第一次作业-简答题

1.设R为实数集合，定义R上二元代数运算*如下：

对∀x、y∈R，x*y=xy+x-y

1)试计算3*5、0*1；

2)*运算是否满足交换律？是否满足结合律？

解：(1) 3*5=3 × 5+3-5=13; 0*1=0 × 1+0-1=-1 ;

(2) 不满足交换律，

反例：3*5=3 × 5+3-5=13;

5*3=5 × 3+5-3=17; 3*5≠5*3

第一次作业-简答题

不满足结合律，

反例:$(2*3)*5=(2\times 3+2-3)*5=5*5=25$;

$2*(3*5)=2*(3\times 5+3-5)=2*13=15$;

$(2*3)*5\neq 2*(3*5)$

第一次作业-简答题

2. 设Q为有理数，其上利用数的加、乘、减定义一个运算*如下：a*b=a+b-ab。

1) (Q, *)是半群吗？

2) 求单位元。

3) Q中元素有逆元吗？如果有，请给出。

解：(1)

① 先验证集合非空，因为1∈Q，所以Q非空。

② 再验证封闭性， a，b ∈Q， a+b-ab ∈Q，所以运算时封闭的。

第一次作业-简答题

③最后验证结合律

任取x，y，z ∈Q，

(x*y)*z=(x+y-xy)*z=x+y-xy+z-z(x+y-xy)

=x+y+z-xy-xz-yz+xyz

x*(y*z)=x*(y+z-yz)=x+y+z-yz-x(y+z-yz)

= x+y+z-xy-xz-yz+xyz

综上所述，（Q，*）是半群

第一次作业-简答题

2. 设Q为有理数，其上利用数的加、乘、减定义一个运算*如下：$a*b=a+b-ab$。

2) 求单位元。

解：2) 假设单位元为e，则任取$a \in Q$，都有

$a*e=e*a=a$;

$\therefore a+e-ae=a$

$(1-a)e=0$

$\therefore e=0$

第一次作业-简答题

2. 设Q为有理数，其上利用数的加、乘、减定义一个运算*如下：$a*b=a+b-ab$。

3) Q中元素有逆元吗？如果有，请给出。

解：3)任取$a\in Q$，假设其逆元为b，则$a*b=b*a=0$

$a+b-ab=0$；$\therefore b(a-1)=a$

当a不为1时，逆元为：$a/(a-1)$,

当a等于1时，没逆元。

第一次作业-单选题

1. 设(S, *)是代数系统，*是S上的二元代数运算，对于任意的x,y∈S，有x*y=x。以下描述正确的是（ D ）

A、(S, *)存在单位元。

B、代数系统(S, *)每个元素都存在逆元素。

C、运算*满足交换律。

D、运算*满足结合律。

第一次作业-单选题

2.下列集合S和运算 *， 能构成群的是（ D ）

A、S={x|x=2n, n∈Z}， *是数的乘法（无单位元）

B、S={1,3,5,6,9}， *是模11的乘法（不封闭）

C、S=Q（有理数集）， *是有理数乘法（0无逆）

D、S={1,3,4,5,9}， *是模11的乘法

第二次作业-简答题

1、设 $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 5 & 2 & 1 & 6 & 3 & 4\end{pmatrix}$ ，$\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 1 & 4 & 2 & 3 & 6 & 5\end{pmatrix}$

(1)请用轮换的形式表示σ，τ;

(2)计算$\tau^{-1}\sigma\tau$，结果分别用轮换和对换表示出来;

(3)指出σ，τ的奇偶性。

解:(1) σ=(153)(46)，τ=(243)(56)

(2) τ^{-1}=(423)(56)

$\tau^{-1}\sigma\tau$=(423)(56)(153)(46)(243)(56)

=(164)(25)=(14)(16)(25)

第二次作业-简答题

(3)指出σ，τ的奇偶性

σ=(153)(46)=(153)(46)(2) ，

τ=(324)(56)=(324)(56)(1),

$$\sum_{j=1}^{k}(r_j-1)=n-k$$

σ: n-k=6-3=3， τ: n-k=6-3=3

σ和τ均为奇置换。

第二次作业-简答题

2. 在S_4中，设$\sigma=(1\ 4\ 2\ 3)$，求：

(1) σ的周期是多少？

(2) 求σ生成的循环子群。

解：

(1) $\sigma=(1\ 4\ 2\ 3)$, $\sigma^2=(1\ 4\ 2\ 3)\ (1\ 4\ 2\ 3)=(12)(34)$

$\sigma^3=\sigma^2\cdot\sigma=(1\ 2)(3\ 4)(1\ 4\ 2\ 3)=(1\ 3\ 2\ 4)$,

$\sigma^4=\sigma^3\cdot\sigma=(1)(2)(3)(4)=I$, 即$n=4$

(2) $\{I,\ (1\ 4\ 2\ 3),\ (1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 3\ 2\ 4)\}$

第二次作业-单选题

3. 请问以下集合中是4次对称群S_4子群的是（ C ）

A) $H_1=\{I,(1\ 3\ 2),(1\ 3)(2\ 4)\}$

B) $H_2=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}\right\}$

C) $H_3=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}\right\}$

D) $H_4=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}\right\}$

解析：A）运算不封闭；B)运算不封闭；
D）无单位元

求陪集的简单方法

若G是一个有限群，求H的右陪集：

首先，H本身是一个；

任取$a \in G$, $a \notin H$而求aH又得到一个；

任取$b \in G$, $b \notin H \cup aH$而求bH又得到一个；

如此类推，因G有限，最后必被穷尽，而

$$G=H \cup aH \cup bH \cup \ldots$$。

定理6.4.3 设N是群G的正规子群，于是按照陪集的乘法，N的所有陪集作成一个群 $\overline{G}$.

- $\overline{G}$ 称为G对于N的商群，记为G/N。

若G是有限群，则商群中元素个数等于N在G中的指数，即等于陪集的个数。

- 有限群G的元数除以H的元数所得的商，记为(G：H), 称作H在G中的指数。

第三次作 业：

1. 设群G={a,b,c,d,e,f}，G上的运算*定义如运算表所示：(1)请写出(d)的所有右陪集；
(2)请写出(a)的所有左陪集。

*	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	b	e	d	f	c
b	b	e	a	f	c	d
c	c	f	d	e	b	a
d	d	c	f	a	e	b
f	f	d	c	b	a	e

解:(1) (d)={e,d}，(d)的右陪集：{e, d} ,{a, f}, {b, c}
(2) (a)={e,a, b}, (a)的左陪集：{e, a, b} ,{c, d,f}

第三次作 业：

2. 设a的周期为15，求子群$H=(a^6)$在群$G=(a)$中的所有左陪集。

解： $H=\{e, a^3, a^6, a^9, a^{12}\}$

$Ha=\{a, a^4, a^7, a^{10}, a^{13}\}$

$Ha^2=\{a^2, a^5, a^8, a^{11}, a^{14}\}$

第三次作 业：

3. 设群(G, *)是17元群，则下列说法错误的是(D)

(A) G一定是循环群

(B) 对于任意的a,b ∈G，$(a*b)^{-1}= a^{-1}*b^{-1}$

(C) G只有两个子群

(D) 对于任意的元素a∈G的周期都是17

解析:(A)17是质数，G是循环群

(B)17是质数，G是循环群，循环群为交换群

(C)据拉格朗日定理，质数元群只有2个平凡子群

(D)G中单位元的周期为1

第三次作 业:

4. 判断题:

5次交代群A_5是5次对称群S_5的子群，则$(1\ 2)A_5 = A_5(2\ 4)$。（正确　）

解析：A_5是S_5中所有偶置换在置换乘法下构成的群，故$|A_5|=1/2|S_5|$。因此关于A_5的左右陪集相等（即A_5是S_5的正规子群），即若$x\in A_5$，则包含x的右(左)陪集为A_5，若$x\notin A_5$，则包含x的右(左)陪集为$S_5 - A_5$。

故$(1\ 2)A_5 =A_5\ (1\ 2)= S_5-A_5$；又$(2\ 4) \in S_5-A_5$，

故$A_5(2\ 4) = S_5-A_5$，因此，$(1\ 2)A_5 = A_5(2\ 4)$。此题可参照书后习题6.3-10。

第四次作业

1.设G是正有理数乘群，N是整数加群

证明： φ: $2^n(b/a) \to n$ ，是群G到N的一个满同态，

其中a, b是整数，而(ab, 2) = 1。

证明：

(1) 映射：任取$x \in G$，x均可表示为$2^n(b/a)$形式，其中(ab, 2) = 1，因此都存在唯一一个确定的$n \in G$，满足$\varphi(2^n(b/a)) = n$, 因此φ是G到N的映射。

(2) 满射：对于任意整数$n \in N$，存在$2^n \in G$，是它在φ下的原象，因此φ是G到N的满射。

第四次作业

1.设G是正有理数乘群，N是整数加群

证明： $\varphi: 2^n(b/a) \to n$ ， 是群G到N的一个满同态，

其中a, b是整数，而(ab, 2) = 1。

证明：

(3)同态映射:

任取$2^n(b/a)$， $2^m(d/c) \in G$

由于当(ab, 2) = 1，(cd, 2) = 1时有(abcd, 2) = 1,

且$\varphi(2^n(b/a)\, 2^m(d/c)) = \varphi(2^{n+m}(bd/ac)) = n+m$

$= \varphi(2^n(b/a)) + \varphi(2^m(d/c))$

故φ是群G到N的一个同态满射。

练习：设(R, +, ×)是含壹环，R为实数集合，其加法单位元记为0，乘法单位元记为1，对于任意的a,b∈R，定义a⊕b=a+b+1, a⊗b=a×b+a+b。证明：(R, ⊕, ⊗)也是含壹环。

证明：首先证明(R,⊕)是交换群。

① 1 ∈ R，R非空；

② +满足运算封闭性，根据定义，a⊕b=a+b+1 ∈ R，则⊕也满足运算的封闭性；

③ 因+满足交换律，故⊕也满足交换律；

④ 因+满足结合律，故(a⊕b)⊕c=(a⊕b)+c+1=a+b+1+c+1=a+(b⊕c)+1=a⊕(b⊕c)；⊕也满足结合律；

⑤ (R,⊕)内有元素-1，满足任意的a∈R，a⊕(-1)=a-1+1=a，因此-1为右单位元；

⑥ 对任意的a∈R，有-a-2，使得a⊕(-a-2)=a-a-2+1=-1，则a的右逆元为-a-2；

证明： $(R, \otimes)$是含壹半群。

① $1 \in R$， R非空；

② 因+，×满足运算封闭性，根据定义，$a\otimes b=a\times b+a+b\in R$，则⊗也满足运算的封闭性；

③ $(a\otimes b)\otimes c = (a\otimes b)\times c+(a\otimes b)+c$

$= (a\times b+a+b)\times c+(a\times b+a+b)+c$

$= a\times(b\times c+b+c)+a+(b\times c+b+c)$

$= a\times(b\otimes c)+a+(b\otimes c)$

$= a\otimes(b\otimes c)$； ⊗满足结合律；

④对任意$a\in R$,有$a\otimes 0=a\times 0+a+0=a=0\otimes a$；0为⊗的单位元

证明:$\otimes$对$\oplus$满足左右分配律。

$a\otimes(b\oplus c)=a\times(b\oplus c)+a+(b\oplus c)=a\times(b+c+1)+a+(b+c+1)$

$(a\otimes b)\oplus(a\otimes c)=(a\times b+a+b)\oplus(a\times c+a+c)=a\times b+a+b+a\times c+a+c+1$

有$a\otimes(b\oplus c)=(a\otimes b)\oplus(a\otimes c)$

同理可证$(b\oplus c)\otimes a=(b\otimes a)\oplus(c\otimes a)$

由(1)(2)(3)可知，$(R, \oplus, \otimes)$是含壹环。

练习

设K={I ，(12)(34),(13)(24), (14)(23)} ,则K是四次对称群S_4的子群：

（1）K是否为S_4的正规子群

（2）求(12)(34)的周期

（3）(12)(34)是奇置换还是偶置换

（4）求S_4/K中的单位元

（5）求S_4/K中的元素个数

解：(1) 是 ； (2) 2； (3) 偶置换

(4) K； (5) 6

Note：如何证明（G, .)是群

(1)定义法，共5条

(2) 半群＋可除条件为群。(群中可除条件成立)

(3)有限＋半群＋消去律为群。(群中消去律成立)

Note:

- **可除条件：**

对于任意a，b ∈G，有*x*使*x* · a=b，又有 y使 a·y=b。

- **消去律：**对于G中任意3个元素a,b,c，满足

(1)若a*b=a*c , 则b=c

(2)b*a=c*a, 则b=c

群的一些结论：

◆消去律成立

◆可除条件成立；其运算表中每一行或每一列中元素互不相同。

◆存在唯一的幂等元1（单位元）。

◆一元群、二元群、三元群是唯一的，且都是交换群

◆含有单位元的半群成为独异点。

- 定理6.3.1（判别条件一）

群G的一个子集H是G的一个子群的充分必要条件是

(1) 若$a \in H$，$b \in H$，则$a \cdot b \in H$;

(2) 若$a \in H$，则$a^{-1} \in H$;

(3) H非空

- 定理6.3.2（判别条件二）

(1) H非空

(2)若$a \in H, b \in H$，则$a \cdot b^{-1} \in H$。

- 定理6.3.3（判别条件三）

群G的一个有限非空子集H是G的一个子群的充分必要条件是H对G的运算是封闭的，即若$a \in H$，$b \in H$，则$ab \in H$。

练习：设$G=R\times R=\{(x,y)|x,y\in R\}$,其中R为实数集，G上的一个二元运算⊕定义为：$(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2)$，+是R上的加运算。又设$H=\{(x,y)|y=2x, x, y\in R\}$ 证明:(H，⊕)为(G，⊕)的子群。

证:1. $(0,0)\in G$,G非空， ⊕是G上的二元代数运算，因+满足结合律，故⊕满足结合律，单位元是(0,0)，任意 $(x,y)\in G$,其逆元为$(-x,-y)$，故(G，+)为群。

2. $(0,0)\in H$, H非空。任取 (x_1,y_1)，$(x_2,y_2)\in H$,有

$(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)^{-1}=(x_1,y_1)\oplus(-x_2,-y_2)=(x_1-x_2,y_1-y_2)=(x_1-x_2, 2x_1-2x_2)=(x_1-x_2, 2(x_1-x_2))\in H$

所以，(H，⊕)为(G，⊕)的子群。

- **练习：** 设G={1,a,b}，(G, *)是群，1是单位元，则

（1）给出运算表

（2）a^2=？

（3）a，b的周期是多少？

（4）(G, *)是交换群吗？

解：(1)

*	1	a	b
1	1	a	b
a	a	b	1
b	b	1	a

- 解：

(2) $a^2=b$，

(3) a的周期是3，b的周期是3，

(4) 是交换群；

练习：设G={1，5，7，11}，(G , $\otimes_{12}$)为群，其中$\otimes_{12}$为模12的乘法，请给出所有元素的周期和逆元。

解：1的周期是1，逆元是1；5的周期是2，逆元是5；7的周期是2，逆元是7；11的周期是2，逆元是11

练习：设集合$S_n=\{1,2,\ldots,n-1\}$，$\otimes_n$是模n乘法，则

（1）当n=6时，$(S_n, \otimes_n)$是群吗？

（2）当n=5时，$(S_n, \otimes_n)$是群吗？

解：（1）不是

（2）是（因为5是质数）

注：当n为质数时，$(S_n, \otimes_n)$ 是群

练习：

2. G_1=（Z，+），G_2=（R^*，×），其中R^*为非零实数集合，+和×分别表示数的加法和乘法。f为G_1到G_2内的映射

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\text{是偶数}\\ -1 & x\text{是奇数}\end{cases}$$

（1）试说明f为G_1到G_2内的同态映射；

（2）求此同态映射的同态像$f(G_1)$以及同态核N；

（3）试写出N的所有陪集。

证明：

(1)因为对$\forall$a、b$\in$Z，

①若a、b均为偶数，则a+b为偶数，$f(a+b)=1=1\times 1=f(a)\times f(b)$；

②若a、b均为奇数，则a+b为偶数，$f(a+b)=1=(-1)\times(-1)=f(a)\times f(b)$；

③若a、b一奇一偶，不妨设a为奇数、b为偶数，则a+b为奇数，$f(a+b)=-1=(-1)\times 1=f(a)\times f(b)$。

可见，f为G_1到G_2内的同态映射。

(2)同态像$f(G_1)=\{1,-1\}$，同态核$N=\{x|x$为偶数$\}=2Z$

(3)N的所有陪集为2Z、2Z+1。

练习:

➢设循环群G=(a)，|G|=6，(Z，+)为整数加法群,令σ是Z到G内映射，$\sigma(n)= a^n$，$n\in Z$。

证明：(1)σ是同态映射，且是满射。

(2)设N是σ的同态核，求商群Z/N。

(3) 求 (a^2)和(a^3)的原像的集合

解: (1)

同态映射：对任意的x , y∈Z,

$\sigma(x+y)=a^{x+y}=a^xa^y=\sigma(x)\sigma(y)$，即σ是同态映射。

满射：对于任意的$x=a^i\in G$，x有原像i使$\sigma(i)=a^i=x$,

即σ是满射。

●（2） 设N是σ的同态核，求商群Z/N。

同态核N=6Z,因此 Z/N= $\{\ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\ \}$

或写成Z/N={6Z,6Z+1,6Z+2, 6Z+3, 6Z+4, 6Z+5}

（3）$(a^2) = \{1, a^2, a^4\}$， $(a^3) = \{1, a^3\}$

则$\sigma^{-1}((a^2)) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$

$\sigma^{-1}((a^3)) = \{\ \bar{0}\ , \bar{3}\ \}$

注：设σ是G到G′上的一个同态映射，命N为G中所有映射到G′中1′的元素g的集合，记为$\sigma^{-1}(1')$，即

$$N=\sigma^{-1}(1')=\{g \mid g\in G, \sigma(g)=1'\}$$

则称N为σ的核。

练习：

- 设G是模20的整数加法群，G={0,1,…,19},G'是模4的整数加法群，G'={0,1,2,3},令σ：x→x(mod 4)，x∈G，

1)求σ的核

2)取G的子群H={0，5，10，15}，求$\sigma^{-1}(\sigma(H))$。

解： σ的核是{0，4，8，12，16}，

$\sigma^{-1}(\sigma(H))=G$

练习：证明14元群必有7元子群。

证明：如果是循环群，则(a^2)是7元子群。

如果不是循环群，则没有周期为14的元素，假设没有7元子群，根据拉格朗日定理，除了单位元，其余元素周期均为2，即是交换群。那么{1，a，b，ab}就组成了一个子群，而14元群不可能有4元子群，矛盾。

综上，存在7元子群。

- 设G是一个无限群，H是G的子群，问H是否可以有有限个陪集？

- 设R是实数，·是数的普通乘法，定义R上的一个一元算*，对R中任意元素a，b，有a*b=|a|·b，问（R，*）上是否有单位元？

解：1. 可以　2.没有

- 设循环群G=(a)，|G|=24，则G中是否存在周期为5的元素？是否存在8元子群？

解：不存在，存在

- 所有的4元群都同构吗？所有的7元群都同构吗？

解：不同构，同构

(4元群在同构意义下，有2种，一个是4元循环群;一个是Klein4元群—即除单位元外，其余3个元素周期都为2. 如:S4中的{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)})

- 设（G，·）是群，请给出满足方程a·b·x·c =1的解x，其中：1是G的单位元，a、b、c∈G。

解：$x=b^{-1}a^{-1}c^{-1}$

- 设G={e,a,b,c,d,f,g},（G，·）是群，e是G的单位元，计算a·b·c·d·f·g等于多少？

解： e

- 设循环群G=(a)，H是G子群，则H是正规子群吗?

解：是

- 设σ=(1 3 2 4),τ=(1 3 4),请把τσ写成若干对换乘积

解：τ σ= (1432)＝(1 2)(1 3)(1 4)

- 判断对错：

设Z为整数集合，×是整数乘法运算；则代数系统(Z, ×)中，1是单位元，且只有1存在逆元素。

错的

- 任意具有多个幂等元的半群能构成交换群。

错的（群中只存在唯一幂等元，单位元）

- 设S3是三次对称群，则H_1={I, (1 2)}不是正规子群H_2={I, (1 2 3), (1 3 2)}是正规子群。

对的({I}，S3，{I, (1 2 3), (1 3 2)} 为S3正规子群)

- 设群G={a,b,c,d,e,f}，G上的运算*定义如运算表所示。请写出(d)的所有左陪集，及G/(a)。

*	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	b	e	d	f	c
b	b	e	a	f	c	d
c	c	f	d	e	b	a
d	d	c	f	a	e	b
f	f	d	c	b	a	e

- 解：其所有左陪集{e,d}、{a,c}、{b,f}
- G/(a) ={ {e,a,b},{c,d,f } }

练习：

(1)计算σ=(132) (234)

(2)写出有σ生成的循环群H

(3)H是S4的子群，写出H在S4中的指数。

解：

(1) σ= (134)

(2) H={I , (134), (143)}

(3) H在S4中的指数为8.

***H在G中指数*:有限群G的元数除以H的元数 所得的商记为（G：H），称作H在G中的指数。 H的指数也就是H的右(左)陪集的个数.**

群的第一同态定理

定理6.4.2 设σ是群G到G′上的一个同态映射，于是，σ的核N是G的一个正规子群， 对于G′的任意元素a′，

$$\sigma^{-1}(a')=\{x|x\in G,\sigma(x)=a'\}$$

是N在G中的一个陪集，因此，G′的元素和N在G中的陪集一一对应

群的第二同态定理

定理6.4.3 设N是群G的正规子群，于是按照陪集的乘法，N的所有陪集作成一个群 $\overline{G}$ 。

命　　　　　σ： a→aN， a ∈G,

则σ是G到 $\overline{G}$ 上的一个同态映射,且σ的核就是N。

- $\overline{G}$ 称为G对于N的商群，记为G／N。

若G是有限群，则商群中元素个数等于N在G中的指数，即等于陪集的个数。

群的第三同态定理

定理6.4.4 设σ是群G到G′上的一个同态映射，若σ的核为N，则G′≅ G/N。

➢**例.** 设G是整数加法群,

σ：x→x（mod 5），x∈G，则

G′=σ（G）={0，1，2，3，4}是模5的加法群，σ是G 到G′上的同态映射。σ的核为N=5G,

$$G/N=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$$

则G′≅ G/N。

练习： (R，+)为有理数加法群，(R*，·)为非零有理数乘法群，请问(R，+)和(R*，·)是否同构?

解： 不同构。

用反证法。假设(R*，·)与(R，+)同构，可设映射σ为R*到R上的一个同构映射，于是必有

σ：$1 \rightarrow 0$，

$-1 \rightarrow a$， $a \neq 0$。

从而，

$\sigma(1)=\sigma((-1)\cdot(-1)) =\sigma(-1)+\sigma(-1)=a+a=2a$。

则有2a=0，a=0，与$a \neq 0$矛盾。

note: 同理（Q，+）和（Q*，·）不同构。

练习：设G是模20的整数加法群，G={0,1,…,19}, G’是模4的整数加法群，G’={0,1,2,3},令σ：x→x(mod 4)，x∈G，

1)求σ的核

2)取G的子群H={0，5，10，15}，求$\sigma^{-1}(\sigma(H))$。

解：σ的核是{0，4，8，12，16}，

$\sigma^{-1}(\sigma(H))=G$

练习：设（G，·）是一个交换群，H是由G中所有周期是有限的元素构成的集合，试证明：

（1）（H，·)是（G，·）的正规子群。

（2）在商群G／H中，除了单位元H外，所有元素的周期都是无限的。

证明：(1)显然H非空。因为1的周期有限，$1\in H$。对于任意的a，$b\in H$，往证$a\cdot b^{-1}\in H$。由a，$b\in H$，知a，b周期有限，不妨设a的周期为m，b的周期为n，则$a^m=1$，$b^n=1$，$b^{-n}=1$，故

$$(a\cdot b^{-1})^{mn}=(a^m)^n\cdot(b^{-n})^m=1,$$

可见，$a\cdot b^{-1}$的周期是有限的，因此，$a\cdot b^{-1}\in H$。所以，(H，·)是(G，·)的子群。再由(G，·)是一个交换群，交换群的子群都是正规子群，因此，(H，·)是(G，·)的正规子群。

(2)使用反证法。假设G / H中存在一个非单位元H的元素aH，使得aH的周期是有限的，不妨设为n，则$(aH)^n=H$。

若令 σ：a→aH，

则σ是G到G/H上的一个同态映射。于是

$a^nH=\sigma(a^n) = \sigma(a)\,\sigma(a) \ldots \sigma(a)$

$=aH\,aH\ldots aH=(aH)^n=H.$

所以，$a^n\in H$，即a^n的周期有限，故a的周期亦有限，即$a\in H$，于是，aH=H，与$aH\neq H$矛盾。因此，原假设不对，G/H中除了单位元H外，所有元素的周期都必然是无限的。

三大类环：

- 交换环、含单位元（含壹）环、消去环
- 消去环性质：

性质1环R是消去环当且仅当R中非零元消去律成立。

性质2 在消去环R中，不为0的元素在加法下的周期相同。

性质3 在消去环R中，不为0的元素在加法下的周期或为0或为质数。

练习：设(R，＋，·)是一个环，如果(R，＋)是一个循环群，证明：R是一个交换环。

解：因为(R，＋)是循环群，则必存在生成元a，则R中任意元素可表示为na, n∈Z。

设R中任意两个元素x=ma，y=na，则

x·y=mana=mnaa=nama=y·x

因此，R中乘法满足交换律，故R是交换环

练习：环R中，若乘法满足幂等律，证明：若|R| > 2，则R不是整区。

证明：反证法。假设R是整区，则R无零因子。

因为|R| > 2，故R中有互异的元素a, b(均不为0)。

由$a^2 = a$得 $(a^2-a)b = a(ab-b) = 0$

因R是整区，无零因子，a不为0，于是由上得

$ab - b = 0$; $ab - b^2 = 0$, $(a-b)b = 0$

但b不为0，于是有a =b, 矛盾。因此，R不是整区。证毕。

- **习题6.3-6** 设G是6元循环群，(1)试找出G的所有生成元，(2)并找出G的所有子群。

解:

(1)设$G=\{1,a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$，a和$a^5$是G的生成元

(2)循环群的子群仍是循环群，故用G的每个元素去生成群，即得G的子群，6的因数是1,2,3,6，只考虑 a, a^2, a^3, a^6生成的子群即可。

$\{1\}$，$(a^3)=\{1, a^3\}$，$(a^2)=\{1, a^2, a^4\}$，以及G

练习.证明：对于群(G,*)中任意元素a,b，元素ab和元素ba的周期都相同。

证明：1)如果元素ab和元素ba的周期均为0，则他们的周期相同。

2)如果元素ab的周期为整数m，即$(ab)^m=1$. $(ba)^{m+1}=b(ab)^m a=ba$，即$(ba)^m=1$。设ba的周期为整数n，则n|m。又因为$(ba)^n=1$，即$b(ab)^{n-1}a=1$，$(ab)^{n-1}=b^{-1}a^{-1}=(ab)^{-1}$，$(ab)^n=1$，则m|n。所以n=m .

3) 同理，如果元素ba的周期为整数n，则ab的周期也一定为n。证毕。

练习. 设有限交换群（G，·）中所有元素之积不等于单位元1，试证明G必为偶数元群。

证明：用反证法。假设（G，·）为奇数元群，往证（G，·）中所有元素之积等于单位元1。

由G有限，设$G=\{1, a_1, a_2, \ldots, a_{2n}\}$。

练习：设G为n元循环群，a是生成元。设m与n的最高公因为d，试证明：$(a^m)=(a^d)$

证明：因为$d|m$，所以，$a^m \in (a^d)$，故$(a^m)\subseteq(a^d)$。

因d为m与n的最高公因，所以存在k，l，使得$d=km+ln$。于是，$a^d= a^{km+ln} = a^{km}a^{ln}$

由$G=(a)$是n元循环群，a是生成元知，$a^n=1$，故$a^{ln}=1$，代入上式得：$a^d=a^{km}$。

而$a^{km}\in(a^m)$，从而$a^d\in(a^m)$。故

$(a^d) \subseteq (a^m)$

因此，$(a^d)=(a^m)$。

练习：

- 整区中是否存在零因子？整区中所有非零元素的乘法周期都相等吗？

解：不存在，不相等

- N是自然数集， 是数的小于等于关系，则 是有余分配格。对吗？

不对（有余格首先是有界格）

- 整数模4的所有剩余类集合Z_4在剩余类加法与乘法下作成一个整区，对吗？

不对

自同构映射的例—习题6.4-7

➢设G是群，证明对$\forall a\in G$，σ_a**:x→axa**$^{-1}$$(x\in G)$是G的自同构映射，称为G的内自同构映射。

证明：

(1)任取$x\in G$，都有唯一确定元素$axa^{-1}\in G$，σ_a是G到G的映射

(2)任取$\in x_1, x_2\in G$, $x_1\neq x_2$,得$ax_1a^{-1}\neq ax_2a^{-1}$,因此, σ_a是单射

(3)任取$x\in G$，都有$a^{-1}xa\in G$，满足$\sigma_a(a^{-1}xa)=x$，σ_a是满射。

(4)任取$\in x_1, x_2\in G$,

$\sigma_a(x_1x_2)=ax_1x_2a^{-1}=ax_1a^{-1}ax_2a^{-1}=\sigma_a(x_1)\ \sigma_a(x_2)$

综上, σ_a为G到G上的同构映射, 即为G的自同构映射。

练习

- 设f和g是群G到G’的满同态映射,而$\phi(x)=f(x)g(x)$,对任意x。试证明：ϕ是群G到G’的同态映射当且仅当G’是可交换的。

证明： 若ϕ是群G到G’的同态映射，往证G’是可交换的。$\forall x', y' \in G'$,因f，g是满射，故存在$x,y \in G$,使$g(x)=x'$,$f(y)=y'$. 于是，$\phi(xy)=f(xy)g(xy)=f(x)f(y)g(x)g(y)=f(x)\, y'x'\, g(y)$，而$\phi(x)\,\phi(y)=f(x)g(x)f(y)g(y)=f(x)x'\, y'g(y)$，故$f(x)\, y'x'\, g(y)=f(x)x'\, y'g(y)$，群中消去律成立，$y'x'=x'y'$.则G’是可交换的。

例:

若G’是可交换的，往证ϕ是群G到G’的同态映射。

$\forall x,y \in G$，$\phi(xy)=f(xy)g(xy)=f(x)f(y)g(x)g(y)$
$=f(x)\,g(x)\,f(y)g(y)=\phi(x)\,\phi(y)$。

习题

1、给定整数m，令G={km|k∈Z}，证明：(G,+)是一个群。

证明：(1)G非空，至少0∈G

(2)对于任意x,y∈G，存在k,l，使得x=km，y=lm，由于k+l∈Z，因此，x+y=km+lm=(k+l)m∈G，封闭

(3)由整数运算性质，+满足结合律。

(4)有左壹：0m=0∈G,使得对任意x∈G，有0+x=x

(5)有左逆：对任意x∈G，存在k∈Z，使x=km，因-k∈Z,故-x=(-k)m ∈G,且(-x)+x=0 .

因此，(G,+)为群。

2、设(G , .)是一个群，x,y $\in$G, k是一个正整数.

证明:$(x^{-1}\cdot y\cdot x)^k = x^{-1} y\cdot x$的充要条件是$y^k = y$.

证明:

$$(x^{-1}\cdot y\cdot x)^k=(x^{-1}\cdot y\cdot x)\cdot(x^{-1}\cdot y\cdot x)\cdot\ldots\cdot(x^{-1}\cdot y\cdot x)$$

$$=(x^{-1}\cdot y)\cdot(x\cdot x^{-1})\cdot y\cdot(x\cdot x^{-1})\cdot\ldots\cdot(x\cdot x^{-1})\cdot y\cdot x$$

$$= x^{-1} y^k x$$

由上述等式，显然有

$(x^{-1}\cdot y\cdot x)^k = x^{-1} y\cdot x$ iff

$x^{-1} y^k\cdot x = x^{-1} y\cdot x$ iff

$y^k = y$

3、在整数Z上定义运算•如下：对任意a，b $\in$Z

a•b=a+b-2 。证明：(Z, •)是一个群。

证明：(1)Z非空。

(2)任意a，b$\in$Z，a•b=a+b-2 $\in$Z，封闭

(3)任取a,b,c $\in$Z,有(a•b) •c=a+b-2+c-2=a+b+c-4

a•(b•c)=a+(b•c)-2=a+(b+c-2)-2=a+b+c-4 结合律

(4)有左壹2 $\in$Z：对任意a$\in$Z，有2•a=2+a-2=a

(5)有左逆4-a $\in$Z :对任意a$\in$Z，有(4-a) •a=(4-a) +a-2=2 因此，(Z, •)是一个群

4、设(G, •)是一个群，若群G的每一个元素都满足方程$x^2=1$（1为单位元），那么G是Abel群。

证法一：对任意a，b $\in$ G，

$a \bullet b = a \bullet 1 \bullet b = a \bullet (a \bullet b)^2 \bullet b = a \bullet (a \bullet b \bullet a \bullet b) \bullet b$

$= a^2 \bullet (b \bullet a) \bullet b^2 = 1 \bullet (b \bullet a) \bullet 1 = b \bullet a$

即，$a \bullet b = b \bullet a$，所以G是Abel群。

证法二：对任意的$x \in G$，由$x^2=1$可得$x^{-1}=x$，因此，对任意的a，b $\in$ G，有

$a \bullet b = (a \bullet b)^{-1} = b^{-1} \bullet a^{-1} = b \bullet a$

5. 证明：在偶数元的有限群G中，方程$x^2=1$（1为单位元），有偶数个解。

证明：

由$x^2=1$可得$x^{-1}=x$。因若$x^{-1}\neq x$，由群中任意元素的逆唯一，知x与x^{-1}必在G中成对出现，其总的个数为偶数。即不满足$x^2 = 1$的元素个数为偶数。而G又为偶数元群，因此G中满足方程$x^2=1$ 的解有偶数个.

6.设A是一个非空集合，A^A 是A到A的所有映射组成的集合。试证明A^A关于映射的乘积“•”构成一个有单位元的半群。

证明：

1）A非空，A^A非空

2） $\forall f, g \in A^A$, $(f•g)(x)=f(g(x))$, $\forall x \in A$， $f•g \in A^A$

3)映射乘积满足结合律

4）存在单位元$I_A(x)=x$，$f•I_A=I_A•f=f$

7.设（S，*）是一个半群，如果对所有的$a,b \in S$, 只要$a \neq b$， 必有$a*b \neq b*a$, 证明:

1） $\forall a \in S$,有$a*a=a$

2) $\forall a,b \in S$, 有$a*b*a=a$

3 ）$\forall a,b,c \in S$,有$a*b*c=a*c$

证明： 由已知条件得，若$a*b=b*a$,则$a=b$

1) $(a*a)*a= a*(a*a)$, $a*a=a$

2) $(a*b*a)*a= a*b*a$

$a*(a*b*a)=a*b*a$,因此 $a*b*a=a$

3) $(a*b*c)*(a*c)=a*b*(c*a*c)=a*b*c$

$(a*c)*(a*b*c)=(a*c*a)*b*c=a*b*c$

因此， $a*b*c=a*c$

8. 设(G, •)是一个群，**u** $\in$**G**，**定义**

$a*b= a\bullet u^{-1}\bullet b$, $\forall a, b\in G$，证明(G,*)是一个群。

证明:

1）G非空

2）封闭: $\forall a, b\in G$，$a*b= a\bullet u^{-1}\bullet b \in G$，

3）结合律: $\forall a, b, c\in G$

$(a*b)*c=(a\bullet u^{-1}\bullet b) \bullet c=a\bullet u^{-1}\bullet b\bullet u^{-1}\bullet c$

$a*(b*c)=a*(b\bullet u^{-1}\bullet c)=a\bullet u^{-1}\bullet b\bullet u^{-1}\bullet c$ ，$(a*b)*c=a*(b*c)$

4）左壹：$\forall a\in G$, 有$u\in G$, $u\bullet a=u\bullet u^{-1}\bullet a=a$

5) 左逆：$\forall a\in G$，有$(u\bullet a^{-1}\bullet u) \in G$,

$(u\bullet a^{-1}\bullet u) \bullet a=(u\bullet a^{-1}\bullet u) \bullet u^{-1}\bullet a=u$

9.设G是一个非交换群,则G中存在$a \neq b$，使$ab=ba$且a，b都不是单位元。

证明：先证存在$a \in G$，使$a \neq a^{-1}$. 反证法，假设$\forall x \in G$，都有$x=x^{-1}$，则$\forall x,y \in G$，$xy=(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}=yx$，与G是非交换群矛盾。

设$a \in G$，$a \neq a^{-1}$. 令$b=a^{-1}$，则有$a \neq b$，$a \neq e$，$b \neq e$且$ab=ba$.

10、证明：在偶数元的有限群G中必存在元素 $a\neq e$ 使得 $a^2=e$，(其中e为单位元)

证明：

只需证明G中必存在元素 $a\neq e$ ，使得 $a=a^{-1}$

反证法:假设对G中所有的元素 $a\neq e$，都有 $a\neq a^{-1}$

由群中任意元素的逆唯一，知，a与 a^{-1} 必在群中成对出现，其总的个数为偶数。而 $e=e^{-1}$，因此加上e，群G的元数为奇数，与偶数元群的前提矛盾。

11、设(A,*)是一个群，对每一个元素$a \in A$，做映射$\sigma_a(x)=a*x$,$\forall x \in A$。设$G=\{\sigma_a | a \in A\}$,证明G关于映射的乘法构成一个群。

证明：

1)G非空，至少$\sigma_e(x)=e*x=x \in G$。(e是群A的单位元)

2)任取σ_a ,$\sigma_b \in G$, $\sigma_a \bullet \sigma_b(x)=\sigma_a(b*x)=(a*b)*x=\sigma_{a*b}(x) \in G$

3)映射乘法满足结合律

4)存在$\sigma_e \in G$，对于任意$\sigma_a \in G$，$\sigma_e \bullet \sigma_a=\sigma_{e*a}=\sigma_a$

5)对任意$\sigma_a \in G$,存在$\sigma_a^{-1} \in G$, 满足$\sigma_a^{-1} \bullet \sigma_a=\sigma_{a^{-1}*a}=\sigma_e$