§7.3 δ函数和阶跃函数

[**一、奇异函数**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-3.htm#一、奇异函数#一、奇异函数)****

[**二、δ函数**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-3.htm#二、δ函数#二、δ函数)

[**1. δ函数的物理含义和定义**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-3.htm#1. δ函数的物理含义和定义#1. δ函数的物理含义和定义)

[**2. δ函数的导数**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-3.htm#2. δ函数的导数#2. δ函数的导数)

[**3. δ函数的表示式**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-3.htm#3. δ函数的表示式#3. δ函数的表示式)

[**4. 宗量为函数的δ函数**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-3.htm#4. 宗量为函数的δ函数#4. 宗量为函数的δ函数)

[**5. 多个自变量的δ函数**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-3.htm#5. 多个自变量的δ函数#5. 多个自变量的δ函数)

[**三、阶跃函数**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-3.htm#三、阶跃函数#三、阶跃函数)

[**1. 阶跃函数及其作用**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-3.htm#1. 阶跃函数及其作用#1. 阶跃函数及其作用)

[**2. 阶跃函数与δ函数的关系**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-3.htm#2. 阶跃函数与δ函数的关系#2. 阶跃函数与δ函数的关系)

[**3.\* 间断函数的导数**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-3.htm#3.* 间断函数的导数#3.* 间断函数的导数)

[**4. 阶跃函数的Fourier变换**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-3.htm#4. 阶跃函数的Fourier变换#4. 阶跃函数的Fourier变换)

[**5.\* 宗量为x的函数的阶跃函数**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-3.htm#5.* 宗量为x的函数的阶跃函数#5.* 宗量为x的函数的阶跃函数)

[**四、例题**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-3.htm#四、例题#四、例题)



**一、奇异函数**

在经典数学分析中，研究的都是连续函数。但是，在现实世界中经常遇到不连续的情况，而且在很多物理问题中，为简化问题的数学处理，也常会遇到一些不连续的函数。为处理这类现象和问题，物理学家引入一些符号(如δ函数、阶跃函数)，并作形式上的数学运算，往往能得出正确的结果。然而，又无法赋予它们经典数学分析中的函数意义。于是，就把它们称为奇异函数。1945年，L·Schwartz首创“分布理论”，推广了函数的概念，建立起广义函数理论，从而为δ函数、阶跃函数奠定了严密的数学基础。

我们不从广义函数理论来研究δ函数和阶跃函数[建立在广义函数理论上的讨论可参阅〔13〕第五章，或Rem.P.Kanwal《Generalized Functions》(1983) ，或И．М盖尔芳特和Г．М希洛夫著《广义函数》第一卷，科学出版社(1984)。]只是通过具体例子引入它们的定义，介绍其运算性质，以便于处理问题与简化运算。

[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-3.htm#top#top)



**二、δ函数**

**1. δ函数的物理含义和定义**

在物理学和电工学中，δ函数常用于表示点源和脉冲，有着广泛的应用。

（1）问题的缘起

物理学中经常使用质点、点电荷、瞬时力等抽象概念。只要这些点源的性质和作用弄清楚了，通过叠加原理，往往能得出一般的面分布或体分布的性质。

当考虑点源的密度分布时，如点质量密度，点电荷密度便失去意义，无法表示。例如，考虑电荷沿x轴分布，在点置一电量为q的点电荷。线电荷密度通常义为



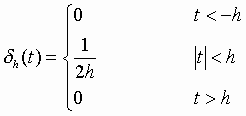
当∈Δx，Δx→0时，由于Δq≠0，→∞; 在x≠的各点，由于没有电荷，Δq＝0，＝0。因此，在经典的数学分析中，电荷密度函数已无意义。然而，总电荷



有确定的值。

再考虑脉冲函数([图7.4)](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/t7.4.jpg)

            (7.3 - 1)



对t的积分在h→0时的值为



若不经过积分运算就取极限，则



（2）δ函数的定义

引入符号函数δ为定义在(－∞，∞)上并有下列性质的函数：

        (7.3 - 2)



                   (7.3 - 3)



前述点电荷的线密度可以成功地用δ函数表示为



                   (7.3 - 4)







（3）δ函数在运算中的性质（第二定义）

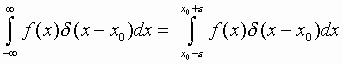
             (7.3 - 5)



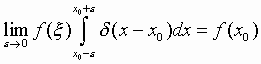
这里是任何一个在连续的函数。人们用定义(7.3 - 2)和(7.3- 3)，并把δ函数看成经典意义下的普通函数，对上式作了推证。







＝



为中的一点。



从定义(7.3 - 2)可以看出，除在处为无穷大外，处处为零，这当然不是普通意义下的函数，是奇异的。从经典数学分析看，(7.3 - 2)与(7.3 - 3)也是矛盾的，因为仅在有限个点取值不为零的函数的积分仍然为零，不可能是一个有限的非零数。因此，对(7.3 - 5)的推证仅仅是形式上的。然而，(7.3 - 5)式与现代广义函数理论是一致的。不考虑广义函数的理论基础，可以把(7.3 - 5)式作为δ函数的定义。即δ函数与任意连续函数f(x)的乘积对自变量的积分，其积分值等于该连续函数在δ函数的宗量为零时自变量所取的那点()的函数值()。



当＝0时，(7.3 - 5)式变为



                 (7.3 - 6)



在(7.3 - 5)和(7.3 - 6)中，积分沿整个实轴。实际上，只要是包含了(或0)的任意区间均可。



[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-3.htm#top#top)****

**2.** **δ函数的导数**

δ函数的导数定义为对任何有连续导数的函数f(x)，有

(7.3 - 7)



一般地，δ函数的n阶导数 (x)定义为







＝                         (7.3 - 8)



式中是任意一个在x＝0有n阶连续导数的函数。



从经典的角度看，δ函数的导数也是没有意义的。(7.3 - 7)和(7.3 - 8)只有从广义函数的观点才可理解。这里我们可以将其作为定义(一种运算规则)来接受。(7.3- 5)和(7.3 - 8)反映出δ函数的筛选(选择)性质，在实践中有重要的应用。

δ函数及其导函数不是通常意义下的函数，没有通常意义下的函数值，只在积分运算中才有意义（作用）。在解决具体的数学物理问题时，δ函数仅在中间过程中出现，通常在最后结果中消失；或者仅以与一个“相当好的函数”(这里“相当好的函数”指具有足够阶连续导数的函数，在广义函数理论中，要求其无穷阶连续可导。)的乘积的积分出现。因此，不必回答δ函数是什么，只要指出对相当好的函数的积分是什么。

在证明一些最常用的含有δ函数的公式和关系时，只要它们与这些“相当好的函数”的乘积的积分结果相同，就认为关系式成立。

**3. δ函数的表示式**

（1）δ函数的积分表示

对δ函数作傅氏变换，有



＝                      (7.3 - 9)



从而得到δ函数的Fourier积分表示

(7.3 - 10)



若＝0，则有



，



          (7.3 - 11)



δ函数的积分表示在量子力学中有重要的应用。

利用δ函数的积分表示，只要作变量代换k→－k，不难得出δ函为偶函数的性质，即

                        (7.3 - 12)



                   (7.3 - 13)



引用卷积的概念，我们可以把任意连续函数表示成与δ函数的卷积形式。



               (7.3 - 14)



（2）δ函数的级数表示

利用本征函数的展开定理，



＝



＝



与(7.3 - 14)对照，可见

(7.3 - 15)



或

             (7.3 - 16)



式中｛｝为S - L问题的本征函数系，Ni为相应的本征函数模平方。这样用δ函数表示了本征函数系的完备关系。



δ函数可以用不同本征问题的本征函数系表示，从而得到不同的级数表示式。

[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-3.htm#top#top)

**4. 宗量为函数的δ函数**

讨论宗量为的δ函数。为x的某个连续函数，



根据δ函数的定义

       (7.3 - 17)



若，并且只有单根(i＝1，2，…k)，则有



         (7.3 - 18)



并且

      (7.3 - 19)



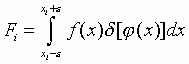
上式的左边与一个“相当好的函数”相乘并对整个实轴积分



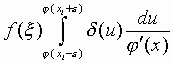




把全部积分区间分成一些间隔，使每一间隔(ε＞0)内只含有一个根。对任意一个间隔，有



＝



这里已作了代换u＝，是内的一点。当ε→0时，→，并考虑到＞0时，＞；当＜0时，＜。因此，积分值







对全部积分区域，有





但是





因此，(7.3 - 19)成立.可以把它作为一个公式。

利用(7.3 - 19)可以得出一些重要的含δ函数的关系，如

      (7.3 - 20)



在上式中令a→0，得

                     (7.3 - 21)



又如对，为连续函数，且＝0，有单零点，(n为整数)。因此



     (7.3 - 22)



根据上式的图象([图7.5](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/t7.5.jpg))，又称为Dirac梳。



**[****例7.3 -1]** 求积分



**解**  利用δ函数的积分表示和运算性质

****



[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-3.htm#top#top)****

**5. 多个自变量的δ函数**

前面关于δ函数的定义，很容易推广到多个自变量的情形。以三维空间为例，对任意连续函数，根据(7.3- 6)式，应有



＝                        (7.3 - 23)



而



＝



＝



＝           (7.3 - 24)



比较(7.３ - 23)与(7.3 - 24)，得

        (7.3 - 25)



即三维δ函数可看作三个一维δ函数的乘积。

如果采用球坐标系，三维δ函数还可以表示为

                (7.3 - 26)



对于平面极坐标系

             (7.3 - 27)



利用δ函数的积分表示式(7.3 - 11)，得

                  （7.3 - 28)





[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-3.htm#top#top)



**三、阶跃函数**

**1. 阶跃函数及其作用**

（1）定义

单位阶跃函数(或称Heaviside函数)([图7.6](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/t7.6.jpg))为

           (7.3 - 29)





（2）应用

利用阶跃函数可以很方便地表示出许多分段定义的函数或对函数作切割。如矩形函数

        （7.3 - 30)



其函数图形如图([7.7a](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/t7.7.jpg))所示。f(x)可以看成由两个单位阶跃函数构成([图7.7b](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/t7.7.jpg))，即

               (7.3 - 31)



又如对余弦函数cosx ，若只考虑其在(0，π)中的一段([图7.8](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/t7.8.jpg))，有





可用阶跃函数来切断





在实际问题中，常常遇到某种扰动f(t)从t0 时刻开始作用于系统，在稍后某个时刻t1停止作用，利用阶跃函数可以很方便地表明这种作用的施加或撤除。



许多变化过程中的临界点(突变点)，也可用阶跃函数表示。许多分段定义的函数利用阶跃函数可以统一地表示为定义在整个数轴上的函数，大大简化运算。（详见《阶跃函数函数在积分变换中的应用》束仁贵，《大学物理》1993年第12卷11期）



**[例7.3 – 2]** 利用阶跃函数表示下列分段函数([图7.9](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/t7.9.jpg))



**解** 其中1＜x＜2中的一段，由



表示。2＜x＜4中的一段，由



表示。所以

＋



    ＝－＋

[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-3.htm#top#top)****

**2. 阶跃函数与δ函数的关系**

 利用阶跃函数，图7.4所示的脉冲函数(7.3 - 1)可表示为



考虑





上式右边的积分为1。被积函数在－h＜t＜h内值很大，并且在h→0时趋于∞，在t＞h或t＜－h范围内被积函数为零。若将右边积分后取极限的过程表示成，直接积分并根据阶跃函数的定义(７.3 . 29)，积分值也是1。因此，完全具有δ函数的含义，即



                        (7.3 - 32)



实际上，可以证明与 在积分运算中的作用是相同的。取为任意大于零的实数，对任意连续可导的函数，有







而



因此，(7.2 - 32)式成立。

[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-3.htm#top#top)

**3.\* 间断函数的导数**

(7．3 - 32)式与广义函数理论中的结果完全一致。从中可以看出间断函数在广义函数理论中可以求导，称为广义导数。

利用(7.3 - 32)可以得到一般的间断函数的导数表示式。

设为在 有第一类间断点的连续函数，在 的跃度为([图7.10](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/t7.10.jpg))，在 和 有连续的导数，用表示。设



               (7.3 - 33)



则以为可去间断点，其导数与在两边的导数完全一致。



因此



或

              (7.3 - 34)



式中为通常意义下的导数，为间断函数的导数，是广义导数。



(7.3 - 34)式与广义函数理论中的结果完全一致。可以看出在通常意义下于某点不可导的函数，在广义函数理论中都是可导的，仅不过在间断点多了一些奇异性而已。

[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-3.htm#top#top)

**4.** **阶跃函数的Fourier变换**

根据定义(7.2- 19)，有





＝



该积分在通常意义下不存在。为避免这一困难，通常乘上一个收敛因子，即考虑函数，其中ε为一小正数。当ε→0时，有



               (7.3 - 35)



因此，可通过下列极限过程求阶跃函数的傅氏变换。即定义

＝



＝                 (7.3 - 36)



积分后，取极限即得

               (7.3 - 37)



若a＝0，有

                   (7.3 - 38)



更方便的是利用(7.3 - 32)与傅氏变换的性质(7.2 - 47)





因此，





与(7.3 - 38)完全一致。类似地，可得(7.3 - 37)式。

[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-3.htm#top#top)

**5.\* 宗量为x的函数的阶跃函数**

讨论宗量为的阶跃函数，根据阶跃函数的定义(7.3 - 29)



         (7.3 - 39)



例如





故

                       (7.3 - 40)



又如



故

                      (7.3 - 41)



**四、例题**

[[例7.3 - 1]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-3.htm#[例7.3 -1]#[例7.3 -1])

[[例7.3 - 2]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-3.htm#[例7.3 – 2]#[例7.3 – 2])