§5.3 边值问题

[**一、初值问题**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap5/5-3.htm#一、初值问题#一、初值问题)

[**二、边值问题**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap5/5-3.htm#二、边值问题#二、边值问题)

[**三、本征值问题**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap5/5-3.htm#三、本征值问题#三、本征值问题)

[四、例题](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap5/5-3.htm#四、 例题#四、 例题)

**一、初值问题**

一般的二阶线性常微分方程为

          （5.3 - 1）



其通解为

           （5.3 - 2）



其中为非齐次方程的特解，为相应齐次方程的通解，y1 ,y2 为齐次方程的一组线性无关特解，c1 ,c2 为任意常数。这两个任意常数可由适当给定的两个补充条件来确定。



这些条件通常要求未知函数y(x)及其导数y′(x)在自变量的同一点x=x0 取规定值

y(x0 )=y0 ，y′(x0 )=y0′        （5.3 - 3）

即所谓的**初始条件**。由方程(5.3 - 1)和条件(5.3 - 3)构成的问题称为**初值问题**。在相应的实际问题中自变量x常表示时间t，不失一般性常可取x0 =t0 =0，作为初始时刻。

对于初值问题只要方程的系数P(x),Q(x)以及非齐次项f(x)在包含x=x0 的某个区间内连续，就存在着唯一的解。



解初值问题常用待定常数法，即求得方程(5.3 - 1)的解后，代入初始条件(5.3 - 3)确定出常数c1 ,c2 。在某些情况下(尤其是常系数方程)可用Laplace变换法求解(详见第七章)。

[返回页首](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap5/5-3.htm#top#top)

**二、边值问题**

在很多实际问题中，往往要求方程(5.3 - 1)的解在区间a ≤ x ≤b的端点满足一定的条件，如

y(a) = A , y(b) = B              (5.3 - 4)

式中A,B为常数。条件(5.3 - 4)给出未知函数在区间a≤x≤b的每个端点(边界点)的值，称为**边界条件**。

方程(5,3-1)和条件(5,3-4)构成**边值问题**。

边界条件的形式多种多样，最常遇到的形式为

                   (5.3 - 5)



式中、、为常数，为边界点。



若β=0，α≠0称为第**一类边界条件**；β≠0,α=0，称为**第二类边界条件**；α≠0,β≠0，则称为**第三类边界条件**。

若A≠0，称为**非齐次边界条件**，A=0，称为**齐次边界条件**。

解边值问题可用待定常数法，类似于解初值问题。此外也可用Green函数方法(详见第八章)

与初值问题不同的是，边值问题可能有解也可能无解;如果有解，可能是唯一解也可能不是唯一的(详见[例5.3 - 1]，[例5.3 - 2])。当然，知道在什么条件下边值问题有唯一解、无解或有无穷多解是很重要的。在最一般的情况下讨论这个问题是很困难的。

[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap5/5-3.htm#top#top)

**三、本征值问题**

在齐次方程的边值问题中，若方程中含有参数λ，往往只有在λ取某些特定的值时，边值问题才有非零解。这特定的λ值称为**本征值**，相应的非零解称为**本征函数**。由于方程和边界条件的线性性，本征函数可差一任意的常数因子。在具体问题中，适合问题的本征值可以有很多个，甚至无穷多个。所有本征值的集合，称为**本征值谱**；所有线性无关本征函数的集合称为**本征函数系**。

求本征值谱和本征函数系的问题称为**本征问题**。

[例5.3 – 1]\* 解边值问题

 y″+y=x，0＜x＜π                                           (5.3-6)

 y(0)=2,y(π)=1                                                    (5.3-7)

解：与(5.3-11)相应的齐次方程的一般解为

yh =c1 cosx+c2 sinx

可以看出非齐次方程(5.3-6)的一个特解为yp=x，因此方程(5.3-6)的通解为

y = c1 cosx + c2 sinx + x                                    (5.3-8)

利用边界条件(5.3-7)

 y(0)=c1 = 2，c1 =2

 y(π)= -c1 +π=1,c1 =π-1

显然，两个边界条件并不相容，因为常数c1 不能同时为2和π-1。因此，边值问题(5.3-6)，(5.3-7)无解。

若方程不变，边界条件(5.3-7)改为

y(0)=2,y(π)=π-2                                                   (5.3-9)

把通解(5.3-13)代入边界条件(5.3-9)

 y(0) = c1 = 2,c1 = 2

y(π= -c1 +π=π-2,c1 = 2

这样，从边界条件(5.3-9)可以确定c1 = 2，而常数c2 可以任意。因此边值问题(5.3-6)，(5.3-7)有无数多解

 y(x)=2cosx + c2 sinx + x

[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap5/5-3.htm#top#top)

[例5.3 – 2] 边值问题

为参数                    (5.3 - 10)

                                                 (5.3 - 11)

(1) 若问题有非零解，则λ为实数；

(2) 若λ=λn，相应的解为yn(x),λ=λm相应的解为y m(x)，证明：

  

即相应于不同本征值的本征函数相互正交；

(3) 求该问题的本征值与本征函数；

(4) 若定义在上的已知函数可以按本征函数系｛｝展开即，确定系数 ；

解：(1) 考虑问题(5.3 - 10)、(5.3 -11)的复共轭

                                                     (5.3 - 12)

  ,                                            (5.3 - 13)

作×(5.3 - 10) -  ×(5.3 - 12),并对变量x从0到积分，

  

由于

                              (5.3 - 14)

并考虑到边界条件(5.3 - 11)，(5,3 - 13)



有



考虑到有非零解 ，所以。即若问题有非零解，λ为实数。

实际上，还可以证明本征值λ还是非负的。由(5.3 - 10)

λy  = - y″

上式的两边乘 ，并对自变量积分，有



因此，λ≥0。

(2)  根据题意有

  ，  

  ，  .

类似于(1)作



由于





故有

  

由于,所以

  (或   )

(3) 考虑方程(5.3 - 10)在λ不同取值时解的形式不同，但从(1)已知λ非负

1) λ=0时，方程(5.3 - 10)的通解为

y(x) = c1 x + c2

利用边界条件(5.3 - 11)

 y(0) = c2= 0 ,  y(l) = c1 + c2 =  0

可以解得c1 = c2 = 0 ，即λ=0时，问题只有零解，或说，为得到问题的非零解，λ≠0。

2) λ> 0时，方程(5.3 - 10)的通解为

  

利用边界条件(5.3 - 11)



 =  0

上述第一个方程给出c1 = 0，代入第二个方程，为要得到非零解，应使c2 ≠ 0，故

  ,    , n = ±1，±2，…

因此，对每一个确定的λn，问题有无穷多个解

 

不过这些解仅差一任意的常数因子，彼此都是线性相关的，而且



只要考虑n取正整数的情况。因此，问题(5.3 - 10)、(5.3 - 11)的本征值谱和相应的本征函数系为：



    ，n = 1,2,…                     (5.3 - 15)

不难验证，对本征函数有

                          (5.3 - 16)

即相应于不同本征值的本征函数确实是正交的。



称为本征函数的模方。

利用Kronecker符号



(5.3-16)式可表示为

                                 (5.3 - 17)

称为本征函数的正交归一关系。

(4)展开定理



在上式两边以 ,并对自变量x从0到进行积分，交换积分号与求和号并利用正交归一关系，得

                                     (5.3 - 18)

如果保持方程(5.3-10)形式不变，依次把边界条件改变为

;                                            (5.3 - 19)

;                                             (5.3 - 20)

;                                             (5.3 - 21)

仿照[例5.3 - 3]解有关的问题。

这里我们不再重复这些过程，把它留读者作为练习。仅给出一些重要的结果：

问题(5.3 - 10)、(5.3 - 19)的本征值谱和本征函数系为



  , n = 0,1,2,…

正交归一关系

  (5.3 - 22)

问题(5.3 - 10)，（5.3 - 20）的本征值谱和本征函数系为

  n=0,1,…        (5.3 - 23)

正交归一关系

                  （5.3 - 24）

问题(5.3-10)，(5.3-21)的本征值谱与本征函数系为



  , n = 0,1,…

正交归一关系为

                  (5.3 - 25)

[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap5/5-3.htm#top#top)

[例5.3 - 3]\* 解边值问题

，ω为参数             (5.3 - 26)

                                               (5.3 - 27)

解 方程(5.3 - 26)的通解为



利用边界条件(5.3 - 27)





解上列关於c1 ,c2 的方程组，c1 = 0，因此



如果,即(n=0,1,2,…)



即只要是不等于±nπ(n=0,1,2,…)的任何实数，有本征函数



如果保持方程(5.3-37)不变，自变量0＜x＜π边界条件改为

 y′(0)+2y′(π)=0, y(π) = 0                             (5.3-28)

将方程的通解



代入(5.3-28)，有





解上列关于c1 ,c2 的方程组，为使方程有非零解，必须有

                         (5.3 - 29)

从而得到

                                                       (5.3 - 30)

只有当ω取复数时才有可能。即ω取复数，原问题才可能有非零解。如果ω取实数，(5.3 - 30)式不成立，即(5.3 - 29)不成立，原问题只可能有零解。

由上讨论我们看到，即使对二阶常系数含参数的齐次常微分方程，甚至同一方程在不同的边界条件下，解的情况也是千差万别。因此，我们不一般地讨论本征值问题，只讨论那些最常遇到的，在数学物理中有广泛应用的本征问题，这就是sturm - Lieuville问题，它们具有许多共同的良好的特性。

[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap5/5-3.htm#top#top)

四、 例题

[[例5.3–1]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap5/5-3.htm#[例5.3 – 1]*#[例5.3 – 1]*) **,**[[例5.3–2]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap5/5-3.htm#[例5.3 – 2]#[例5.3 – 2]),[[例5.3–3]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap5/5-3.htm#[例5.3 - 3]*#[例5.3 - 3]*)