§7.4 Laplace变换

[**一．Laplace变换的一般概念**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#一．Laplace变换的一般概念#一．Laplace变换的一般概念)

[**1.Laplace变换**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#1.Laplace变换#1.Laplace变换)

[**2.拉氏变换存在的充分条件**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#2.拉氏变换存在的充分条件#2.拉氏变换存在的充分条件)

[**3.几个初等函数的拉氏换式**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#3.几个初等函数的拉氏换式#3.几个初等函数的拉氏换式)

[**二、Laplace变换的性质**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#二、Laplace变换的性质#二、Laplace变换的性质)

[**三、Laplace变换的应用 Laplace反演**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#三、Laplace变换的应用 Laplace反演#三、Laplace变换的应用 Laplace反演)

[**1. 解线性常微分方程的初值问题**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#1. 解线性常微分方程的初值问题#1. 解线性常微分方程的初值问题)

[**2. 拉氏反演**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#2. 拉氏反演#2. 拉氏反演)

[**3\* 拉氏变换的其它应用**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#3* 拉氏变换的其它应用#3* 拉氏变换的其它应用)

[四、例题](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#四、例题#四、例题)

**一．Laplace变换的一般概念**

**1.Laplace****变换**

(1) 从Fourier变换到Laplace变换

Fourier变换要求定义在(－∞，∞)上的函数绝对可积。这一条件，即使对一些很简单的函数，如多项式、三角函数等也很难满足。然而，这些函数乘上一个收敛因子便可以克服上述困难，其中C为正实数并取得足够大，使得在x→∞时不会发散。但是，当x→－∞时，就又会遇到麻烦，幸而在物理上我们感兴趣的常常是x取正值的函数。这一限制表现为再给函数乘上一个阶跃函数。这样，函数有Fourier变换，即



                   (7.4 - 1)



其逆变换为

           (7.4 - 2)



(2) Laplace变换

引入新变量，并且将换成，则(7.4 - 1)、(7. 4 - 2)式分别为



                   (7.4 - 3)



               (7.4 - 4)



其中积分路线沿直线Rep＝c(常数)向上。由(7.4 - 3)式表示的积分称为函数的拉氏换式，或称为的象函数，记作



，或≒



称为原函数，称为拉氏变换的核。(7.4 - 4)式给出拉氏逆变换反演式)，简记为



。



**注意**：

1）当x＞0时，(7.4 - 4)式给出f(x)；在x＜0时，逆变换为零。记住这一点，我们常省去。



2）符号≒的左边为原函数，右边是象函数。

[返回页首](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#top#top)

**2.拉氏变换存在的充分条件**

可以一般地证明(参阅〔6〕第141页或Б·A·福克斯，B·И·列文《复变函数及其应用特编》第3章第17节。)Laplace变换存在的充分条件为：

(1).在0≤x＜∞中除有限个第一类间断点外是连续的，并且有连续导数；



(2).存在常数M＞0和σ0 ≥0，使得对任意的x(0≤x＜∞),





其中σ0 称为的增长性指数。



这时





在Rep＞σ0 的半平面上一定存在，积分绝对而且一致收敛，是解析的。而且，当时



                       (7.4 - 5)



[返回页首](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#top#top)

**3.几个初等函数的拉氏换式**

下面具体计算几个初等函数的拉氏换式。

[例7.4 – 1]  求 a≥0



解：



   (Rep＞0)         (7.4 - 6)



当a＝0时

                         (7.4 - 7)



≒



[例7,4 – 2] 求 , a为任意常数。



解:

(7.4 - 8)



≒



[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#top#top)

[例7.4 – 3]  证明

证明:



在时，积分出的项为零。如此下去，作次分部积分



上式可以推广为

或≒，

                                   (7.4 - 10)

 

[返回页首](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#top#top)

**二、Laplace变换的性质**（[表二](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/FtandLt/b-2.doc)）（[表一](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/FtandLt/b1.doc)）

Laplace变换具有许多与Fourier变换相似的性质，这是因为它们的积分核都是指数函数。在讨论下列性质中，设已知。



1．           (7.4 - 11)



其中a、b为常数

[例7.4 – 4]求的拉氏换式。



解:

                   (7.4 - 12)



类似地，可以求得

                  (7.4 - 13)



≒ ， ≒



2．                         (7.4 - 14)



[例7.4 – 5] 求的拉氏换式。



解:



[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#top#top)

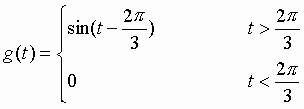
3. c＞0                     (7.4 - 15)



4．           (7.4 - 16)



[例7.4 - 6] 求



的拉氏换式。

解: 利用阶跃函数表示上列分段定义的函数



有



[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#top#top)

5.                      (7.4 - 17)



一般地，有

  (7.4 - 18)



6．                         (7.4 - 19)



[例7.4 – 7] 求t，t2的拉氏换式。

解:



[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#top#top)

7．                       (7.4 - 20)





[例7.4 – 8] 求的拉氏换式。



解:

.



[例7.4 – 9] 求的拉氏换式。



解:

.



8．若，并定义与的折积(卷积)为



(7.4 - 21)



则

               (7.4 - 22)



[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#top#top)

[例7.4- 10] 用阶跃函数表示



并求其拉氏变换。

解



为了更加便于利用拉氏变换的性质4 （7.4 – 16）式,将改写为







[返回页首](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#top#top)

**三、Laplace变换的应用 Laplace反演**

**1. 解线性常微分方程的初值问题**

Laplace变换除可用于计算许多积分以外，另一个重要的应用是解线性常微分方程的初值问题。从拉氏变换的性质(7.4 - 17)式和(7.4 - 18)式可以看出，经过拉氏变换，原函数的微积分运算对应于象函数的代数运算。

通常用拉氏变换解线性常微分方程的初值问题可分为三步：

(1) 对原微分方程作拉氏变换把原函数的微分方程变为相应象函数的代数方程；

(2) 解象函数的代数方程，求出象函数；

(3) 对未知函数的象函数作拉氏反演，求出未知函数。

[例7.4 – 11] 解微分方程



使之满足初始条件。



解: 设，对原方程作拉氏变换，有



[]＋



整理后，解得象函数





对象函数作反演，得





[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#top#top)****

[例7.4 – 12]  解方程



其中为已知函数，均为正常数，为任意常数。



解: 设，对原方程作拉氏变换，得







解关于象函数的代数方程，得



,



对象函数作拉氏反演，得未知函数为



从上述两例可以看出，与通常线性常微分方程求解步骤相比较，拉氏变换比较简单。因为在作拉氏变换的过程中，不仅把对未知函数的求导运算化为对象函数简单的代数运算，使微分方程化为代数方程，而且同时考虑了初始条件和非齐次项，通过反演能直接得出最后结果。此外，拉氏变换法对微分方程的特征根有重根的情况也毋需特殊处理。

[返回页首](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#top#top)

**2. 拉氏反演**

应用拉氏变换法解微分方程初值问题的关键在于拉氏反演。这里有两个问题：

一是由象函数反演得到的原函数是否唯一的，这涉及方程的解是否唯一的问题。该问题已由Lerch定理解决，原函数的值，除在间断点外，完全由其象函数所确定(证明见参考书目〔2〕第六章第76节。)。

另一个问题是如何对象函数作反演。

求拉氏反演的方法比较灵活，常用的方法有如下几种。

(1) 利用拉氏变换的性质及已知的基本变换式，直接作拉氏反演

如[例7.4 – 10]中所做的。在遇到象函数的乘积时，往往应用(7.4 - 21)式,(7.4 - 22)式。

[例7.4 – 13] 求下列象函数的原函数。

① ；② ；③ 。



解:



[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#top#top)

(2) 将像函数变形或分解成部分分式，以便利用变换的性质和基本变换式。

[例7.4 – 14] 求





解: 将像函数变形后拆成两项，得



[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#top#top)

[例7.4 – 15] 求





解: 将像函数分解为部分分式



[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#top#top)

(3) 在一般情况下，根据普遍反演式利用围道积分和留数定理计算拉氏反演

        



C1为p平面上Rep＝a＞σ0的任一条平行于虚轴的直线。只要a取得足够大，在直线C1的右边解析，没有奇点。



如果为单值函数，且当Rep＜a、｜p｜→∞时，一致地趋于零，考虑图[7.12](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/t7.12.jpg)所示的闭合围道，有



(7.4 - 23)



其中为在F(p)的所有奇点的留数之和。这就将求反演式的问题变为计算留数的问题。



**注意**：

1） 上述结果在用t－t0 代替t时，只要t－t0＞0所有结论也都正确。即当象函数为时，只要在、｜p｜→∞时，满足一致地趋于零。对t－t0 ＞0反演公式仍然成立，这正相应于性质4(7.4- 15)的情况。



2）如果为多值函数，涉及到多值函数的积分，必须选取适当的单值分支， 参阅有关的参考书籍。



(4) 对一些更为复杂的象函数的反演可以查Laplace变换表。

[例7.4 – 16] 求

。



解: 像函数有四个单极点：0，1，2，3。令＝，有







[**返回页首**](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#top#top)

[例7.4 – 17] 求





解: 像函数有单极点－1和二阶极点3。令有



[返回页首](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#top#top)

**3\*** **拉氏变换的其它应用**

利用拉氏变换不仅可以解常系数常微分方程的初值问题，还可以解某些系数为自变量的一次式的微分方程，也可以解某些积分方程和微分方程组。

[返回页首](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#top#top)

四、例题

[[例7.4 - 1]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#[例7.4 – 1]#[例7.4 – 1])**,**[[例7.4 - 2],](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#[例7,4 – 2]#[例7,4 – 2])[[例7.4–3]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#[例7.4 – 3]  证明#[例7.4 – 3]  证明),[[例7.4 - 4]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#[例7.4 – 4]#[例7.4 – 4]),[[例7.4 - 5]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#[例7.4 – 5]#[例7.4 – 5]),[[例7.4 - 6],](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#[例7.4 - 6]#[例7.4 - 6])

[[例7.4 - 7]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#[例7.4 – 7]#[例7.4 – 7]),[[例7.4 - 8]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#[例7.4 – 8]#[例7.4 – 8]),[[例7.4 - 9]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#[例7.4 – 9]#[例7.4 – 9]),[[例7.4 - 10]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#[例7.4- 10]#[例7.4- 10]),[[例7.4 - 11]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#[例7.4- 10]#[例7.4- 10]),[[例7.4 - 12]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#[例7.4 – 12]#[例7.4 – 12]),

[[例7.4 - 13]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#[例7.4 – 13]#[例7.4 – 13]),[例7.4 - 14],[[例7.4 - 15]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#[例7.4 – 15]#[例7.4 – 15]),[[例7.4 - 16]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#[例7.4 – 16]#[例7.4 – 16]),[[例7.4 - 17]](http://202.152.177.210/media_file/rm/dongshi2004/shuxuewulifangfa/5/chap7/7-4.htm#[例7.4 – 17]#[例7.4 – 17])