习题3.2

1．求解具有放射性衰变的热传导议程。





解：由于对应的齐次方程具有第一类边界条件，故令：

，

代入方程和初始条件得：



即 

其中 

得 

其中 



故得原定解问题的解为：



2．一长为*l*的均匀弦，弦上每一点受外力作用，其力密度为*bxt*，若弦的两端是自由的，而初始位移为零，初始速度为（*l－x*），试求弦的横振动。

解：该问题的数学模式为：



解：由于该问题所对应的边界条件是第二类边界条件，故可令

 

代入方程和初始条件有：



整理得：



其中 





∴ 

将代入上式得

将代入上式有



∴ 

∴ 

3．求解下列定解问题

（1）

解：该方程所对应的齐次方程是第一基边齐条件，于是可设



 其中 

∴ 



代入方程和初始条件有：



整理得：



∴ 

将代入上式得



将代入得 

∴ 

∴ 

（2）

解：该问题对应的齐次方程的特征函数为

 

故令，

代入方程和初始条件有：



其中 

证 则有：

将 代入上式得



（3）

解：令 

则 

代入方程和边齐条件，并比较系数有：



其中 

⑥对应的齐次方程的通解为 

⑥的特解为 

则⑥的通解为



将代入*a*得



∴ 



∴ 原方程的解为

（4）

解：该方程所对应的齐次问题的特征函数为：

 

于是原方程的解可以设为

 （1）

并且  （2）

将（2）变形为



类比知  

将（1）代入原方程和初始条件有：





整理即为 

将（1）代入齐次初始条件有 

∴ 当*n* = 0时有



（3）的通解为：



∵  代入上式得 

 代入上式得 

∴ 

当时



∴ 

将（6）代入上式有 

∴ 

∴ 



， 其中

4：试用冲量原理推理有界弦纯强迫振动解，即用冲量原理证明下列方程



的解为

其中 

证明：

（1）引进瞬时力的概念

外力*f*（*x*，*t*）是持续作用的，应对弦上各点的位移均产生影响。因此*t*时刻的位移

*u*（*x*，*t*），应是外力从*t*=0持续到时刻*t*的结果。

现将持续力*f*（*x*，*t*）看成一系列前后相继的瞬时力*f*（*x*，）的叠加。



由函数的定义，瞬时力作用从开始，到结束，根据叠加原理，定解问题的解，应是所有瞬时力引起的位移的叠加。

即 

（2）求的定解问题

由于弦两端固定的情况没有变，交且时刻的瞬时*x*不可能引起时刻的初始位移和初速度，因此，应满足如下位移。



（3）利用冲量定理将非齐次方程齐次化。

由于瞬时力的作用仅发生在时段内，若将初始时刻设为，则的定解问题中，方程就变成齐次了。

此时由于瞬时力作用仅为一瞬间，来不及使弦产生位移，故有

但是可以产生在时刻的初速度，此初速度可由冲量定理求出。

对（2）中的方程从到积分。



即 

由于瞬时*x*在时刻尚未起作用，所以故可得：



综上，若以简记为作为初始时刻，则的定解问题就化为



令 

则上面的方程变为：



∵  ∴ 

∵  ∴ 

， ∴ 

∴ 

∴ 

于是原方程的解为



5．均匀导线，每单位长度的电阻为，恒定的电流*I*，导线表面跟周围温度为零的介质进行热交换，试求导线上温度的变化。设初始温度和两端温度都为零，*h*是交换系数。

解：设导线的热传导系数、热交交换系数，比热密度分别为*k*，*h*，*c*，*p*，则由热量导性定律可得方程为：



其中，表示温度，故其定解问题为：



由于对应的齐次问题的特征函数为，故令



则 

 

代入方程和初始条件中，比较前的系数有：



求得 

其中 

将初始条件代入处 

所以 

于是导线上温度的变化规律为



**习题3.3（P195）**

1．长为*l*而固定于一端的均匀细杆，处于静止状态，在时，一个三台杆长方向的力Q（每单位面积上）加在杆的另一端上，求在时，杆上各点的位移。

解：该问题的泛定方程为



其中E，S分别为细杆的杨氏模量及横截面积，由于是非齐次边界问题，必须齐次化，为此

令 ，其中满足

， 

∴ 可取 

∴ 满足下面的方程



在上面关于的方程中，齐次方程所对应的特征函数为

 

于是可令



代入方程有



整理即为：



求解得



其中，待求

又， ∴ 

∴　





又，∴ ， ∴ 

代入关于的通解有：

，∴ 

∴ 

∴

2：有一长为l，侧面绝热，而初始温度为0的均匀细杆，它的一端处温度永远保持0℃，而另一端处的温度随时间直线上升，即（c为常数），求t>0时，杆的温度分布。

解：该定解问题的泛定方程为：



这是一个非齐次边界问题，必须进行齐次化处理，为此，令



其中满足 

于是可取，即

这样原方程可以变为



上面关于的方程所对应的齐次方程齐次边齐的特征函数为



于是可以令：



代入非齐次方程有：



其中

∴ 



整理关于的微分方程有并比较前面的系数有







，

代入的通解表达式有

 







3．设弹簧一端固定，另一端在外力作用下作周期振动，此时定解问题为



试求解，其中不为正整数，均为常数。

解：这是一个非齐边界问题，必须进行齐次化处理，为此令



其中满足。

为此应取

于是关于的方程就应变为关于的方程，如下：



上面的方程是非齐次方程，齐次边界，非齐次初始条件，利用叠加原理，该方程的解可分解为下面两个方程解的叠加。





容易求得（Ⅰ）的解为



（Ⅱ）的解为：



其中



即

其中

4．求下面的定解问题：



解：这是一个非齐次边齐问题，必须进行齐次化处理，为此令



其中满足，

这样可取：



则定解问（1）—（3）化为：



其中：

****  （9）

利用常数变量法（6）—（8）的解可以令为



则（6）—（7）两式变为



故由付理叶余弦展开的系数公式有：

当时

其中 （14）

当时

其中 （18）

而F（x，y），G（y）和H（y）由（9）式给出，对于定解问题（11）—（13），由于方程（11）有特解



而对立的齐次方程



有通解 （19）

故方程（11）有通解为



将（19）式代入边界条件（12）、（13）有：

，

于是，

故（11）—（13）式的通解为

 （20）

其中由（14）式给出

对于定解问题（15）—（17），由于方程（15）所对立的齐次方程



有通解为

 （21）

由常数变易法知，（15）式的特解可令为：



其中由方程组

 （22）

求出。而将（21）代入边齐条件（16）和（17），得

得



于是（15）—（17）式的通解为

 （23）

其中由（18）式给出，而由（22）式给出。

**习题3.5（P207）**

1．求解圆的狄氏问题



解：圆为圆形区域上的狄氏解为



其中待求

而



比较系数知：



2．求解扇形区域中狄氏问题的解。



解：利用极坐标，方程（1）化为

 （11）

（i）令 （4）

则（1）变为

将(4)式代入边齐条件（2）得

 （7）

（ii）求解特征值问题（5）和（7）

为计算方便，令则（5），（7）变为



得（（5），（7）的特征值为：



特征函数为

 其中n=1，2，……

（iii）将求得的特征值代入6式并求解得



而由自然边齐条件有限，有

所以

而

（iv）叠加



其中待求

代入（3）式得 （9）

 （10）

从而 （11）

由此可见，求解问题（1~3）的解由（8）式给出，其中系数由（11）式给出。

3．求解泊松方程的狄氏问题



解：由观察法可得原方程的一个特解为



设引入极坐标系得



定解问题（I）是圆内狄氏问题；其解为



并且代入得

原问题的解为



4．设有一个半径为的“元限长”圆柱形接地导体，设置要均匀外电场中，圆柱的轴线与方向垂直，求电势分布。

5：求圆环域的狄氏问题



解：在极坐标系下该问题化为



1. 分离变量：令

则（1）式变为



并且  （6）

（ii）求（4）和（6）的特征值

即

得特征值为，特征函数为

=0,1,2,……

（iii）求解方程5得



于是得：



 （7）

其中：

（iv）将边界条件（2）和（3）代入上式（7）有：





由此公式可得：







求解得：

故原方程的解为：

6：一无限长导体圆柱壳，半径为，把它充电到电势为



求圆壳内的电势分布。

解：该定解问题的泛定方程为



（1）的解为： （3）

在（3）中令则有：

 





















7：求解下面的定解问题



解：令结合及有限得该方程的解为：







所以：





其中：









其中为任意常数

8：在球形区域中求解泊松方程的边值问题



解：采用特解方法求解该问题。因为

 故而取 （3）

则令 （4）

代入（1）和（2）两式有：



其通解为：



（8）

由边界条件（6），（7）进而可设

 （9）

将（6），（7）代入（9）式有：





故有：



于是：



9：半径为的半圆形平板，其表面绝热，在板的周围边界上保持温度为，而在直径上保持常温，求此半圆形平板要恒温状态下的温度分布。

解：该定解问题的泛定方程为：



在极坐标系下上面的方程变为



该方程的边界是非齐次，因此必须进行齐次化处理，为此令：

于是原方程为：



设代入（1）有

 （4）

 （5）

由（2）有： （6）

解（4）、（6）知：

（）当时，由6知此时，故应排除掉。

由（6）知此时故也应排除掉。

当时由（6）知

即得特征值为

特征函数为

将的值代入（5）有：



一般解为

因为在半圆形薄板内有界，有界，所以。

即

由于条件(3) 













原方程的解为



10：半径为a，表面熏黑了的均匀长圆柱，在温度为零度的空气中受着阳光照射。阳光垂直于柱轴，热流强度为，试求柱内稳定温度分布。[提示：泛定方程为]，边界条件为是热流强度的法向分量，如取极轴垂直于阳光，则



解：如图，取极轴方向垂直于阳光，对于“无限长”圆柱，温度分布与轴向无关，故可取圆柱的一个截面考虑。

以轴心为极点，与阳光垂直的方向为极轴方向，则对于稳定温度而言，满足拉普拉斯方程

即  （1）

在柱面处，一方面有热流流入，另一方面与周围空气进行热交换，由热传导的定律，可得边界条件如下：

 （2）

自然周期条件 ，

设 代入（1）有

， （4）

， （5）

由（3）， （6）解本征问题（4），（6），得本征值

本征函数为

以值代入（5）得 



∴ 

∵ 在柱内有界，

∴ 



由条件（2），



在[0，2]上，利用三角函数族之正交性。得





当时，







=

∴ 本问题的解为：

