数学物理方法

Methods in Mathematical Physics

第九章　积分变换法

The Method of Integral Transforms

武汉大学物理科学与技术学院

问题的引入：

行波法主要用于求解无界的波动问题；

分离变量法主要用于求解有界问题；

如何求解无界问题？

A: f(x) $\xrightarrow{\text{可逆积分}}$ B: F(p)

$$\boxed{\int \underline{k(x,p)} f(x)dx}$$

核

用途：使问题简化

偏微 → 常微

常微 → 代数

此法适合求解无界问题。

第四章　积分变换法

中心：用积分变换法求解各种无界问题

目的：1. 傅氏变换定义、性质

2. 用傅氏变换法求解偏微分方程的定解问题

3. 拉氏变换定义、性质

4. 用拉氏变换法求解常微分方程的初值问题

第九章　积分变换法

The Method of Integral Transforms

§9.1傅氏变换

Fourie Transforms

一、傅氏积分和傅氏积分定理

1、周期函数的傅氏级数（周期为 $2l$）

（1）三角式：$f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{n\pi}{l}x+b_n\sin\dfrac{n\pi}{l}x\right)$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}\xi d\xi$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi$$

（2）复数式 $\begin{cases} f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\omega_n x} \\ c_n=\dfrac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)e^{-i\omega_n\xi}d\xi \end{cases}$

$$\omega_n=\frac{n\pi}{l},\ n=\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\ \Delta\omega_n=\omega_{n+1}-\omega_n=\frac{\pi}{l}$$

一、傅氏积分和傅氏积分定理

2. 非周期函数的傅氏积分

周期 $(2l)$的函数 $\xrightarrow{l\to\infty}$ 非周期函数

$$\Delta\omega_n=\frac{\pi}{l}\xrightarrow{l\to\infty}0,\quad \omega_n\to\omega$$

$$\therefore f(x)=\lim_{l\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\omega_n x}=\lim_{l\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)e^{-i\omega_n\xi}d\xi]e^{i\omega_n x}$$

$$=\lim_{\Delta\omega_n\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\omega_n\xi}d\xi]e^{i\omega_n x}\Delta\omega_n$$

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi]e^{i\omega x}d\omega}$$ —傅氏积分

或：

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx]e^{i\omega x}d\omega}$$

一、傅氏积分和傅氏积分定理

3、傅氏积分存在的条件(傅氏积分定理)

(1)满足狄氏条件；(2)绝对可积：$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx < \infty$

则：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi\right]e^{i\omega x}d\omega, & \text{连续点处；}\\ \dfrac{1}{2}\left[f(x_0+0)+f(x_0-0)\right], & x_0\text{间断点。}\end{cases}$

一、傅氏积分和傅氏积分定理

4、三维傅氏积分

$$f(\vec{r})=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}[\iiint_{-\infty}^{\infty}f(\vec{r})e^{-i\vec{\omega}\cdot\vec{r}}d\vec{r}]e^{i\vec{\omega}\cdot\vec{r}}d\vec{\omega}$$

$$\vec{r}=\vec{e}_1x+\vec{e}_2y+\vec{e}_3z$$

$$\vec{\omega}=\vec{e}_1\omega_1+\vec{e}_2\omega_2+\vec{e}_3\omega_3$$

$$d\vec{r}=dxdydz,\qquad d\vec{\omega}=d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3$$

二、傅氏变换

1、（一维）傅氏变换：

定义
$$\boxed{G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi \overset{记}{=} F[f(x)]}$$

——f(x)的傅氏变换

则
$$\boxed{f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)e^{i\omega x}d\omega \overset{记}{=} F^{-1}[G(\omega)]}$$

——G(w)的傅氏逆变换

显然
$$\boxed{F^{-1}F[f(x)]=f(x)}$$

二、傅氏变换

2、例题：

（1） $$f(t)=\begin{cases}0\,,t<0\\ e^{-\beta t}\,,t>0\end{cases}$$

1) 求$F[f(t)]=?$； 2) $f(t)$的积分表示式；

$$F[f(t)]=\frac{\beta-i\omega}{\beta^2+\omega^2}$$

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega=\begin{cases}0, & t<0\\ \frac{\pi}{2}, & t=0\\ \pi e^{-\beta t}, & t>0\end{cases}$$

二、傅氏变换

2、例题：

(2) $F[e^{-ax^2}] = ?,(a>0)$

$$\boxed{F[e^{-ax^2}] = e^{-\frac{\omega^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}}$$

3、三维傅氏变换：

定义：
$$\boxed{G(\vec{\omega}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r})e^{-i\vec{\omega}\cdot\vec{r}}d\vec{r}}$$

则：
$$\boxed{f(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty} G(\vec{\omega})e^{i\vec{\omega}\cdot\vec{r}}d\vec{\omega}}$$

$$d\vec{r} = dxdydz, \qquad d\vec{\omega} = d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3$$

二、傅氏变换

4. 傅氏变换的其它几种形式

$$(1)\begin{cases} G(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \\ f(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{i\omega x}d\omega \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} G(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{i\omega x}d\omega \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} G(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}dx \\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{-i\omega x}d\omega \end{cases}$$

二、傅氏变换

5. 傅氏变换的物理意义：

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi$$

$G(\omega)$为 $f(x)$ 的频率密度函数或频谱函数，它可用来反映各种频率谐波之间振幅的相对大小，并称 $|G(\omega)|$为 $f(x)$的频谱。因为 ω 是相对变化的，所以$f(x)$ 的频谱是连续谱。而

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

可解释为无穷多个振幅（复振幅）为无限小的，频率为连续的谐波的连续和。

三、傅氏变换的性质

1. $F[\alpha f_1+\beta f_2]=\alpha F[f_1]+\beta F[f_2]$ —线性

√ 2. $F[e^{i\omega_0 x}f(x)]=G(\omega-\omega_0)$ [设$F[f(x)]=G(\omega)$] —延迟

3. $F[f(x\pm x_0)]=e^{\pm i\omega x_0}F[f(x)]$ —位移

√ 4. $F[f^{(n)}(x)]=(i\omega)^n F[f(x)]$, $f^{(n-1)}(x)\xrightarrow{|x|\to\infty}0, n=1,2,\ldots$ —微分

√ 5. $F\left[\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi\right]=\dfrac{1}{i\omega}F[f(x)]$ —积分

6. $F[f_1 * f_2]=F[f_1]\cdot F[f_2]$– 卷积定理

√ 7. $F[f_1\cdot f_2]=\dfrac{1}{2\pi}F[f_1]*F[f_2]$– 像函数卷积

其中 $f_1 * f_2=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)f_2(x-\xi)d\xi \rightarrow$ 卷积

三、傅氏变换的性质

例题： (1) $F[xe^{-ax^2}] = ?$

$$F[xe^{-ax^2}] = -\frac{i\omega}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

(2) 已知 $F[\varphi(x)] = G(\omega)$

1) 求 $F^{-1}[G(\omega)\cos a\omega t]$

$$F^{-1}[G(\omega)\cos a\omega t] = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)]$$

2) 求 $F^{-1}[\dfrac{G(\omega)}{a\omega}\sin a\omega t]$

$$F^{-1}\left[\frac{G(\omega)}{a\omega}\sin a\omega t\right] = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)d\xi$$

四、小结

定义：

$$\boxed{G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi \overset{\text{记}}{=} F[f(x)]}$$

—f(x)的傅氏变换

则：

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{i\omega x}d\omega \overset{\text{记}}{=} F^{-1}[G(\omega)]}$$

—G(w)的傅氏逆变换

显然

$$\boxed{F^{-1}F[f(x)]=f(x)}$$

四、小结

性质：1. $F[\alpha f_1+\beta f_2]=\alpha F[f_1]+\beta F[f_2]$

2. $F[e^{i\omega_0 x}f(x)]=G(\omega-\omega_0)$ [设$F[f(x)]=G(\omega)$]

3. $F[f(x\pm x_0)]=e^{\pm i\omega x_0}F[f(x)]$

4. $F[f^{(n)}(x)]=(i\omega)^n F[f(x)]$, $f^{(n-1)}(x)\xrightarrow{|x|\to\infty}0, n=1,2,\ldots$

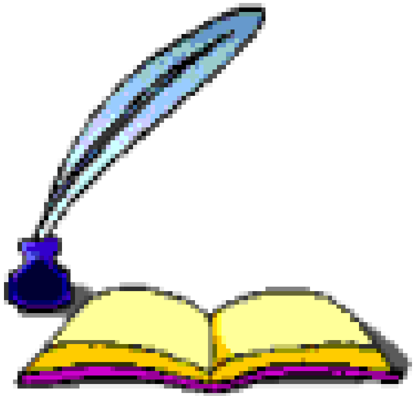
5. $F\left[\int_{x_0}^{x}f(\xi)d\xi\right]=\dfrac{1}{i\omega}F[f(x)]$

6. $F[f_1*f_2]=F[f_1]\cdot F[f_2]$ – 卷积定理

7. $F[f_1\cdot f_2]=\dfrac{1}{2\pi}F[f_1]*F[f_2]$ – 像函数卷积

其中 $f_1*f_2=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\xi)f_2(x-\xi)d\xi$ → 卷积

本节作业



习题 9.1：

2（2）（3）；

7 （2）

再见！