习题 9.8 参考答案

9-8 一半径为 R 的光滑圆环以恒定的角速度 ω 绕其竖直的直径旋转，圆环上套有一小珠．试求：

（1）小珠相对圆环的平衡位置（以小珠与圆心连线同竖直直径间的夹角 θ 表示）；

（2）小珠在平衡位置附近作小振动的角频率．

解一 利用势能极值判定平衡类型

以圆环为参考系 ⟩，则小珠受到重力、圆环支持力和惯性离心力的作用，若以圆环中心为重力势能零点，竖直方向的直径为惯性离心力势能零点，则小珠与地球组成的系统的势能为

注意为非惯性系．

$$E_p = -mgR\cos\theta\langle -\frac{1}{2}m\omega^2R^2\sin^2\theta\rangle$$

按照势能定义直接积分计算即可，也可类比弹簧弹性势能得出．

则

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta} = mgR\sin\theta - \omega^2R^2\sin\theta\cos\theta = mR\sin\theta(g-\omega^2R\cos\theta)$$

令上式等于零，可得平衡位置对应的角度为

$$\theta = 0,\ \theta = \pi,\ \theta = \arccos\frac{g}{\omega^2R}\ \ (g<\omega^2R)$$

又因为

$$\langle\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2} = mR\cos\theta(g-\omega^2R\cos\theta) + m\omega^2R^2\sin^2\theta\rangle$$

二阶导数的正负决定极值为极大或极小值．

当 $\theta=0$ 时，

$$E_p''(0) = mR(g-\omega^2R)$$

当 $g>\omega^2R$ 时，$E_p''(0)>0$，该位置为稳定平衡，否则为不稳定平衡．

当 $\theta=\pi$ 时，

$$E_p''(0) = -mR(g+\omega^2R)<0$$

为不稳定平衡．

当 $\theta=\arccos(g/\omega^2R)$ 时，

$$E_p''(0) = m(\omega^4R^2-g^2)/\omega^2$$

因为 $g<\omega^2R$ 时，$E_p''(0)>0$，故该位置为稳定平衡．

在稳定平衡位置作小振动时，其频率为

$$\langle\omega_0 = \sqrt{\frac{E_p''}{mR^2}}\rangle$$

注意，是势能对位置的导数，不是对角度 θ 的导数．

当 $\theta=0$ 时，

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g-\omega^2R}{R}}\quad(\langle g>\omega^2R\rangle)$$

要说明适用的范围，下同．

当 $\theta=\arccos(g/\omega^2 R)$ 时，

$$\omega_0=\sqrt{\frac{\omega^4R^2-g^2}{\omega^2R^2}}\quad(g<\omega^2R)$$

解二 受力分析角度考虑

以圆环为参考系，小珠处于平衡位置时受力如图 1所示，其中 $r=R\sin\theta$，为小珠与轴的距离．小珠相对于圆环静止，故所受力矢量和为零．

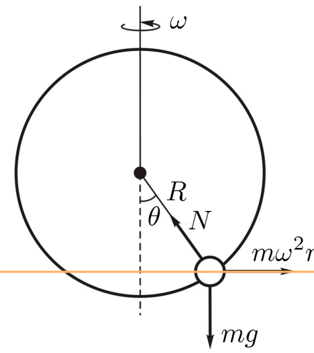

图 1 习题 9-8

水平方向上

$$N\sin\theta=m\omega^2r=m\omega^2R\sin\theta \tag{1}$$

不能把 $\sin\theta$ 直接约掉，不然会丢掉两个解．

竖直方向上

$$N\cos\theta=mg \tag{2}$$

式 (2) $\times\cos\theta-$ (1) $\times\sin\theta$，可得

$$m\sin\theta(g-\omega^2R\cos\theta)=0$$

则可解得平衡位置为

$$\theta=0,\ \theta=\pi,\ \theta=\arccos\frac{g}{\omega^2R}.$$

设平衡位置的角度为 θ_0，当小珠偏离平衡位置少许时，规定从平衡位置向右（增加）偏离方向为正，相应的转动方向向外为正．当小珠相对于平衡位置偏离极小角度 θ 时（$\theta\ll1$），$r=R\sin(\theta+\theta_0)$

一般选择角度增加的方向为正．

由转动定律可得

$$-mgR\sin(\theta+\theta_0)+m\omega^2R^2\cos(\theta+\theta_0)\sin(\theta+\theta_0)=mR^2\ddot\theta \tag{3}$$

将 $\sin(\theta+\theta_0)$、$\cos(\theta+\theta_0)$ 以 θ_0 为中心展开，并代入 (3) 式，忽略二阶无穷小，可有

泰勒级数展开，保留到一阶无穷小即可．

$$-mgR\sin\theta_0+m\omega^2R^2\sin\theta_0\cos\theta_0-mg\cos\theta_0\theta+m\omega^2R^2(\cos^2\theta_0-\sin^2\theta_0)\theta=mR^2\ddot\theta \tag{4}$$

当 $\theta_0=0$ 时，（4）式变为

$$\ddot\theta+\frac{g-\omega^2R}{R}\theta=0$$

显然，当 $g>\omega^2R$ 时，上式代表的运动为简谐运动，其做简谐运动的频率为

注意要保证适用条件．

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g-\omega^2R}{R}}\quad(g>\omega^2R)$$

当 $\theta_0=\pi$ 时，（4）式变为

$$\langle\ddot{\theta}-\frac{g+\omega^2R}{R}\theta=0\rangle$$

这个方程的解是什么？代表了什么运动？能否说明平衡位置的类型？

显然，上式代表的运动并不是简谐运动，该点并不为稳定平衡点.

当 $\theta_0=\arccos(g/\omega^2R)$ 时，$\cos\theta_0=\dfrac{g}{R\omega^2}$，（4）式变为

$$\ddot{\theta}+\frac{R^2\omega^4-g^2}{R^2\omega^2}\theta=0$$

显然，当 $g<\omega^2R$ 时，小珠作简谐振动，角频率为

$$\omega_0=\sqrt{\frac{R^2\omega^4-g^2}{R^2\omega^2}}\quad(g<\omega^2R).$$

请各位同学对比总结一下这两种处理方式的优缺点.