保密★启用前

2022-2023 学年第二学期期末考试

《概率论与数理统计 A》

考生注意事项

1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生**学号**和考生姓名；在答题卡指定位置上填写考试科目、考生姓名和考生**学号**，并涂写考生**学号**信息点。
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。
3. 填(书)写部分必须使用黑色字迹签字笔书写，字迹工整、笔迹清楚；涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
4. 考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。

(以下信息考生必须认真填写)

考生学号								
考生姓名								

一、选择题：共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效．

1. 设随机变量X的分布函数 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \dfrac{1}{2}, & 0\le x<1, \\ 1-e^{-x}, & x\ge 1. \end{cases}$

则 $P\{X=1\}=($ C $)$.

(A) 0　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{1}{2}-e^{-1}$　　(D) $1-e^{-1}$

2. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，密度函数为 $f(x)$, 且 $f(1)=1$, $P\{X\ge 1\}=\frac{1}{2}$，则（ C ）.

（A）$\mu=1,\sigma^2=1$　　（B）$\mu=1,\sigma^2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

（C）$\mu=1,\sigma^2=\frac{1}{2\pi}$　　（D）$\mu=0,\sigma^2=1$

3. 若随机变量 X 与 Y 满足 $Y=1-\frac{X}{2}$，且 $D(X)=2$，则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=$（ C ）.

（A）1　　（B）2

（C）-1　　（D）-2

4. 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$，则（ A ）.

(A) $P\{X+Y\le 1\}=\frac{1}{2}$　　(B) $P\{X-Y\le 1\}=\frac{1}{2}$

(C) $P\{X+Y\le 0\}=\frac{1}{2}$　　(D) $P\{X-Y\le 0\}=\frac{1}{2}$

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 $N(1,2^2)$ 的一个样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则下列结论中正确的是（ D ）.

（A）$\frac{\bar{X}-1}{2/\sqrt{n}}\sim t(n)$　　（B）$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2\sim F(n,1)$

（C）$\frac{\bar{X}-1}{\sqrt{2}/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$　　（D）$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2\sim \chi^2(n)$

6. 设 X_1, X_2 为来自总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，若 $aX_1 + \frac{1}{2023}X_2$ 为 μ 的一个无偏估计，则常数 a =（ C ）.

（A）$\frac{1}{2023}$ （B）$-\frac{1}{2023}$ （C）$\frac{2022}{2023}$ （D）$-\frac{2022}{2023}$

二、填空题：共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分．请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效．

1. 已知$P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，概率$P(A\cup B)=$___$\frac{2}{3}$___.

2. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，具有相同的分布律，

X	0	1
P	0.4	0.6

则 $\max\{X,Y\}$ 的分布律为________________.

答案：

$\max\{X,Y\}$	0	1
P	0.16	0.84

3. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\le x\le\pi,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

对 X 独立重复地观察 4 次，用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数，则 $E(Y^2)=$___5_______.

4. 设在每次试验中，事件 A 发生的概率是 0.8，用 X 表示 1000 次独立试验中事件 A 发生的次数，根据切比雪夫不等式，有 $P\{760<X<840\}\ge$ ___$\frac{9}{10}$_______.

5. 设总体 $X\sim N(\mu,3^2)$，要使未知参数 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间的长度 $L\le 2$，样本容量 n 至少为___35_____.

6. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，若 σ^2 未知，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差，检验假设为 $H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\ne\mu_0$，则应取检验统计量为

$t=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ _.

三、解答题：满分 8 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

已知 9 支手枪中有 6 支已校准过，3 支未校准。一名射手如果用校准过的手枪射击，命中率为 0.9，如果用未校准过的手枪射击，命中率为 0.3，现从这 9 支手枪中任取一支射击。求：（1）他能命中目标的概率；（2）如果他命中目标，则所用的手枪是校准过的概率。

解 (1) 设A_1为"所用的手枪已校准"，A_2为"所用的手枪未校准"，B为"命中目标"，依题意，可得

$$P(A_1)=\frac{6}{9},\qquad P(A_2)=\frac{3}{9},$$

且

$$P(B|A_1)=0.9, P(B|A_2)=0.3,$$

由全概率公式，得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{2}P(A_i)P(B|A_i)=0.7.$$

(2) 由贝叶斯公式，有

$$P(A_1|B)=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)}=\frac{0.9\times\frac{6}{9}}{0.7}=\frac{6}{7}.$$

四、解答题：满分 8 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1,\\ k(2-x), & 1\le x<2,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

求(1) k 的值；(2)随机变量 X 落在 $(1,3)$ 内的概率．(3) X 的分布函数．

解：(1)由 $\int_0^1 xdx+\int_1^2 k(2-x)dx=\frac{1}{2}+\frac{k}{2}=1$，得 $k=1$.

(2) $P\{1<X<3\}=\frac{1}{2}$.

(3) 当 $x<0$ 时，$F(x)=0$，

当 $0\le x<1$ 时 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}x^2$，

当 $1\le x<2$ 时 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 tdt+\int_1^x(2-t)\,\mathrm{d}t=2x-\frac{1}{2}x^2-1$，

当 $x>2$ 时，$F(x)=1$.

所以 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \dfrac{1}{2}x^2, & 0\le x<1, \\ 2x-\dfrac{1}{2}x^2-1, & 1\le x<2, \\ 1, & x\ge 2. \end{cases}$

五、解答题：满分 6 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

据以往经验，某种电器元件的寿命服从均值为 100h 的指数分布，现随机地取 16 只，设它们的寿命是相互独立的，求这 16 只元件的寿命总和大于 1920h 的概率.

（$\Phi(0.8)=0.7881$）

解

设随机变量 X_i表示第i个元件的寿命，$i=1,2,\cdots,16$.由题意， $X_1,X_2,\cdots,X_{16}$相互独立、同分布，概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{100}\,e^{-\frac{x}{100}}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$$

又设

$$X=\sum_{i=1}^{16} X_i, E(X_i)=100, D(X_i)=10\,000,$$

故

$$E(X)=16E(X_i)=1\,600, \sqrt{D(X)}=\sqrt{16\times 10^4}=400.$$

由 莱维-林德伯格中心极限定理，近似地

$$\frac{X-1600}{400}\sim N(0,1),$$

故

$$P\{X>1\,920\}=P\left\{\frac{X-1\,600}{400}>\frac{1\,920-1\,600}{400}\right\}=P\left\{\frac{X-1\,600}{400}>0.8\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{X-1600}{400}\le 0.8\right\}=1-\Phi(0.8)=0.211\,9.$$

六、解答题：满分 8 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

设总体 X 具有概率分布

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $\theta(0<\theta<1)$ 是未知参数，已知来自总体 X 的样本值为 1，2，1，3. 求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

解 $E(X)=-2\theta+3, \bar{x}=\frac{7}{4}$,令 $E(X)=\bar{x}$，解得 θ 的矩估计值为 $\theta_1=\frac{5}{8}$.

似然函数为 $L(\theta)=2\theta^5(1-\theta)^3, \ln L(\theta)=\ln 2+5\ln\theta+3\ln(1-\theta)$，

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{5}{\theta}-\frac{3}{1-\theta}=0$，

解得 θ 的最大似然值为 $\theta_2=\frac{5}{8}$.

七、解答题：满分 6 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2), X_1, X_2, \cdots, X_{2n} (n\geq 2)$为取自$X$的样本，其样本均值为

$$\bar{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} X_i$$

且

$$Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\bar{X})^2$$

求$E(Y)$.

解

由已知，$E(X_i)=\mu, D(X_i)=\sigma^2, E\left(X_i^2\right)=\sigma^2+\mu^2, E(\bar{X})=\mu, D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{2n}, E(\bar{X}^2)=\frac{\sigma^2}{2n}+\mu^2$,

则

$$Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\bar{X})^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2+X_{n+i}^2+4\bar{X}^2+2X_iX_{n+i}-4X_i\bar{X}-4X_{n+i}\bar{X}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{2n}X_i^2+4n\bar{X}^2+2\sum_{i=1}^{n}X_iX_{n+i}-4\bar{X}\sum_{i=1}^{2n}X_i$$

$$=\sum_{i=1}^{2n}X_i^2-4n\bar{X}^2+2\sum_{i=1}^{n}X_iX_{n+i}$$

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{2n}E(X_i^2)-4nE(\bar{X}^2)+2\sum_{i=1}^{n}E(X_i)E(X_{n+i})$$

$$=2n(\sigma^2+\mu^2)-4n\left(\frac{\sigma^2}{2n}+\mu^2\right)+2n\mu^2$$

$$= 2(n-1)\sigma^2.$$

八、解答题：满分 14 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

设A和B为两个随机事件，且$P(A)=\dfrac{1}{4}$, $P(B|A)=\dfrac{1}{3}$, $P(A|B)=\dfrac{1}{2}$, 令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生,}\\ 0, & A\text{不发生,}\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生,}\\ 0, & B\text{不发生,}\end{cases}$$

求X与Y的联合概率分布和$Z=X^2+Y^2$的概率分布.

解　由于$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{12}$,

$$P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1}{6},$$

于是可得

$$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{12},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{6},$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12},$$

$$P\{X=0,Y=0\}=P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A\cup B)=\frac{2}{3},$$

因此X与Y的联合概率分布为

X	Y	
	1	0
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{3}$

$Z=X^2+Y^2$的所有可能取值为0，1，2，且

$$P\{Z=0\}=P\{X=0,Y=0\}=\frac{2}{3},$$

$P\{Z=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=\frac{1}{4}$,

$P\{Z=2\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{12}$,

因此，$Z=X^2+Y^2$的概率分布为

Z	0	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

九、解答题：满分 14 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

已知二维随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} k\mathrm{e}^{-(2x+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & 其它. \end{cases}$（1）求系数$k$；（2）条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$；（3）判断X 和Y是否相互独立；（4）计算概率$P\{X<2|Y<1\}$.

解 （1）由$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1$, 得$k=2$.

（2）解法一：关于 X 和 Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)=\begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2x}, x>0, \\ 0, \quad x\le 0, \end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-y}, y>0, \\ 0, \quad y\le 0. \end{cases}$

从而X和Y是相互独立的，故当$y>0$时， $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2x}, x>0, \\ 0, \quad x\le 0. \end{cases}$

解法二：直接利用条件密度计算公式 $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,\mathrm{y})}{f_Y(y)}$。

（3）X和Y的边缘概率密度分别为 $f_X(x)=\begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2x}, x>0, \\ 0, \quad x\le 0, \end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-y}, y>0, \\ 0, \quad y\le 0. \end{cases}$

因为对于任意x,y，有 $f(x,y)=f_X(x)\bullet f_Y(y)$，所以$X$ 和Y相互独立.

（4）解法一：

因为X 和Y相互独立，所以$P\{X<2|Y<1\}=P\{X<2\}=\int_{-\infty}^{2} f_X(x)dx=1-\mathrm{e}^{-4}$.

解法二：$P\{X<2|Y<1\}=\dfrac{P\{X<2,Y<1\}}{P\{Y<1\}}=1-\mathrm{e}^{-4}$