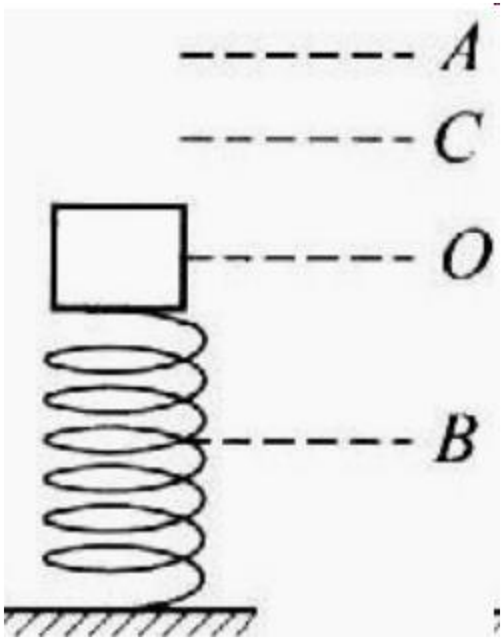
第2章　机械振动



概　述

机械振动： 物体在一定位置附近做来回往复的运动，称为**机械振动**。如声源的振动、钟摆的摆动等。

特点： 有平衡点，具有重复性

振　　动： 任何一个物理量在某一定值附近作反复变化，称为**振动**。

简谐振动： 最简单、最基本的机械振动。

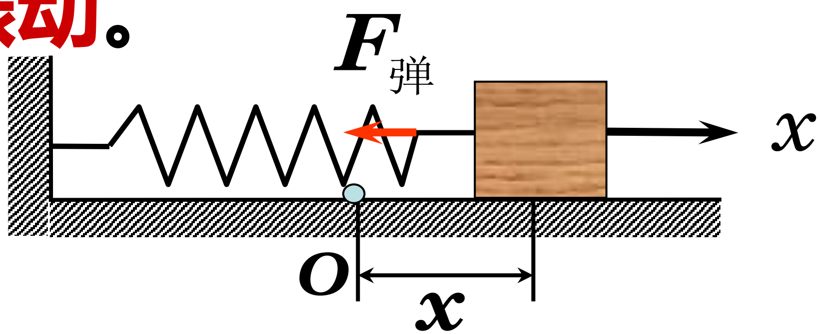
2.1 简谐振动

2.1.1 简谐振动方程

现象演示 弹簧振子

一、简谐振动(simple harmonic motion)

物体在一定位置附近的位移变化满足余弦（或正弦）规律，称为**简谐振动**。



二、 简谐振动基本特征

以弹簧振子为例

在弹性限度内，弹性力由**胡克定律（Hooke law）**为

$$F = -kx$$

由牛顿第二定律得

$$a = \frac{F}{m} = -\left(\frac{k}{m}\right)x = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

令 $\omega^2 = \frac{k}{m}$ （ω 称为**角频率**）

有 $$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

动力学特征： 简谐振动的加速度与位移x成正比，且方向相反。

三、简谐振动方程

由上式得 $$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

——简谐振动的**微分方程**。

其解为 $$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

——简谐振动的**运动方程**。

运动学特征： 位移x按余弦(或正弦)函数的规律随时间变化。

四、简谐振动的速度与加速度

速 度： $\upsilon=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$

$$=\omega A\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$\boxed{\omega A=\upsilon_m}$ ——速度振幅

加速度： $a=\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2A\cos(\omega t+\varphi)$

$$=\omega^2A\cos(\omega t+\varphi+\pi)$$

$\boxed{\omega^2A=a_m}$ ——加速度振幅

- **位移x、速度υ、加速度a三者与时间t的关系如现象所示。**

现象演示 振动基本规律

2.1.2 描述简谐振动的特征量

一、振幅（amplitude）

振动物体离开平衡位置的**最大距离**。

注意： A、ωA、$\omega^2 A$分别是位移、速度、加速度振幅。

二、周期（period）和频率（frequency）

完成一次**全振动**所需的时间T，单位是s。

✵ **周期的表示方法**

$$A\cos(\omega t+\varphi)=A\cos[\omega(t+T)+\varphi]$$

$$\Rightarrow \quad \omega T=2\pi \qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

式中ω是角频率，单位是$\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$。

因周期只与振动系统自身性质有关,故又称为**固有周期(natural period)**。

✵ 频率的表示方法

物体在一秒内完成全振动的次数，用ν表示，单位是Hz（赫兹）。

$$\nu = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi\nu, \quad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

频率只与振动系统自身性质有关,故又称为**固有频率(natural frequency)**。

三、相位与初相位 (phase and initial phase)

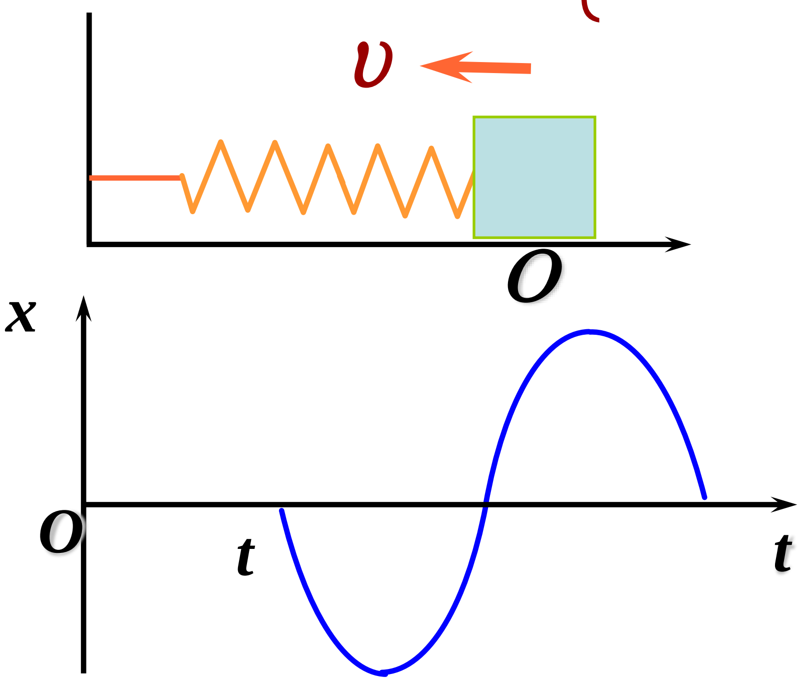
$\omega t + \varphi$ 为相位，φ为初相位，单位是rad。

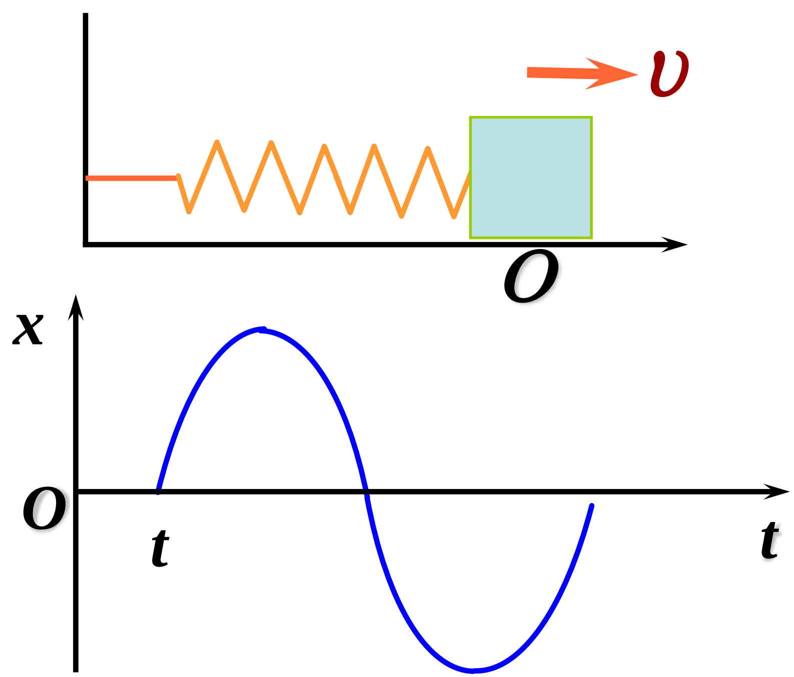
分析思考问题

（1）相位的意义

反映了振动的周期性；相位确定了振动物体运动状态。

例： $\omega t+\varphi=\dfrac{\pi}{2},\ \begin{cases} x=0 \\ \upsilon=-\omega A \end{cases}$ $\omega t+\varphi=\dfrac{3\pi}{2},\ \begin{cases} x=0 \\ \upsilon=\omega A \end{cases}$





（2）初相φ，t=0时刻的相位。决定振动物体初始时刻的运动状态。

由运动方程可知：$t=0$时刻

$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ \upsilon_0 = -\omega A\sin\varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\upsilon_0^2}{\omega^2}}, \quad \tan\varphi = -\frac{\upsilon_0}{\omega x_0}$$

$$\boxed{x_0, \upsilon_0 \leftrightarrow A, \varphi}$$

四、相位差（phase difference）

两个简谐振动的相位之差称为**相位差**，用 $\Delta\varphi$ 表示。

表示:

$$x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\Delta\varphi = (\omega_2 t + \varphi_2) - (\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$= (\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)$$

对同频情况: $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

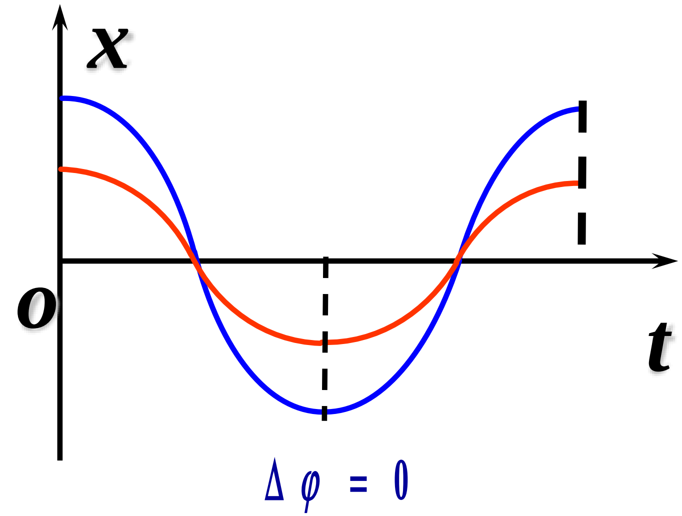
即同频率的两个简谐振动，其相位差等于它们的初相差。

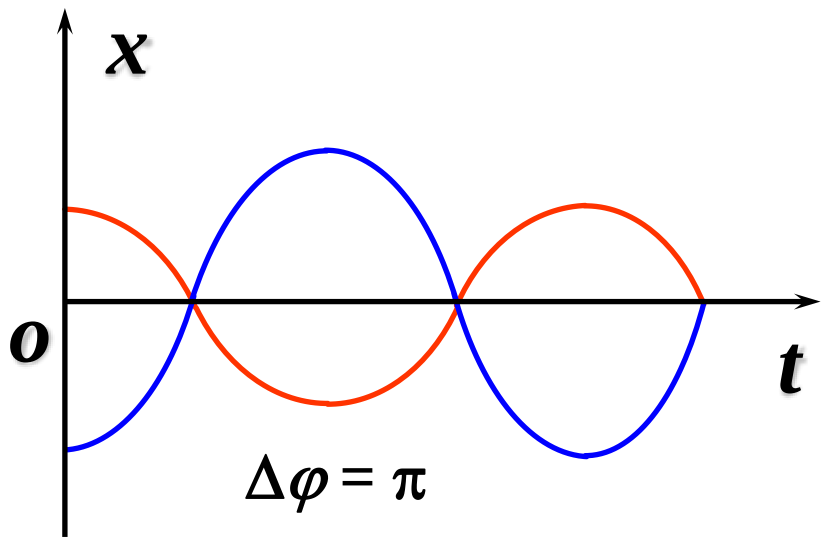
分析思考问题

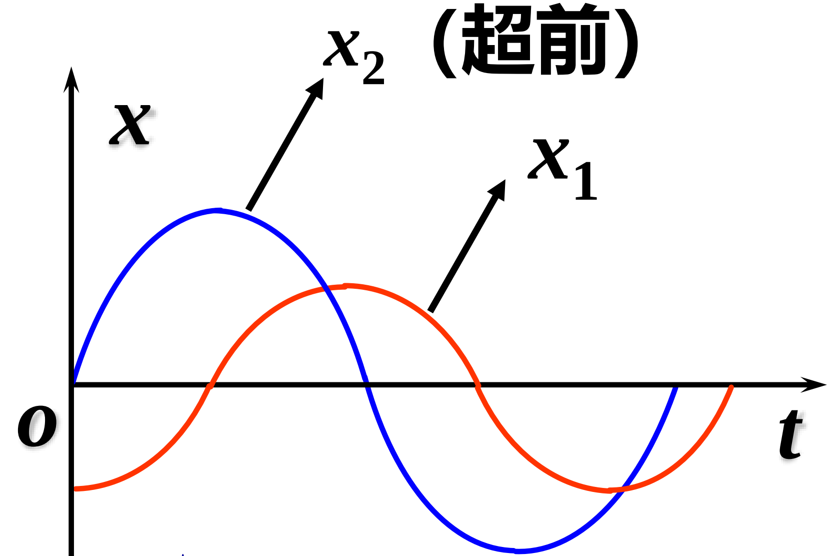
1° $\Delta\varphi$ 反映两振动的步调情况：

- $\Delta\varphi=0$，同步振动；
- $\Delta\varphi=\pi$，振动步调相反；
- $\Delta\varphi>0$，x_2振动超前；

$\Delta\varphi<0$，x_1振动超前。







$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1>0$

$-\pi<\Delta\varphi<\pi$

2º 用相位差还可以比较两振动到达同一状态的时间差

$$(\omega t_2 + \phi_2) = (\omega t_1 + \phi_1)$$

$$\Rightarrow \Delta t = t_2 - t_1 = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\omega}$$

$$\longrightarrow \Delta \varphi = \omega \cdot \Delta t$$

例2.1 一物体沿x轴做简谐振动，其振动规律为$x=A\cos(\omega t+\varphi)$，设$\omega=10\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$，且当$t=0$时，物体的位移为$x_0=1\text{m}$，速度为 $\upsilon_0=-10\sqrt{3}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$求该物体的振幅和初相位。

解： 将 $\omega=10\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$，$x_0=1\,\text{m}$，$\upsilon_0=-10\sqrt{3}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

代入 $\begin{cases} A=\sqrt{x_0^2+\dfrac{\upsilon_0^2}{\omega^2}} \\ \tan\varphi=-\dfrac{\upsilon_0}{\omega x_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2\text{m} \\ \tan\varphi=\sqrt{3} \end{cases}$

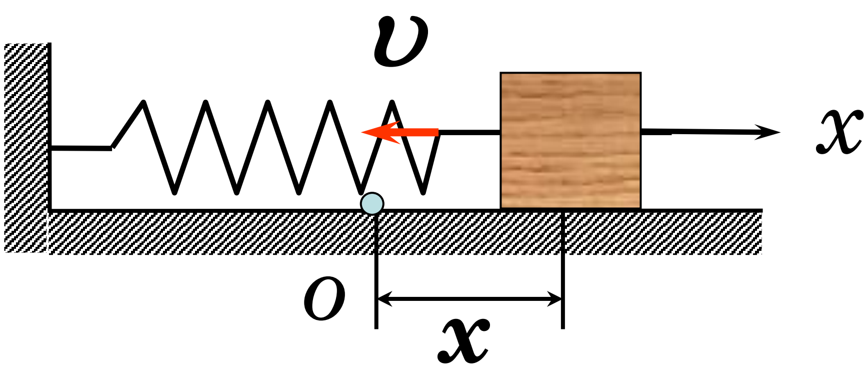
则 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\varphi=\dfrac{4}{3}\pi$

因为 $\upsilon_0=-\omega A\sin\varphi=-10\sqrt{3}\text{m}\cdot\text{s}^{-1}<0$

所以 $\sin\varphi>0 \Rightarrow \varphi=\dfrac{\pi}{3}$

2.1.3 简谐振动的能量

以弹簧振子为例:



$$E = E_{\mathrm{p}} + E_{\mathrm{k}}$$

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}kx^2 \qquad E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

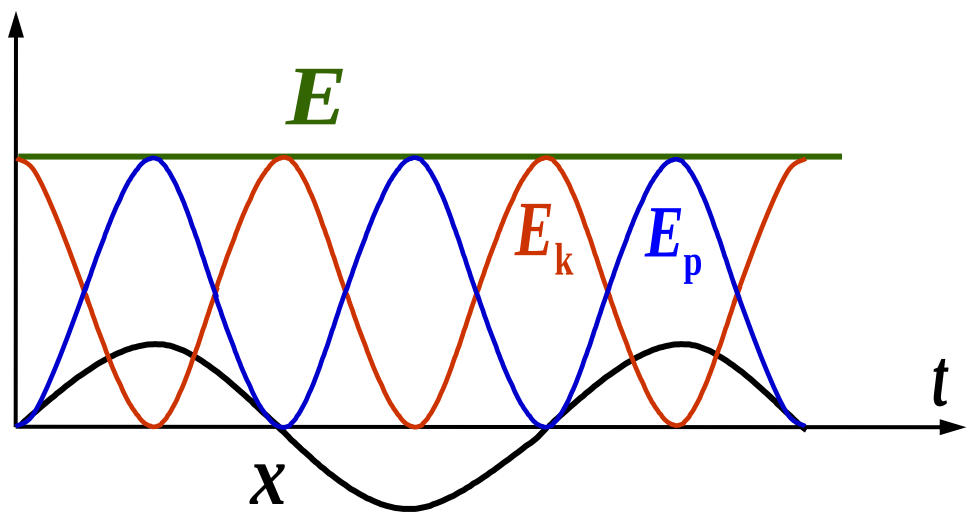
由 $x = A\cos(\omega t+\varphi),\quad \upsilon = -\omega A\sin(\omega t+\varphi)$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{\mathrm{p}} = \dfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi) \\ E_{\mathrm{k}} = \dfrac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

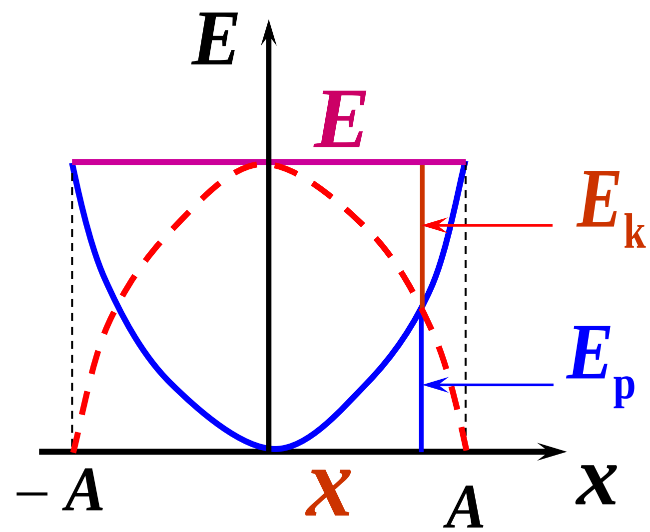
因为 $\omega^2 = \dfrac{k}{m} \Rightarrow \quad E = \dfrac{1}{2}kA^2$

分析思考问题

（1）动能、势能均为时间的函数，其相位差为 $\pi/2$。二者可以相互转化，总能量是与时间 t 无关的常量。其频率和简谐振动频率关系?



能量随时间变化



能量随空间变化

现象演示 振动能量

(2) 考察一个周期内的动能与势能平均值

$$\overline{E_{\mathrm{p}}} = \frac{1}{T}\int_0^T E_{\mathrm{p}}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}kA^2$$

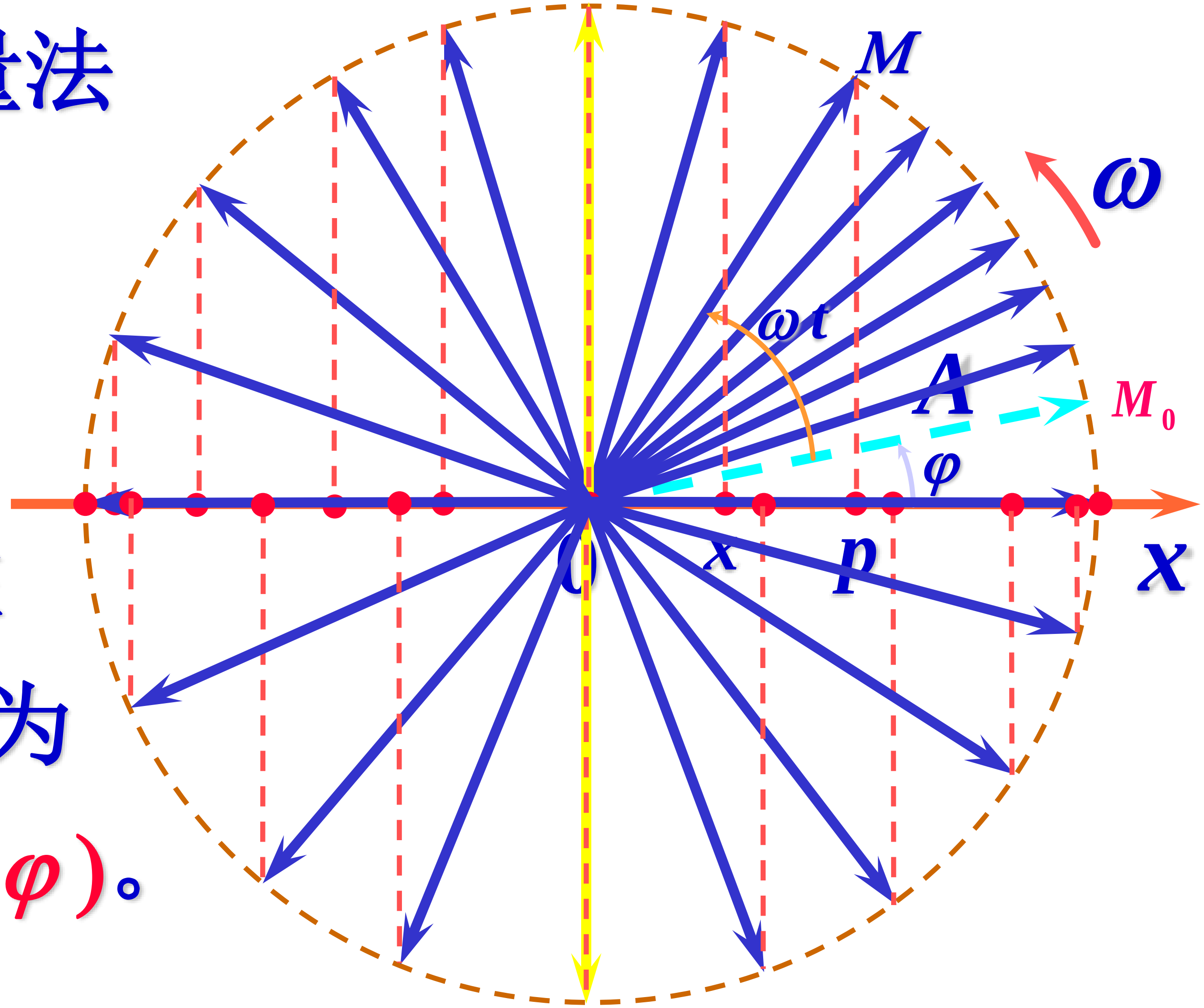
$$\overline{E_{\mathrm{k}}} = \frac{1}{T}\int_0^T E_{\mathrm{k}}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}kA^2$$

$$\Rightarrow \quad \overline{E_{\mathrm{k}}} = \overline{E_{\mathrm{p}}} = \frac{1}{2}\overline{E}$$

在一个周期内的平均动能与平均势能相等，各是总能量的一半。

2.1.4 旋转矢量法



t 时刻, 矢径A

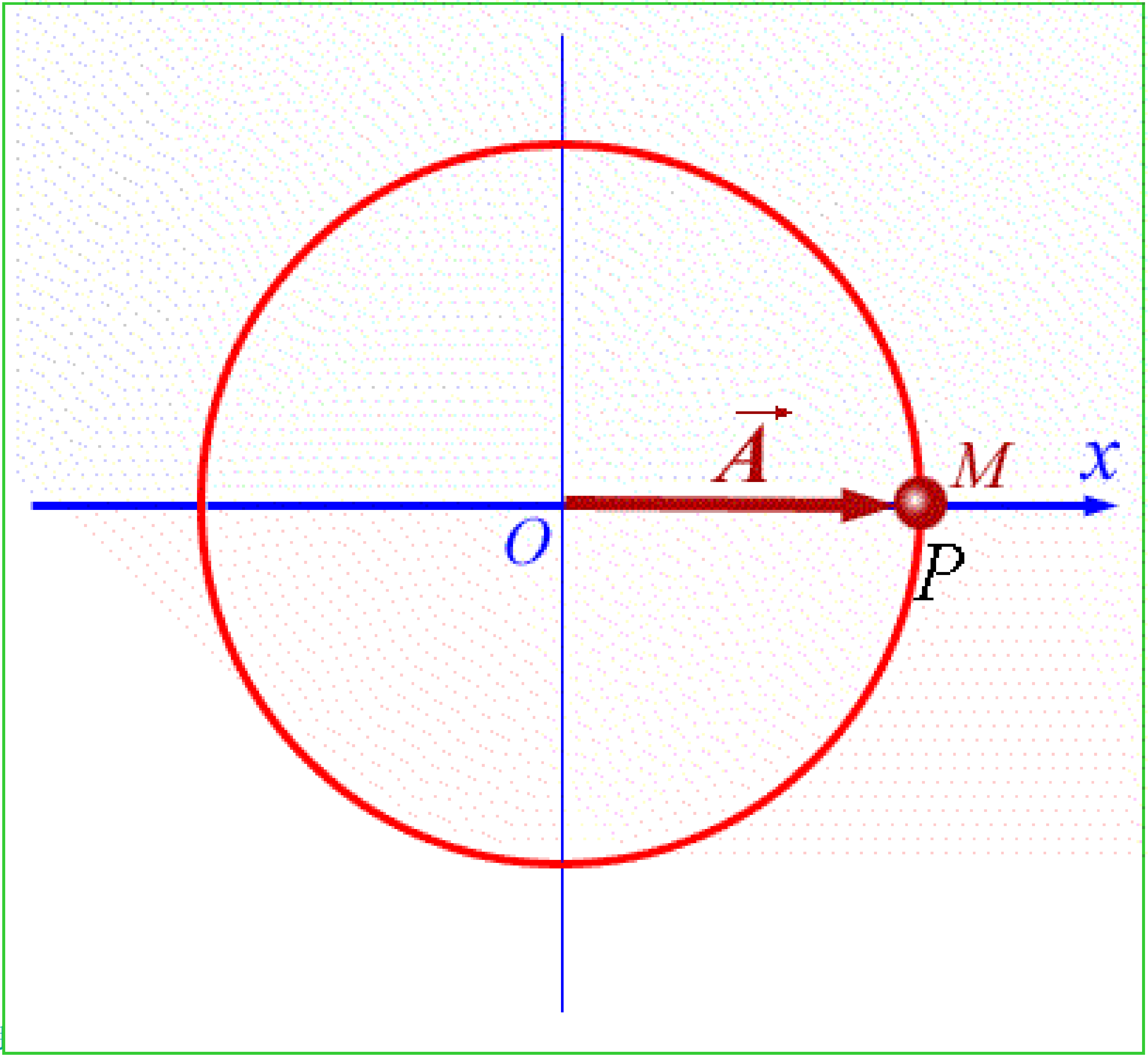
与x 轴的夹角

为$(\omega t+\varphi)$,在

x 轴上的投影为

$x=A\cos(\omega t+\varphi)$。

旋转矢量的端点在x 轴上的投影点的运动为简谐振动。


$\vec{A}$
M
x
O
P

物理模型与数学模型比较

	谐振动	旋转矢量
A	振幅	半径
φ	初相	初始角坐标
$\omega t+\varphi$	相位	角坐标
ω	圆频率	角速度
T	谐振动周期	圆周运动周期

例2.2 一质点在x轴上做简谐振动，振幅为A，周期为T。

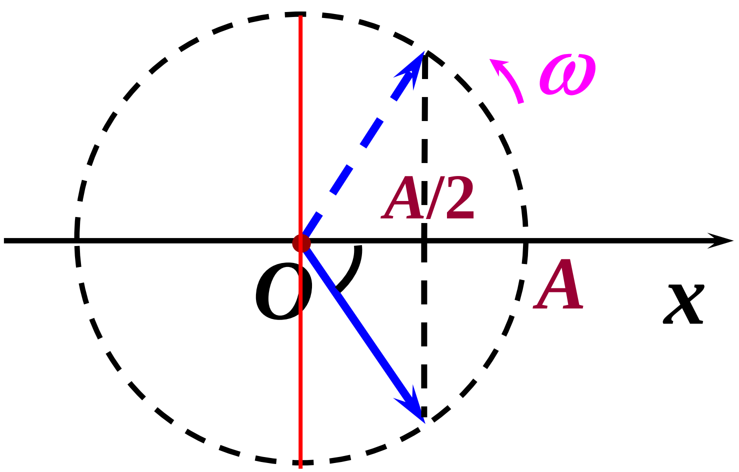
（1）当$t = 0$时，质点相对平衡位置（$x = 0$）的位移为$x_0 = A/2$，且向x轴正方向运动，求质点振动的初相；

（2）问质点从$x = 0$处到$x = A/2$处最少需要多少时间？

解：(1) 由旋转矢量法

$$\varphi = \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \varphi = -\frac{\pi}{3}$$

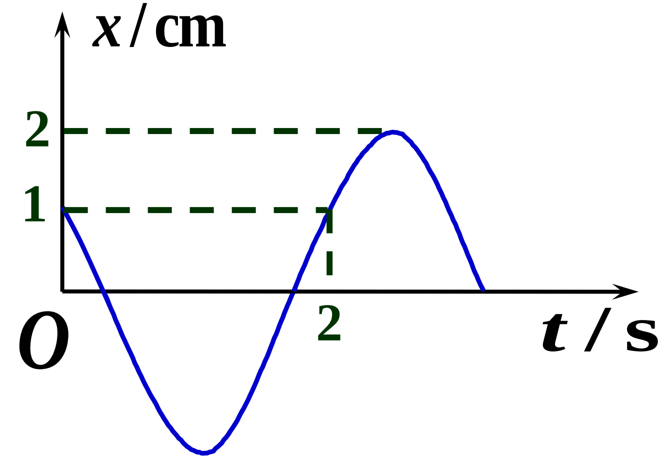
因 为 $\upsilon > 0$ 所 以 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$



(2) 如图所示，旋转矢量从φ =-π/2 逆时针转到φ =-π/3处，满足时间最短要求，矢量转过了π/6 角位移。

相位改变 $\Delta\varphi = \frac{\pi}{6}$ 最短时间 $\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{T}{12}$

例2.3　一质点做简谐振动，其振动曲线如图所示，求质点的振动方程。



解：由图可知 $A = 2\text{cm}$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$$

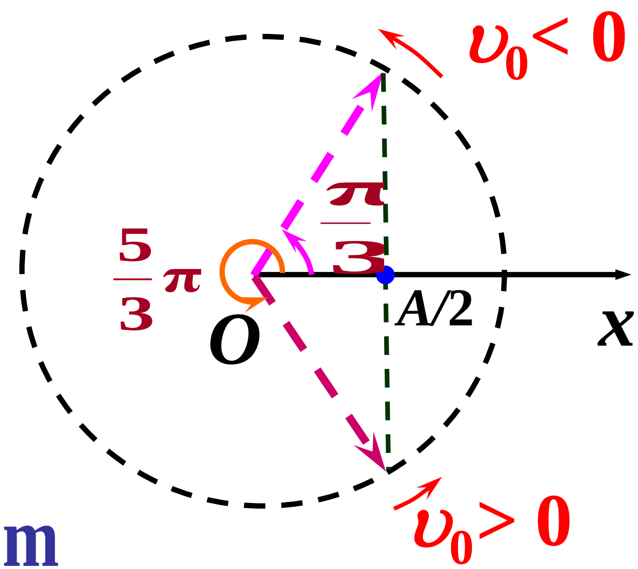
当$t = 2\text{s}$，$x_0 = A/2$

相位 $$\varphi = \frac{5\pi}{3}$$

相位改变为 $$\Delta\varphi = \frac{4\pi}{3}$$

角频率 $$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{3}$$

振动方程 $$x = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{3}\right)\ \text{cm}$$



练习1：当简谐振动的位移是振幅一半时，其动能和势能各占总能量的多少？在什么位置，动能和势能各占总能量的一半？

解 （1）$x=\pm A/2$ 代入 $E_p=\frac{1}{2}kx^2$ 中

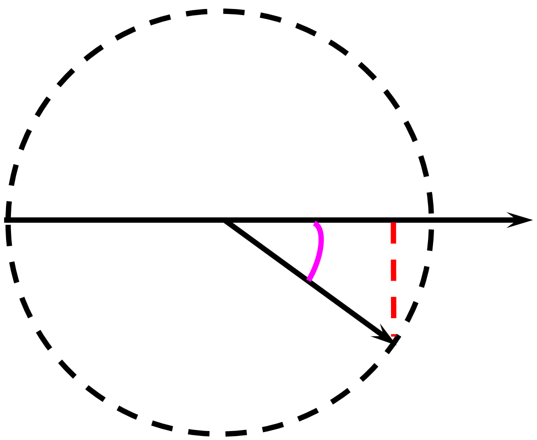
$$E_p=\frac{1}{4}(\frac{1}{2}kA^2)$$

$$E_k=\frac{1}{2}kA^2-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}kA^2\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}kA^2\right)$$

(2) $E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}kA^2)$

$$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}A$$

练习2： 一弹簧振子沿x轴做简谐振动。已知其振动的最大位移$x_m=0.3\text{m}$，最大恢复力$F_m=1.2\text{N}$，最大速度$\upsilon_m=1.2\pi\text{ms}^{-1}$。$t=0$时刻的初位移$x_0=\sqrt{3}A/2$，且方向同$x$轴正方向一致。求: 1）振动能量； 2）此振动方程。



解: (1) $x_m = A \quad F_m = kA$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = 0.18\text{J}$$

(2) $\omega = \dfrac{\upsilon_m}{A} = 4\pi \quad \varphi = -\dfrac{\pi}{6}$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$x = 0.3\cos(4\pi t - \frac{\pi}{6})$$

练习3： 已知:m=2.5kg，k=250N/m, t=0时振子处于平衡位置右方且向x轴负方向运动，此时E_k=0.2J，E_p=0.6J。

求：(1) t =0时振子的位移和速度;

(2) 振动方程。

解：(1)

$$E_{k0} = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 \rightarrow \upsilon_0 = -\sqrt{\frac{2E_{k0}}{m}} = -0.4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$E_{p0} = \frac{1}{2}kx_0^2 \rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{2E_{p0}}{k}} = 0.069\ \mathrm{m}$$

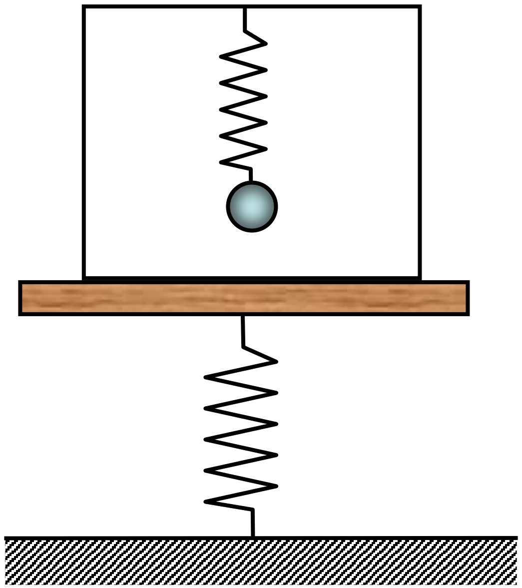
(2)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},\quad E = \frac{1}{2}kA^2 = 0.8\,\mathrm{J} \rightarrow A = 0.08\ \mathrm{m}$$

$$\cos\varphi = x_0/A \Rightarrow \varphi = \pi/6$$

$$x = 0.08\cos(10t + \pi/6)$$

2.2.1 同频率、同方向简谐振动合成



特点： $\omega_1=\omega_2=\omega$，$x_1 // x_2$

表示： 对如下两个振动

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

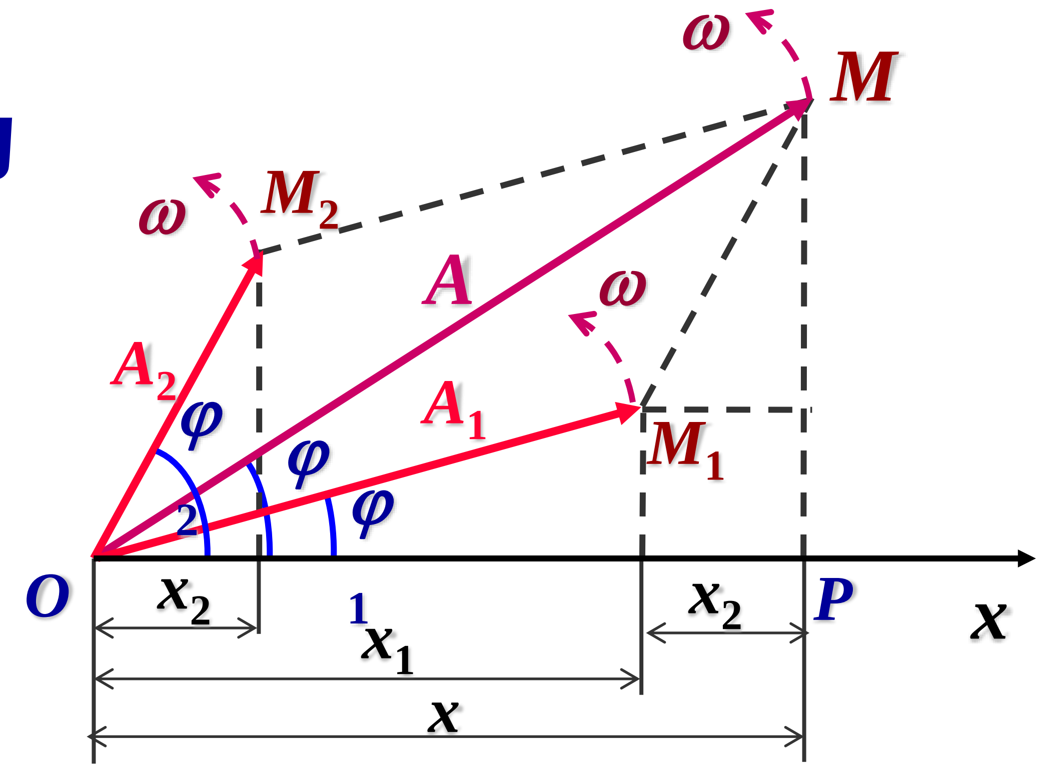
合振动位移 x 就是 x_1 与 x_2 的代数和

$$x = x_1 + x_2$$

$$= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

合成结果为频率为 ω 的简谐振动。

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$



由旋转矢量法得出 A、φ 为

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

分析思考问题

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

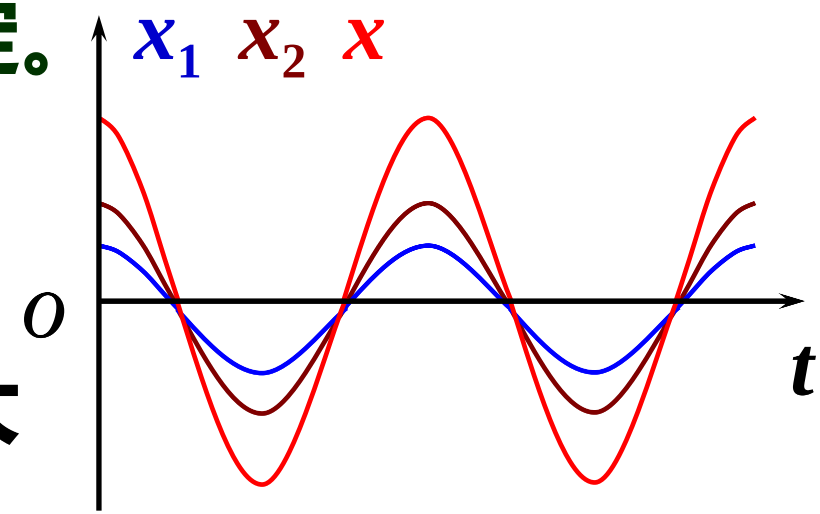
合振幅大小由初相位差决定。

(1) $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=2k\pi$

$$k=0,\pm1,\cdots$$

则： $A=A_1+A_2$ **振幅最大**

当$A_1=A_2$时，合振幅是$2A_1$；

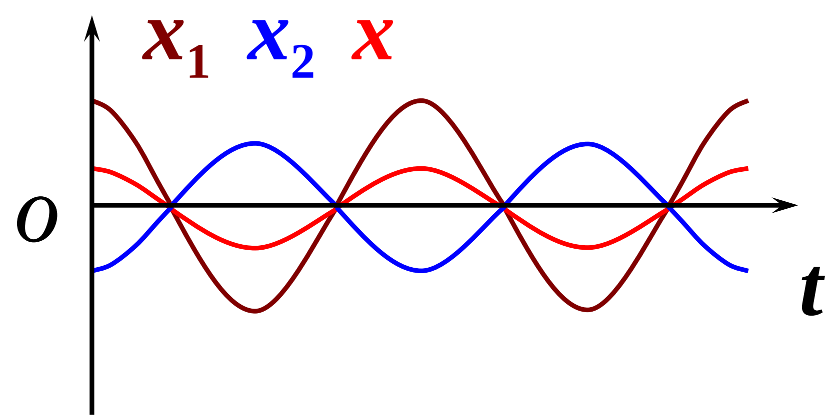


(2) $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi$

$$k=0,\pm1,\cdots$$

则： $A=\left|A_1-A_2\right|$ **振幅最小**

当$A_1=A_2$时，合振幅为0。



现象演示 **振动的合成**

例：一物体同时参与同一直线上的两个简谐振动，

其方程分别为：$\begin{cases} x_1 = 0.10\cos(4\pi t - \pi/2) \\ x_2 = 0.05\cos(4\pi t + \pi/2) \end{cases}$

求：合振动表达式。

解：直接考察两个振动相位差：

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$
$$= (4\pi t + \pi/2) - (4\pi t - \pi/2) = \pi$$

$$A = |A_1 - A_2| = 0.05$$

$$\because A_1 > A_2 \quad \therefore \varphi = \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$$

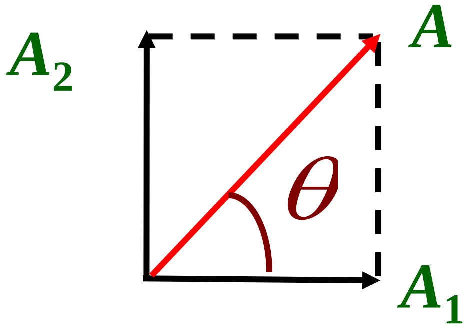
$$x = 0.05\cos(4\pi t - \frac{\pi}{2})$$

【练习】已知两个同方向的简谐振动：

$$x_1 = \cos 6t(\mathrm{cm}),\ x_2 = \sqrt{3}\cos(6t+\frac{\pi}{2})(\mathrm{cm})$$

求：合振动方程。

解： $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 2\mathrm{cm}$



$$\tan\theta = \tan\varphi = \sqrt{3}$$

因 φ_1、φ_2均在第一象限，故φ取$\frac{\pi}{3}$。

$$x = 2\cos(6t+\frac{\pi}{3})\mathrm{cm}$$

【练习】已知两简谐振动的方程：

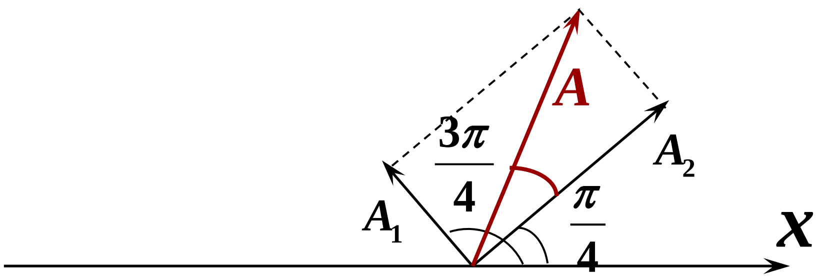
$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{3}\times 10^{-2}\cos(10t+\frac{3}{4}\pi)\text{m} \\ x_2 = 3\times 10^{-2}\cos(10t+\frac{\pi}{4})\text{m} \end{cases}$$

求：合振动表达式。

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 2\sqrt{3}\,\text{m}$$

$$\tan\theta = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5}{12}\pi$$



$$x = 2\sqrt{3}\times 10^{-2}\cos(10t+\frac{5\pi}{12})\text{m}$$

2.2.2 同方向、频率相近的简谐振动的合成 拍

简单起见，设两个分振动振幅相等，初相相同。

$$x_1 = A\cos(\omega_1 t + \varphi) = A\cos(2\pi\nu_1 t + \varphi)$$

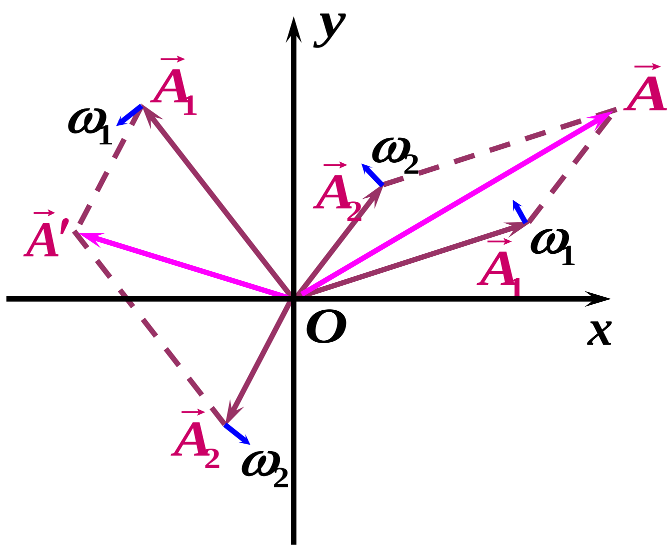
$$x_2 = A\cos(\omega_2 t + \varphi) = A\cos(2\pi\nu_2 t + \varphi)$$

合振动位移

$$x = x_1 + x_2$$

$$= 2A\cos(2\pi\frac{\nu_1 - \nu_2}{2}t)$$

$$\cdot\cos(2\pi\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}t + \varphi)$$



此合振动不再是简谐振动，而是一种复杂的振动。

位移： $$x=2A\cos(2\pi\frac{\nu_1-\nu_2}{2}t)\cos(2\pi\frac{\nu_1+\nu_2}{2}t+\varphi)$$

随 t 变化缓慢　　　　随 t 变化较快

当 ν_1 和 ν_2 都很大，且相差甚微时，可将成振动是以 $2A\cos(2\pi\frac{\nu_1-\nu_2}{2}t)$ 为振幅，以 $\frac{\nu_1+\nu_2}{2}$ 为角频率的近似谐振动。

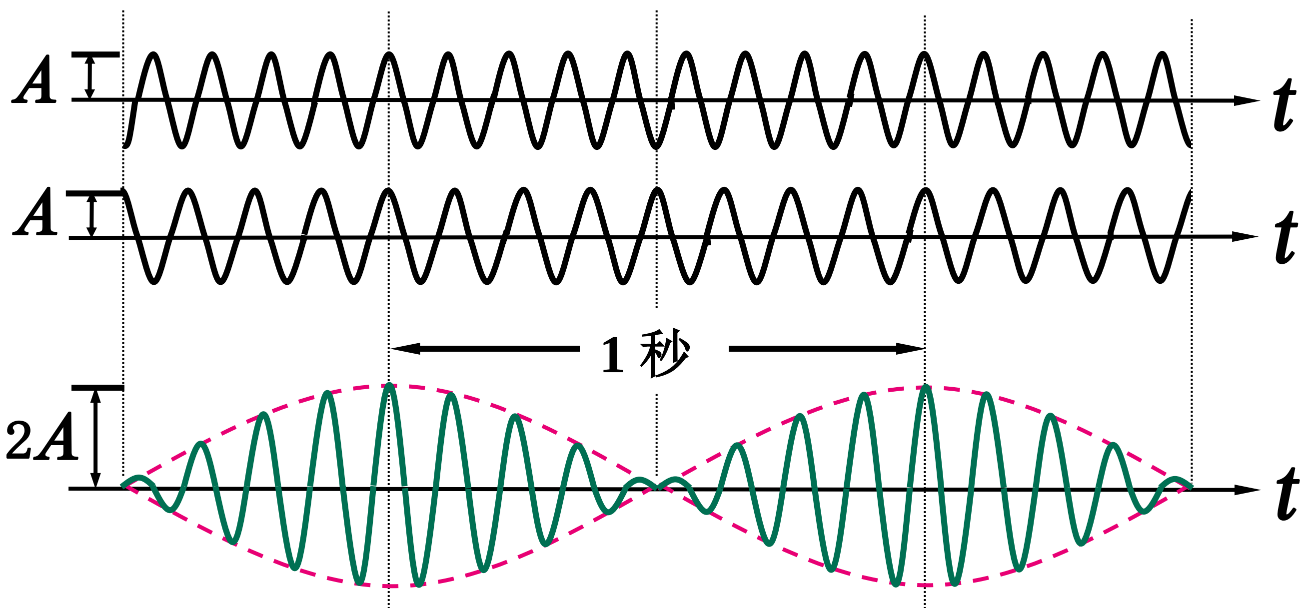
拍现象： 由两个分振动频率微小差别而产生合振动的**振幅忽强忽弱**的现象称为**拍**。

分析思考问题

(1) 当 ν_1 和 ν_2 近似相等，振幅随时间缓慢变化——“拍”现象，最大振幅为2*A*。

(2) 合振幅变化频率——“拍频”。

拍频：单位时间内加强和减弱的次数 $\nu = \nu_1 - \nu_2$



合振动振幅（包络线）变化的频率称为“拍频”

2.2.3 振动方向垂直、同频率振动的合成

对两个分振动 $\begin{cases} x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$

合成得到质点的轨迹方程是

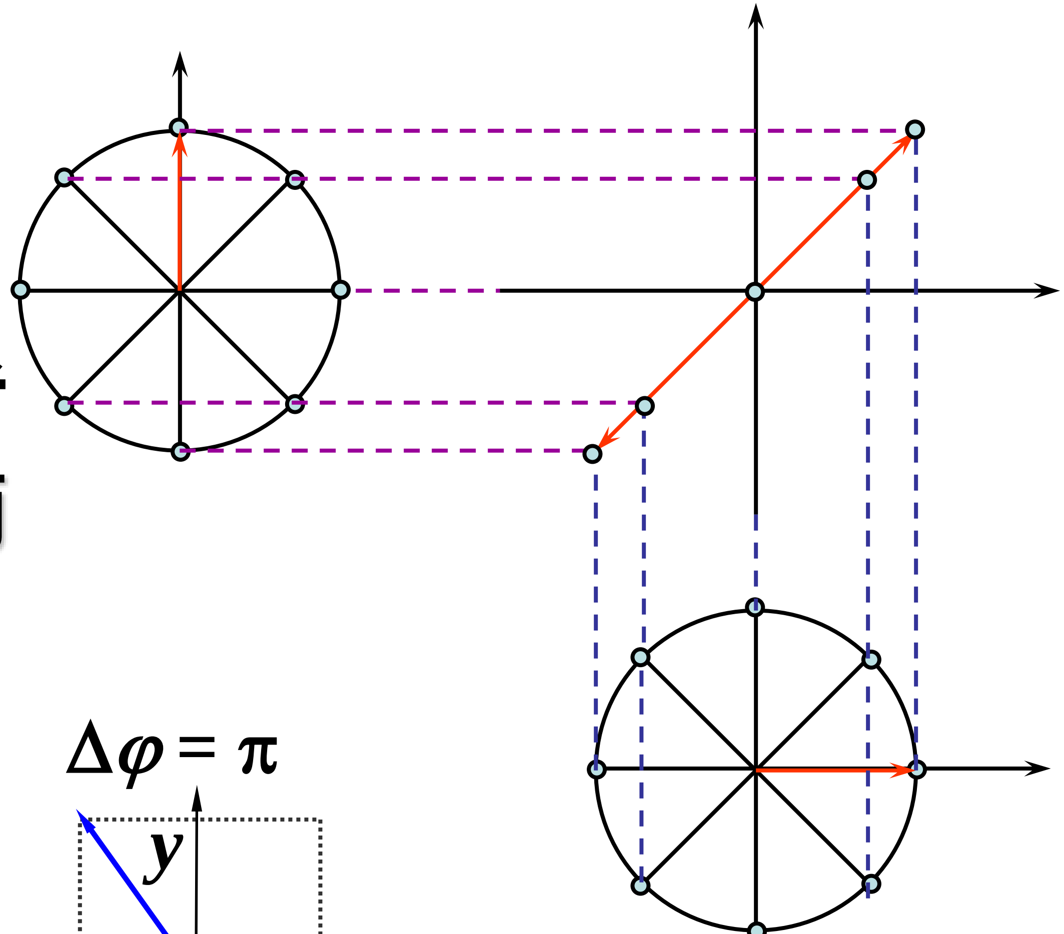
$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

——为椭圆轨迹方程。

- 合运动一般是在 $2A_1$（x向）、$2A_2$（y向） 范围内的一个椭圆。
- 椭圆的性质（方位、长短轴、左右旋）在 A_1、A_2确定之后，主要决定于$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$。

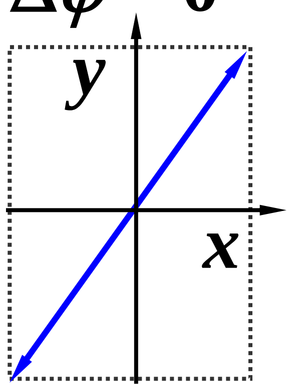
(1) $\varphi_2 - \varphi_1 = k\pi \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

$$y = (-1)^k \frac{A_2}{A_1} x$$

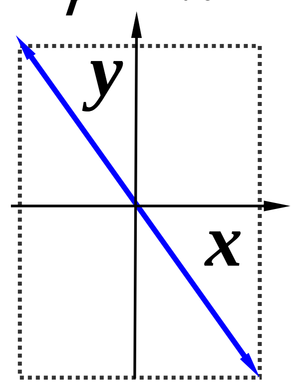


质点沿1、3或者2、4象限沿直线做简谐振动。

$\Delta\varphi = 0$



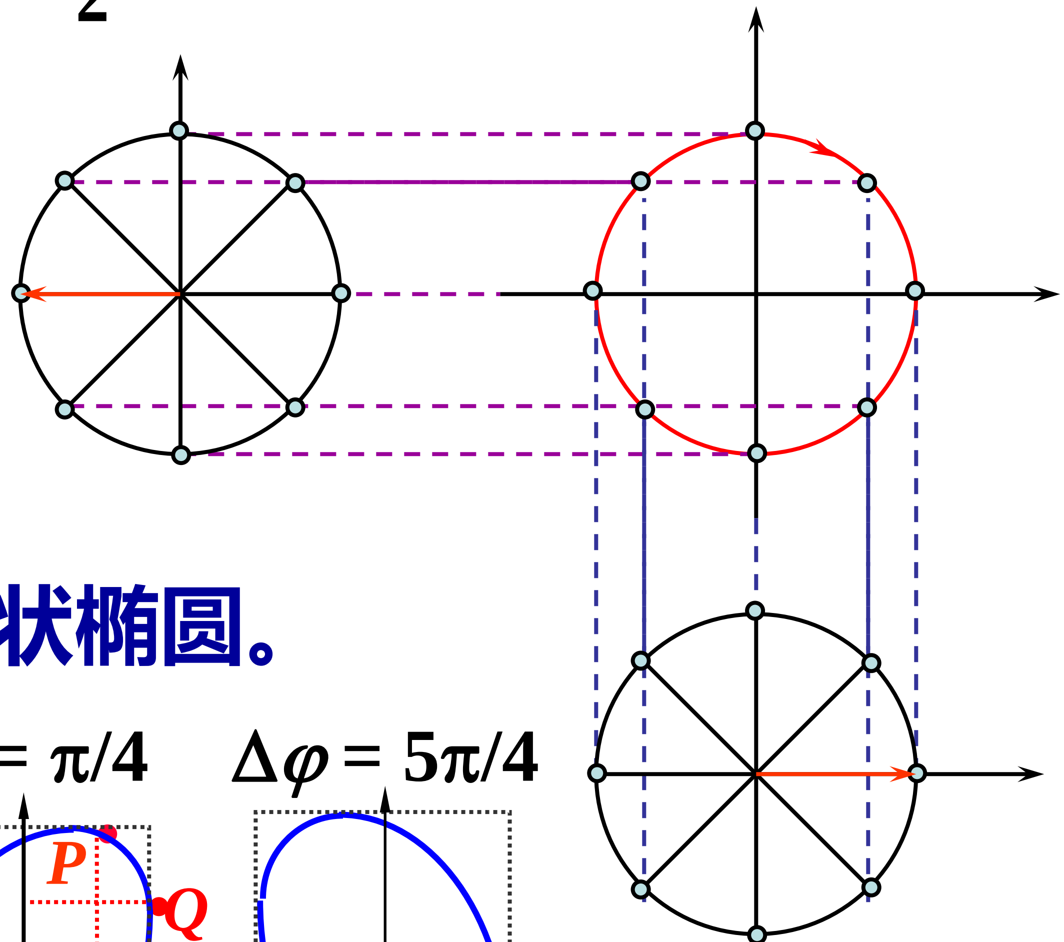
$\Delta\varphi = \pi$



(2) $\varphi_2-\varphi_1=(2k\pm 1)\dfrac{\pi}{2} \qquad k=1,2,3,\cdots$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$

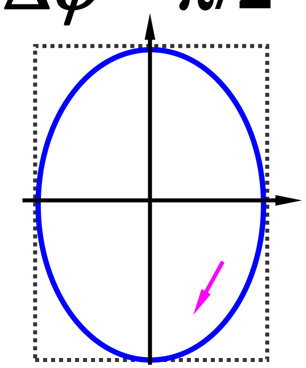
质点轨迹正椭圆。



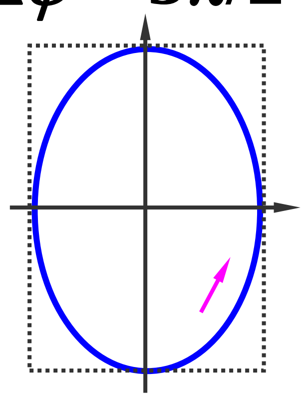
(3) $\varphi_2-\varphi_1$为其他值

质点轨迹是任意形状椭圆。

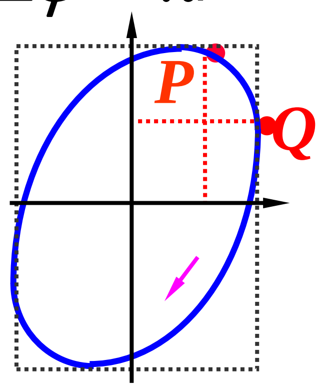
$\Delta\varphi=\pi/2$



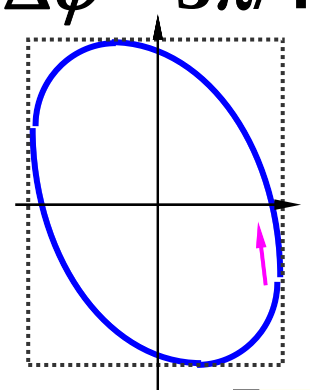
$\Delta\varphi=3\pi/2$



$\Delta\varphi=\pi/4$



$\Delta\varphi=5\pi/4$



现象演示 **振动的合成**