§7.2 Fourier积分和Fourier变换

[**一、复数形式的Fourier级数**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#一、复数形式的Fourier级数#一、复数形式的Fourier级数)

[**二、Fourier积分**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#二、Fourier积分#二、Fourier积分)

[**1. 从Fourier级数到Fourier 积分**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#1. 从Fourier级数到Fourier 积分#1. 从Fourier级数到Fourier 积分)

[**2. Fourier积分存在的条件**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#2. Fourier积分存在的条件#2. Fourier积分存在的条件)****

**3.\* Fourier余弦积分和Fourier正弦积分**

[**三、Fourier变换及其性质**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#三、Fourier变换及其性质#三、Fourier变换及其性质)

[**1. Fourier变换**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#1. Fourier变换#1. Fourier变换)

**2.\*Fourier余弦变换和Fourier正弦变换(略)**

[**3. 对称形式傅氏变换间的关系**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#3. 对称形式傅氏变换间的关系#3. 对称形式傅氏变换间的关系)

[**4. Fourier变换的性质**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#4. Fourier变换的性质#4. Fourier变换的性质)

[**5. 多重Fourier变换**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#5. 多重Fourier变换#5. 多重Fourier变换)

[**四、例题**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#四、例题#四、例题)



**一、复数形式的Fourier级数**

根据Euler公式，有

＝             (7.2 - 1)



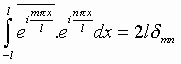
＝              (7.2 - 2)



代替 ，｛｝ (n＝0，1，2…)，可以采用｛｝ (n＝0，±1，…)作为基本函数族。容易验证



                (7.2 - 3)

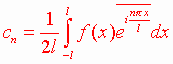


现在，可以将周期为2l的函数f(x)展开为复数形式的 Fourier 级数

                    （7.2 - 4)



                  （7.2 - 5)



可以证明(7. - 4)、(7,2 - 5)式与(7.1 - 5)、(7.1 - 6)式完全等价，即从(7.2 - 4)、(7.2 - 5)式可得到(7.1 - 5)、(7.1 - 6)式。

反之，也可以从实数形式 Fourier 数级(7.1 - 5)、(7.1 - 6)式，直接导出复数形式的Fourier 级数(7.2 - 4)、(7.2 - 5)式。

[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#top#top)



**二、Fourier积分**

**1.** **从Fourier级数到Fourier 积分**

定义在(－∞，∞)上的非周期函数，不能用上述 Fourier级数来表示。然而，可以设想这个函数的周期为无穷大，即→∞，这样可以从(7.2 - 4)、(7.2 - 5)式出发，作极限过渡，形式上得到非周期函数的表达式。



令得



使→∞，则Δk→dk，k为连续变数，∑→∫，形式上可得



       （7.2 - 6）



               (7.2 - 7)



(7．2 - 6)称为函数f(x)的Fourier积分表示式，(7.2 - 7)称为的 Fourier变换式。

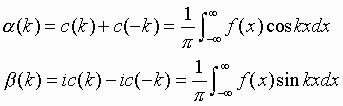


上述复数形式的Fourier积分可化为实数形式的 Fourier 积分

      (7.2 - 8)



    (7.2 - 9)



[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#top#top)



**2. Fourier****积分存在的条件**

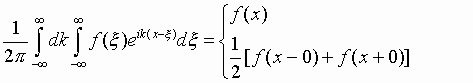
如果在(－∞，∞)上满足 Dirichlet条件(只有有限个极值点，只有有限个第一类间断点)且绝对可积，即



                        (7.2 - 10)



则



                                   (7.2 - 11)

**3.\* Fourier余弦积分和Fourier正弦积分**

[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#top#top)



**三、Fourier变换及其性质**

**1. Fourier****变换**

(7．2 - 7)，(7.2 - 6)式可以看成是与之间的一种积分变换关系。(7.2 - 7)表示从得到，称为的Fourier变换式，简称傅氏换式；(7.2 - 6)表示从得到，是Fourier变换的逆变换式，简称傅氏反演。又称为的象函数，称为象的原函数。



(7．2 - 6)，(7.2 - 7)式可以表示成对称的形式，即

               （7.2 - 12)



               （7.2 - 13)



注意，变换对(7.2 - 12)与(7.2 - 13)在积分核的指数部分差一负号。以后本书讲到Fourier变换，除特别指明外，均采用对称的形式。

通常又将上两式简记为

                       (7.2 - 14)



                         (7.2 - 15)



上述变换表明，已知，可以确定；反之，知道了，也完全可以确定。



在量子力学中，通常把记作，作为以坐标为变量的描述量子体系状况的函数(所谓坐标表象波函数。为简便起见，先不考虑体系状况随时间的变化)。又将k看作波数，由于p＝k，因此



               (7.2 - 16)



               (7.2 - 17)



看作以动量为变量的描述同一量子体系状态的函数(即动量表象波函数)。由或描述量子体系状态，所包含的信息是完全等价的。(7.2 -16)式和(7.2 - 17)式表明了坐标表象与动量表象波函数的变换关系。



**2.\*Fourier余弦变换和Fourier正弦变换(略)**

[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#top#top)



**3. 对称形式傅氏变换间的关系**

采用对称形式，可以得出 一个重要的关系式。在(7.2 - 12)式中，若将k与x对换，并且，k→－k，可得

若C(k)＝F｛｝，则F｛C(x)｝＝f(－k)     (7.2 - 18)



**[****例7.2 – 1]**求函数 的Fourier变换。

解:

(7.2 - 19)

利用对称形式傅氏变换的关系(7.2 - 18)，从上式可得

                                          (7.2 - 20)

若由傅氏变换的定义(7.2 - 13)，根据§4.2的方法化为围道积分，利用留数定理直接计算亦可得到同样的结果(自行练习)。

[例7.2 – 2]

求函数(a＞0)的Fourier变换。

解：

                (7.2 - 21)

根据(7.2 - 18)式，亦可得

                                        (7.2 - 22)



[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#top#top)



**4. Fourier****变换的性质**

下面介绍Fourier变换的一些主要性质，并设已知。



(1) a、b为常数



                                          (7.2 - 23)

证明：由定义式

=



=



=



(2)                      (7.2 - 24)



证明：



==



(3)                        (7.2 - 25)



证明：当a>0时，令，有



=



=



当a<0时，令，有



==



所以



(4) ，x0为实常数       (7.2 - 26)



证明：



==



[例7.2 – 3]

求  ，x0 ＞0

解:因为



1) 利用(7.2 - 21)和(7.2 - 25)，可得



2) 利用 Fourier变换的定义和留数定理直接计算亦可得到同样的结果。

3) 根据对称形式傅氏变换的关系(7.2 - 14)

[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#top#top)



[例7.2 – 4]求   a＞0，b＞0

解:



利用上例的结果和性质(7.2 - 24)，可得



[返回页首](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#top#top)

[例7.2 – 5]求

解: 



利用(7.2 - 20)和性质(7.2 - 26)，可直接得到



[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#top#top)



(5) 若｜x｜→∞，→0，则



证明：



=



=



同理



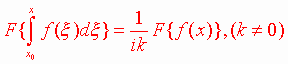
一般地，若｜x｜→∞，，…，→0，则



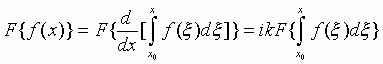
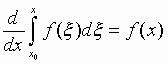
      (7.2 - 27)



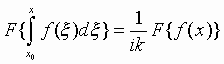
(6)              (7.2 - 28)



证明：



所以



(7)             (7.2 - 29)



证明：

=



(8) 若定义与g(x)的折积(或卷积)为



                (7.2 - 30)



且，则



 (7.2 - 31)



证明：根据折积的定义，并作变量代换，则



=



=



=



==



[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#top#top)



[例7.2 – 6]求函数(a＞0)的傅氏变换。

**解:**

****

****

(7.2 - 32)

如利用性质(7)，也可得到同样的结果.

[返回页首](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#top#top)

[例7.2 – 7]求   a＞0

解:



[返回页首](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#top#top)

[例7.2 – 8]求。

解:







[返回页首](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#top#top)

[例7.2 – 9]已知，求

(1) ；(2) 。

解:

(1) 因为



利用性质(1)(7.2 - 23)，性质(4)(7.2 - 26)和已知条件，即得

   (7.2 - 34)

(2) 因为



根据性质(6)，有



         （7.2 – 35）

[返回页首](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#top#top)

[例7.2 – 10]

利用傅氏变换将下列未知函数的微分方程化为未知函数的象函数的方程，并求解

， 已知为已知函数，b＞0

解:

令，对方程的两边作傅氏变换



未知函数的微分方程已化为未知函数的象函数的代数方程，可以解得



对象函数作反演，并利用＝和性质(8)







[例7.2 – 12]

解定解问题

解：设；



方程与初始条件做**Fourier变换，得**



解得：

[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#top#top)

**5.** **多重Fourier变换**

类似于多重Fourier级数展开，反复利用(7.2 - 6)、(7.2 - 7)式，可以将Fourier积分变换推广到多个自变量的情况。对三维空间，有

                  (7.2 - 36)



             (7.2 - 37)



其中.



同样，也可以把多重Fourier变换表示成对称的形式，即

             (7.2 - 38)



             (7.2 - 39)



[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#top#top)



四、**例题**

[[例7.2 – 1]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#[例7.2 – 1]#[例7.2 – 1]) ,[[例7.2 – 2]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#[例7.2 – 2]#[例7.2 – 2]) ,[[例7.2 – 3]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#[例7.2 – 3]#[例7.2 – 3]) ,[[例7.2 – 4]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#[例7.2 – 4]#[例7.2 – 4])

[[例7.2 – 5]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#[例7.2 – 5]#[例7.2 – 5]),[[例7.2 – 6]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#[例7.2 – 6]#[例7.2 – 6]),[[例7.2 – 7]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#[例7.2 – 7]#[例7.2 – 7]),[[例7.2 – 8]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#[例7.2 – 8]#[例7.2 – 8])

[[例7.2 – 9]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#[例7.2 – 9]#[例7.2 – 9]),[[例7.2 – 10]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-2.htm#[例7.2 – 10]#[例7.2 – 10])