数学物理方法 CH1 作业题解答

P6 习题 1.1

1. 用复变量表示：

（1）上半平面；　　　　（2）左半平面

解：（1）上半平面为：$\operatorname{Im} z > 0$

（2）左半平面为 $\operatorname{Re} z < 0$

4. 求下列复数的实部、虚部、模与辐角主值

（3）$(\sqrt{3}+i)^{-3}$

解：先将 $z=\sqrt{3}+i$ 记为指数形式，$z=\sqrt{3}+i=2e^{i(\frac{p}{6}+2kp)}$

则 $z^{-3}=2^{-3}e^{-i3(\frac{p}{6}+2kp)}=\frac{1}{8}e^{-i(\frac{p}{2}+6kp)}=\frac{1}{8}e^{-i\frac{p}{2}}=-\frac{1}{8}i$

其实部为 0，虚部为 $-\frac{1}{8}$，模为 $\frac{1}{8}$，辐角主值为 $-\frac{p}{2}$

6. 计算下列数值：

（2）$(\sqrt{3}-i)^5$

解：先将 $z=\sqrt{3}-i$ 记为指数形式，$z=\sqrt{3}-i=2e^{i(-\frac{p}{6}+2kp)}$，则

$$z^5=2^5e^{i5(-\frac{p}{6}+2kp)}=32e^{i(-\frac{5p}{6}+10kp)}=32e^{-i\frac{5p}{6}}=32[\cos(-\frac{5p}{6})+i\sin(-\frac{5p}{6})]=-16(\sqrt{3}+i)$$

7.求解方程

(1) $z^3-1=0$

解：$z^3=1$，则 $z=\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{e^{i2kp}}=e^{i\frac{2kp}{3}}=\begin{cases} e^0=1 \\ e^{i\frac{2p}{3}}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ e^{i\frac{4p}{3}}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$　分别对应 $\begin{cases} k=0 \\ k=1 \\ k=2 \end{cases}$

8.设流体在点 $z=1+2i$ 的流速为 $v=\frac{3+i}{2-i}$，求其大小和方向.

解：即求其模及辐角主值：

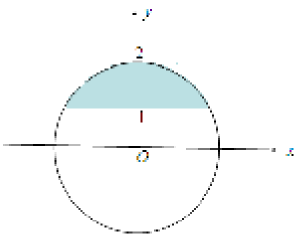
$v=\frac{3+i}{2-i}=\frac{(3+i)(2+i)}{5}=\frac{5+5i}{5}=1+i$，其模为$\sqrt{2}$，其辐角主值为$\arg v=\frac{p}{4}$

P9 习题 1.2

2. 画出下列关系所表示的 z 点的轨迹的图形并确定它是不是区域。

（1）$\operatorname{Im} z>1$且$|z|<2$

如图示阴影部分，不含边界线。满足区域的两个条件：（1）全由内点组成；（2）点集中任意两点可用全在点集中的折线连接；所以是区域。



P15 习题 1.3

2. 讨论下列函数的可微性和解析性

（1） $w=z^2$

解：记 $z=x+iy$， $w=u(x,y)+iv(x,y)$；

则 $w=z^2=(x^2-y^2)+i2xy$

w 的实部 $u=x^2-y^2$， 虚部 $v=2xy$

$\frac{\partial u}{\partial x}=2x$， $\frac{\partial u}{\partial y}=-2y$， $\frac{\partial v}{\partial x}=2y$， $\frac{\partial v}{\partial y}=2x$

可见， w 的实部和虚部有连续的一阶偏微商，且满足 C-R 条件，

所以， $w=z^2$ 在复平面可微，从而在复平面是解析的。

（2） $w=z\operatorname{Re} z$

解：记 $z=x+iy$， $w=u(x,y)+iv(x,y)$；

则 $w=z\operatorname{Re} z=x^2+ixy$

w 的实部 $u=x^2$，虚部 $v=xy$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=x$$

可见，w 的实部和虚部有连续的一阶偏微商，但仅在 $z=0$ 点满足 C-R 条件，所以，它仅在 $z=0$ 点是可微的，但是在 $z=0$ 点并不解析（因为在 $z=0$ 点的邻域并不满足 C-R 条件）；并且在全平面均是不解析的。

3. 已知解析函数的实部或虚部，求解析函数。

（1） $u=x^2-y^2+xy$， $f(i)=-1+i$

解：采用不定积分法：

$$v=\int\frac{\partial v}{\partial x}dx+g(y)\qquad ①$$

而由 C-R 条件，$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=2y-x$ ②

所以 $v=\int(2y-x)dx+g(y)=2xy-\frac{1}{2}x^2+g(y)$ ③

再将 v 对 y 求偏导：

一方面，由 C-R 条件，$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y$， ④

另一方面，由 ③式得：$\frac{\partial v}{\partial y}=2x+\frac{dg}{dy}$ ⑤

由④⑤两式得 $\frac{dg}{dy}=y$ 所以 $g=\frac{1}{2}y^2+c$

所以 $v=2xy-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+c$ ⑥

再由已知 $f(i)=-1+i$，即当 $x=0,y=1$ 时， $v=1$ ，代入 ⑥式得 $c=\frac{1}{2}$

所以，$v=2xy-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}$ ⑦

则 $f(z)=x^2-y^2+xy+i\,(2xy-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2})=(1-\frac{1}{2}i)z^2+\frac{1}{2}i$ ⑧

（2） $u=2(x-1)y$， $f(2)=-i$

解：采用不定积分法：

$$v=\int\frac{\partial v}{\partial x}dx+g(y)\qquad ①$$

而由 C-R 条件，$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-2x+2$　　②

所以 $v=\int(2-2x)dx+g(y)=2x-x^2+g(y)$　　③

再将 v 对 y 求偏导：

一方面，由 C-R 条件，$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2y$，　　④

另一方面，由 ③式得：$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{dg}{dy}$　　⑤

由④⑤两式得 $\frac{dg}{dy}=2y$　　所以 $g=y^2+c$

所以 $v=2x-x^2+y^2+c$　　⑥

再由已知 $f(2)=-i$，即当 $x=2,y=0$ 时，$v=-1$，代入 ⑥式得 $c=-1$

所以，$v=2x-x^2+y^2-1$　　⑦

则 $f(z)=2(x-1)y+i\ (2x-x^2+y^2-1)=-i(1-z)^2$　　⑧

P22 习题 1.4

6.（2） 解方程：$e^z=1+i\sqrt{3}$

解：先将 e^z 写成指数的形式：$e^z=2e^{i(\frac{p}{3}+2kp)}$

则 $z=Ln[2e^{i(\frac{p}{3}+2kp)}]=\ln 2+Lne^{i(\frac{p}{3}+2kp)}=\ln 2+i(\frac{p}{3}+2kp)$　　$(k=0,\pm1,\pm2...)$

7. 判断下列函数是单值的还是多值的，若是多值的，是几值？其支点是什么？

（1）$z+\sqrt{z-1}$　　　　（6）$\frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$

解：（1）因为 z 是单值函数，而 $\sqrt{z-1}$ 是 2 值的，支点是1，∞

所以，函数 $z+\sqrt{z+1}$ 是 2 值的，支点是1，∞

（6） $\sqrt{z}=\sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg z+2kp}{2}}$，记它的两个单值分支为

$$\begin{cases} w_1=\sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg z}{2}} \\ w_2=\sqrt{|z|}e^{i(\frac{\arg z}{2}+p)}=-\sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg z}{2}}=-w_1 \end{cases}$$

则 $\dfrac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}=\begin{cases} \dfrac{\cos w_1}{w_1} \\ \dfrac{\cos w_2}{w_2}=\dfrac{\cos(-w_1)}{-w_1}=\dfrac{\cos(w_1)}{-w_1} \end{cases}$

所以，$\dfrac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ 是 2 值的函数，支点与 $\sqrt{z}$ 的支点相同，是 0 和 ∞.

8. 设 $w=\sqrt[3]{z}$ 确定在沿负实轴割破了的 z 平面上，并且 $w(i)=-i$，求 $w(-i)$.

解：根据已知，可设定 $-p<\arg z\le p$

$w=\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{|z|}e^{i\frac{\arg z+2kp}{3}}$ $\quad(k=0,1,2)$， 是 3 值函数，它的三个单值分支为：

$$\begin{cases} w_1=\sqrt[3]{|z|}e^{i\frac{\arg z}{3}}\text{,其辐角记为}f_1=\dfrac{\arg z}{3}\text{，其变化范围为}-\dfrac{p}{3}<f_1\le\dfrac{p}{3} \\ w_2=\sqrt[3]{|z|}e^{i\frac{(\arg z+2p)}{3}}\text{,其辐角记为}f_2=\dfrac{(\arg z+2p)}{3}\text{，其变化范围为}\dfrac{p}{3}<f_2\le p \\ w_3=\sqrt[3]{|z|}e^{i\frac{(\arg z+4p)}{3}}\text{,其辐角记为}f_3=\dfrac{(\arg z+4p)}{3}\text{，其变化范围为}p<f_3\le\dfrac{5p}{3} \end{cases}$$

已知 $w(i)=-i$，即 $z=i$ 时， $w=-i=e^{i(-\frac{p}{2}+2kp)}$， w 的幅角为 $-\dfrac{p}{2}+2kp$ ，其中只有辐角 $\dfrac{3p}{2}$ 在上述 w_1， w_2， w_2 限定的范围内，它是在分支 $w_3=\sqrt[3]{|z|}e^{i\frac{(\arg z+4p)}{3}}$ 的辐角范围内，所以，我们应在分支 w_3 中求解 $w(-i)$.

当 $z=-i$ 时， $\arg z=-\dfrac{p}{2}$， 这时，

$$w_3(-i)=e^{i\frac{(\arg z+4p)}{3}}=e^{i\frac{7p}{6}}=-e^{i\frac{p}{6}}=-(\cos\frac{p}{6}+i\sin\frac{p}{6})=-(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)$$

10.（4）计算：$Ln(1+i)$

解：$Ln(1+i)=Ln[\sqrt{2}e^{i(\frac{p}{4}+2kp)}]=\ln\sqrt{2}+i(\frac{p}{4}+2kp)\qquad(k=0,\pm1,\pm2\ldots)$