满足的方程和边界条件。为了不改变区域间电位所满足的方程,像电荷不能放在所考虑的区域内,为了不改变边界条件,像电荷和给定电荷所产生的电位之和应满足边界条件,像电荷的个数、位置、电量大小及符号以满足给定的边界条件为准;

(3).一般是根据边界条件决定像电荷的大小和位置,但很多时候是根据界面情况,先假定像电荷的位置,由边界条件来决定像电荷的大小,同时要注意利用已知的结论和迭加原理来解决复杂的问题;

(4).像电荷决定后,在所考虑的区间不变的条件下,可以认为抽去了分界面而把整个空间看成充满所考虑区间的那种介质,这就是说,可以用只在单一介质时才成立的求位公式

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint\frac{\rho_f dv}{r} \quad 或 \quad \varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum\frac{q_k}{r_k}$$

来求电位,可用库仑定律求作用力,$\vec{F}=q\vec{E}$。

参考文献

1、包德修 罗耀煌《静电场的分析与解法》 云南人民出版社 1984年10月 P343~P347

2、英 I. S. Grant W. R. Philjips 著《电磁学》 人民教育出版社 1983年4月 P97~P100

3、美 J. D. 杰克逊著《经典电动力学》 人民教育出版社 1981年3月 P60~62

4、郭硕鸿《电动力学》 人民教育出版社 1983年2月 P71~75

5、阚仲元《电动力学》 人民教育出版社 1981年3月 P27~32

6、大学物理编辑部《电磁学专辑》 北京工业大学出版社 1988年5月 P9~10