**习题3.1**

1．考察长为*l*的均匀细杆的导热问题，若

（1）杆的两端温度保零度；

（2）杆的两端均绝热；

（3）杆的一端为恒温零度，另一端绝热，而初始温度分布均为；

试用分离变量法求解在这三种情况下的杆的导热问题的解。

解：（1）该问题的数学模型为

 其

Step1：分离变量：令，代入齐次方程及齐次边界条件有：



由于

所以有：



整理得



Step2：求解特征值问题



讨论：若，则

此时

将代入得，于是

∴ =0不合适，舍去。

若时方程的特征方程为

 ∴ 

∴ 

将代入得

 得C=-D=0

∴  ∴ 也不合适，舍去。

若时方程的特征方程为

 ∴ 

∴ 

将代入有C=0

将代入有

∵  ∴ 

∴  ∴ 

此时

Step3：将代入关于的常微分方程有



∴ 

∴ 

 

其中待求。

Step4：叠加



由于

所以：

∴ 

综上知该热传导问题的解为：



其中 

（2）该问题的数字模型为

 其

Step1：分离变量：令，并代入齐次方程及齐次边界条件中有：



由于 故上面方程可化为

所以有：



整理得



Step2：求解下面的特征值问题



讨论：若，则方程变为

这样 

∵  而 ∴ 

此时有  （取0即可）

若时 则方程的特征方程为

 ∴ 

∴ 



∵  ∴ 

 ∴ 

∴ C=-D=0 此时

∴ 不合适

若时，方程的特征方程为

 ∴ 

∴ 



∵  ∴ 

∵  ∴ 

∵  ∴ 

∴ 

∴ 

综上所述。

该问题的特征值为 

特征函数为 

Step3：将代入关于的微分方程求有：



∴ 

∴ 



Step4：叠加，原方程的解为：



∵ 

∴ 

其中 



（3）该问题的数字模型为：

 其中

Step1：分离变量：令，代入齐次方程及齐次边界条件中有：



由于 整理上面方程有

所以有：



整理得



Step2：求解下面的特征值问题



讨论：若，则 ∴ 

这样

∵ 



∴ 

∴ 不合适，舍去。

若时 则方程的特征方程为

 ∴ 

∴ 



∵  ∴ 

 ∴ 

∴ C=-D=0

∴ 这说明也不合适

若时，方程的特征方程为

 ∴ 

∴ 



∵  ∴ 

∵  ∴ 

∵  ∴ 

∴ 

∴ 

Step3：将代入关于的微分方程有：



得 

∴ 



Step4：叠加，原方程的解为：



∵ 

∴ 

其中 

2．今有一弦，其两端被钉子钉紧作自由振动，其初始位移为：



初速度为零，试求弦振动方程的解（其中h为常数）

解：该问题的数字模型为



由本节推导知：



其中

 













 

又 ∵ 

∵ ，∴ ，∴ 

∴ 原方程的解为



3．求解下面的定解问题

（1）

解：根据本节推可知（其中）







， 

，，



(2)

解：取

Step1:分离变量：令并代入齐次方程和齐次边界条件有：





由于 

∴ 上面方程变形为





整理有



Step2:求解特征值问题



由第1题知 

，

Step3:将代入关于T（t）的微分方程



其特征方程为

，

，n=0,1,2,…





Step4：叠加



∵ 

∵ ，∴ 

所以

















， *n*=0, 1, 2,…

又∵ ，，∴  *n*=0, 1, 2,…

∴ 原方程的解为





（3）

解：令 

则：

由于 *a=*2，*l*=1，根据第1题结果有：



其中 

=

∴ 

∴ 

（4）

解：step1：分离变量，令，并代入齐次方程和齐次边界

条件中有：





∵ 

上面方程进行整理有：





即 

由第1题知特征值为

特征函数为，*n*=1,2,……

step3：将代入至于*Y*(*y*)的常微分方程有



其特征方程为 ∴ 

∴  *n*=1,2,……

∴ 

step4叠加：原方程的解为：



∵ ，∴ 

∴ 





即  （1）

又 ∵  即

∴  （2）

联立（1）、（2）有





∴ 原方程的解为





4．求阻尼波动问题的解



解：Step1：分离变量，令，并代入齐次方程和齐次边界条件中有





由于，，于是上面方程变为：





整理得下面的常微分方程有：



Step2：求解下面的特征值问题



由第1题的结果有特征值为

特征函数为

Step3：将代入关于的常数分方程有：



上式是关于的二阶常数系线性齐次常微分方程，其特征方程为

，∴

当时 

其中，

当时 

当时 

Step4：叠加

当时



∵ ∴

∴ （1）

又∵

而，∴

∴ （2）

（1）两边同乘有 （3）

（2）-（3）得：

（1）两边同乘以有 （4）

（2）-（4）得：

∴







令 ， 

则当时，原方程的解为



其中，

同理可得

时，原方程有解：

其中 ，

当时，

其中 ， 

5．均匀细杆长为，在固定，而另一端受着一个沿杆长方向的力，如果在开始一瞬间，突然停止这个力的作用，求杆的纵振动。

解：假设细杆的左端点固定，于是该问题的数字桂型为：



其中E为细杆的杨氏模量，为细杆的横截面积

Step1：分离变量：令，并代入齐次方程和齐次边界条件中有：

，

因为，，故上面式子可变为

（待常数）



得常微分方程有：







Step2：求解特征值问题



由第1题的结果可知特征值为

特征函数

 *n*=0，1，2，……

Step3：将代入关于的常微分方程求。



其特征根为 

∴ *n*=0，1，2，……

∴

*n*=0，1，2，……

Step4：叠加：原方程的解为：



其中得求

∵ ∴

∴

*n*=0，1，2，……

∵

∵

即  ∴ *n*=0，1，2，……

∴原方程的解为



6．长为*2l*的均匀细杆，被作用在两端的压力压缩式，在*t*=0时，把这个载荷移去，试证，若*x*=0是杆的中点，则在*t*时刻，坐标为*x*的杆的截面位移由下式确定：



证明：参见第1章，该问题的数学模型为：



Step1：分离变量：令并代入齐次方程和齐次边界条件有，





由于，故上面的方程可变为





整理即得两个常微分方程



Step2：求解特征值问题



由第1题的结果有特征值为

特征函数为  *n*=0，1，2，……

Step3：将代入关于的常微分方程求







step4:叠加：原方程的解为



 得 

 即









原方程的解为



 [证毕]

7．求下列高维高波动的解



解：step1:分离变量：令

代入齐次微分方程有：



两边同除以有：



要使上式成立，上式右边每一项必须是常数

令且

于是有4个常微分方程









将分离变量后的式子代入齐次边界条件中有：

，，

Step2:求解特征值问题



得特征值为特征函数 *m=1,2,3,……*



得特征值为特征函数为，*n=*1,2,……



得特征值为特征函数为，*l=*1,2,……

step3:将代入关于T(t)的常微分方程。

求T（t）有：



令

则有：

于是得

step4:叠加，原方程的解为：



将代入有



比较复数有

又 

对任意

故原方程的解为





8．长为*l*的柱形管，一端封闭，另一端开放，管外空气中含有某种气体，其浓度为，向管内扩散，求解该气体在管内的浓度

解：



令 则

 图4-8

这样的边界条件变成齐次的了。它的本征函数是

即的解为





∴ 







9．求解杆的横振动问题



解：step1:分离变量，令 （5）

代入方程（1）和边齐条件（2），（3）有



即（待求常数）

于是得



step2:求解特征值问题



计论：若则

代入（*7*）有

代入（8）有： 于是得

即当时 故

若时，则（6）有通解



由（7）式有：

得

故

由（8）式有



求解上面式子得



即

特征函数为

将代入关于的常微分方程有：

，

从而有

代入初始条件（4）有：

，

同理可讨论时也有同样的结果。

10．边长为b的方形薄膜，边缘固定，开始时膜上各点的位移为，（A为常数），求它从静止开始的自由振动情况。

解：该问题的数字模型为：



解：Step1：分离变量，令

代入齐次方程及齐次边齐条件有：



两边同除以得



分析可知上式在端两项必须是常数

令

得3个常微分方程



代入齐次边齐条件中有

S+ep2：求特征值

得特征值为

特征函数

得特征值为

特征函数

Step3：将代入关于的常微分方程有：



特征方程为

∴ 

∴ 

Step4：叠加，原方程的解为：



又















∴原方程的解为



11．求量子力系中满足如下薛定谔方程的定解问题处于一无限维深势阱中粒子的状态：



解：Step1：分离量令

则（1）变为

即（能量）

于是得：



将（4）代入边界条件有： （7）

step2：求特征值及特征函数

令 ，则（6）变为

 （6）′

讨论：若，则

由（7）有

于是有，从而，所以

若时，则（6）′有



而由（7）有



故有，从而，所以不合适

若，则由（6）′有

 （8）

由（7）有：



于是有 ，

显然 *c*1，*c*2不能同时为0。

（1）若，则

∴  *k*=1,2,…… （9）

此时

∴ *c*1=0

于是有  （10）

（2）若，则

∴  *k*=1,2,……

∴  *k*=1,2,…… （11）

此时 ∴ ，于是

 （12）

由（9）和（11）式可得



故（6）′-（7）的特征值为

，*n*=1,2,…… （13）

而由（10）和（12）式可得相应的特征函数为



step3：将求得的特征值*En*代入*f*(*t*)的方程有：



∴ 

step4：叠加：原方程的解为



 （其中）

代入初始条件（3）得



所以 ，（）

∴ 原问题的解为



12：设有一由和六个面所围成的长方体形盒，盒的的面上的电势为其余各个面上的电势为零，求盒内任一点的电势，若盒的六个面 电势均不为零，则盒内的电势又该如何求？

解：先求第一问的解：

盒内电势分布的数字模型为



step1:分离变量，令，并代入齐次方程及齐次边齐条件有：



两边同除以



要使上面式子相同，上式右端两项必须为常数

令，其中

将分离变量后的式子代入齐次边齐条件有



step2:求解特征值问题：

得特征值 为特征,

*m=*1,2,……

得特征值为特征函数为，*n*=1,2,……

Step3:求将代入关于的常微分方程

有 

特征方程为：



step4:叠加：













又





（1）（2）联立求解得：







 原方程的解为：

 



如果盒的六个面的电势均不为零要求盒内电势分布，必须将非齐次边齐齐次化，然后采用分离变量法求解。