第四章　静电场

■ 研究对象：

静电场 —— 相对观察者静止的电荷产生的电场。

4.1 点电荷 库仑定律

一、电荷（Electric Charge）

1. 电荷的基本性质

实验观察表明：

1. 自然界只存在负电荷和正电荷。
2. 同种电荷相斥，异种电荷相吸。

2. 电荷的量子化

物体所带电荷量只能取分立的、不连续量值，称为电荷的量子化。

$$q = ne$$ （n取正、负整数）

电荷量的基本单元是电子电荷e，$e = 1.602 \times 10^{-19}C$

3. 电荷守恒定律

一个不与外界交换电荷的系统，电量的代数和始终保持不变。

二、点电荷（Point Charges）

一个理想模型, 忽略带电体本身的大小和形状, 而将其抽象成带电荷的质点。

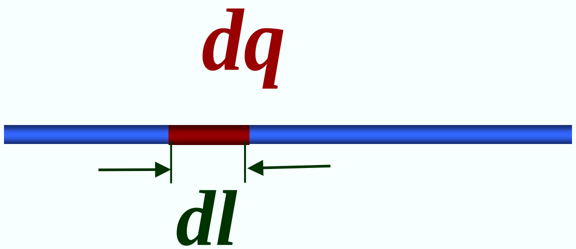
说明：1）相对量（$d \ll r$）；

2）带电量不一定少。

电荷连续分布的带电体 — 引入电荷密度

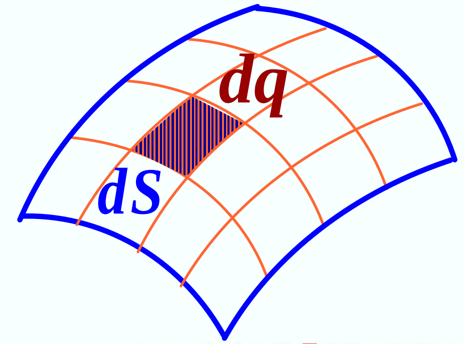
线密度:

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \Rightarrow dq = \lambda dl$$



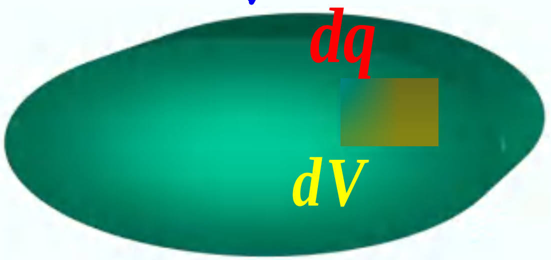
面密度：

$$\sigma = \frac{dq}{ds} \Rightarrow dq = \sigma ds$$



体密度：

$$\rho = \frac{dq}{dV} \Rightarrow \quad dq = \rho dV$$

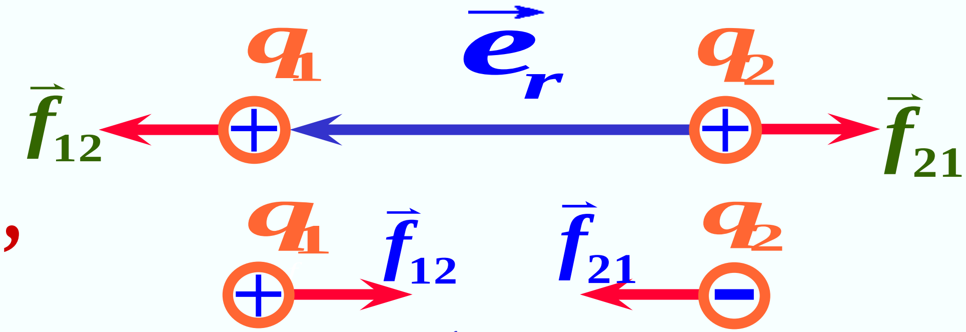


- 无论是何种分布，电荷元dq视为点电荷。

三、库仑定律（Coulomb's Law）

在真空中，两个静止的点电荷之间的相互作用力的大小与它们电荷电量的乘积成正比，与它们之间距离的平方成反比。作用力方向

❶ 真空中



$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21} = K\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\vec{e}_r\ ,$$

$$K = 9.0\times 10^9\,\mathrm{N\,m^2c^{-2}}$$

设 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi K}$,

$$\varepsilon_0 = 8.85\times 10^{-12}\,\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}$$

— 真空介电常数

则 $$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\vec{e}_r$$

❷ 电介质中

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\vec{e}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\vec{e}_r$$

$\varepsilon_r(\geq 1)$电介质的相对介电常数，

$\varepsilon = \varepsilon_0\,\varepsilon_r$ 电介质的介电常数。

4.2 电场 电场强度

一、电场（Electric Field）

电荷周围存在的一种特殊形态的物质，称为电场。

电荷 ⇔ 电场 ⇔ 电荷

- 电场对外表现:

1. 电场对引入其中的电荷有力的作用;
2. 当电荷在电场中移动时，电场对它要做功，表明电场有能量。
3. 电场对引入其中的介质有极化作用;
4. 电场使场中的导体产生静电感应现象;

二、电场强度（Intensity of Electric Field）

为了描述电场对电荷的施力性质，引入一个基本物理量——电场强度，简称场强。

用$\vec{E}$表示，其定义为：

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}\quad\begin{cases}\text{大小}\\\text{方向}\\\text{单位}\end{cases}$$

说明：1）E 与 $q_{场源}$有关，与 q_0无关。

2）一般：$E=E(x,y,z)$，

特殊：$E=C$。

3）$F=Eq$ ~ 点电荷，$F=\int_q E\,dq$ ~ 带电体。

✵ 场强迭加原理

q_0处于由$q_1, q_2, \cdots, q_n$产生的电场中

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i}{q_0} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$ 矢量和

三、场强的计算

1、点电荷的电场

一个试验电荷q_0处于P点，根据库仑定律，试验电荷q_0所受的电场力 $\vec{F} = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3}|\vec{r}|\vec{e}_r$

P点场强为 $$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \qquad (7.6)$$

在各向同性的自由空间内，点电荷的电场分布必然具有球对称性。

2、点电荷系的电场

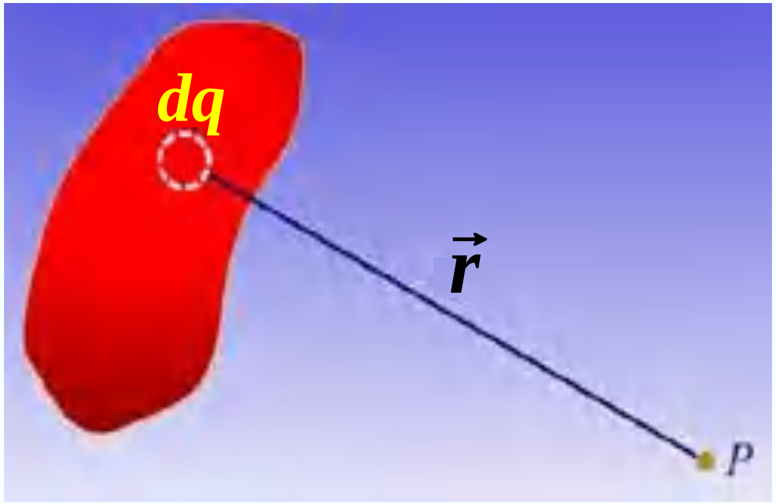
点电荷q_i在场点P产生的场强为 $\vec{E}_i = \dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\vec{e}_{ri}$

由场强叠加原理，总场强为

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_o r_i^2}\vec{e}_{ri}$$

3、任意带电体电场

- 将带电体分成无数个电荷元(电荷元可以看成是点电荷)电荷元



dq 在空间某点的场强：

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^3}\vec{r}$$

2 选取适当的坐标系, 写出 $d\vec{E}$ 的各个分量

dE_x, dE_y, dE_z 的表达式。

3 积分求出 E_x, E_y, E_z

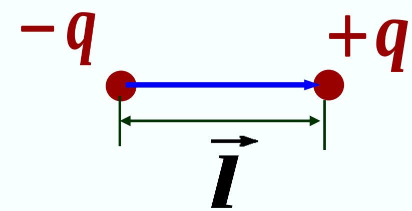
$$E_x = \int dE_x, \quad E_y = \int dE_y, \quad E_z = \int dE_z$$

此步最好利用电荷分布的对称性，判断 $\vec{E}$ 方向, 减少计算.

4 带电体的场强

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$$

例4.2 求电偶极子轴线和中垂线上距离中心较远处一点的场强。

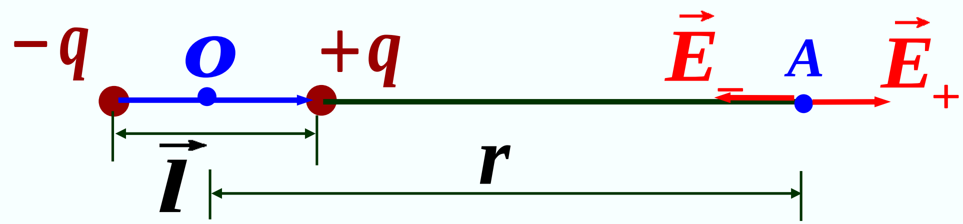


解： 如图系统称为**电偶极子**，物理性质用**电矩**表示，定义为

$$\vec{p} = q\vec{l} \qquad （\vec{l}\text{方向由}-\text{指向}+）$$

① 轴线上点A

两电荷在A处电场为



$$E_+ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o(r - l/2)^2} \qquad E_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o(r + l/2)^2}$$

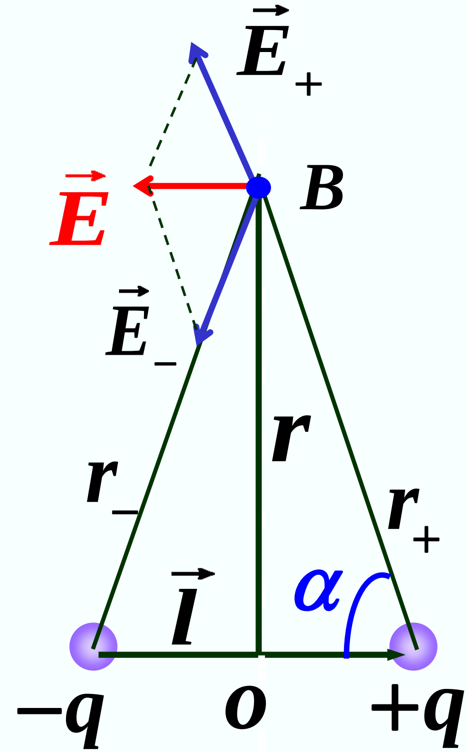
$$\Rightarrow E = E_+ - E_- = \frac{2ql}{4\pi\varepsilon_o r^3(1 - l/2r)^2(1 + l/2r)^2}$$

在$r>>l$时

$$E_A=\frac{2ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$ （与$\vec{p}$同向）

❷ 中垂轴上点B

$$E_+=E_-=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r^2+l^2/4)}$$



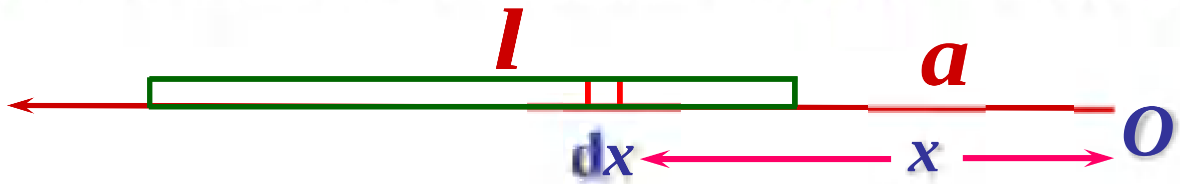
$$E_B=2E_+\cos\alpha=\frac{ql}{4\pi\varepsilon_0(r^2+l^2/4)^{3/2}}$$

在$r>>l$时

$$E_B=\frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\frac{1}{2}E_A$$

方向与电矩$\vec{p}$相反。

例4.3　真空中有一均匀带电直线，长为l、总电量为q，求：带电直线外一点O（距直线一端距离为a）、O'点（到带电直线的垂直距离是a）的场强。



解：$\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x,\ \lambda=q/l$　　$\mathrm{d}E=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathrm{d}q}{x^2}$

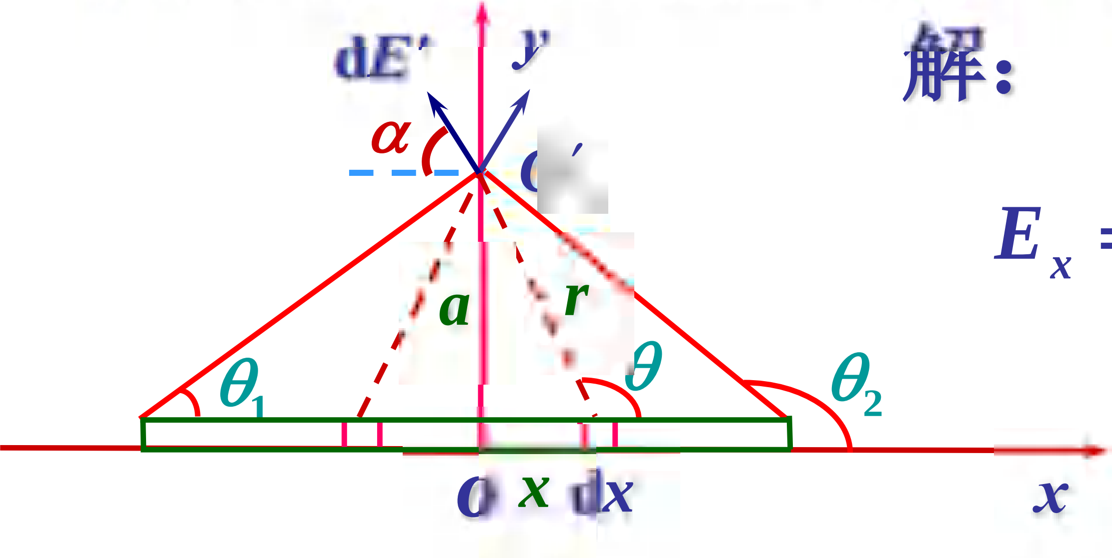
$$E=\int_q \mathrm{d}E$$

$$=\int_a^{a+l}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\mathrm{d}x}{x^2}$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+l}\right)=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l}{a(a+l)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a(a+l)}$$

方向沿x轴负方向

例4.3 真空中有一均匀带电直线，长为l、总电量为q，求：带电直线外一点O（距直线一端距离为a）、O'点（到带电直线的垂直距离是a）的场强。



解：
$$\mathrm{d}E' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}x}{r^2}$$

$$E_x = \int_q \mathrm{d}E_x = -\int_q \mathrm{d}E'\cos\alpha$$

$$E_x = \int_q \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}x}{r^2}\cos\theta$$

$$x = a\cot(\pi-\theta)$$

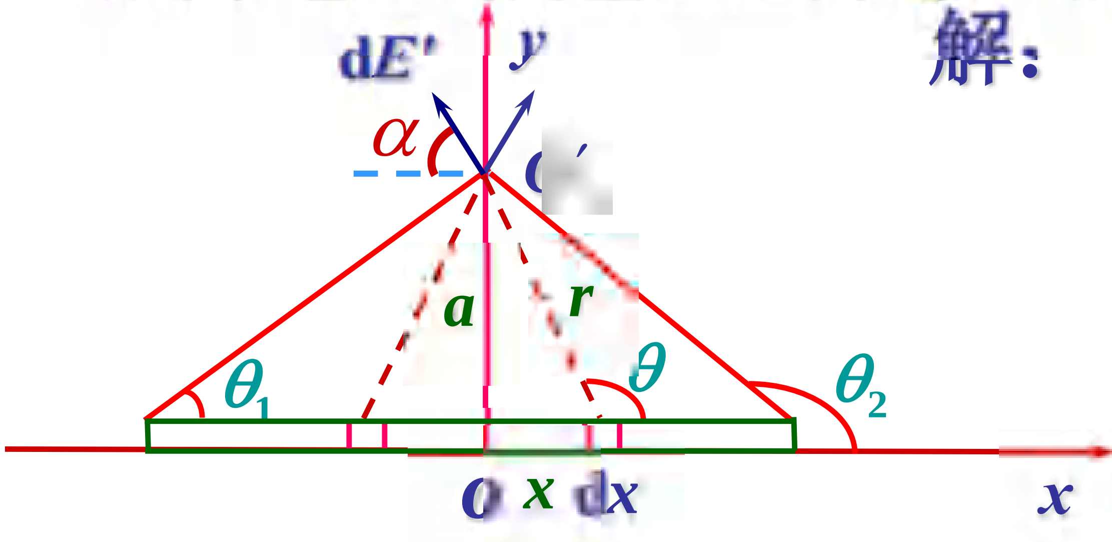
$$r^2 = a^2 + x^2 = a^2\csc^2\theta$$

$$\mathrm{d}x = a\csc^2\theta \mathrm{d}\theta$$

$$E_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\lambda a\csc^2\theta\cos\theta \mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 a^2\csc^2\theta}$$

$$E_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\lambda\cos\theta \mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

例4.3 真空中有一均匀带电直线，长为l、总电量为q，求：带电直线外一点O（距直线一端距离为a）、O'点（到带电直线的垂直距离是a）的场强。



解： $$\mathrm{d}E' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}x}{r^2}$$

$$E_y = \int_q \mathrm{d}E_y = \int_q \mathrm{d}E'\sin\alpha$$

$$E_y = \int_q \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}x}{r^2}\sin\theta$$

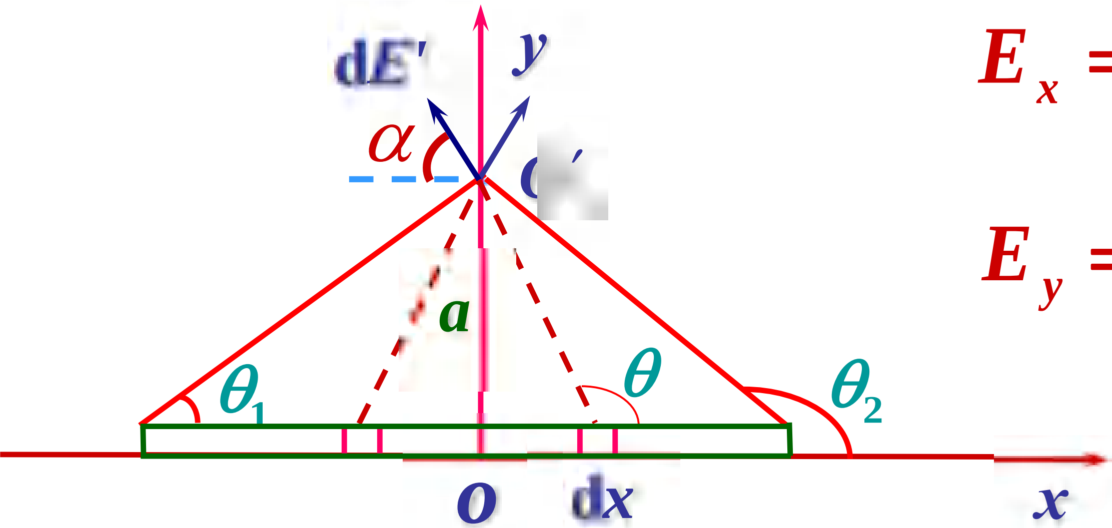
$$x = a\cot(\pi-\theta)$$

$$\mathrm{d}x = a\csc^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$r^2 = a^2 + x^2 = a^2\csc^2\theta$$

$$E_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\lambda a\csc^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 a^2\csc^2\theta}$$

$$E_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\lambda\sin\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$



$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j}$$

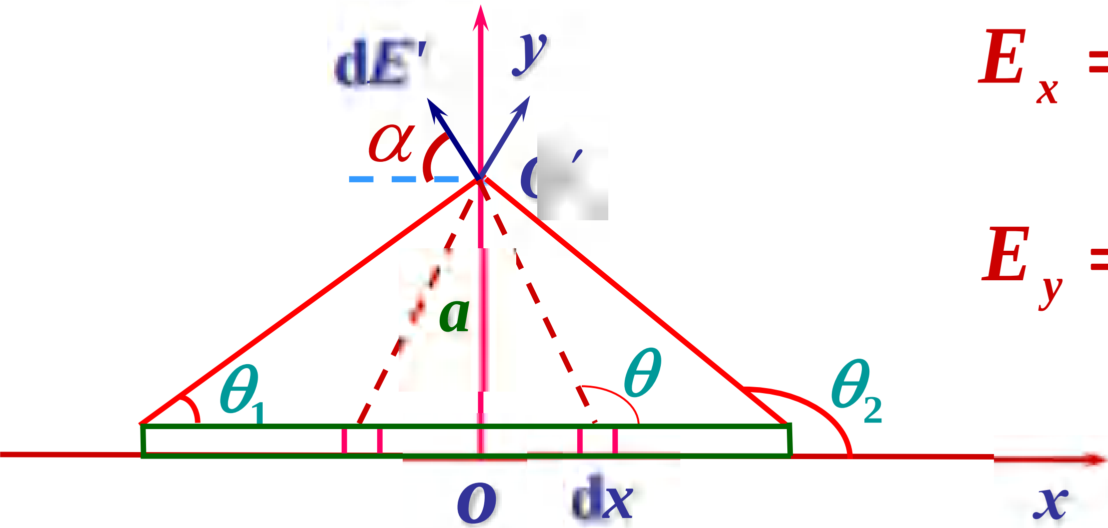
讨论：（1）中垂线上的点 $\sin\theta_2 = \sin\theta_1 \rightarrow E_x = 0$

$$E = E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta_1 = \frac{\lambda l}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{a^2 + l^2/4}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{a^2 + l^2/4}}$$

（2）远离带电直线的区域，中垂线上 $E_y = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$

（3）带电直线无限长 $\theta_1 \rightarrow 0 \quad \theta_2 \rightarrow \pi$

$$\boxed{E = E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}}$$



$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j}$$

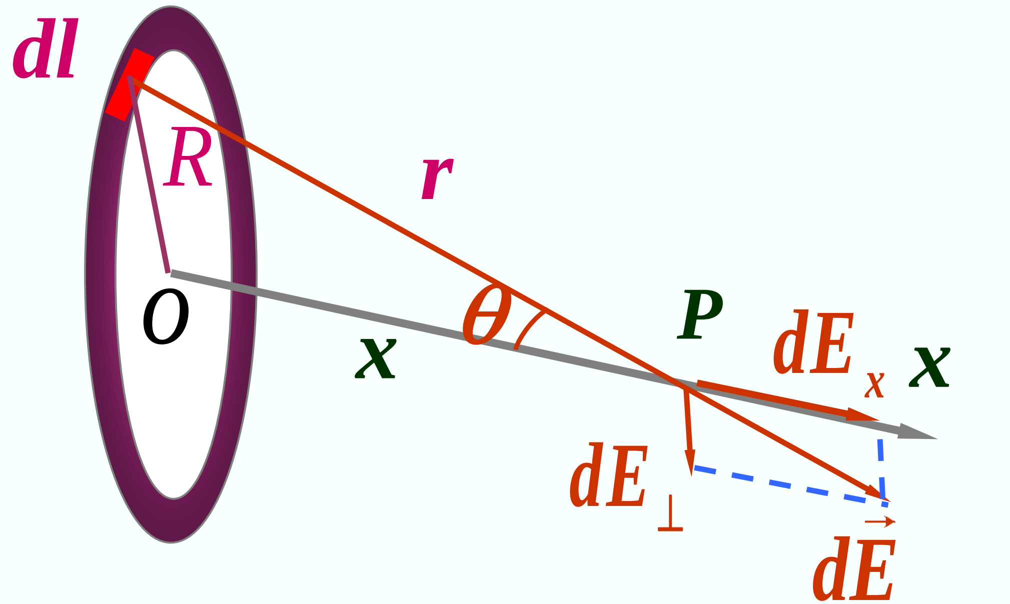
讨论：（3）带电直线无限长 $\theta_1 \to 0 \quad \theta_2 \to \pi$

$$E = E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

（4）带电直线半无限长 $\theta_1 \to \frac{\pi}{2} \quad \theta_2 \to \pi$

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a} \qquad E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

例4.4 计算均匀带电圆环轴线上p点场强



解：分析表明

$$E_{\perp} = 0$$

$$dE_x = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_o r^2}\cos\theta$$

而且

$$\cos\theta = \frac{x}{r},\ r^2 = R^2 + x^2$$

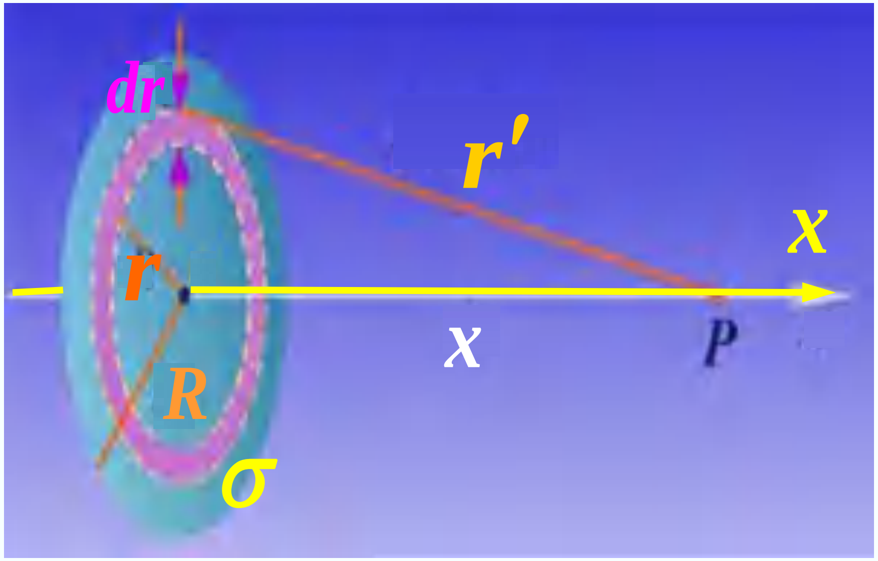
$$\Rightarrow E = \int dE_x = \int_0^{2\pi R} \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

在圆环中心处，$x = 0$，$E = 0$

在x》R时 $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$

例4.5 计算均匀带电圆盘轴线上场强

解：视为圆环组合



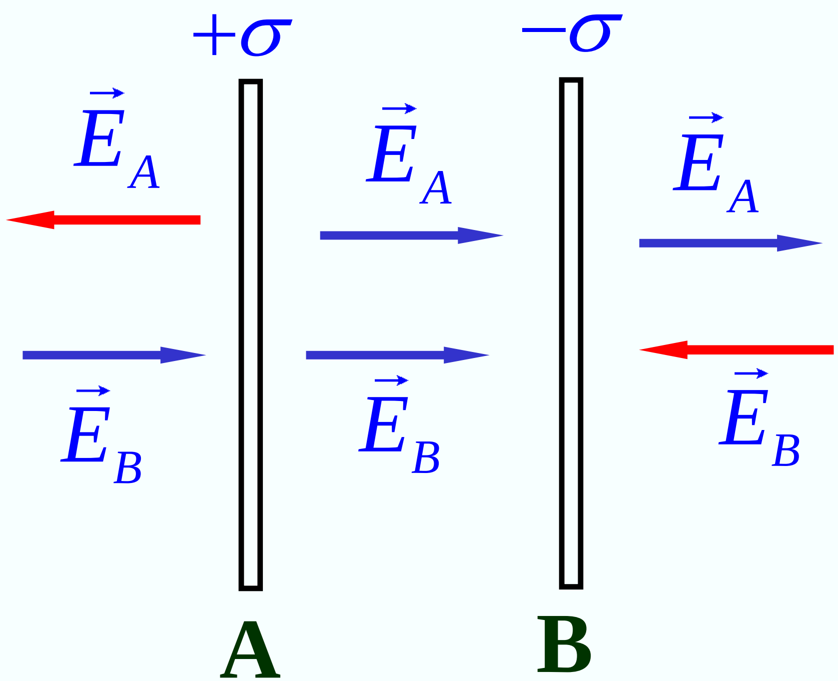
$$dE=\frac{x\,dq}{4\pi\varepsilon(r^2+x^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\sigma 2\pi r dr}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow E=\frac{\sigma 2\pi x}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^R\frac{rdr}{(x^2+r^2)^{3/2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}[1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}]$$

对无限大平面，$R\to\infty$，$\boxed{E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}}$

例4.6 有两个均匀带电的“无限大”平板A、B电荷面密度分别为$+\sigma,-\sigma$，求两板之间和外侧的场强

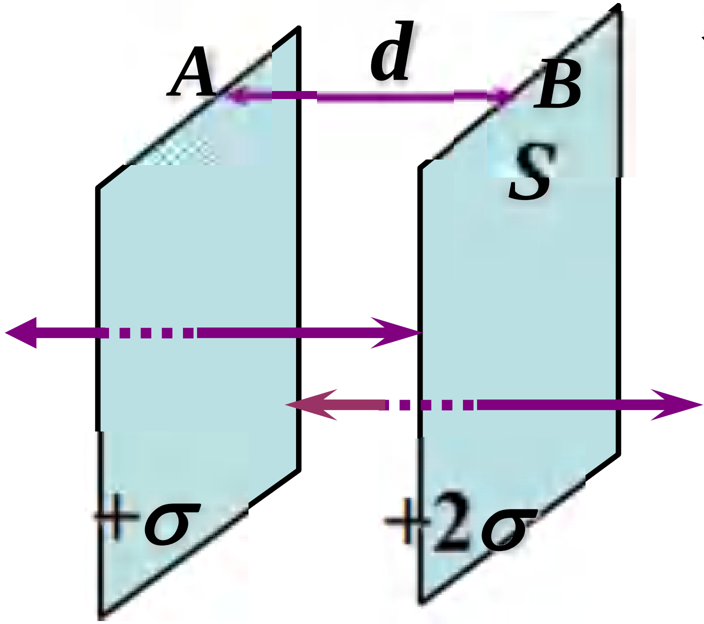


$$E_A = E_B = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$

$$E_{内} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$$

$$E_{外} = 0$$

【练习】已知：$d << S$，$+\sigma$，$+2\sigma$



求：①两板间的电场强度大小

②两板间的相互作用力

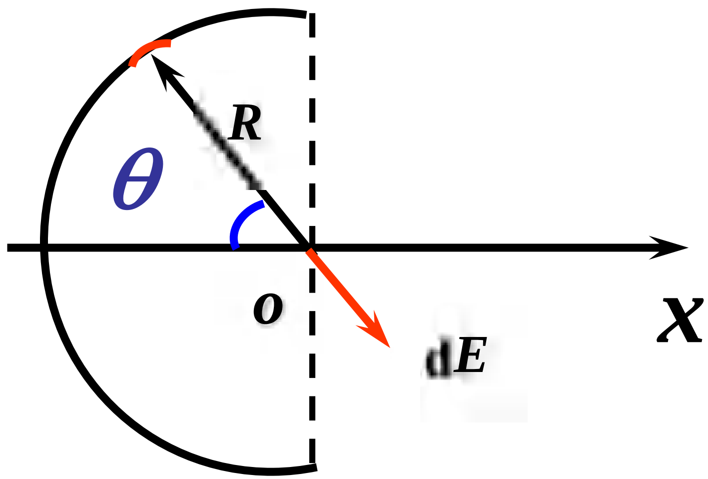
解：$\because d << S$

$$\therefore E_A = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0};\quad E_B = \frac{2\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\therefore E = E_B - E_A = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$f_B = \int_q E_A \mathrm{d}q_B = E_A \cdot q_B = \frac{\sigma_A}{2\varepsilon} q_B = \frac{\sigma^2 S}{\varepsilon} = f_A$$

【练习】已知：R，λ 求E_0？



$$\mathrm{d}E=\frac{\lambda\mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$ 方向如图

$$\mathrm{d}E_x=\mathrm{d}E\cos\theta$$

$$E=\int_q \mathrm{d}E_x=\int_l \frac{\lambda\mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\lambda R\cos\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

四分之一圆环

$$E_x=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\qquad E_y=-\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

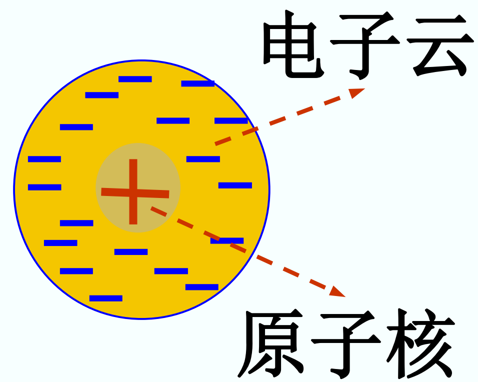
4.3 静电场中的电介质 电位移矢量

一、静电场中的电介质

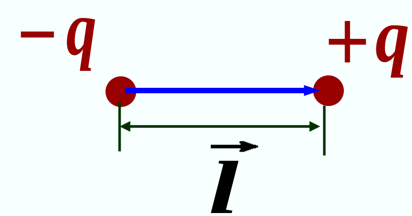
电介质是由大量中性分子组成的绝缘物质，它们是不导电的。

1. 偶极子模型

电介质的分子是由等量正负电荷构成。认为分子中所有正电荷和负电荷分别集中于两个几何点上，称作正、负电荷的“中心”，于是中性分子电效应可用等效偶极子替代。

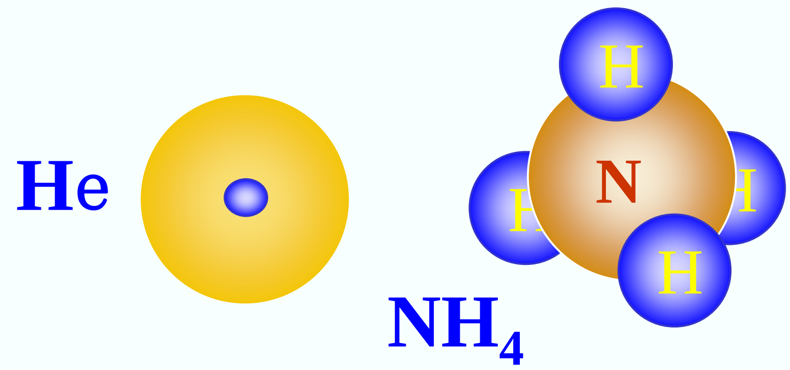


$$\vec{P}_e = q\vec{l}$$



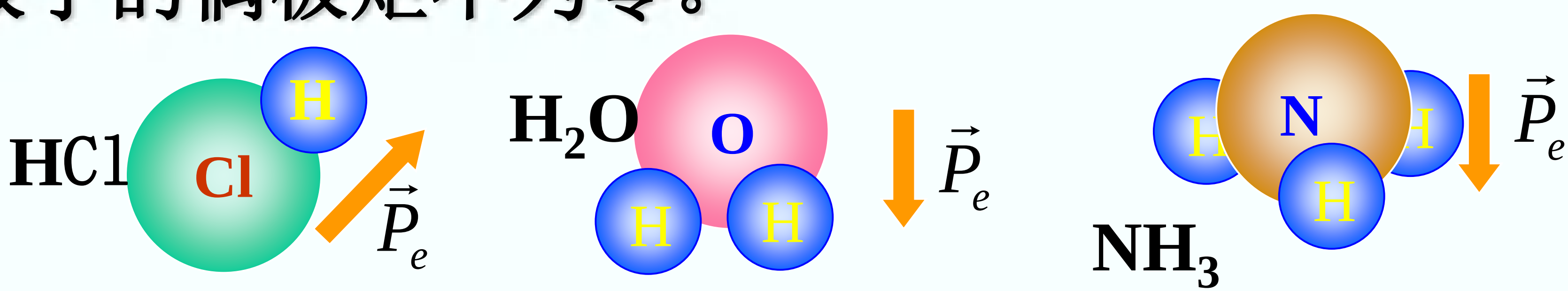
①无极分子

无外场时，正、负电荷中心重合，等效偶极子的偶极矩为零。



②有极分子

无外场时，正、负电荷重心不重合，等效偶极子的偶极矩不为零。

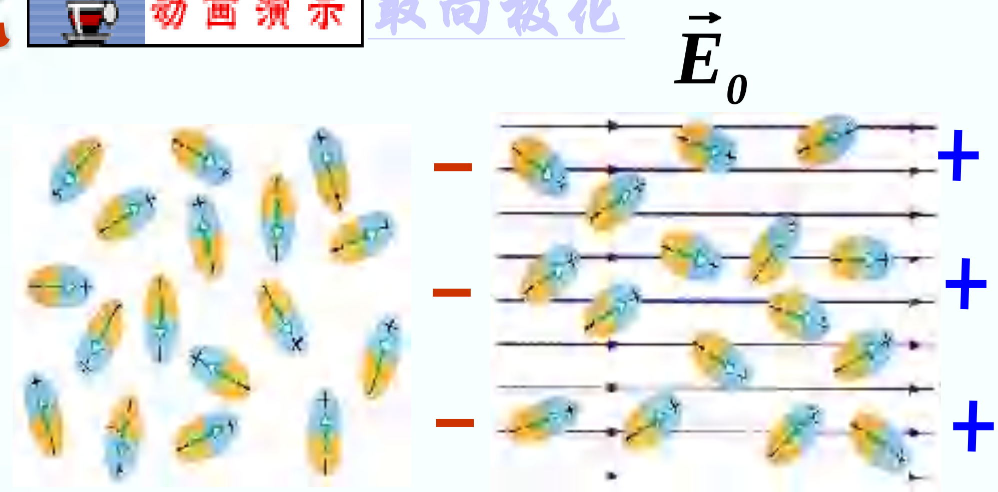


二、电介质的极化

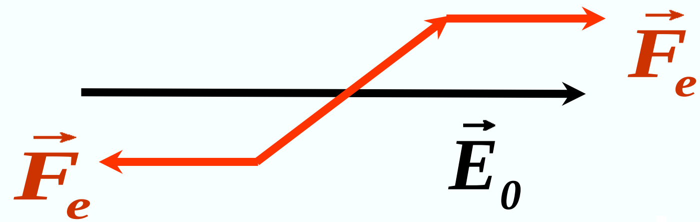
❶ 有极分子的转向极化

动画演示 取向极化

之前：电偶极矩取向是随机的，无宏观电偶极矩。



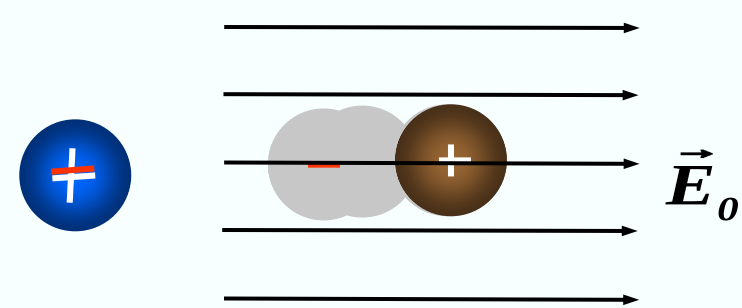
之后：电偶极矩取向是有序的，有宏观电偶极矩。



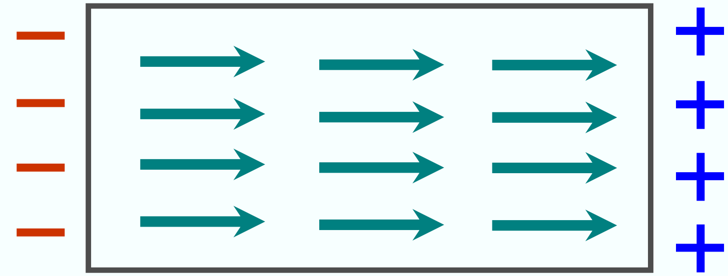
❷ 无极分子的位移极化

动画演示 位移极化演示

之前：正负电荷中心重合，无电偶极矩。



之后：正负电荷中心不重合，产生感生电偶极矩。



分析思考问题

- 由于分子的极化导致介质端面上出现的电荷称为束缚电荷，这种现象称为电极化。
- 极化电荷产生的电场 $\vec{E}'$ 与外加电场 $\vec{E}_0$ 方向相反，介质内电场为 $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$
- 介质中任一点的电场强度 $\vec{E}$ 为原来真空中该点电场强度 $\vec{E}_0$ 的 ε_r 分之一。即：

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$$

三、 电极化强度

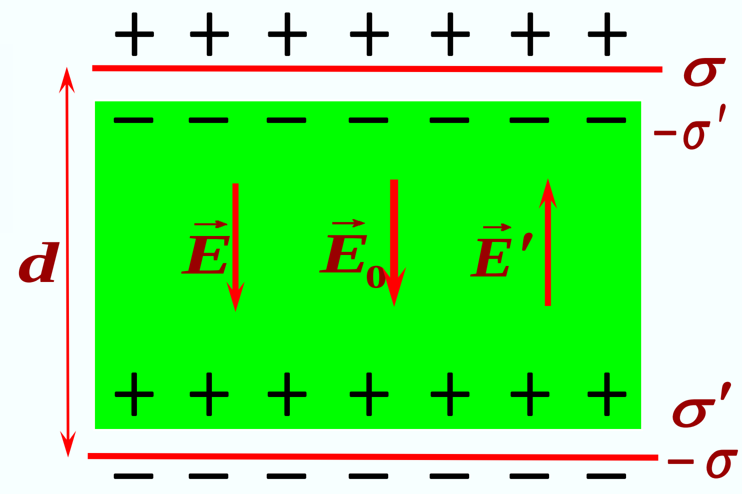
单位体积电介质中电矩的矢量和称为电极化强度矢量，以 $\vec{P}$ 表示，即

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{P}_{分子}}{\Delta V}$$

单位为：C/m^2

✵ 带电平面的电极化强度

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{P}_{分子}}{\Delta V} = \frac{\sigma' S d}{S d} = \sigma'$$



这表明，在均匀各向同性的电介质中电极化强度的大小等于电极化产生的极化电荷面密度。

✵ 极化强度与电场强度的关系

$$P=\sigma'=\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\sigma=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)E$$

定义 $\chi_e=\varepsilon_r-1$ $\quad\chi_e$称为电极化率

则 $\vec{P}=\varepsilon_0\chi_e\vec{E}$

四、电位移矢量

定义电位移矢量为 $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$

对各向同性介质，则 $\vec{D}$与 $\vec{E}$的关系是

$$\boxed{\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}=\varepsilon\vec{E}}$$

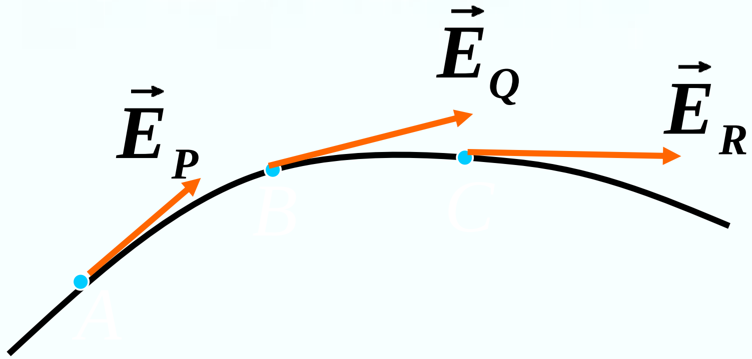
$\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$ —介电常数

4.4 静电场中的高斯定理

一、电场线（Electric Field Lines)

满足如下要求的曲线称为电场线：

1. 通过垂直于 $\vec{E}$ 的单位面积的电场线条数等于该点处 $\vec{E}$ 的量值；
2. 其切线方向是该点电场 $\vec{E}$ 的方向



电场线图像

静电场线的性质

- 起自正电荷，止于负电荷。反映电场有源性。
- 电场线是永不闭合的。反映电场无旋性。

▲在无电荷处，任何两条电场线不相交。

电位移线

与电场线的定义类似，具有类似的特点。但是，两者也有明显的区别：

（1）密度的规定不同 ，各向同性电介质中电位移线密度是电场线的 ε 倍 。

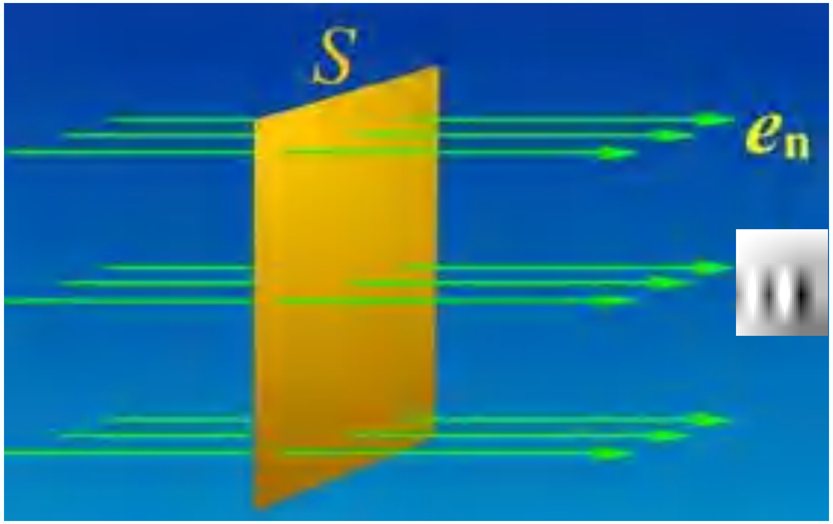
（2）电位移线起于自由正电荷，终止于自由负电荷，而电场线则从正电荷（包括自由正电荷和极化正电荷）出发，终止于负电荷（包括自由负电荷和极化负电荷）。

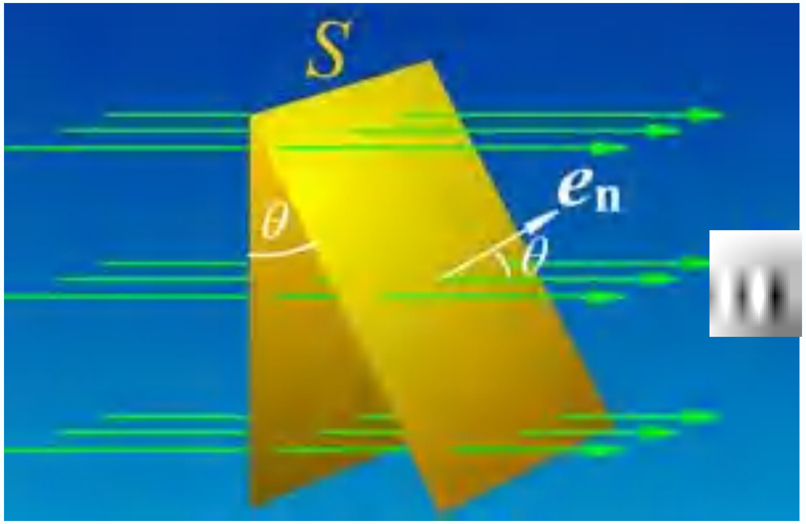
二、电通量

通过电场中任一给定面的电位移线的总数，称为通过该面的电通量，用 Φ_e 表示。

（1）均匀场、平面

▲平面与 $\vec{D}$ 线垂直　　　▲平面与 $\vec{D}$ 不垂直



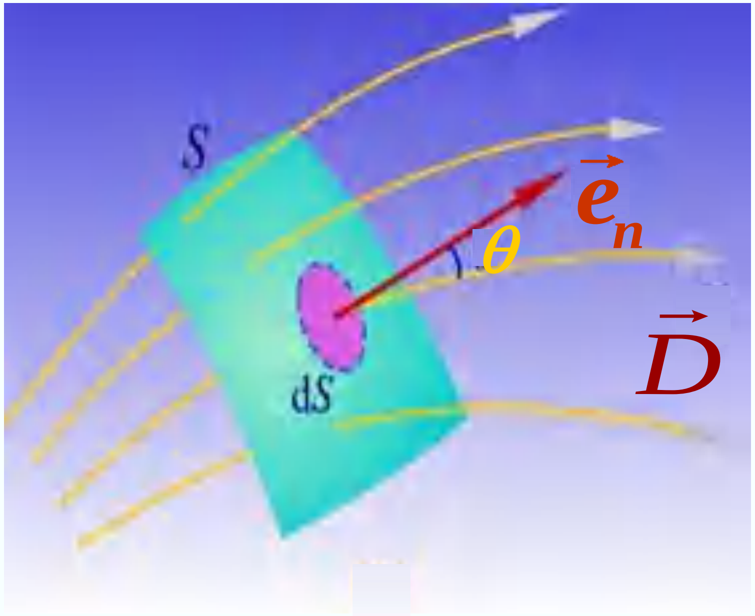


$$\Phi_e = DS \Rightarrow \Phi_e = \vec{D}\cdot\vec{S} \Leftarrow \Phi_e = DS\cos\theta$$

（2）曲面、任意电场

$$d\Phi_e = D\,dS\cos\theta = \vec{D}\cdot d\vec{S}$$

$$\Phi_e = \int_S d\Phi_e = \int_S \vec{D}\cdot d\vec{S}$$



（3）闭合曲面、任意电场

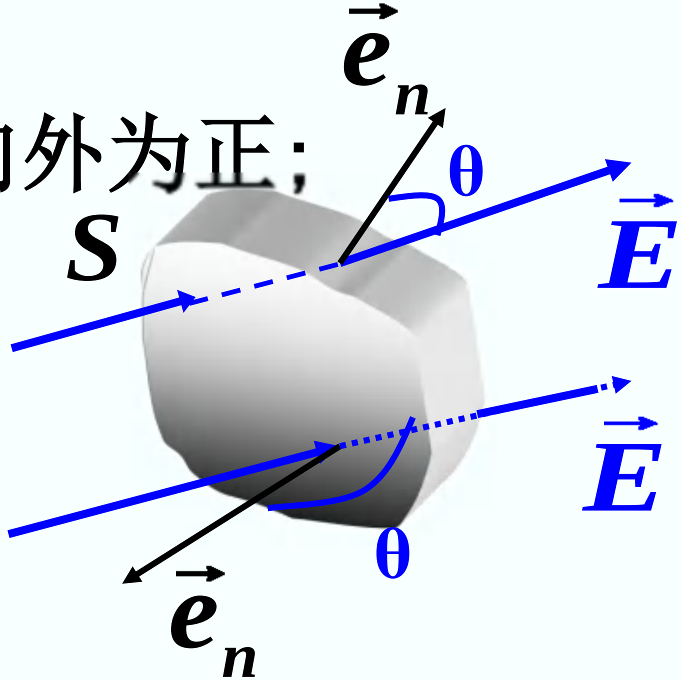
$$\Phi_e = \oint_S d\Phi_e = \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}$$

规 定:

① 闭合曲面法线方向是由里向外为正;

② 若D与e_n的夹角θ< 90°，则Φ_e为正，否则为负;

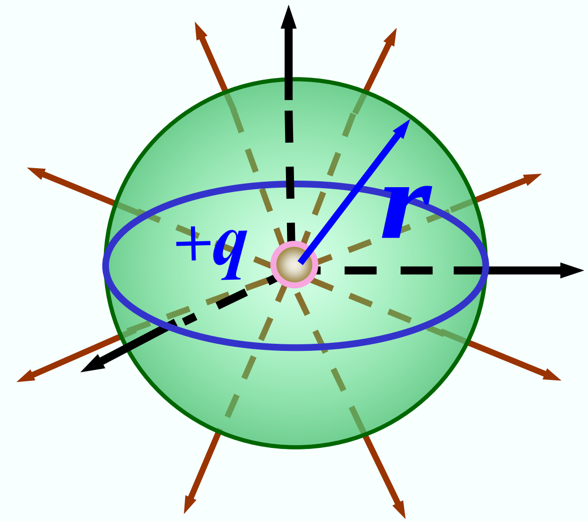
换言之：穿出闭合面的电场线为正，穿入的为负。



三、 高斯定理 (Gauss′s Law)

通过任意闭合曲面S的电通量，等于该闭合曲面包围自由电荷的代数和与S外的电荷无关，即

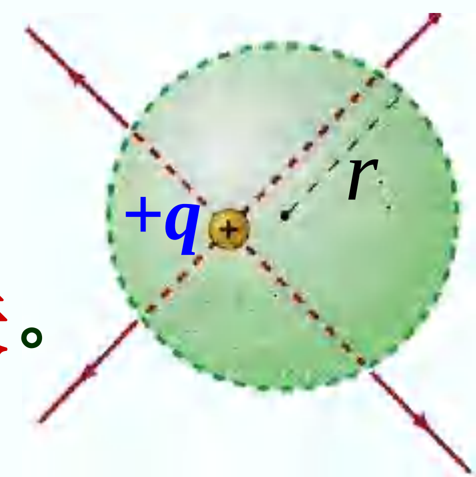
$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_{(S_{内})} q_i \qquad (7.29)$$



验证

① 点电荷q位于球面中心

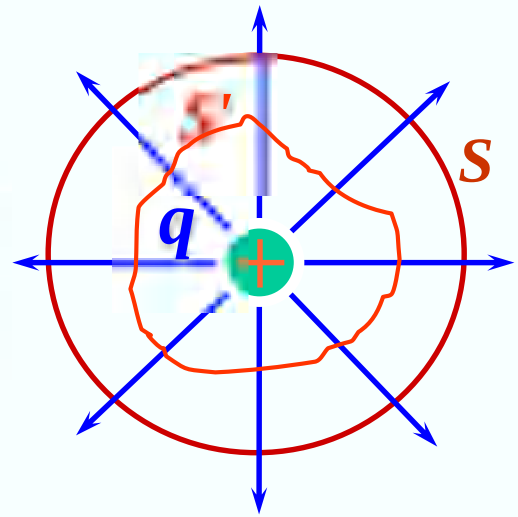
$$D = \frac{q}{4\pi r^2}$$



$$\Phi_e = \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \oint_S D dS = \frac{q}{4\pi r^2}\oint_S dS = q$$

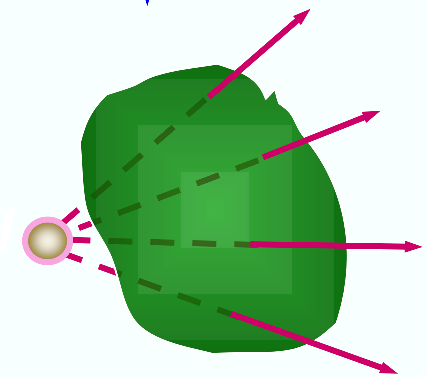
显然，结果与电荷在球面内位置无关。

② 点电荷q位于任意闭合曲面内



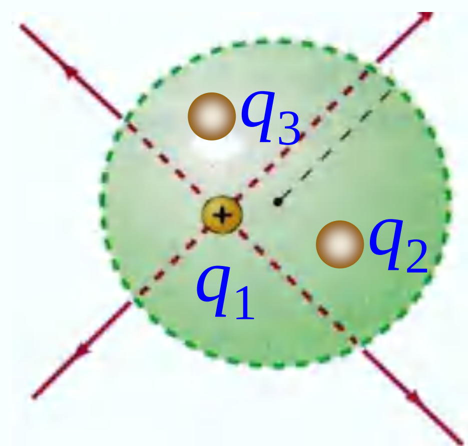
分析得出，包围点电荷q的任意闭合曲面S'与球面S的电通量相同，都是 $\Phi_e = q$

③ 通过不包围自由电荷的任意闭合曲面的电通量恒为零



④ 任意闭合曲面有电荷分布

对多个点电荷，每个点电荷有



$$\Phi_{e1} = q_1, \quad \Phi_{e2} = q_2, \ldots, \quad \Phi_{en} = q_n$$

$$\Phi_e = \Phi_{e1} + \Phi_{e2} + \ldots + \Phi_{en} = \sum_{i=1}^{n} q_i$$

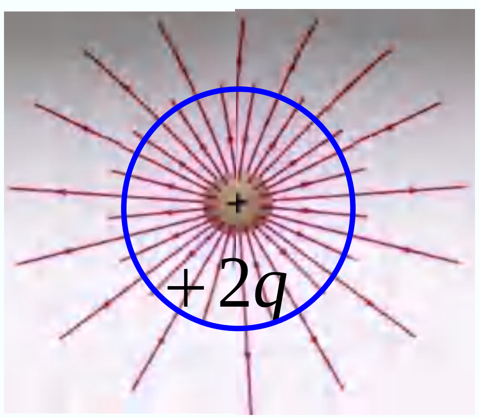
（5） 任意闭合曲面内外均有电荷分布

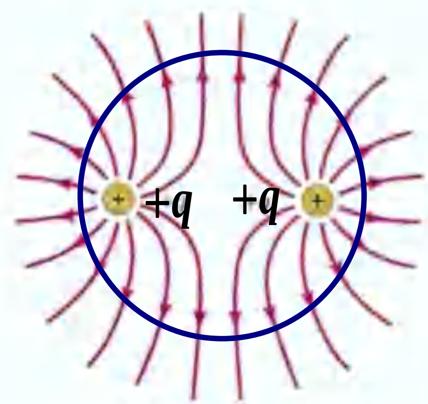
推广到电荷的连续分布，有

$$\Phi_e = \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$$ （ρ是电荷体密度）

分析思考问题？

（1）选取的闭合曲面称为高斯面。它并非客观存在。D是高斯面上的值，是总电位移。





$\varphi_e = 2q$

$D = ?$

（2）高斯定理是反映静电场性质的基本方程，即静电场是有源场，正电荷是源头。

3) Φ_e与$\vec{D}$的关系：

数学关系：$\Phi_e = \oint_s \vec{D} \cdot d\vec{S}$

几何关系：Φ_e --过S的$\vec{D}$线总数目;

数值关系：Φ_e --标量，仅与$\sum\limits_{(s内)} q_i$有关；

$\vec{D}$ --矢量，与S内、外的q_i都有关。

判断：

$*\ \Phi_{e1} = \Phi_{e2}$

$\rightarrow \vec{D}_1 \overset{?}{=} \vec{D}_2$

$*\ \Phi_e = 0$

$\rightarrow D \overset{?}{=} 0$

四、利用高斯定理求静电场的分布

适合求具有空间对称性电场的场强

由高斯定理求场强的步骤：

1. 选取高斯面原则

大小：闭合面通过待求场点，且包围部分或全部电荷。

形状：由场的对称性决定（曲面上各部分要么使 n 与 D 平行，要么使 n 与 D垂直，且 n 与 D 平行的那部分曲面上各点 D 相等）。

2. 由 $\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{s} = \sum q_i$，求 D。 ⟶ E

一、球对称的情况

✵ 均匀带电球面的电场分布

$r > R$ $\quad \oint_s \vec{D}\cdot d\vec{s} = \oint_s D ds$

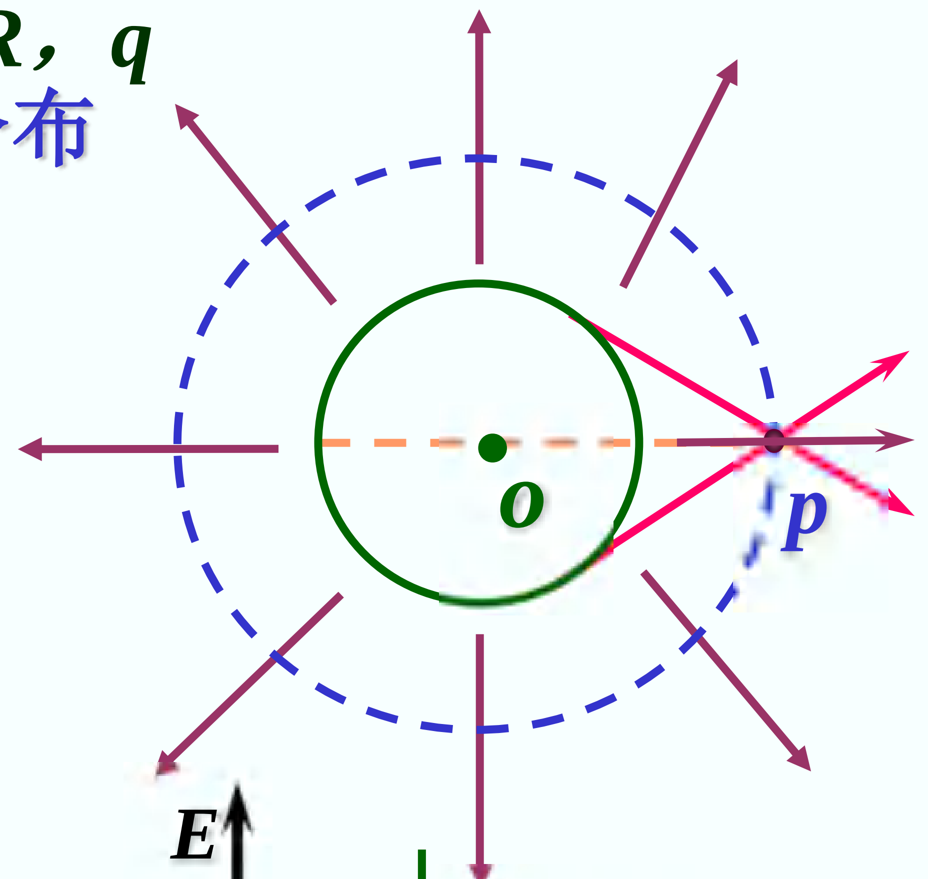
$$= D\oint_s ds = D\cdot 4\pi\, r^2 = q$$

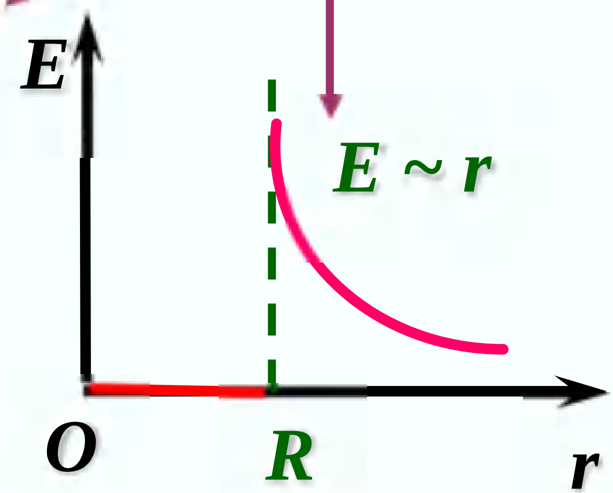
$$D = \frac{q}{4\pi r^2} \qquad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$r < R$

$$\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{s} = \oint_s D\cdot ds = D\cdot s = 0$$

$$\therefore\ D = 0 \qquad E = 0$$





❈ 均匀带电球体的电场

（ρ、R、球体内ε_1、球体外ε_2）

$r_1 < R$　由 $\oint_{s_1} \vec{D}\cdot d\vec{s} = \sum q_i$ 得

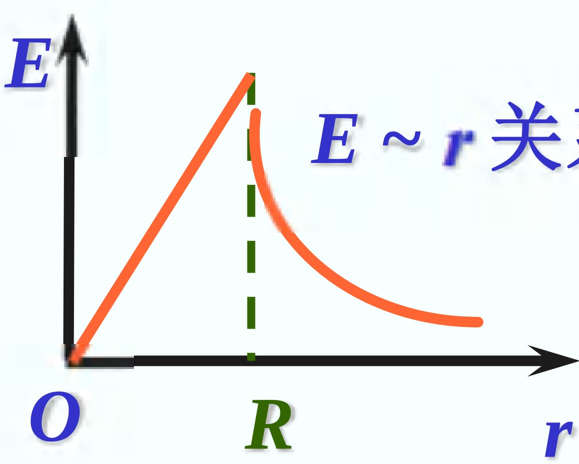
$$D_1 4\pi r_1^2 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 \rho$$

$$D_1 = \frac{r_1}{3}\rho \qquad E_1 = \frac{r_1}{3\varepsilon_1}\rho$$

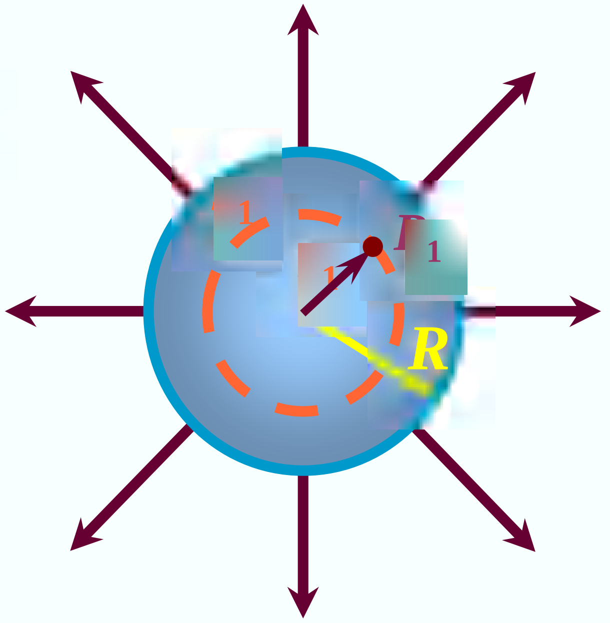
$r_2 > R$　$D_2 4\pi r_2^2 = \rho V = q$

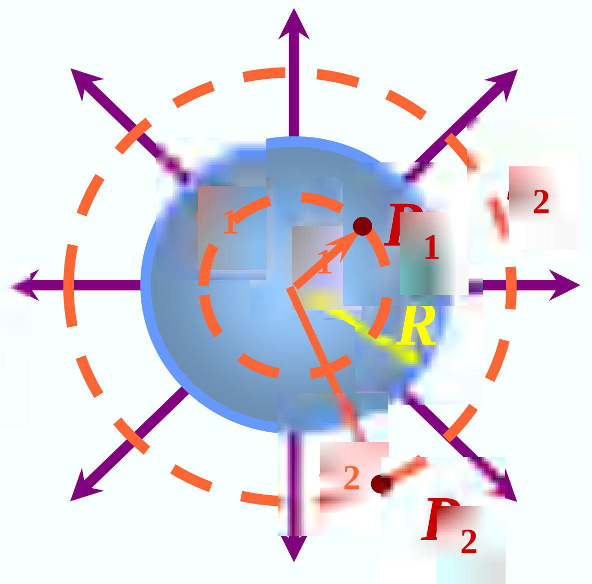
$$D_2 = \frac{q}{4\pi r_2^2}$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi \varepsilon_2 r_2^2}$$



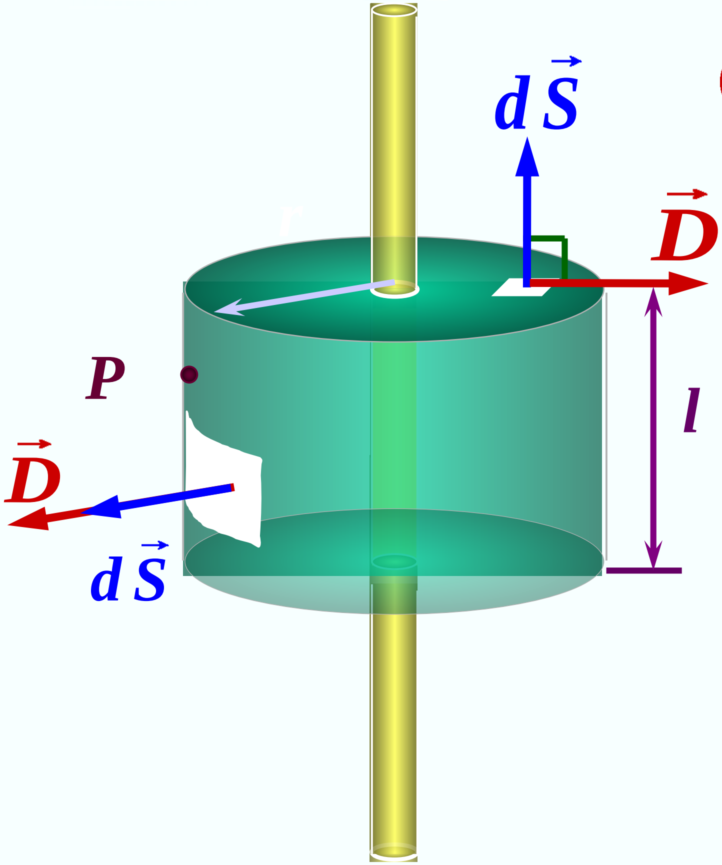
$E \sim r$ 关系





二、柱对称的情况

✵ “无限长”均匀带电直线的电场 λ, ε



$$\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_{侧面} \vec{D}\cdot d\vec{S} + 2\int_{底面} \vec{D}\cdot d\vec{S}$$

$$= \int_{侧} D\cdot dS = D\,2\pi\, r\, l$$

$$D\,2\pi\, r\, l = \lambda\, l$$

$$D = \frac{\lambda}{2\pi\, r} \qquad E = \frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon r}$$

❋ “无限长”均匀带电圆柱面的电场--轴向λ、R

$r > R$　由 $\oint_{s_1} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \sum q_i$ 得

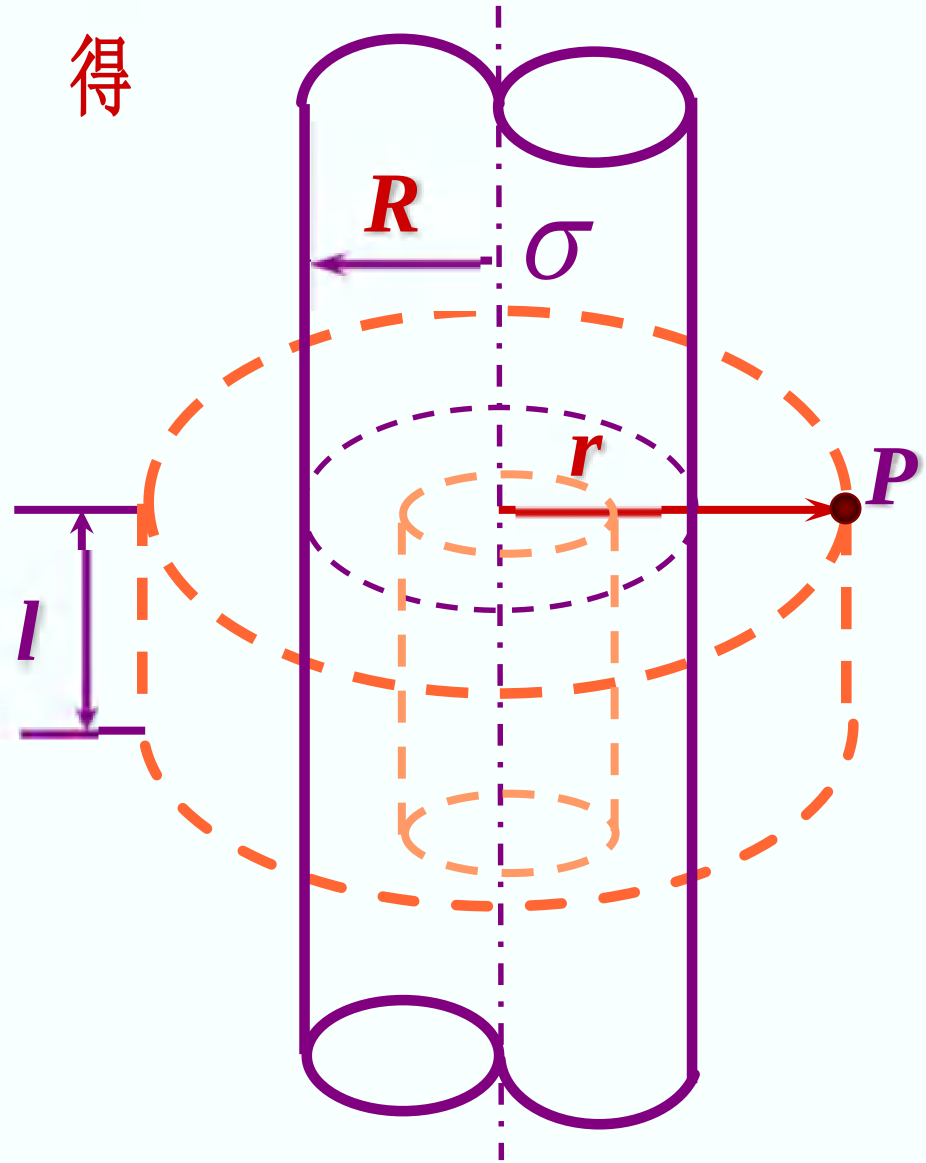
$$D\,2\pi\, rl = \sigma\, 2\pi\, R\, l = \lambda\, l$$

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r} \qquad E = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon r}$$

$r < R$

$$D\,2\pi\, rl = 0$$

$$D = 0 \qquad E = 0$$



"无限长"均匀带电圆柱体的电场（$\rho\ R\ \varepsilon_1\varepsilon_2$）

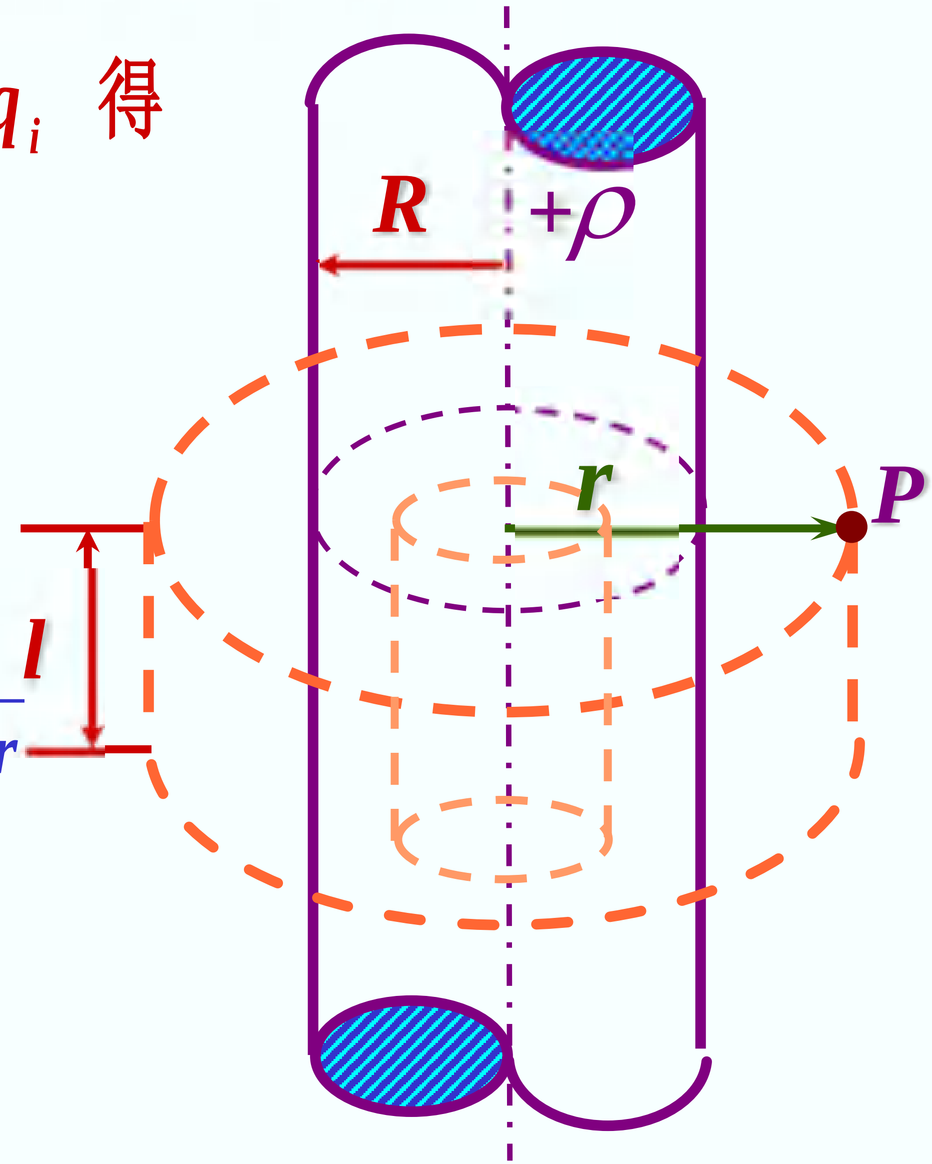
$r > R$

由 $\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{s} = \sum q_i$ 得

$$D\,2\pi rl = \rho\pi R^2 l$$

$$D = \frac{\rho R^2}{2r} \qquad E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_2 r}$$

$$E = \frac{\rho\pi R^2}{2\pi\varepsilon_2 r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_2 r}$$



$r < R$

$$D\,2\pi rl = \rho\pi r^2 l$$

$$D = \frac{\rho r}{2} \qquad E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_1}$$

三、面对称的情况

✻ "无限大"均匀带电平面的电场（σ）

$$\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_{\Delta s_1} D\cdot dS + \int_{\Delta s_2} D\cdot dS + \int_{\text{侧面}} D\cdot dS$$

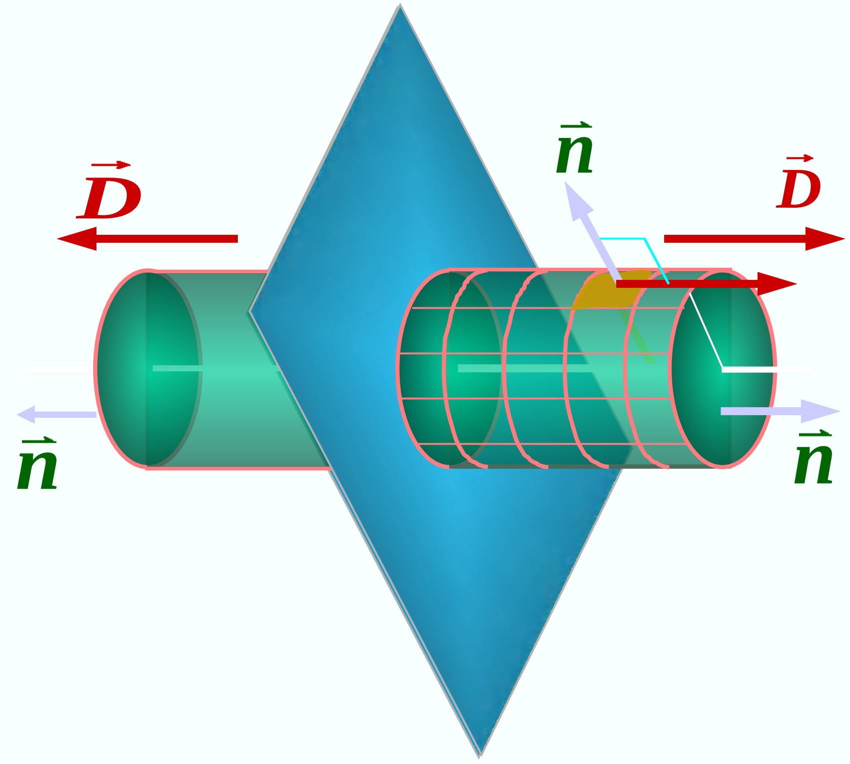
$$= D\Delta S_1 + D\Delta S_2$$

$$= 2D\Delta S = \sum_s q_i$$

$$2D\Delta S = \sigma\Delta S$$

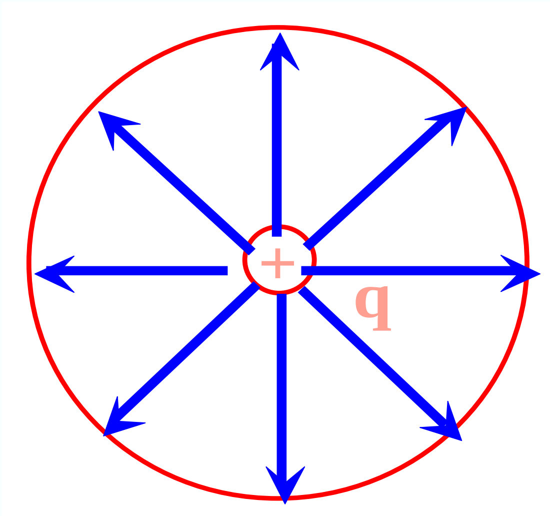
$$D = \frac{\sigma}{2} \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

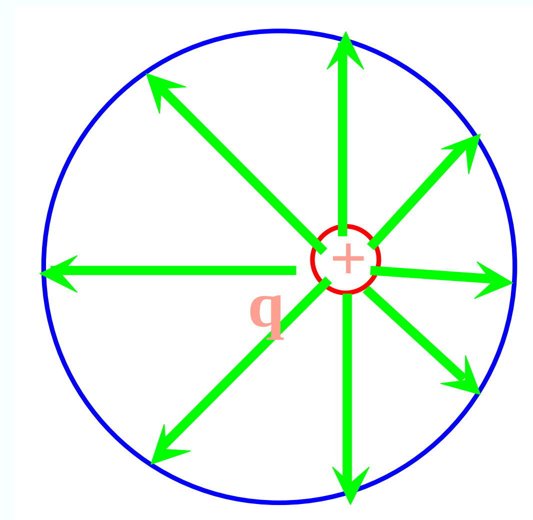
该电场具有面对称。



下面讨论几种电场的特点

1、点电荷电场





$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$$

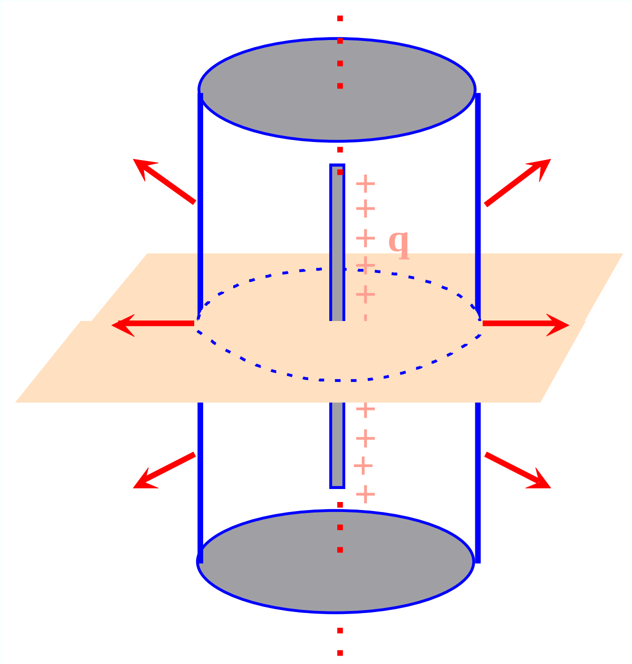
$$\Rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2}$$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$$

$$\not\Rightarrow \frac{q}{4\pi r^2}$$

2、均匀带电直线的电场

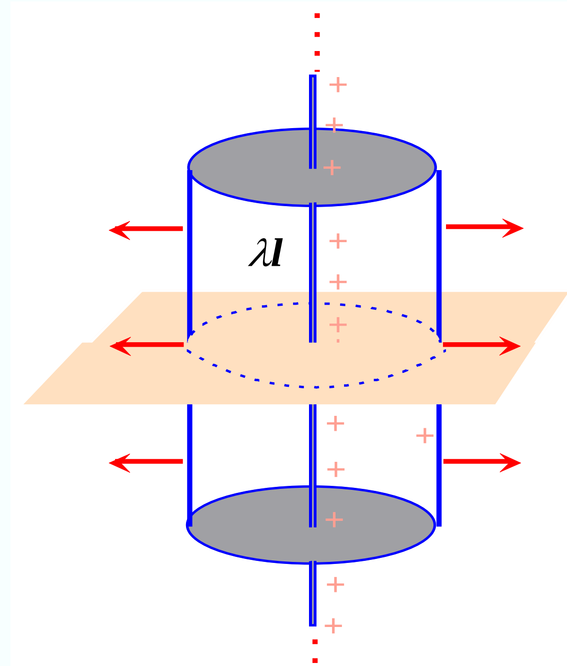
有限长



$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = q$$

$$\not\Rightarrow \quad D = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

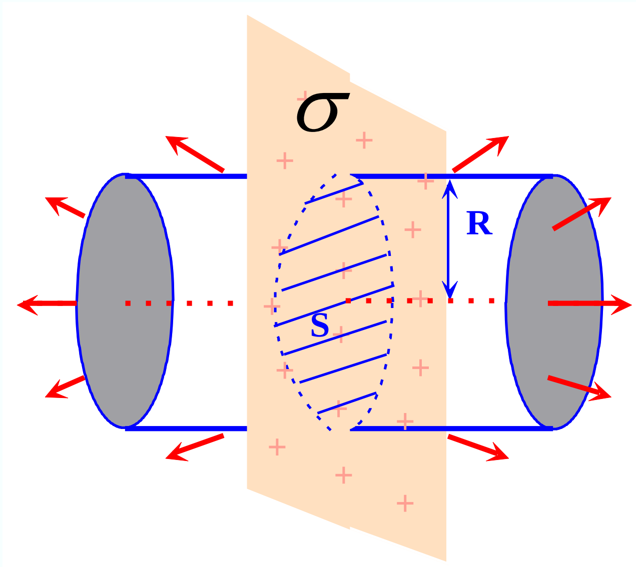
无限长



$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = q$$

$$\Rightarrow \quad D = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

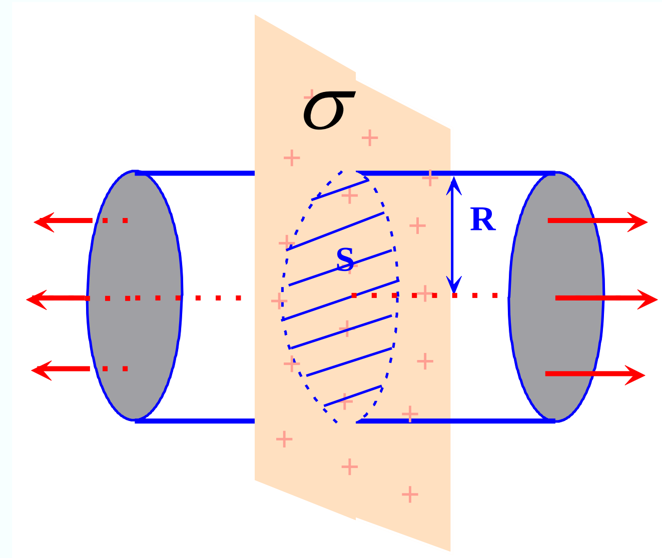
3、均匀带电平面的电场



有限大带电面

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = q$$

$$\not\longrightarrow \quad \frac{\sigma}{2}$$



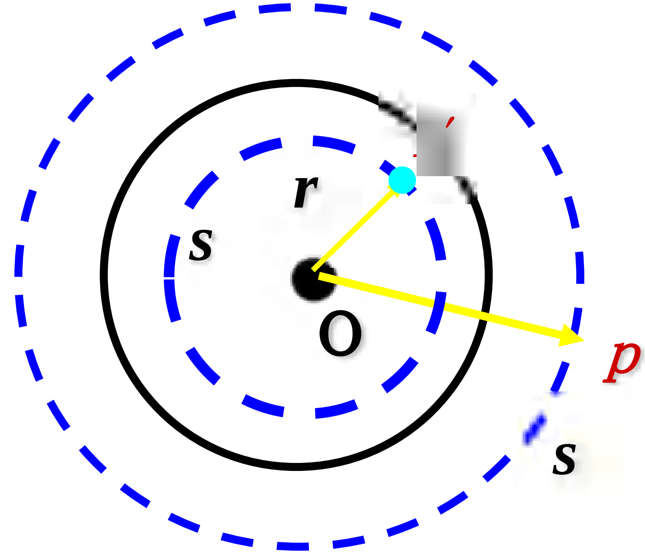
无限大带电面

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = q$$

$$\longrightarrow \quad D = \frac{\sigma}{2}$$

[练习]已知： $\rho = kr^2$ ， k为常数，r为球心到球内一点的距离。求场强的分布。

$\because \rho \propto r^2, \therefore E$ 仍具球对称，



$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = D \cdot 4\pi r^2 = Q$$

$$r < R, \quad D \cdot 4\pi r^2 = \int_V \rho \, dV$$

$$= \int_0^r kr^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4}{5}\pi k r^5$$

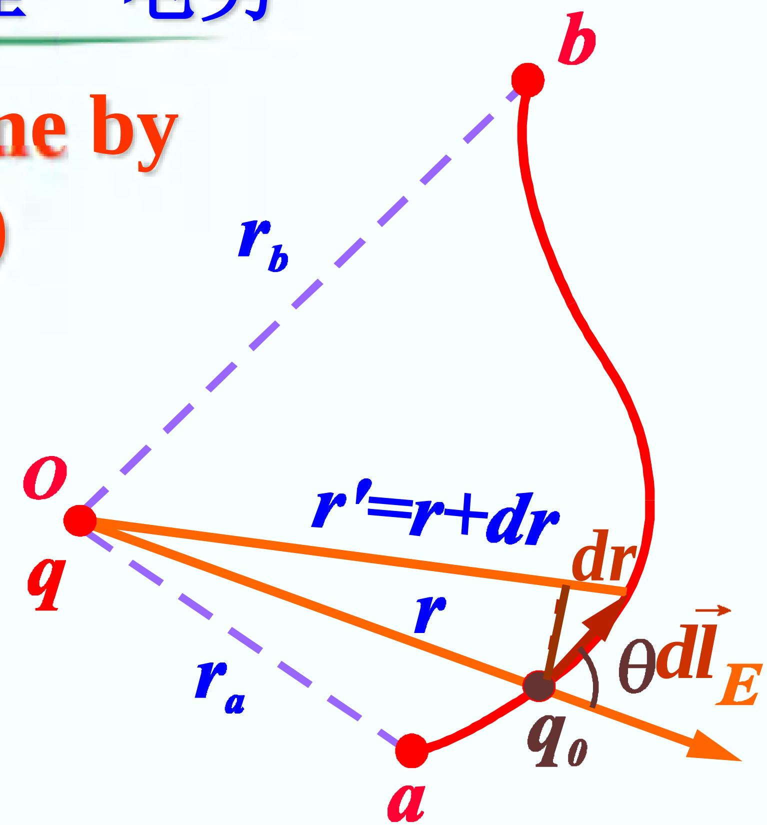
$$\therefore E_{内} = \frac{kr^3}{5\varepsilon}$$

$$r > R, \quad D \cdot 4\pi r^2 = \int_0^R kr^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4}{5}\pi k R^5$$

$$\therefore E_{外} = \frac{kR^5}{5\varepsilon_0 r^2}$$

4.5 静电场的环路定理　电势

一、电场力的功(Work Done by the Electric Field Force)



- 点电荷电场

$q_0>0$　由　$a \rightarrow b$

$$A_{ab}=\int_a^b q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$=\int_a^b q_0E\cos\theta dl$$

$$=\int_{r_a}^{r_b} q_0E\,dr=\int_{r_a}^{r_b}\frac{q_0q}{4\pi\varepsilon_0r^2}dr=\frac{q_0q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$

点电荷的电场力是保守力。

点电荷系产生的电场

根据场的叠加原理， $\vec{E}=\sum \vec{E}_i$.故总电场力为： $\vec{F}=q_0\vec{E}=q_0\sum \vec{E}_i$

总功为： $A=\int_a^b q_0\sum \vec{E}_i\cdot d\vec{l}$

展开后得到：

$$A=\int_a^b q_0(\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_n)\cdot d\vec{l}$$

$$=\int_a^b q_0\vec{E}_1\cdot d\vec{l}+\int_a^b q_0\vec{E}_2\cdot d\vec{l}+\cdots$$

$$=\int_a^b q_0\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}dr+\int_a^b q_0\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}dr+\cdots$$

$$=\frac{q_0Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{1a}}-\frac{1}{r_{1b}}\right)+\frac{q_0Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{2a}}-\frac{1}{r_{2b}}\right)+\cdots$$

一般静电场

由场强叠加定理推知——当点电荷q_0在任意静电场中运动时，电场力所作的功只取决于运动的始末位置与路径无关。任何静电场力都是保守力。

分析思考问题？

静电场的环路定理

$$\oint_L q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

静电场是保守力场或有势场。

电势能

由功能原理：$W_a - W_b = A_{ab} = q_0\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$

当电场力要做正功时：

$$A_{ab} > 0,\text{则}W_a > W_b,\text{电势能减少；}$$

当电场力要做负功时：

$$A_{ab} < 0,\text{则}W_a < W_b,\text{电势能增加；}$$

电势能和重力势能一样，也是一个相对量。只有先规定电荷在某一参考点的电势能为零，才能确定电荷在其他位置的电势能，如果选b为参考点，即

$$W_b = 0,\text{则有}W_a = \int_a^{\text{参考点}} q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

由上式可知，电荷 q_0 在场中某点的电势能，在数值上等于把 q_0 从该点移到参考点时，电场力所做的功。理论上通常取无限远处的电势能为零，则 q_0 在a点的电势能

$$W_a = \int_a^\infty q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

电势能可正、可负，电势能的单位为焦耳。

电势能的概念属于（试验电荷和场源电荷）带电体系。

二、电势(Electric Potential)

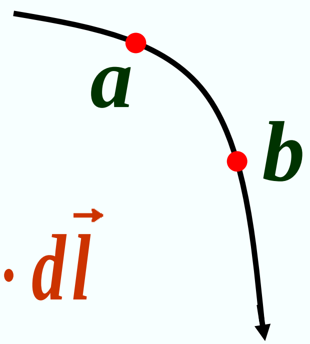
W_a与q_0成正比，比值$\dfrac{W_a}{q_0}$与试探电荷无关

它反映了电场本身在a点的性质，定义：电荷在电场中某点的电势能与它的电荷量的比值，叫做该点的电势。

$$即U_a=\frac{W_a}{q_0}=\int_a^{参考点}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

电势在数值上等于该点处单位正电荷的电势能，即单位正电荷从该点移到电势零参考点时电场力做的功。电势的单位是：伏特（V）

如图，a, b是同一电力线上的两点，若把单位正电荷从a点移到b点，电场力做正功，说明a点的电势比b点的电势高。因此，顺着电力线方向，电势越来越低；同一电力线上的任意两点的电势不会相等。这正是电力线不闭合性质的另一种表达形式。



推论

❶ 电势差（电压）： $U_a - U_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$

电场中两点间的电势差是一个绝对量！

❷ 电场力的功： $A_{ab} = q_0 (U_a - U_b)$

电势零点（参考点）的选择

- 电荷分布是有限区域时，通常选择在无限远处为电势零点。
- 电荷分布（扩展到）无限远处时，一般取有限远处的某点为电势零点。
- 点电荷和电荷分布扩展到无限远的带电体组成系统，应选取有限远处为电势零点。

三、电势计算(Calculation of Electric Potential)

1. 点电荷电场中的电势

$$U_p = \int_p^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

2. 点电荷系电场中的电势（电势叠加原理）

$$U_p = \sum U_{p_i} = \sum \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$ 标量叠加

3. 电势的两种计算方法

利用电势的定义求电势

$$U_p = \int_p^{参考点} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$ （ $\vec{E}$可以由高斯定理求得）

应当注意：

（1）选择适当的电势零点；

（2）积分路径选择有任意性，一般选择dl与E平行、垂直或有恒定夹角的积分路径；

（3）一般情况要分区间进行积分，而且在某一区间积分时，必须应用该区间的电场表达式。

应用电势叠加原理求电势

（1）点电荷系电场中的电势：

$$U_p = \sum U_{p_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon r_i} \qquad (7.48)$$

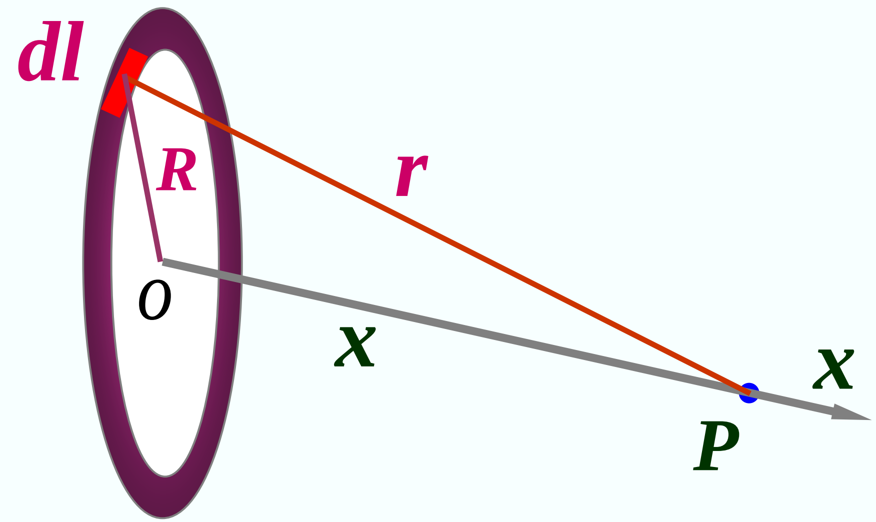
（2）连续带电体电场中的电势：

由 $U_p = \int dU_p$ 求

$$dU_P = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad U_P = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (7.49)$$

（3）利用典型带电体的电势公式确定一些规则带电体的电势。

例4.15 计算半径为R、所带电量是q的均匀带电圆环轴线上一点P的电势。



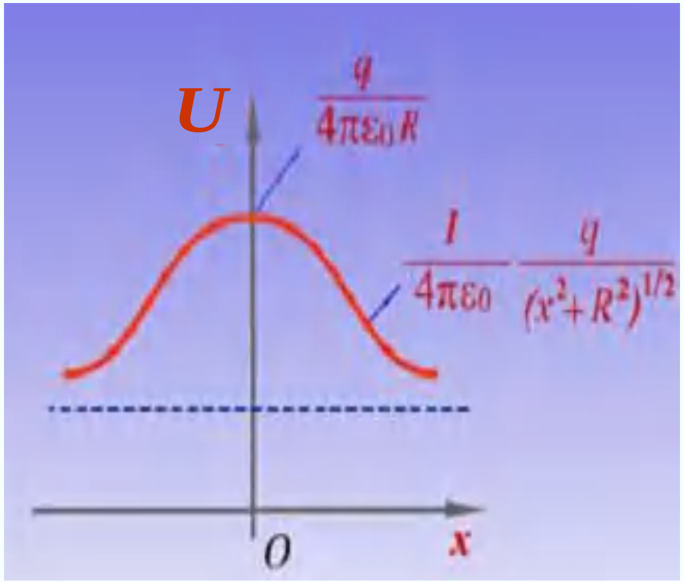
解：对电荷元$dq=\lambda dl$, 有

$$dU = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o r}$$

求和得

$$U = \int_0^q \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o\sqrt{R^2+x^2}}$$

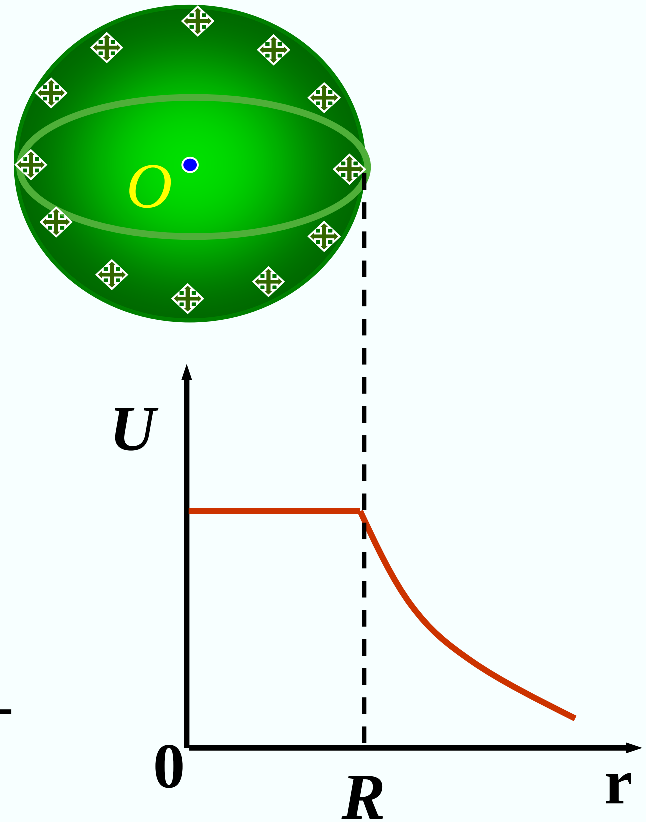
$$U = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o R} & x = 0 \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x} & x \gg R \end{cases}$$



例4.13 计算半径为R、所带电量是q的均匀带电球面电场中一点P的电势。

解：球内外电场是

$$\vec{E}=\begin{cases}0 & r<R\\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} & r>R\end{cases}$$

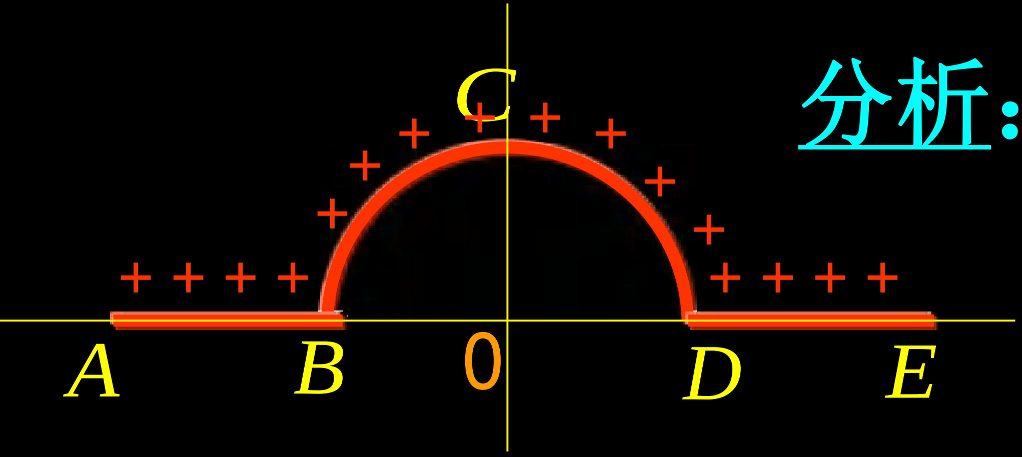


选择积分路径是r的方向，则

$$U_{外}=\int_r^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}\cdot d\vec{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$U_{内}=\int_r^{R}0\cdot dr+\int_R^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}\cdot d\vec{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

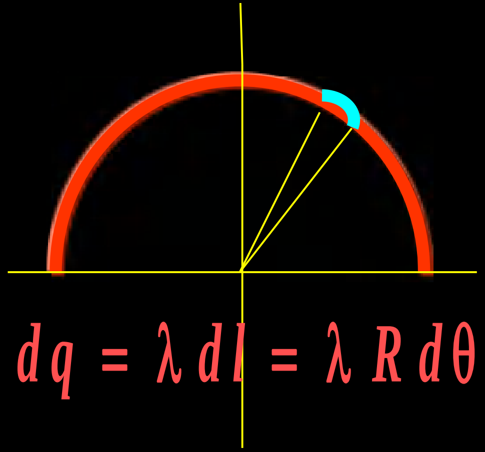
例2 真空中均匀带电线形状如图所示AB=DE=R，电荷线密度为λ，求圆心O点的电势。



分析：$U_o = U_{AB} + U_{BCD} + U_{DE}$

$= 2U_{AB} + U_{BCD}$

$$U_{AB} = \int dU = \int_R^{2R} \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon l} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \ln 2$$

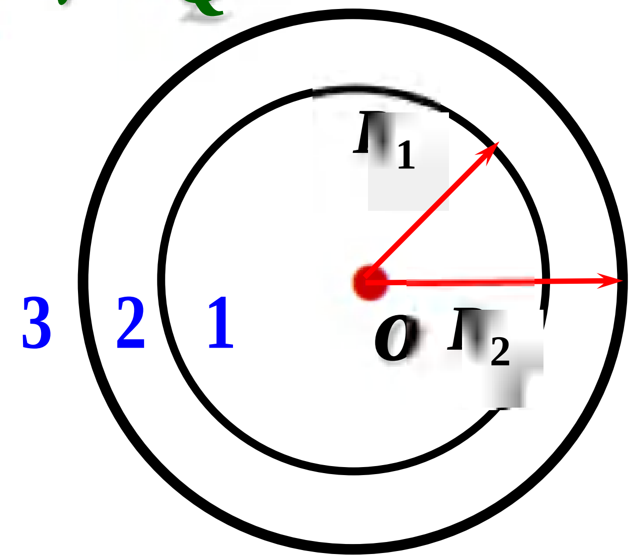


$$U_{BCD} = \int_0^{\pi} \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\varepsilon R} = \frac{\lambda}{4\varepsilon}$$

$$U_o = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln 2 + \frac{\lambda}{4\varepsilon}$$

【练习】已知：R_1 、R_2 、$+Q$ 、 $-Q$

求：三个区域的场强和电势。



解：根据高斯定理

$$\begin{cases} E_1 = 0 \\ E_2 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \\ E_3 = 0 \end{cases}$$

根据电势叠加原理

利用eg4.13的结论

$$\begin{cases} U_1 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon R_1} - \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon R_2} \\ U_2 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r} - \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon R_2} \\ U_3 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r} - \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r} = 0 \end{cases}$$

定义法?

求电势的两种方法

（1）叠加法 $\mathrm{d}U_P = \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$，　$U_P = \int_q \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

(a)对电量积分；

(b)默认无穷远处$U_\infty=0$；

(c)此方法适于<u>规则带电体</u>的情况。

（2）定义法　$U_a = \int_a^{参考点} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

(a)选择适当的电势零点；

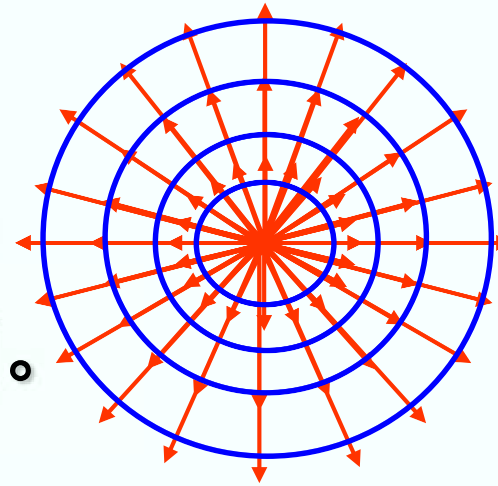
(b)对路径积分：<u>①路径可任选</u>；<u>积分一定要积到头</u>。

②若各区域场强不同，则必须分段积分。

(c)此方法适于<u>电场具有高度对称性</u>的情况；

4.6 电场强度与电势关系

一、等势面 (Equipotential Surfarces)



电势相同点形成的曲面称为等势面。

分析思考问题

1. 在静电场中，沿等势面移动电荷，电场力做功为零。

2. 在静电场中，电场线与等势面正交。电场线方向指向电势降落的方向。

画等势面时，相邻等势面的电势量值间隔要相等。所以等势面密集处场强大，反之场强小.

典型带电体的等势面

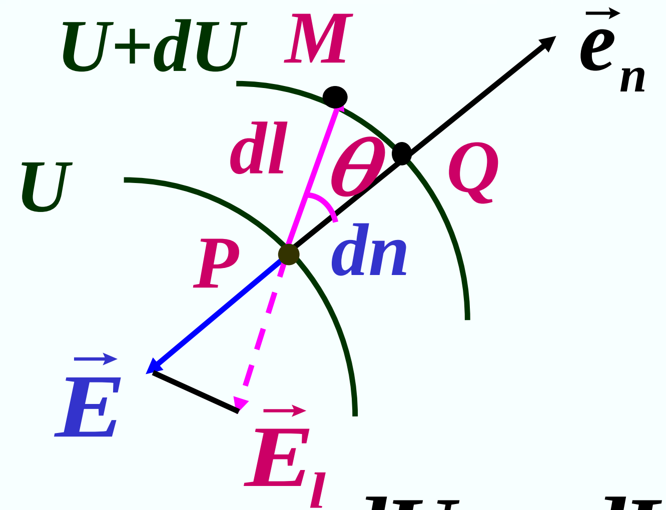
二、场强与电势的关系

(Relationship of Electric Field and Potential)

沿等势面法线方向

$$-dU = Edn \quad E = -\frac{dU}{dn}$$

$$\vec{E} = -\frac{dU}{dn}\vec{e}_n$$



沿等势面任意方向

$$-dU = E_l dl \quad dn = dl \cdot \cos\theta$$

$$\therefore \frac{dU}{dn} \geq \frac{dU}{dl}$$

$$E_l = -\frac{dU}{dl} = -\frac{dU}{dn} \cdot \cos\theta = E \cdot \cos\theta$$

场强的方向是电势减少最快的方向

电场强度沿任意方向的分量等于该点电势沿该方向变化率的负值.

直角坐标系：$E_x = -\frac{dU}{dx} \quad E_y = -\frac{dU}{dy} \quad E_z = -\frac{dU}{dz}$

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} = -\frac{dU}{dx}\vec{i} - \frac{dU}{dy}\vec{j} - \frac{dU}{dz}\vec{k}$$

引用哈密顿算符有 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\nabla U$$

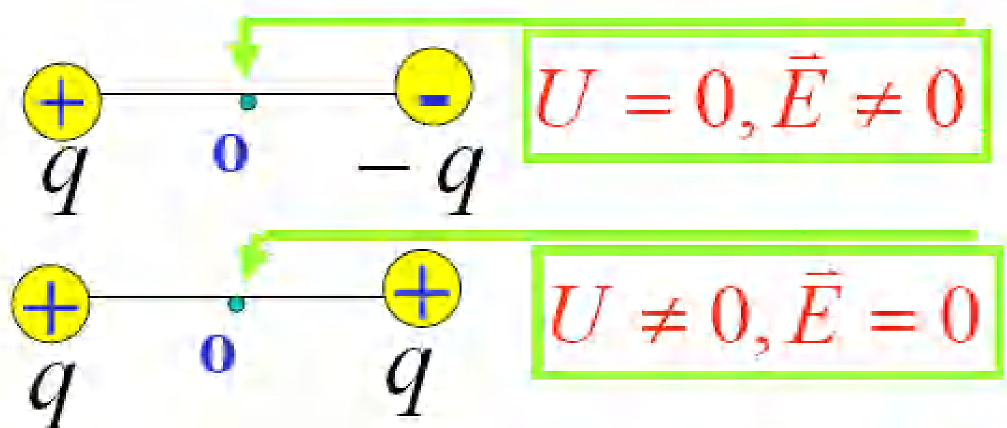
电场强度是该点电势梯度负值。

球坐标系 $\vec{E} = \vec{e}_r \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\vec{e}_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}$

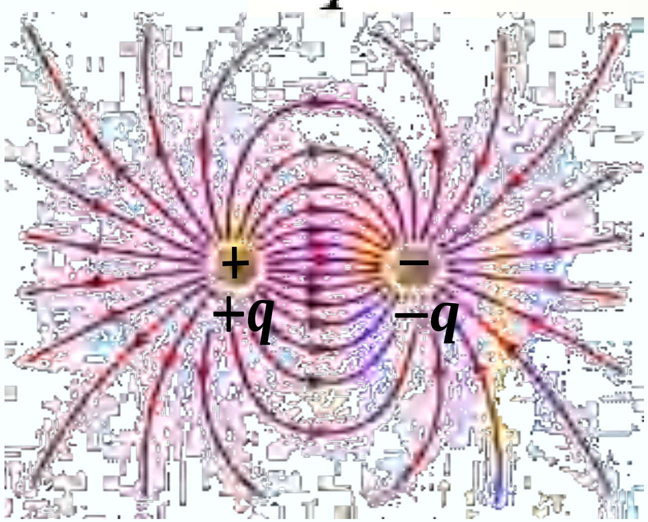
场强的大小等于电势沿场强方向的减少率，与该点电势值本身并无直接关系。

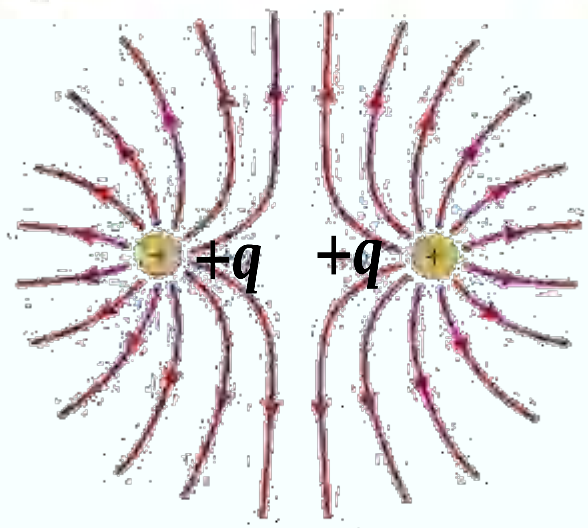
电势为零的地方，场强不一定为零。场强为零的地方，电势不一定为零。

$$\vec{E} = -\nabla U$$

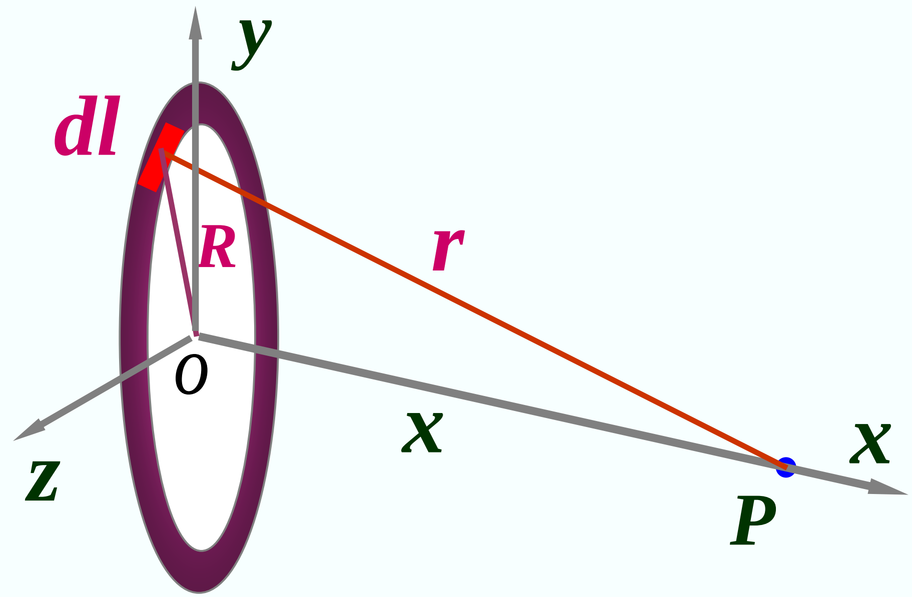


提供又一种求场强的方法。因电势是标量，对于一般对称的带电体，可通过电势求场强。





例4.17计算半径为R、所带电量是q的均匀带电圆环轴线上一点P的场强。



解：已知P点电势是

$$U=\int_0^q \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o r}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_o\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$E_x=-\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_y=E_z=0$$

$$E=\sqrt{E_x^2+E_y^2+E_z^2}=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

4.7 静电场中的导体

一、静电平衡（Electrostatic Balance）

放置在静电场中的导体，产生静电感应现象，当导体中没有电荷做宏观运动的状态时，称为**静电平衡状态**。

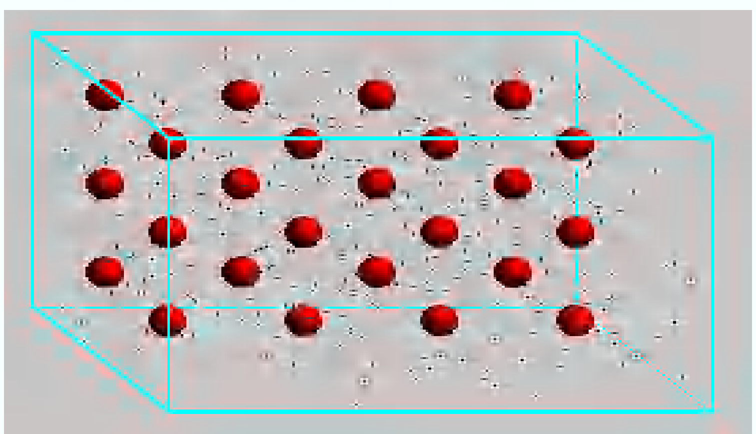
静电平衡条件:

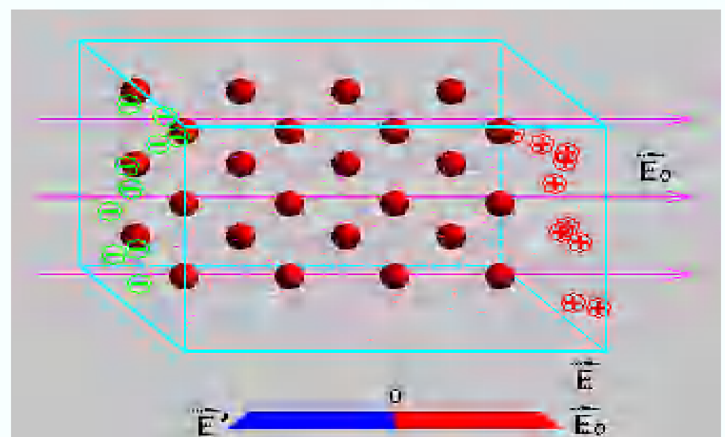
导体内部 $\vec{E} = 0$

导体表面 $\vec{E}$ 与表面垂直

$\Rightarrow$ 导体是等势体

加电场前





加电场后

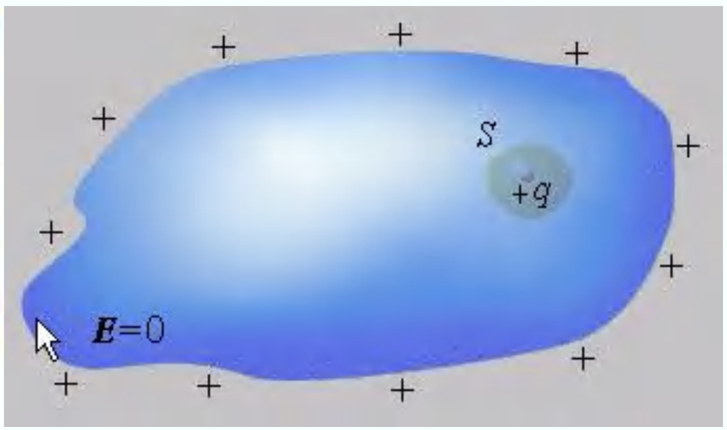
二、导体电荷的分布(Charges on Conductors)

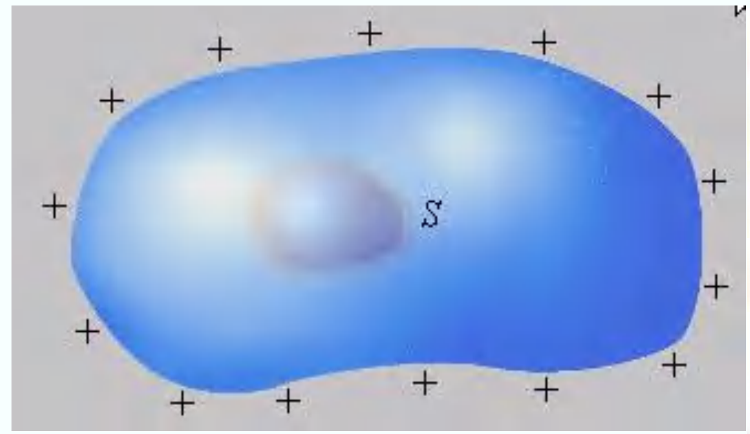
1. 导体电荷的分布

在带电导体处于静电平衡时，电荷分布满足：

❶ 导体上的电荷只能分布在导体表面上；

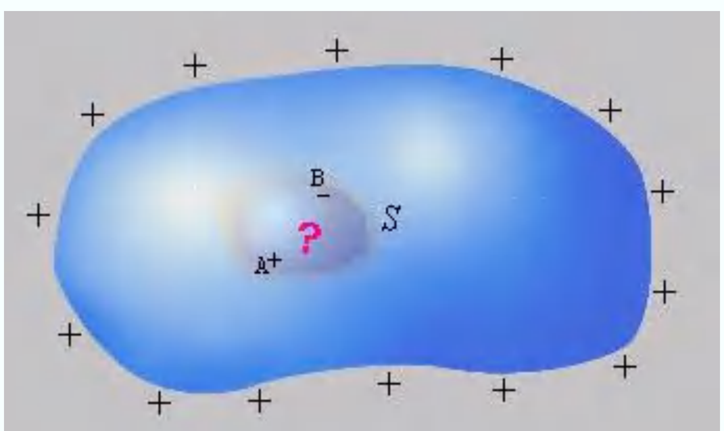
无空腔导体

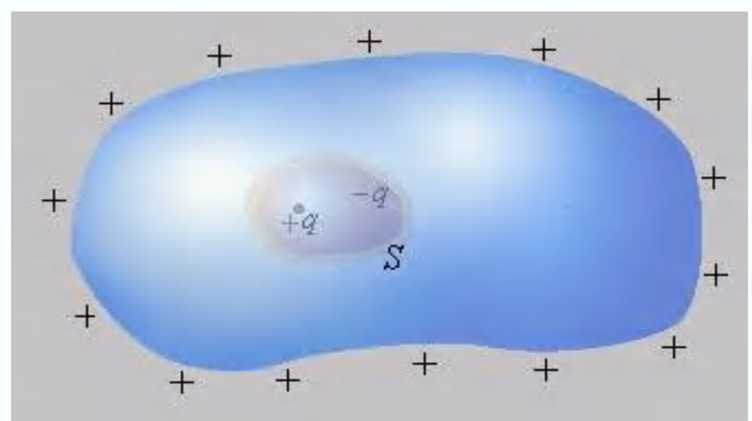




有空腔导体

空腔体疑问



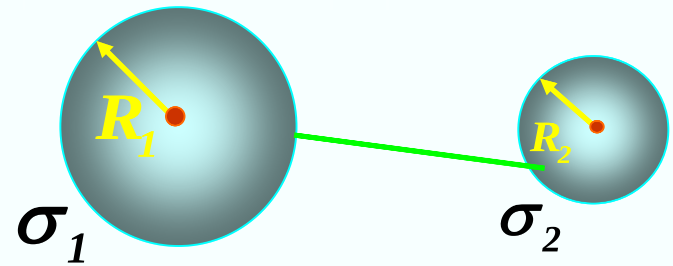


腔内有电荷

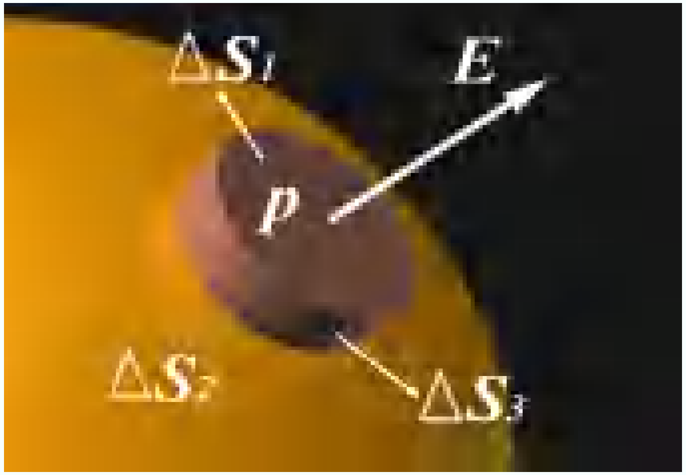
❷ 曲率大处，电荷面密度大，附近的电场亦强。

证明 如图，满足等电势

$$U_1 = U_2 \qquad \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$



$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{q_1}{4\pi R_1^2} : \frac{q_2}{4\pi R_2^2} = \frac{R_2}{R_1}$$



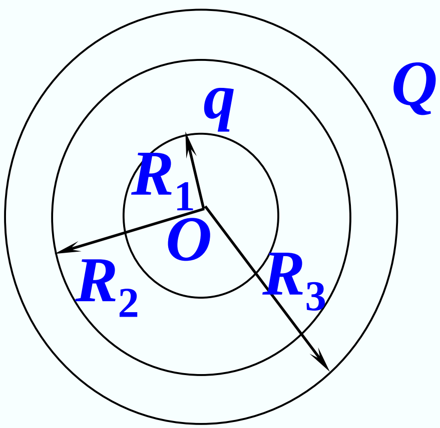
同样如图，由高斯定理

$$\int_{\Delta S_1} \vec{D}\cdot d\vec{S} + \int_{\Delta S_2} \vec{D}\cdot d\vec{S} + \int_{\Delta S_3} \vec{D}\cdot d\vec{S}$$

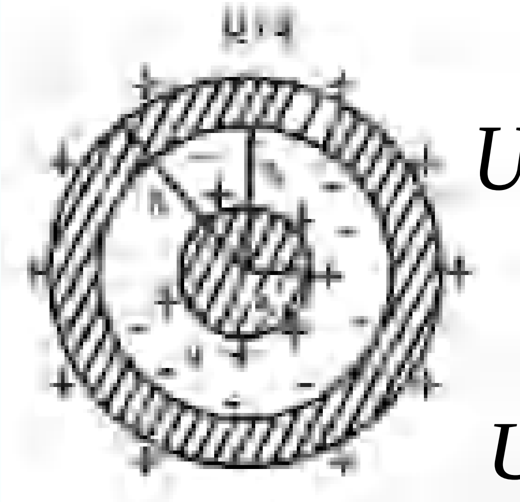
$$= \sigma \Delta S_1 \qquad \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

三、静电屏蔽

例4.19 半径为R_1的导体球带有电量q，球外有一内、外半径分别为R_2和R_3的同心导体球壳带电为Q，如图所示。（1）求导体球和球壳的电势；（2）若用导线连接球和球壳，再求它们的电势；（3）若不是连接而是使外球接地，再求它们的电势。



（1）由静电平衡条件可知，电荷只能分布于导体表面。



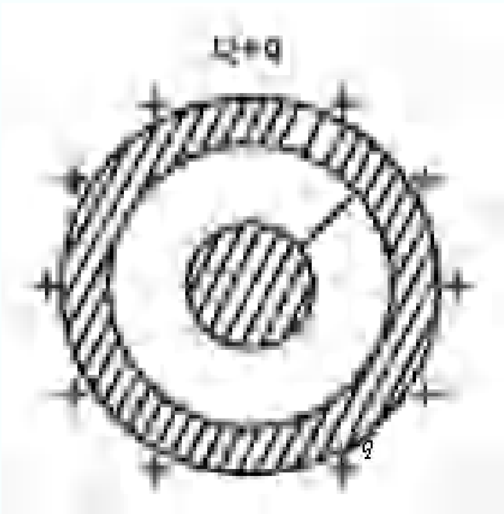
$$U_1 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2} dr + 0 + \int_{R_3}^{\infty} \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} dr$$

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R_1} - \frac{q}{R_2} + \frac{q+Q}{R_3}\right)$$

导体球壳的电势为

$$U_2 = \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

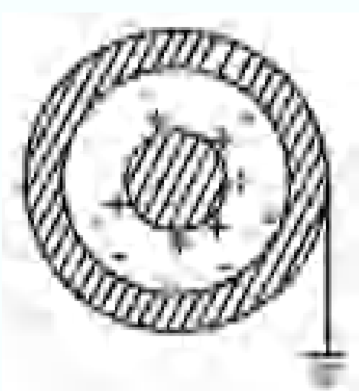
（2）若用导线连接导体球和球壳，球上电荷q将和球壳内表面电荷中和，电荷只分布于球壳外表面。此时球和球壳的电势相等。



$$U_1 = U_2 = \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

（3）若使球壳接地，球壳外表面电荷被中和，这时只有球和球壳的内表面带电。此时球壳电势为零

$$U_2 = 0$$



导体球的电势是

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R_1} - \frac{q}{R_2}\right)$$

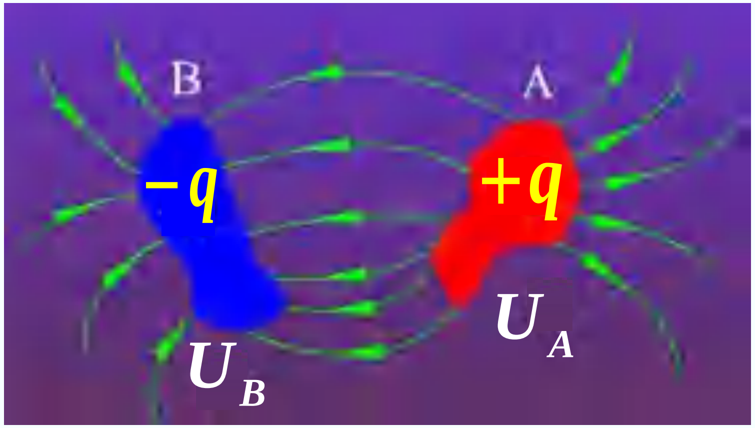
4.8 电容器

一、电容器的电容(Capacitors and Capacitance)

电容器：储存电荷和电能的“容器”。

电容器由两块导体（极板）组成，其储存电荷能力用物理量电容表征，定义为

$$C = \frac{q}{U_{AB}}$$



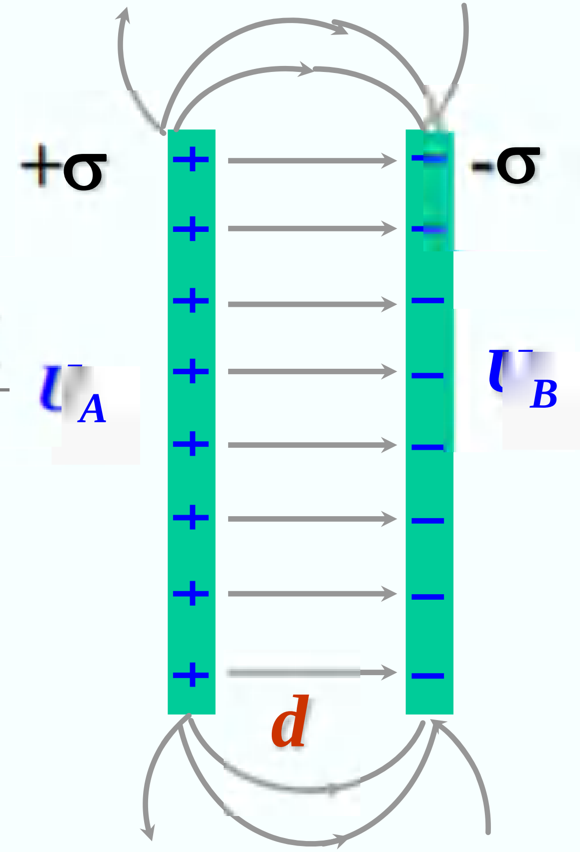
单位：F、μF、 pF

二、电容器电容的计算（Calculation of Capacitance)

电容器电容计算步骤如下：

- 令两极板带等量异号电荷q 和 $-q$；
- 求板间 $\vec{E}$；
- 求两板电势差U_{AB}；
- 求电容C 。

三种常用电容器电容的计算



1. 平板电容器

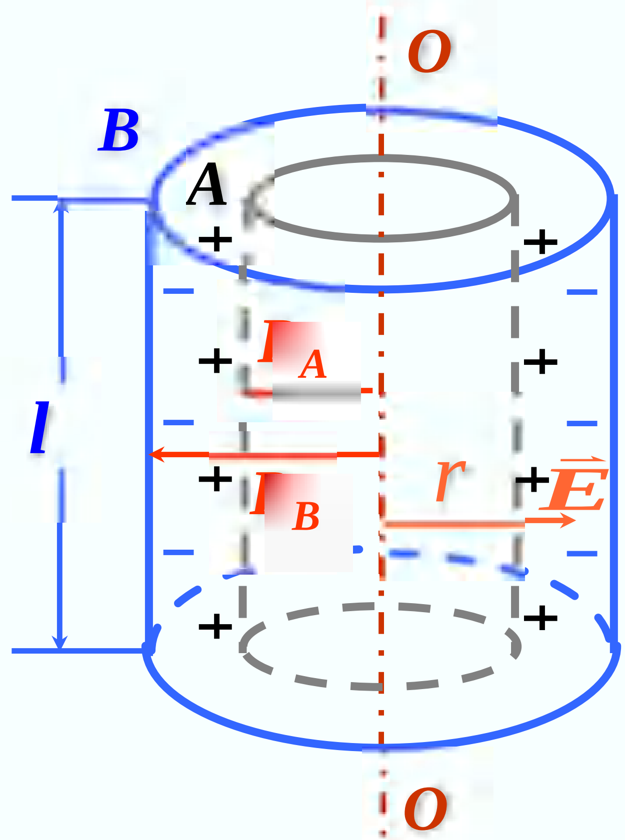
A板： $+q \quad (\sigma = \frac{q}{S})$

B板： $-q \quad (-\sigma)$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad U_{AB} = \frac{\sigma}{\varepsilon} d = \frac{qd}{\varepsilon S}$$

$$C = \frac{q}{U_{AB}} = \frac{\varepsilon S}{d}$$

2. 圆柱形电容器



A板：$+q \quad \left(\lambda = \dfrac{q}{l}\right)$

B板：$-q \quad (-\lambda)$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}$$

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

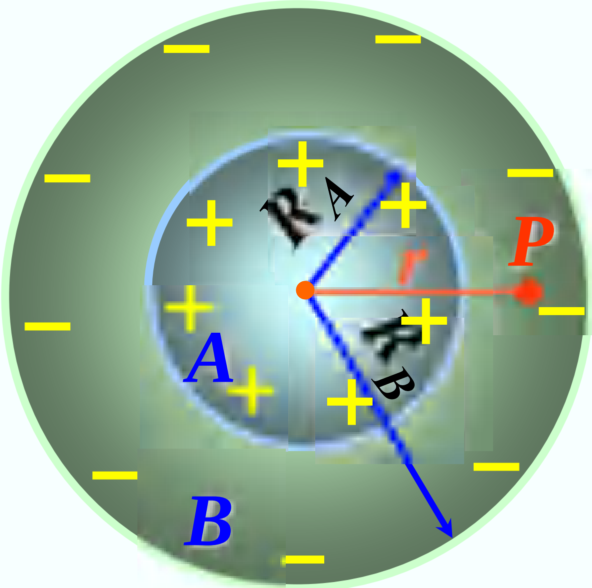
$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{R_B}{R_A}$$

$$C = \frac{q}{U_{AB}} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{R_B}{R_A}}$$

3. 球形电容器

A板：$+q$　　B板：$-q$

$$R_A < r < R_B \qquad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}$$



$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right)$$

$$C = \frac{q}{U_{AB}} = \frac{4\pi\varepsilon R_A R_B}{R_B - R_A}$$

分析思考问题？ 决定电容器电容的因素是：

电容器的大小、形状、板间电介质。

电容器的能量W_e，即

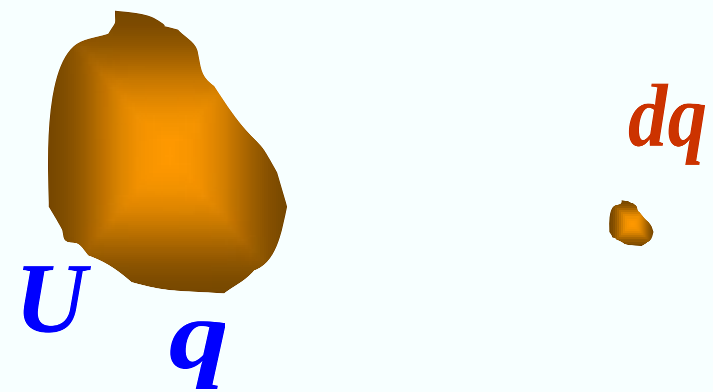
$$W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}UQ$$

4.9电场的能量

一、带电体的能量 (Energy Storage in Capacitors)

1. 带电体的能量

带电体的电量Q是外力克服电场力不断从无限远移动电量dq的结果，如图情况下有



$$dA=(U-U_{\infty})dq=U\,dq$$

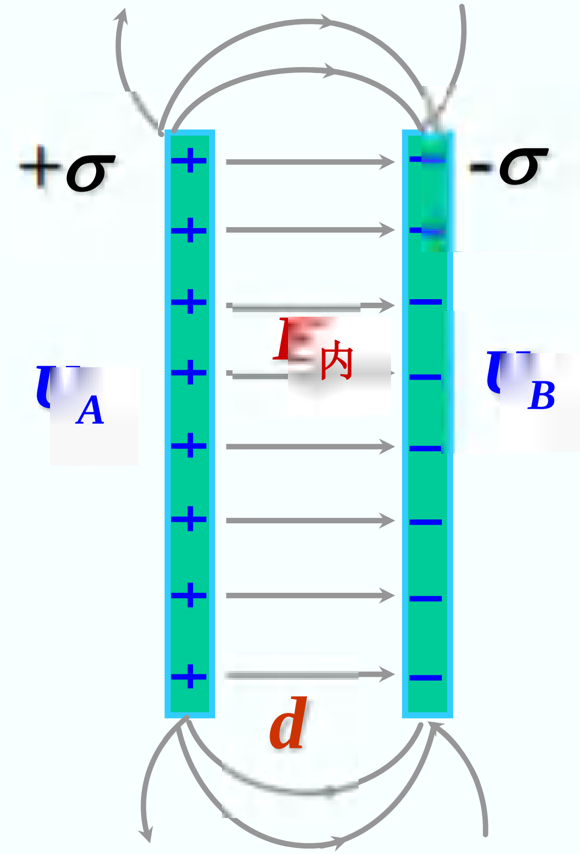
外力总功为 $$A=\int dA=\int_0^Q U\,dq$$

依据功能原理 $$W_e=\int_0^Q U\,dq$$

2. 两均匀带电无限大平板的能量

当A板带有电量q、B板带有$-q$，两板间的电场是

$$E_{内}=\frac{\sigma}{\varepsilon}=\frac{q}{\varepsilon S}$$



相应的电势为 $U_{ab}=E_{内}d=\dfrac{qd}{\varepsilon S}$

带入（7.54）有

$$W_e=\int_0^Q\frac{d}{\varepsilon S}qdq=\frac{Q^2d}{2\varepsilon S}=\frac{1}{2}U_{AB}Q$$

二、电场的能量(Electric-Field Enegy)

以平板为例，其电场能量为

$$W_e = \frac{1}{2} U_{AB} Q = \frac{1}{2} E d E \varepsilon S = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 V$$

V是两板间电场空间的体积，定义

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} DE$$

w_e称为电场能量体密度。

上式虽由平板特例导出，但普遍适用。

电场的总能量为：

$$W_e = \int_V w_e dV$$

例4.20 在空气中放置一个均匀带电球面，球面半径为R，总电荷量为q。求均匀球面产生的电场能量。

解：电场分布 $E=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r>R)\\ 0 & (r<R)\end{cases}$

某点电场能量密度 $w_e=\dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2=\dfrac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}$

电场能量 $W_e=\int_V w_e \mathrm{d}V=\int_R^{\infty}\dfrac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}4\pi r^2\mathrm{d}r$

$$=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}=\frac{1}{2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}q$$