§7.1 Fourier级数

[**一、周期函数的Fourier级数展开**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-1.htm#一、周期函数的Fourier级数展开#一、周期函数的Fourier级数展开)

[**二、Fourier正弦级数和Fourier余弦级数**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-1.htm#二、Fourier正弦级数和Fourier余弦级数#二、Fourier正弦级数和Fourier余弦级数)

[三、定义在一定区间上函数的Fourier级数展开](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-1.htm#三、定义在一定区间上函数的Fourier级数展开#三、定义在一定区间上函数的Fourier级数展开)

[**四、二重Fourier级数**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-1.htm#四、二重Fourier级数#四、二重Fourier级数)

[**五、例题**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-1.htm#五、例题#五、例题)



**一、周期函数的Fourier级数展开**

**1. 周期函数**

一个分段连续的函数，如果存在非零的常数，使得对于所有的满足，则称是以为周期的周期函数。



**2．以2π为周期的函数的Fourier级数**

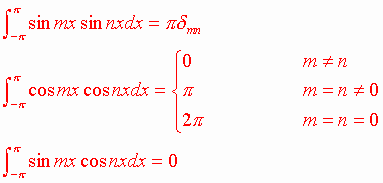
函数族

｛｝，｛｝，n＝0，1，2…  (7.1 - 1)



在[－π，π]上形成正交函数系，即

   (7.1 - 2)



利用上列正交归一关系，可以将周期为2π的函数展开为下列形式的级数：

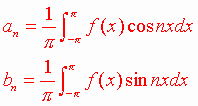


   (7.1 - 3)



其中

                 (7.1 - 4)



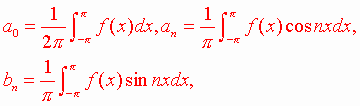
级数(7.1 - 3)称为周期函数的Fourier级数，(已作为在n＝0时的特例包含于 式中)、称为Fourier系数。



**注意**：有时级数表示为

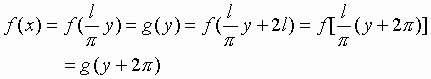


则



**3．以2l为周期的函数的Fourier级数**

对于周期为的函数，只需要作变量代换，则可化为周期是的函数



已是以2π为周期的函数。因此，有



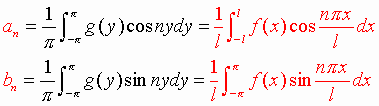
即

     (7.1 - 5)



其中Fourier系数

  (7.1 - 6)



**4．Dirichlet定理**

以上已在形式上把一个周期函数展开为Fourier级数。重要的问题在于这样作出的级数是否收敛，即便收敛，是否收敛于。这个问题已由Dirichlet定理解决(证明见B．И；斯米尔诺夫著《高等数学教程》第二卷第二分册，第六章143，150；或Г·M·菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第三卷分册§66。)



定理 一个周期函数，若满足Dirichlet条件，即在每个周期内处处连续或只有有限个第一类间断点，并且在该区间内分段单调，则Fourier级数



（1）在所有连续点上收敛于；



（2）在间断点上收敛于的左右极限的平均值



；



（3）在区间的两端，等于



[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-1.htm#top#top)



**二、Fourier正弦级数和Fourier余弦级数**

1．周期奇函数与正弦级数

当周期函数又是奇函数，即时，(7.1 - 6)中的系数由于被积函数是奇函数而为零，因此，级数(7.1 - 5)中没有余弦项，即



                  (7.1 - 7)



故称为**Fourier正弦级数**，其中的系数也由(7.1 - 6)化为



                (7.1 - 8)



2．周期偶函数与余弦级数

当周期函数又是偶函数，即，(7.1 - 6)中的系数由于被积函数是奇函数而为零，级数(7.1 - 5)中没有正弦项，即



                (7.1 - 9)



故称为**Fourier余弦级数**，其中的系数为



                (7.1 - 10)





[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-1.htm#top#top)



三、定义在一定区间上函数的Fourier级数展开

**1．定义在上的函数**



一个定义在－＜x＜中的函数，可以看成是以2为周期的函数在区间 中的一段，即可以把定义在 中的函数以2为周期开拓成定义在－∞＜x＜∞上的周期函数，从而可按(7.1 - 5)及(7.1 - 6)式展开为Fourier级数。



在 上，有



＝



＝                 (7.1 - 11)



这里的Fourier级数展开也可以看成是按[例5.4 – 6]中本征问题(5.4 - 38)和(5.4 - 39)的本征函数系的展开，所不同的仅是这里n＝0的系数单独列出，而那里n＝0的系数没有单独列出。

**2．定义在上的函数**



对定义在0＜x＜上的函数，亦可开拓为周期函数，由于开拓的方法不同，结果也不同。下面介绍常用的两种开拓法



（1）奇开拓[(动画)](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/qikai.ppt)

将先开拓到上，成为定义在上的奇函数G(x)。



再以2l为周期将G(x)开拓成定义在(－∞，∞)上的周期函数。 为定义在(－∞，∞)上的周期为2l的函数，而且[(图7.1)](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/t7.1.jpg)，可展开为正弦级数(7.1 - 7)及(7.1 - 8)式。在(0，)上，有



                 (7.1 - 12)



上述级数展开，相当于定义在上的函数按[例5.3 – 3]中本征问题(5.3 - 17)和(5.3 - 18)的本征函数系的展开。由于级数之和在x＝0，x＝处为零，因此，只有当g(0)＝g()＝0时，级数之和才给出函数在该点的值。



（2）偶开拓[(动画)](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/eukai.ppt)

将先开拓到(－，0)，成为定义在上的偶函数G(x)。



再以2为周期把G(x)开拓成定义在(－∞，∞)上的周期函数。



已是定义在(－∞，∞)周期为2l的函数，而且([图7.2](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/t7.2.jpg))，可展开为余弦级数(7.1 - 9)及(7.1 - 10)式。在(0，l)上，有



                 (7.1 - 13)



上述级数展开相当于定义在上的函数按本征问题(5.3 - 17)和(5.3 - 28)的本征函数系的展开。上述级数在逐项求导后的和函数在x＝0，x＝处为0，因此，对于g′(0)＝g′()＝0的函数，必须展开为余弦级数。



注意：定义在上的函数，由于开拓的方法不同，既可以展开为正弦级数(7.1 - 12)，也可以展开为余弦级数(7.1 - 13)。但是，在上这两个级数都代表，在之外，这两个级数完全不同。这并没有什么关系，因为只定义在上，在外并无定义。在实际问题中(参阅第八章)，往往对函数在边界点x＝0，x＝处的值提出一定的要求或限制(通常称为边界条件)，这时函数的展开就是确定的了。



如上所述，若 要求g(0)＝g()＝0，只能展开为正弦级数(7.1 - 12)；若要求g′(0)＝g′()＝0，只能展开为余弦级数(7.1 - 13)。



**[例7 .1 – 1]**

将定义在上的函数展开为Fourier余弦级数。

解  根据题意，应将上的函数开拓为(－∞，∞)上周期为2的偶函数(如[图](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/t7.3.htm) [7.3](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/t7.3.jpg)所示)。根据(7.1 - 13)式，有







 ,－∞＜x＜∞

在 正是。所以

   0＜x＜

类似地，也可将定义在 上的函数展开为正弦级数，不难得出

      0＜x＜

[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-1.htm#top#top)



**四、二重Fourier级数**

对多个自变量的函数可作多重Fourier级数展开。方法是先考虑一个自变量，把其它的自变量看成参数，用单自变量函数的方法作展开。不过这时Fourier系数不再是常数而是与剩下的那些参量有关。然后，再把这些系数看作某一个变量的函数，其它变量当作参量，再作展开，依次进行下去，直到对所有的自变量均已作了展开为止。

下面通过具体问题例子[例7.1 – 2]说明二重Fourier级数的展开方法。

[例7.1 – 2]

将函数，在内展开为二重Fourier级数。

解 ：将y看作参量，是含参量y的关于变量x的函数，而且



根据(7.1 - 7)可以将展开为关于x的正弦级数，不过展开系数与y有关，即

             (7.1 - 14)

又因为



＝－

可以把展开为关于y的正弦级数，即



                  (7.1 - 15)

把上式代入(7.1 - 14)，得





所以，在－π＜x＜π，－π＜y＜π内，有



[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-1.htm#top#top)



**五、例题**

[[例7.1 - 1]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-1.htm#[例7 .1 – 1]#[例7 .1 – 1])

[[例7.1 - 2]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-1.htm#[例7.1 – 2]#[例7.1 – 2])