数学物理方法

Mathematical Methods in Physics

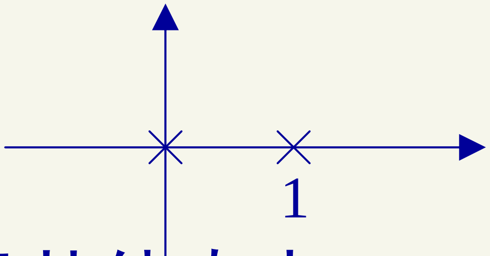
第三章 无穷级数
Infinite Series

武汉大学

物理科学与技术学院

§3.5单值函数的孤立奇点

一、函数的奇点



1、孤立奇点

若在$|z-b|<\varepsilon$内除b外$f(z)$别无其他奇点

则$z=b$是$f(z)$的孤立奇点。

$$e.g.\ f(z)=\frac{1}{z(z-1)} \qquad z=0,z=1$$

2、非孤立奇点

若在$|z-b|<\varepsilon$内，$f(z)$除$z=b$外还有其它的奇点，

则称b为$f(z)$的非孤立奇点。

$$e.g.\ f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}} \qquad z=0$$

二、孤立奇点的分类

若$z=b$为$f(z)$的孤立奇点，则

$$\boxed{f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k(z-b)^k,\quad 0<|z-b|<R}$$

1、可去奇点

若$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k(z-b)^k, 0<|z-b|<R$（展开无负幂），

则$z=b\to f(z)$的可去奇点

$$e.g.\ f(z)=\frac{\sin z}{z}, z=0\to \text{可去奇点}$$

二、孤立奇点的分类

1、可去奇点

注：（1）b为可去奇点的充要条件为

$$i>f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k(z-b)^k \Leftrightarrow ii>\lim_{z\to b}f(z)=\text{有限}$$

$$\Leftrightarrow iii>f(z)\text{在}\,b\,\text{充分小邻域内有界。}$$

(2)可去奇点常不作奇点看。

$$\text{e.g. } F(z)=\begin{cases} f(z) & z\neq b \\ \lim\limits_{z\to b}f(z) & z=b \end{cases}$$

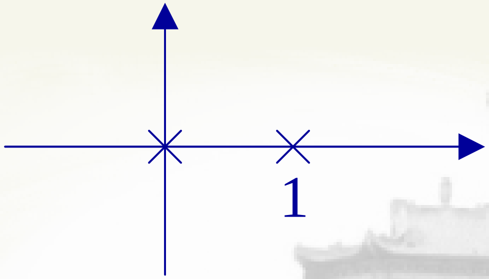
二、孤立奇点的分类

2、极点

若 $f(z)=\sum\limits_{k=-m}^{\infty}C_k(z-b)^k, 0<|z-b|<R$（展开有有限项负幂）

则称 $z=b$ 为 $f(z)$ 的极点. 当 $C_{-m}\neq 0$ 时，称 $z=b$ 为 $f(z)$ 的 m 阶极点。1阶极点又称为单极点。

$$e.g.\ f(z)=\frac{1}{z^2(z-1)}$$



注：（1）b 为极点的充要条件: $\lim\limits_{z\to b}f(z)=\infty$

$$e.g.\ f(z)=\frac{z}{\sin^2 z}$$

二、孤立奇点的分类

2、极点

（2）b为m阶极点的充要条件为

$$f(z)=\sum_{k=-m}^{\infty}C_k(z-b)^k \quad (C_{-m}\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-b)^m} \quad [\varphi(z)\in H(|z-b|<R),\ \varphi(b)\neq 0]$$

$$\Leftrightarrow g(z)=\frac{1}{f(z)}$$ 以$z=b$为m阶零点。（附）

$e.g.\ f(z)=\dfrac{1}{z^2(z-1)}$， 以$z=0$为二阶极点,$z=1$为单极点。

二、孤立奇点的分类

附：解析函数的零点：

设函数$g(z)$在解析区域σ内一点a的值为零，即$g(a)=0$，则称a为解析函数的$g(z)$零点。

若$g(a)=g'(a)=g''(a)=\cdots=g^{(m-1)}(a)=0,$

但$g^{(m)}(a)\neq 0,$则称a为函数$g(z)$的m级零点。

二、孤立奇点的分类

2、极点

(3) 若$z=b$为$f(z)$的奇点，且

$\lim\limits_{z\to b}[(z-b)^n f(z)]=$非零的有限值，

则b为$f(z)$的n阶极点。$e.g.\ f(z)=\dfrac{z}{\sin^2 z}$，

$$\because \lim_{z\to n\pi}\frac{z}{\sin^2 z}=\infty,\quad \therefore z=n\pi(n=0,\pm1,\cdots)-\text{极点。}$$

$$\lim_{z\to n\pi}(z-n\pi)\frac{z}{\sin^2 z}=\lim_{z\to n\pi}\frac{2z-n\pi}{\sin 2z}=\begin{cases}\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{2z}{\sin 2z}=1, & n=0\\ \infty, & n\neq 0\end{cases}$$

二、孤立奇点的分类

2、极点

$$e.g.\ f(z)=\frac{z}{\sin^2 z},$$

$$\lim_{z\to n\pi}(z-n\pi)^2\cdot\frac{z}{\sin^2 z}=\lim_{z\to n\pi}\frac{2(z-n\pi)z-(z-n\pi)^2}{2\sin z\cos z}$$

$$=\lim_{z\to n\pi}\frac{(z-n\pi)(3z-n\pi)}{\sin 2z}$$

$$=\lim_{z\to n\pi}\frac{4z-2n\pi+z^2-n^2\pi^2}{2\cos 2z}=\frac{2n\pi}{2\cos 2n\pi}=n\pi \quad (n\neq 0)$$

以$z=0$为单极点，$z=n\pi(n=\pm1,\pm2,\ldots)$为二阶极点。

问：$\lim\limits_{z\to n\pi}(z-n\pi)^3\cdot\dfrac{z}{\sin^3 z}$有否可能为非零的有限值？

二、孤立奇点的分类

3、本性奇点

$$\boxed{f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k(z-b)^k,\quad 0<|z-b|<R}$$

若 $f(z)=\sum_{k=-\infty}^{-1}C_k(z-b)^k+C_0+C_1(z-b)^2+\cdots,0<|z-b|<R$

(展开有无限项负幂），则称$z=b$为$f(z)$的本性奇点。

$$e.g.\ f(z)=e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\ldots;0<|z|<\infty$$ $z=0\to$本性奇点

注意：b为本性极点的充要条件为 $\lim\limits_{z\to b}f(z)=$不定

$$e.g.\qquad \lim_{z\to 0}e^{\frac{1}{z}}=\begin{cases}\infty,\begin{cases}x\to 0^+\\ y=0\end{cases}\\ 0,\begin{cases}x\to 0^-\\ y=0\end{cases}\end{cases}$$

三、无穷远点的性质

1、无穷点为解析点

若$R>0$,当$|z|>R$时$f(z)$处处可导，则$f(z)$在$z=\infty$解析。

$$e.g.\ f(z)=\frac{1}{z^2(z-1)}$$ 在$z=\infty$处解析

2、无穷点为孤立奇点

若$\exists$一$R>0$,当$|z|>R$时$f(z)$除$z=\infty$别无奇点，

即在$R<|z|<\infty$中解析，则$z=\infty$为$f(z)$的孤立奇点.

$$e.g.\ f(z)=\frac{\sin z}{z}$$ 在$z=\infty$为孤立奇点

三、无穷远点的性质

3、无穷远点为孤立奇点的分类

令 $z=\dfrac{1}{t}$ 　则 $z=\infty \quad \rightarrow \quad t=0$

$$f(z) \quad \rightarrow \quad f\left(\frac{1}{t}\right)=\varphi(t)$$

$$|z|>R \quad \rightarrow \quad |t|<\frac{1}{R}=\delta$$

$$R<|z|<\infty \quad \rightarrow \quad 0<|t|<\delta$$

$f(z)$在$\begin{cases}|z|>R\text{的}T\text{展} \\ R<|z|<\infty\text{的}L\text{展}\end{cases} \rightarrow \varphi(t)$在$\begin{cases}|t|<\delta\text{的}T\text{展} \\ 0<|t|<\delta\text{的}L\text{展}\end{cases}$

三、无穷远点的性质

3、无穷远点为孤立奇点的分类

（1）可去奇点:

若$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k z^k + c_0,\ R<|z|<\infty$（展开无正幂）

则$z=\infty$为$f(z)$的可去奇点。

$e.g.\ \ f(z)=z\cdot\sin\frac{1}{z}$ 以$z=\infty$可去奇点。

（2）极点

若$f(z)=\sum_{k=1}^{m} c_k z^k + c_0 + c_{-1}\frac{1}{z}+c_{-2}\frac{1}{z^2}+\cdots,\ R<|z|<\infty$（展开有m项正幂

则$z=\infty$为$f(z)$的m阶极点。

$e.g.\ P_n(z)=a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1}+\cdots a_0$ 以$z=\infty$为n阶极点。

三、无穷远点的性质

3、无穷远点为孤立奇点的分类

（3）本性奇点

若 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k+c_{-1}\frac{1}{z}+c_{-2}\frac{1}{z^2}+\cdots, R<|z|<\infty$（有无限项正幂）

则 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的本性奇点。

$$e.g.\quad e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k, |z|<\infty$$ 以 $z=\infty$ 为本性奇点。

小结

一、函数的奇点

1、孤立奇点

(1) 可去奇点 $\lim\limits_{z\to b} f(z) = $ 有限

(2) 极点 $\lim\limits_{z\to b} f(z) = \infty$

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} C_k (z-b)^k \quad (C_{-m} \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-b)^m} \quad [\varphi(z) \in H(|z-b| < R), \varphi(b) \neq 0]$$

$\Leftrightarrow g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ 以 $z = b$ 为 m 阶零点。

(3) 本性奇点 $\lim\limits_{z\to b} f(z) = $ 不定

2、非孤立奇点

小结

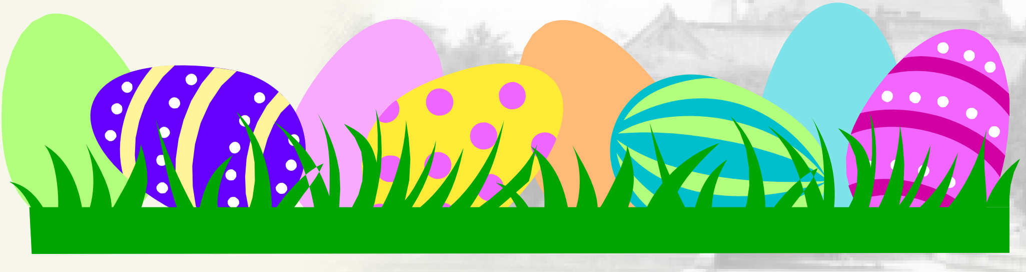
二、孤立奇点的分类

奇点 / 展开式 / 类型	b	∞
展开式	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-b)^k, 0<\lvert z-b\rvert<R$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k,\ R<\lvert z\rvert<\infty$
可去奇点	无负幂	无正幂
m阶极点	有m项负幂	有m项正幂
本性奇点	有无限项负幂	有无限项正幂

习题3.5:4(4),(8),(12);

5(2),(4),

7(2),(4)



Good-by!