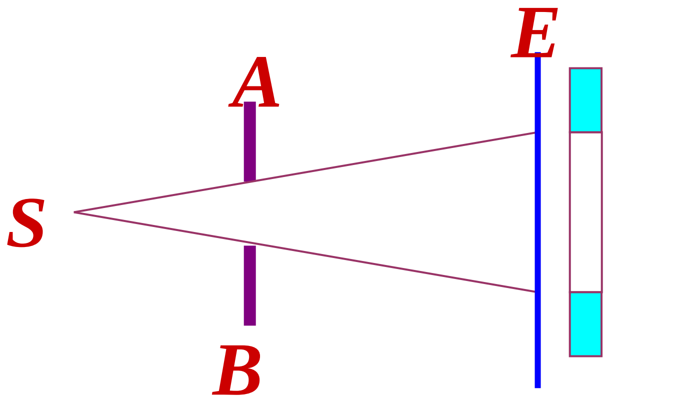
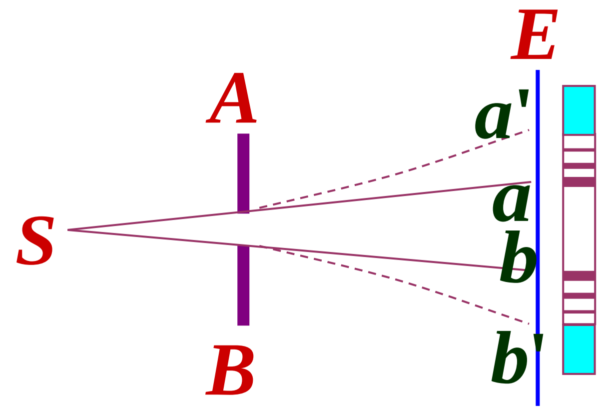
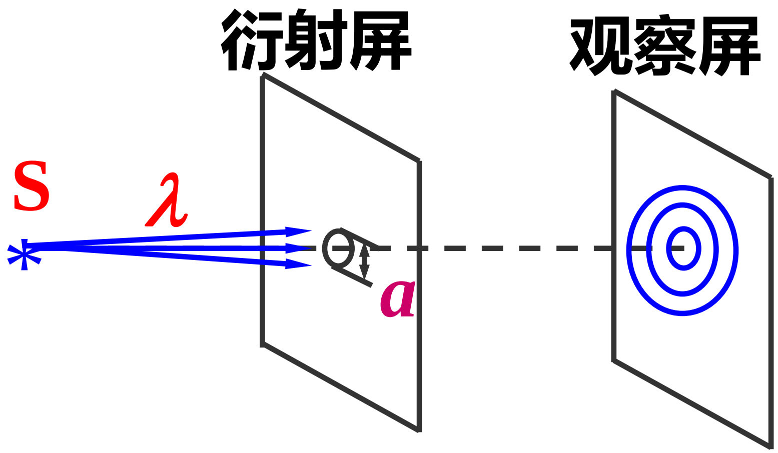
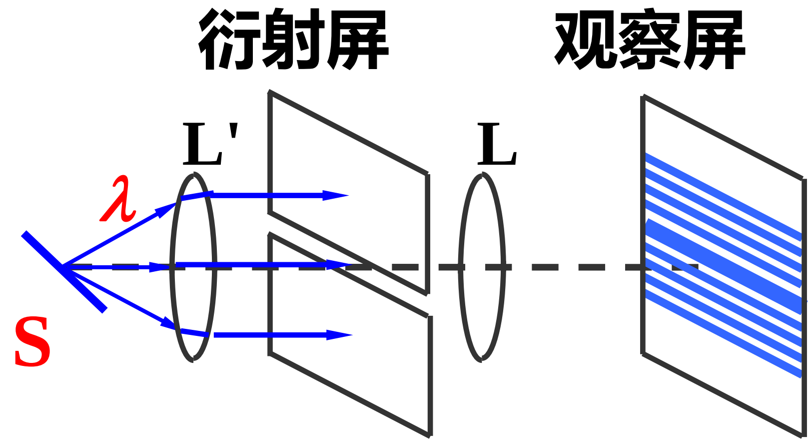
第8章
光的衍射

8.1.1 光的衍射现象







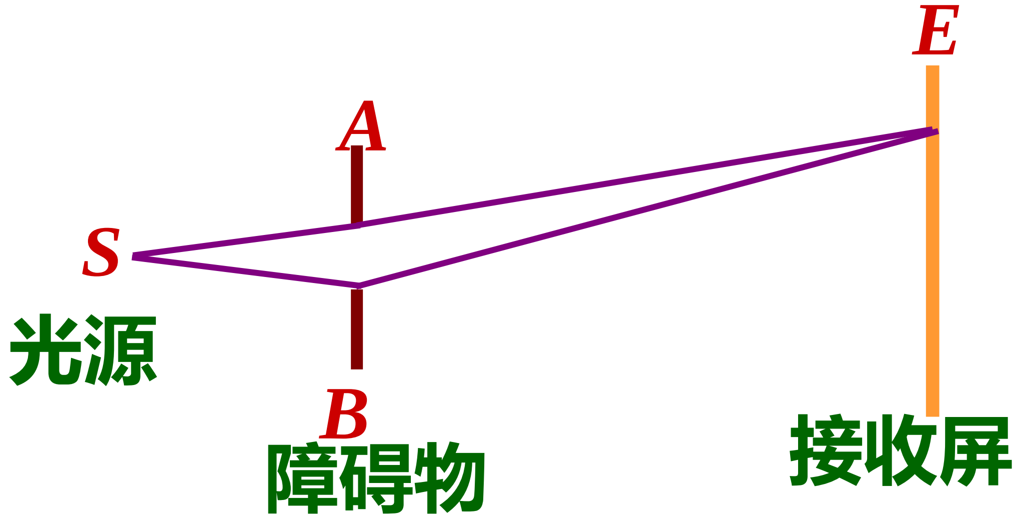


光在传播过程中绕过障碍物的边缘，偏离直线传播的现象叫**光的衍射(diffraction of light)**。

衍射分类

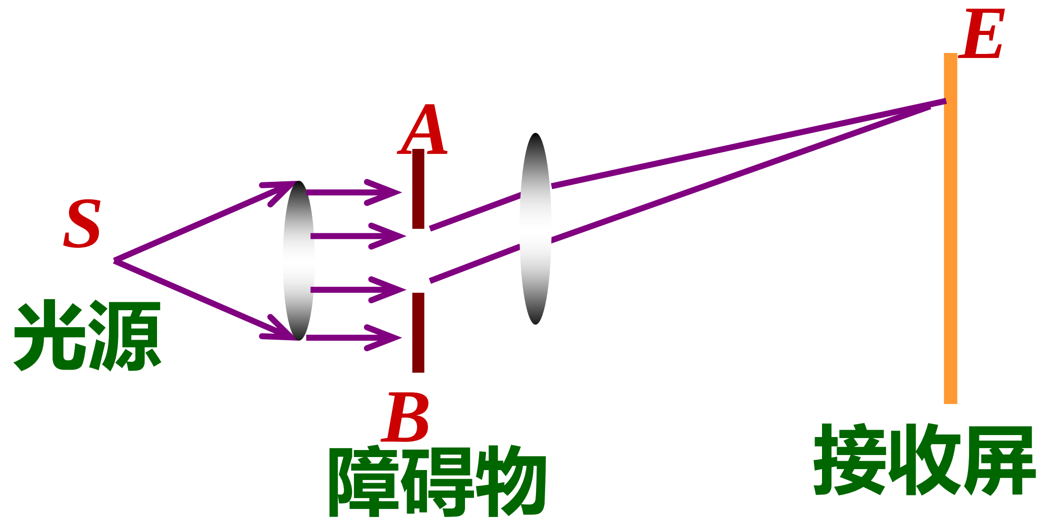
- 菲涅耳衍射

光源—障碍物—接收屏距离为有限远。（两者之一）



- 夫琅禾费衍射

光源—障碍物—接收屏距离为无限远。

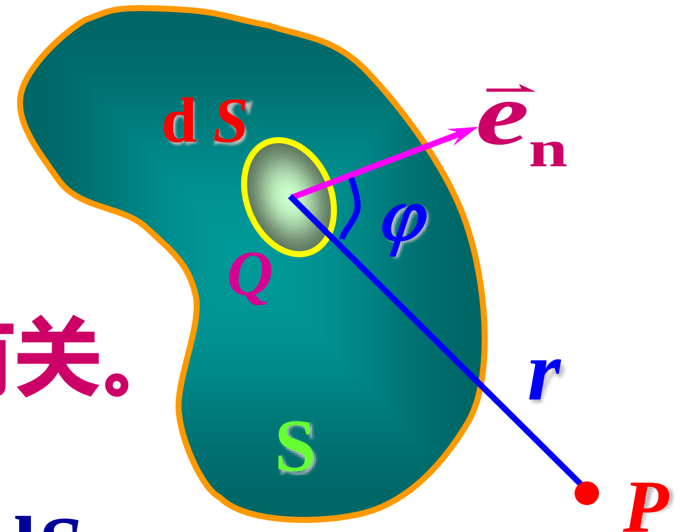


8.1.2 惠更斯-菲涅耳原理

波面上每一个面元发出的子波，在空间相遇时，可以相互叠加产生干涉。

考察Q点面元dS在P点产生振动$\mathrm{d}E_P$，注意到

$$\mathrm{d}E_P \propto E_Q \propto 1/r$$ 与衍射角φ有关。



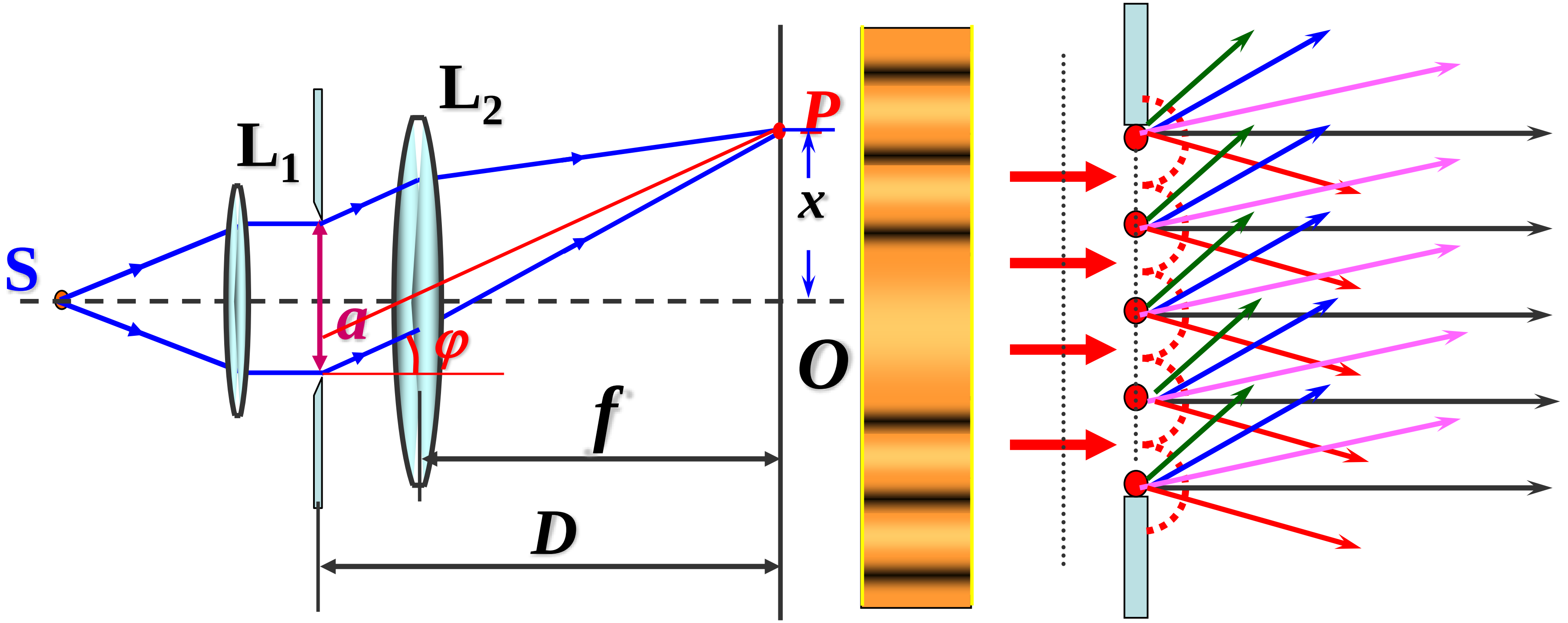
$$\Rightarrow \mathrm{d}E_P \propto \frac{E_Q}{r} K(\varphi)\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r)\mathrm{d}S$$

$$E_P = C\int_S \frac{E_Q}{r} K(\varphi)\cos(\omega t - kr)\mathrm{d}S$$

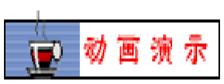
在垂直入射时 $K(\varphi) = \frac{1}{2}(1+\cos\varphi)$

说明子波为什麽不会向后退。

8.2.1 夫琅禾费单缝衍射的实验装置



8.2.2 衍射现象的讨论

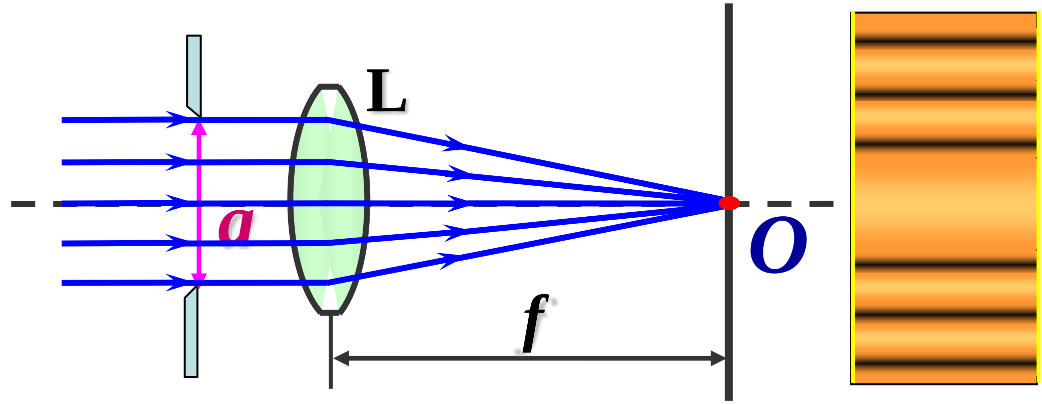


单缝衍射

一、定性分析

● 当衍射角为零 ($\varphi = 0$) 时，会聚于O点。

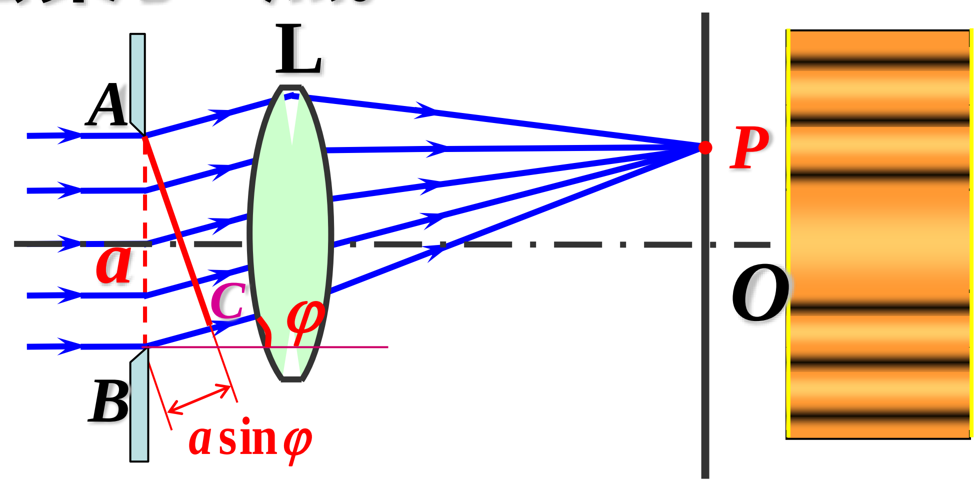
无光程差，
中央为明条纹。



● 当衍射角为φ时，会聚于P点。

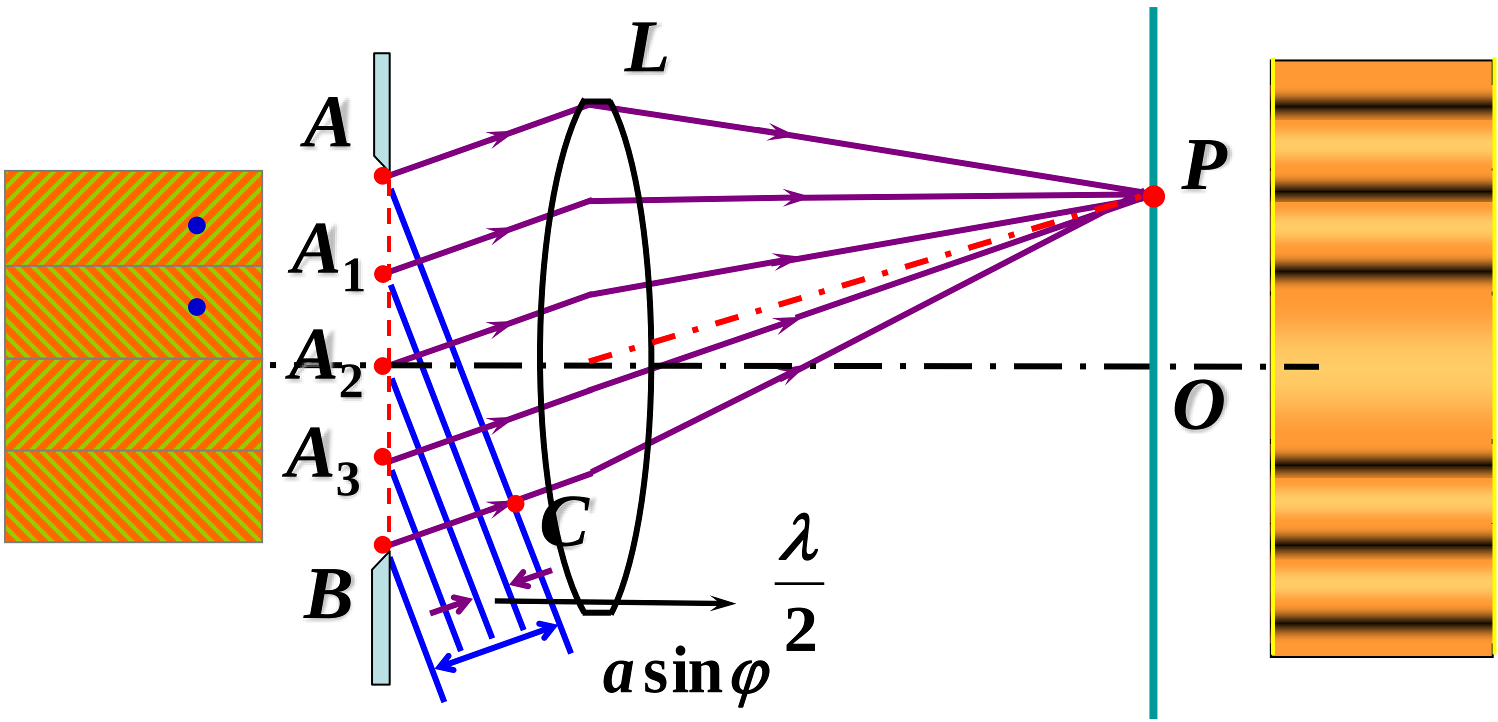
作波面AC，则B、C两者间的光程差为

$$\delta_{AB} = \overline{BC} = a\sin\varphi$$



● 半波带法

以$\lambda/2$为一个单位，作一组平行于AC的波面，把AB面分成 n 个相等的窄条，每个窄条称为一个半波带。而任意相邻半波带上对应点发出的光波到 P 点的光程差为$\lambda/2$ 。



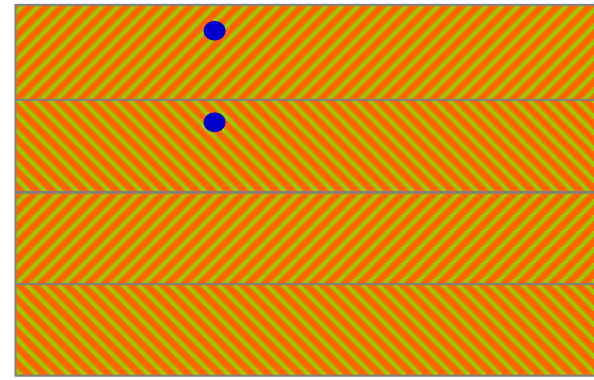
$$\delta_{AB} = \overline{BC}$$

$$= a\sin\varphi$$

$$= \pm k\frac{\lambda}{2}$$

形成明纹、暗纹的条件

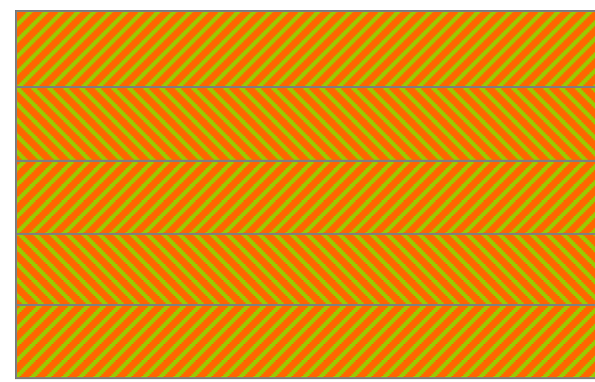
对应一定的φ角，AB被分成偶数个半波带时，形成暗纹。



形成暗纹的条件

$$a\sin\varphi = \pm 2k\frac{\lambda}{2} \quad k = 1, 2, \cdots$$

对应一定的φ角，AB被分成奇数个半波带时，形成明纹。



形成明纹的条件

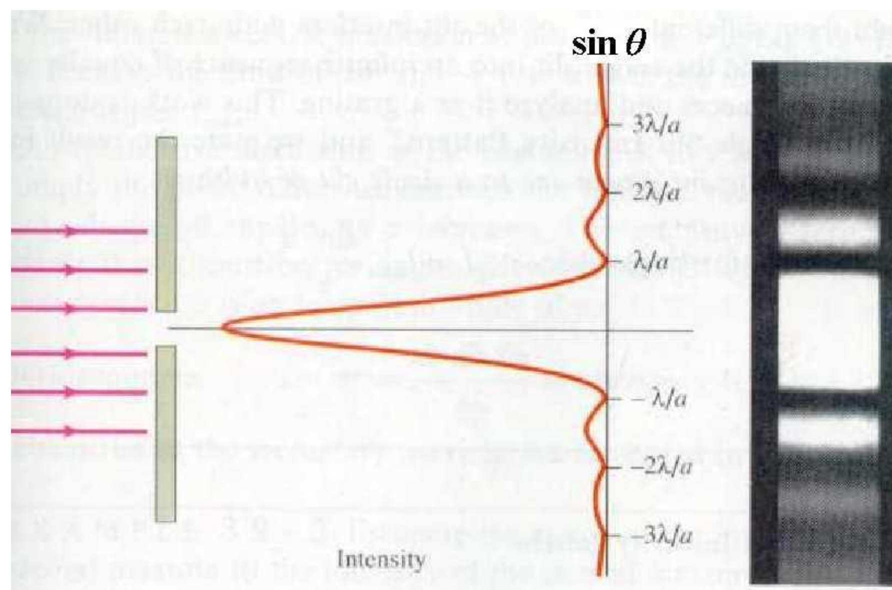
$$a\sin\varphi = \pm (2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad k = 1, 2, \cdots$$

8.2.3 单缝衍射条纹特点

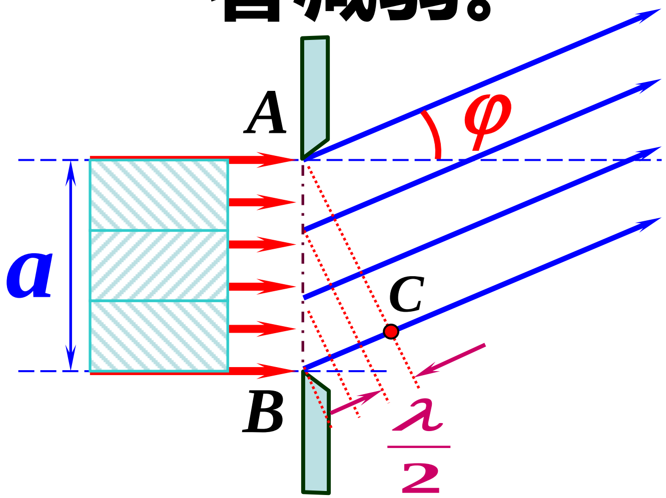
极值位置满足：

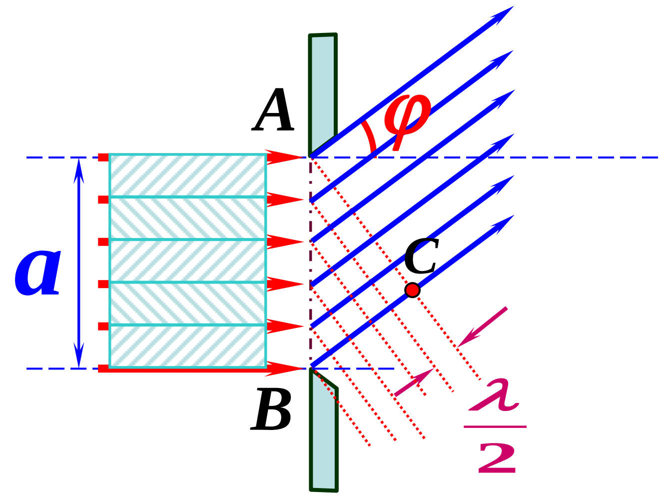
$$\delta = a\sin\varphi = \begin{cases} 0 & \text{中央明纹} \\ \pm 2k\dfrac{\lambda}{2} & k=1,2,\cdots \quad \text{暗纹} \\ \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{明纹} \end{cases}$$

（1）在中央明纹两侧对称分布平行于狭缝明暗相间的直条纹。

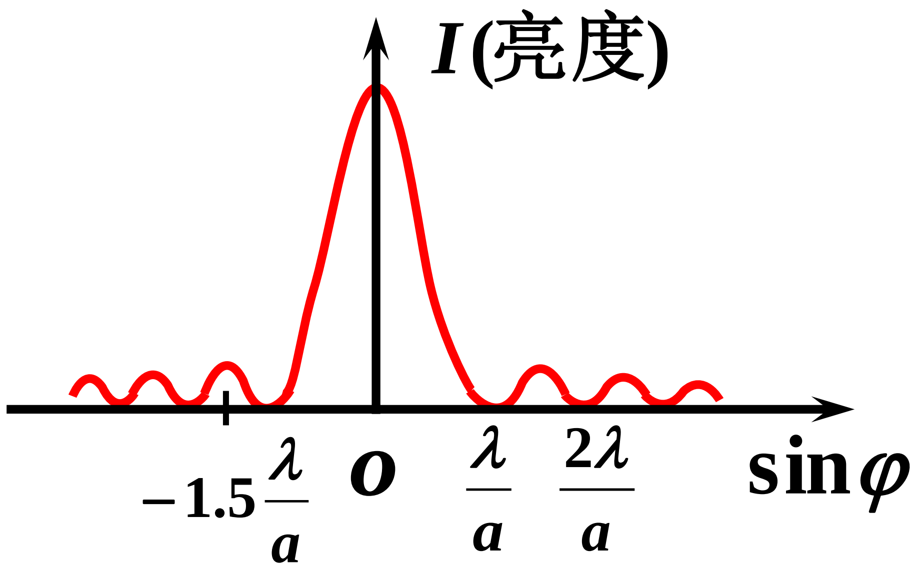


（2）中央明纹最亮，其他明纹随的φ 增加而显著减弱。





半波带面积越小，光强越小。



中央明条纹满足条件

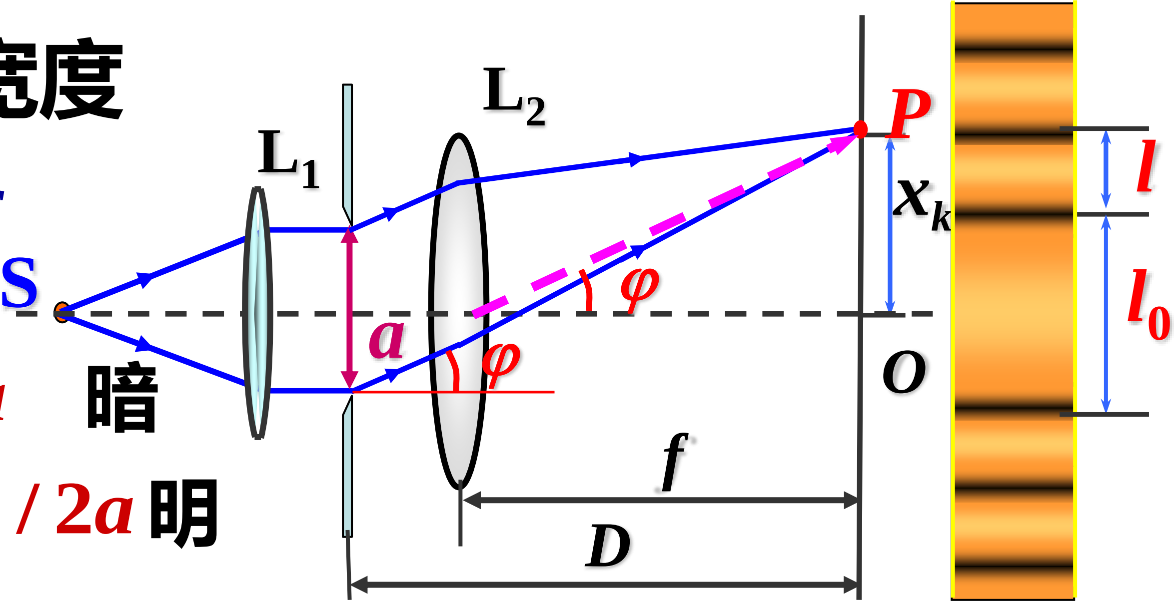
$$-\lambda < a\sin\varphi < \lambda$$

中央明条纹的半角宽

$$\sin\varphi = \lambda / a$$

(3) 条纹位置及宽度

$$x_k = \tan\varphi_k f = \varphi_k f$$



$$x_k = \begin{cases} \pm k\lambda f / a & \text{暗} \\ \pm(2k+1)\lambda f / 2a & \text{明} \end{cases}$$

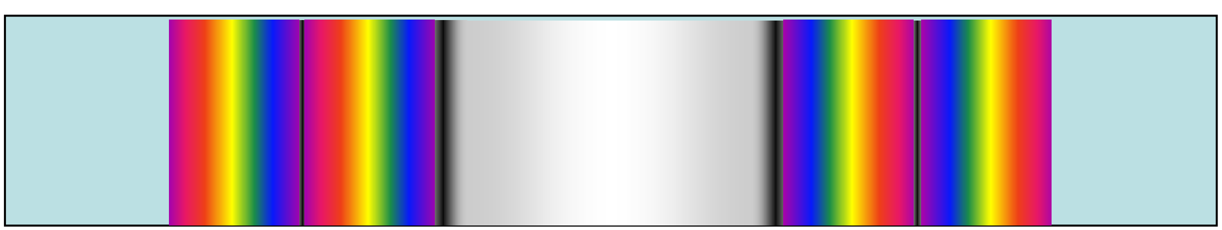
中央明纹宽度：

$$l_0 = 2x_1 = 2f\frac{\lambda}{a}$$

其他明纹宽度： $l = x_{k+1} - x_k = f\dfrac{\lambda}{a}$

(4) 白光衍射

中央为白色条纹，两侧对称排列形成彩色条纹。



动画演示 单缝衍射

（5）缺点：亮度低、间距比较窄。

$$\Delta x = \lambda f / a \qquad \Delta x \propto 1/a$$

缝越窄（ a 越小），条纹分散的越开，衍射现象越明显；反之，条纹向中央靠拢。

当$a>>\lambda$时，形成单一的明条纹，这就是透镜所形成线光源的像。显示了光的直线传播的性质。

结论

几何光学是波动光学在 $a>>\lambda$ 时的极限情况。

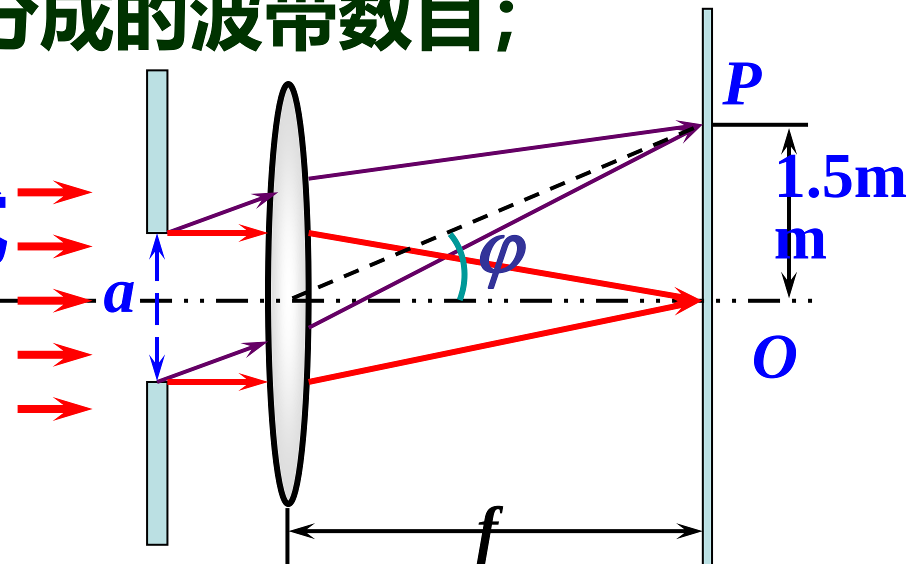
当 a与λ可比拟时会出现明显的衍射现象。

例8.1 单色光垂直照射到宽度0.5mm的单缝上，在缝后放置一个焦距100cm的透镜，则在焦平面的屏幕上形成衍射条纹。若在屏上离中央明纹中心距离为1.5mm处的*P*点为明纹极大。试求：

（1）入射光的波长；

（2）衍射角；狭缝波面可分成的波带数目；

（3）中央明纹的宽度。



解：（1）由明纹位置公式

$$x = (2k+1)\frac{f\lambda}{2a}$$

$$\lambda = \frac{2ax}{(2k+1)f}$$

$$k = 1, \quad \rightarrow \lambda = 5.0\times10^{-7}\,\mathrm{m} \qquad k = 2, \quad \rightarrow \lambda = 3.0\times10^{-7}\,\mathrm{m}$$

考虑可见光范围，取 $\lambda = 5.0\times10^{-7}\,\mathrm{m}$

（2）P点衍射级数是1，对应衍射角是

$$a\sin\varphi=(2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$\sin\varphi=\frac{3\lambda}{2a}=1.5\times10^{-3}\quad\Rightarrow\varphi=1.5\times10^{-3}\mathrm{rad}$$

半波带数是： $N=2k+1=3$

（3）中央明纹宽度是

$$l_0=\frac{2f\lambda}{a}=2\mathrm{mm}$$

例8.2 波长为λ的单色光垂直照射宽为10λ的单缝缝后放置焦距是1m的凸透镜，其焦面放一屏，在屏上最多出现多少明纹及缝处波面的半波带数。

解： 由明纹条件 $a\sin\varphi=(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$

最高级数对应$\varphi=90^\circ$

$$2k+1=\frac{2a}{\lambda}=20 \rightarrow k_{max}=9$$

出现的明纹数是 $2\times9+1=19$

半波带数是 $N=2k+1=19$

例8.3 一单色平行光垂直照射缝宽为0.25mm的单缝，在单缝后置一焦距0.25m的凸透镜，屏上两个第三级暗纹间距为3mm，求入射光波长λ。

解： 根据单缝衍射暗纹位置公式

$$x = 2k \cdot \frac{f\lambda}{2a}, \quad \Delta x = 2x = k\frac{2f\lambda}{a}$$

$$\lambda = \frac{\Delta x \cdot a}{2kf} = \frac{3\times 10^{-3} \times 0.25 \times 10^{-3}}{2\times 3\times 0.25}\ \mathrm{m}$$

$$= 5.0\times 10^{-7}\ \mathrm{m}$$

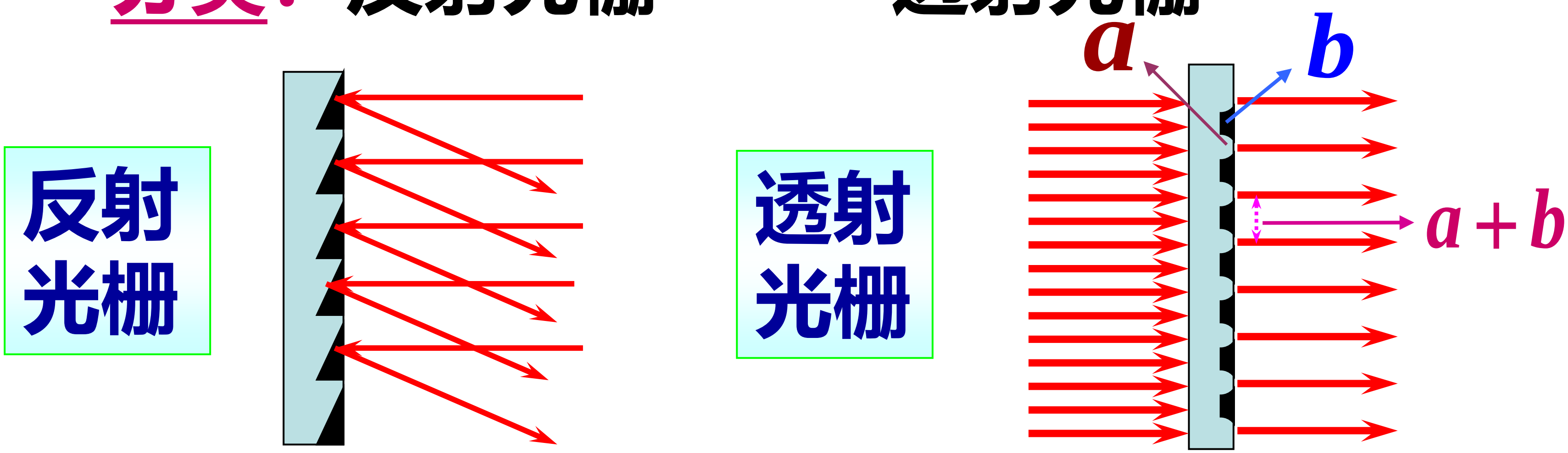
8.4 光栅衍射

8.4.1 衍射光栅

一、光栅

由大量等宽等间距平行狭缝组成的光学元件。

分类：反射光栅　　　　透射光栅

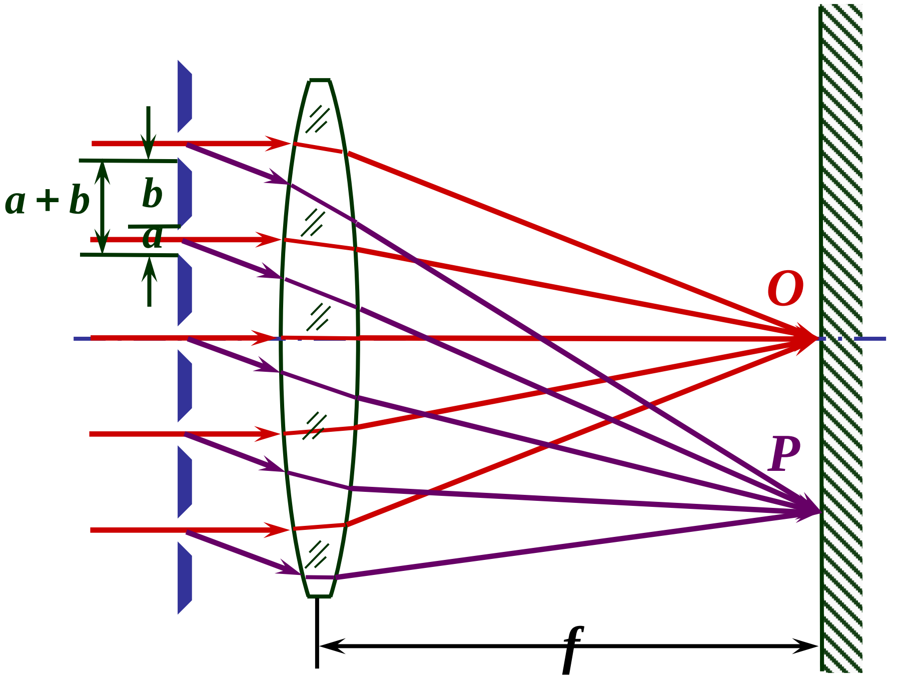


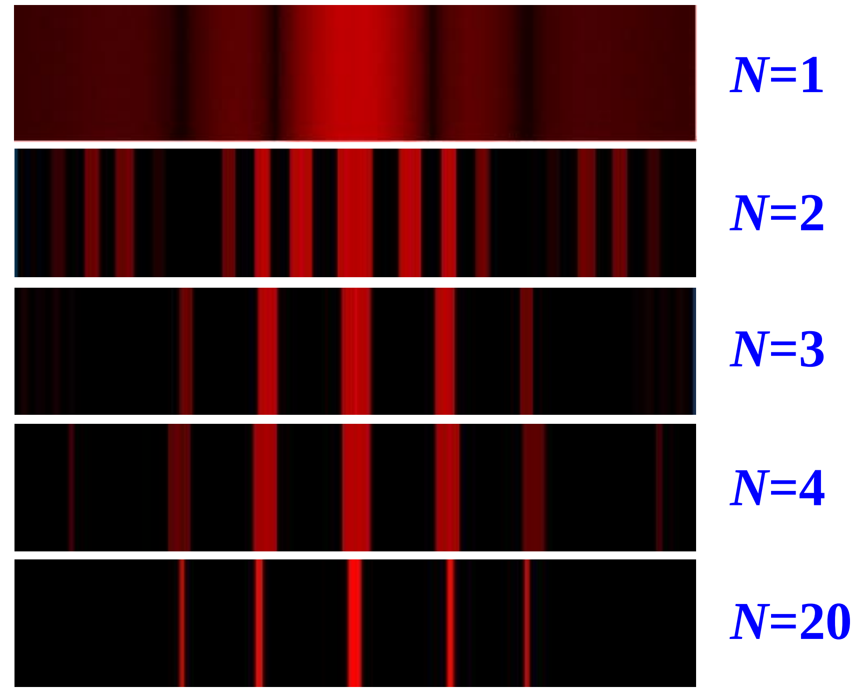
缝宽为a，间距为b。$d=a+b$ 为结构参量，称为光栅常数。

光栅常数$a+b$ 的数量级约$10^{-5} \sim 10^{-6}$ m。

二、光栅与单缝衍射条纹的比较

动画演示 光栅衍射比较





单缝衍射： 中央明纹宽度很大，其他各级明纹的宽度较小，且强度随级数增高而递减。

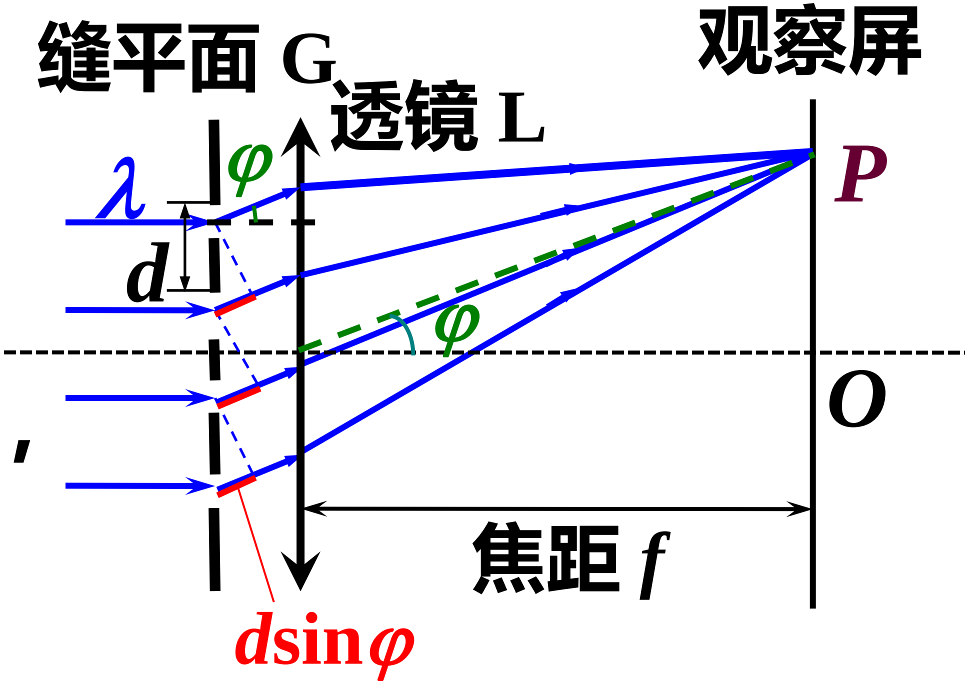
光栅衍射： 明纹亮度增加而条纹变细，且互相分离得愈开，在明纹之间形成大片暗区。

8.4.2 光栅衍射条纹的形成

基本思想:

一是多光束干涉，P点的光强决定于各束光的光程差。

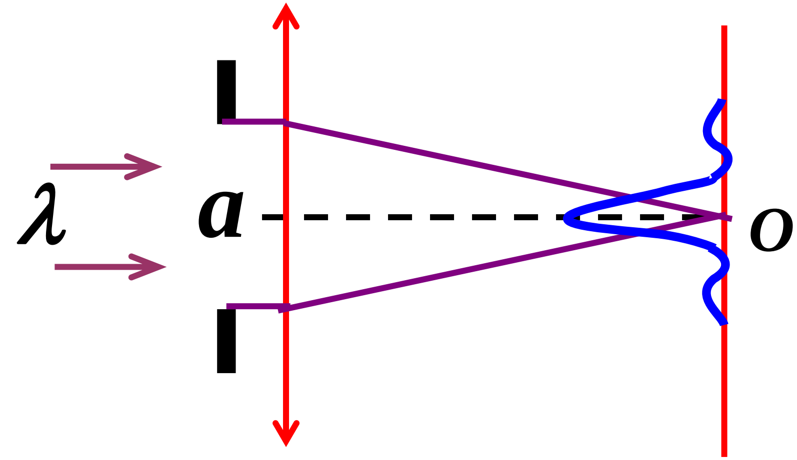
二是各单缝的衍射，φ不同时由各缝发出的光强也不同。



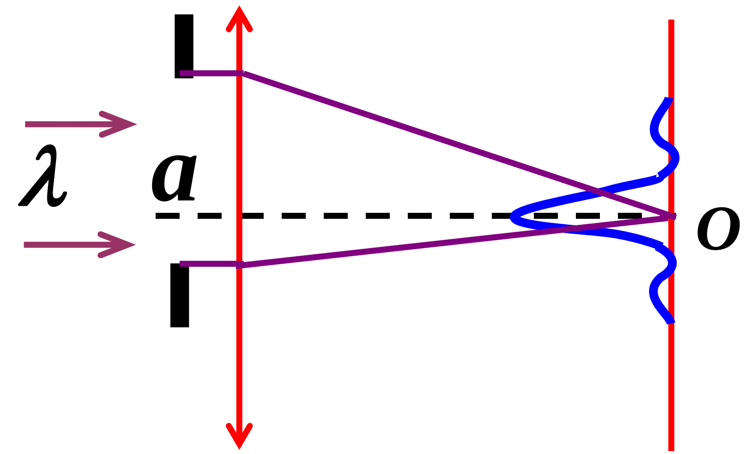
在不同角度是不同强度光进行多光束干涉。

光栅每个缝的自身衍射和各缝之间的干涉共同决定了光通过光栅后的光强分布，也就是说光栅衍射条纹是单缝衍射和多缝干涉的总效果。

单缝衍射



单缝衍射图样，不随缝的上下移动而变化。

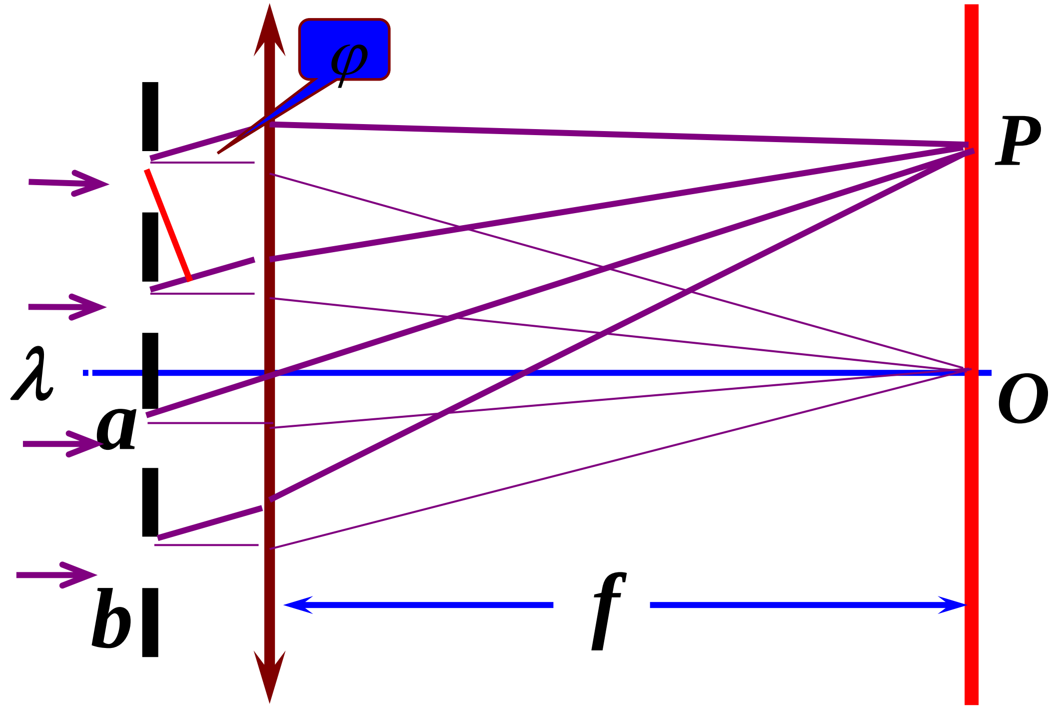


衍射角相同的光线，会聚在接收屏的相同位置上。

结论：（忽略相干性）屏上各单缝衍射图样完全重合，衍射条纹的强度会大大增强。

多缝干涉

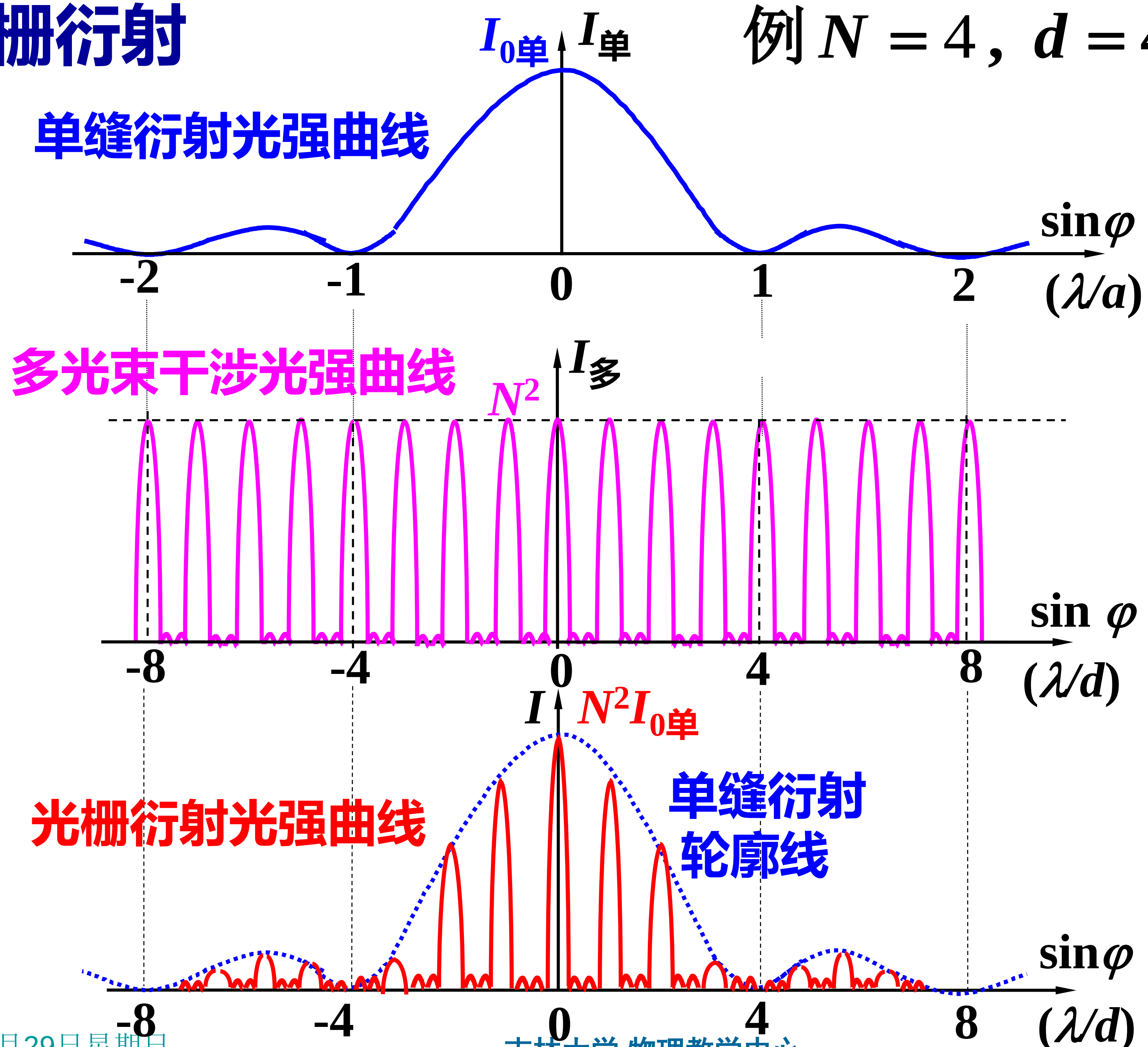
若干平行的狭缝所分割的波面具有相同的面积。各狭缝上的子波波源一一对应，且满足相干条件。



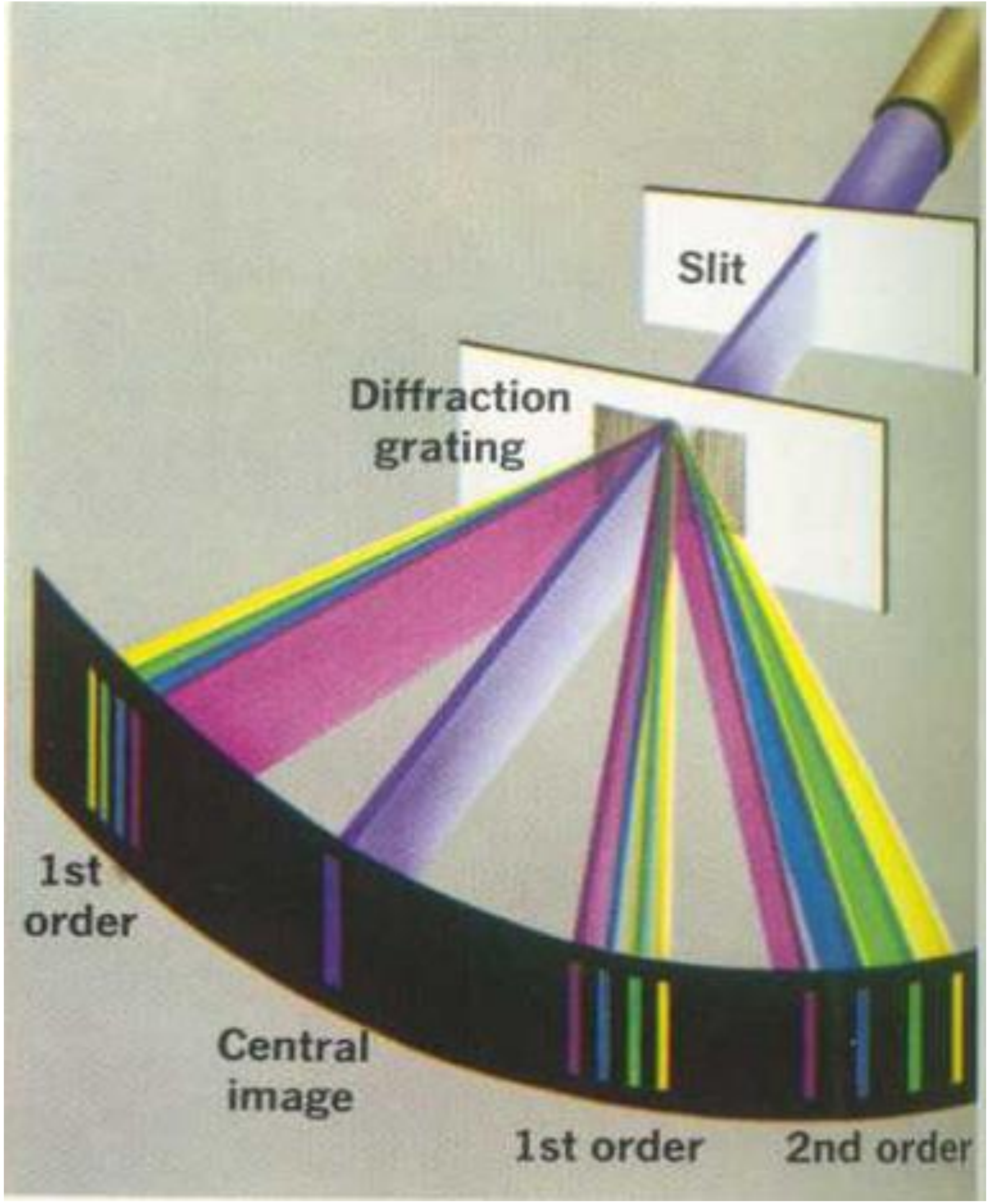
结论：屏上单缝衍射的明纹区域内，因缝间干涉出现明、暗条纹；屏上单缝衍射的暗纹区域内，因缝间干涉出现暗纹。

光栅衍射

例 $N=4$，$d=4a$



$I_{0单}$
$I_{单}$
单缝衍射光强曲线
$\sin\varphi$
-2
-1
0
1
2
(λ/a)
多光束干涉光强曲线
N^2
$I_{多}$
$\sin\varphi$
-8
-4
0
4
8
(λ/d)
I
$N^2 I_{0单}$
光栅衍射光强曲线
单缝衍射
轮廓线
$\sin\varphi$
-8
-4
0
4
8
(λ/d)


Slit
Diffraction grating
1st order
Central image
1st order
2nd order

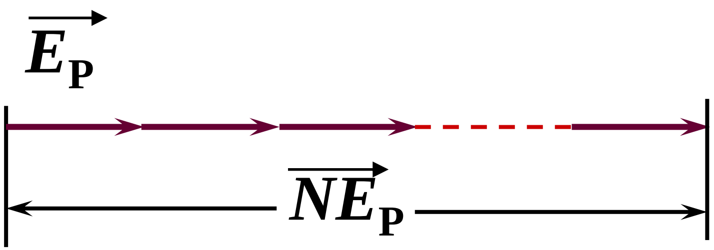
光栅光谱

光栅衍射条纹的分布

（1） 光栅公式（主极大明纹条件）

相邻狭缝对应光线的光程差为

$$(a+b)\sin\varphi = k\lambda \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$$

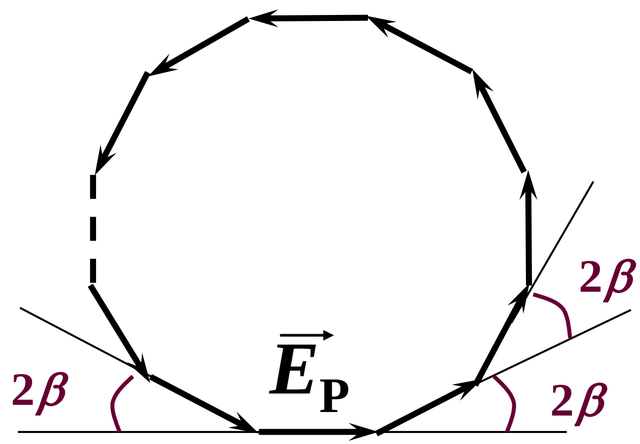


——正入射光栅方程。

$$I_P \propto N^2 E_P^2$$

（2）极小（暗条纹）

$$N\,2\beta = \pm 2k'\pi$$ N为狭缝数目



$$(a+b)\sin\varphi = \pm\frac{k'}{N}\lambda$$

$$k' = 1, 2, \cdots \quad (k' \neq Nk, \ \ k' \neq 0)$$

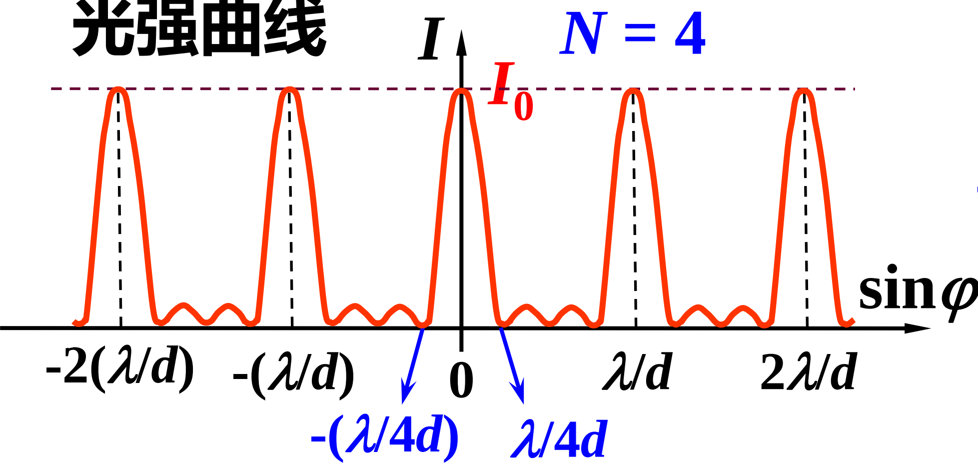
在两个相邻的主极大之间有$N-1$条暗纹，即

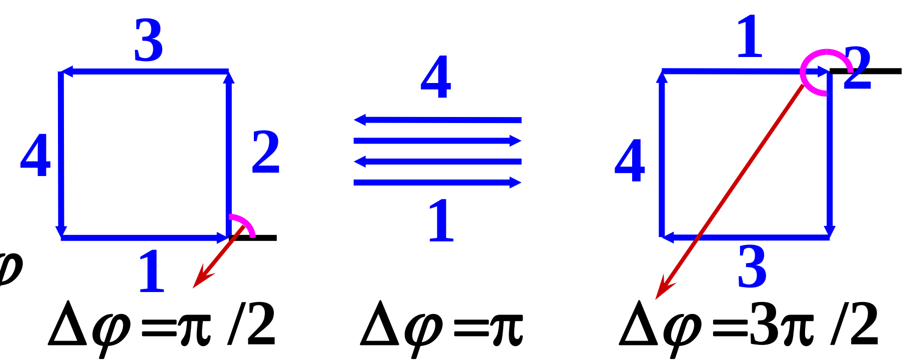
$$\Longrightarrow \text{暗纹间距}=\frac{\text{主极大间距}}{N}$$

例如 $N=4$，在 0 级和 1 级亮纹之间 k' 可取 1，2，3，即有三个极小分别对应光程差

$$\delta=(a+b)\sin\varphi=\frac{\lambda}{4},\frac{2\lambda}{4},\frac{3\lambda}{4},\quad \Delta\varphi=\frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}$$

光强曲线

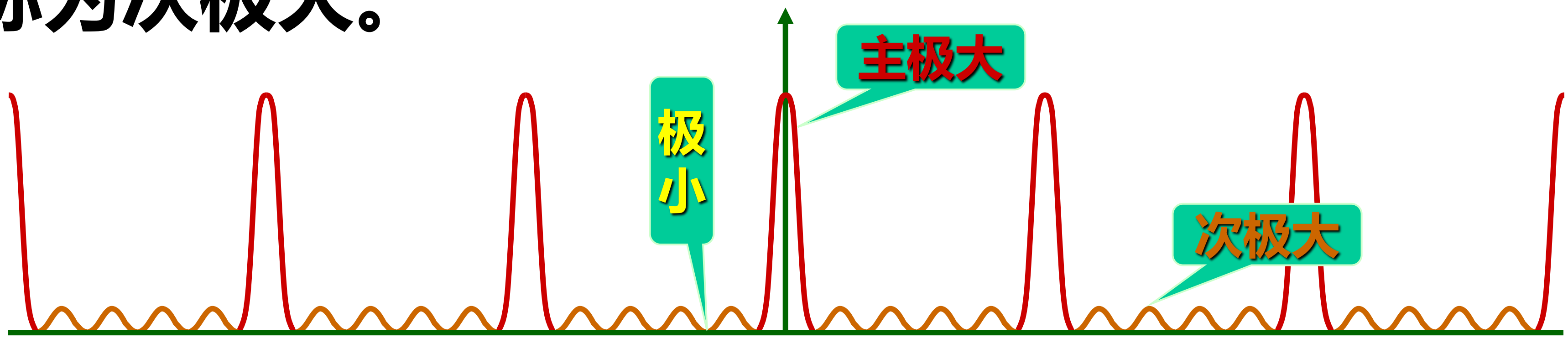




N大时光强向主极大集中，使条纹亮而窄。

（3）次极大

两暗条纹之间应为明条纹，故两主极大间有 N-1条暗纹， N-2条明纹，其强度较主极大小得多，称为次极大。

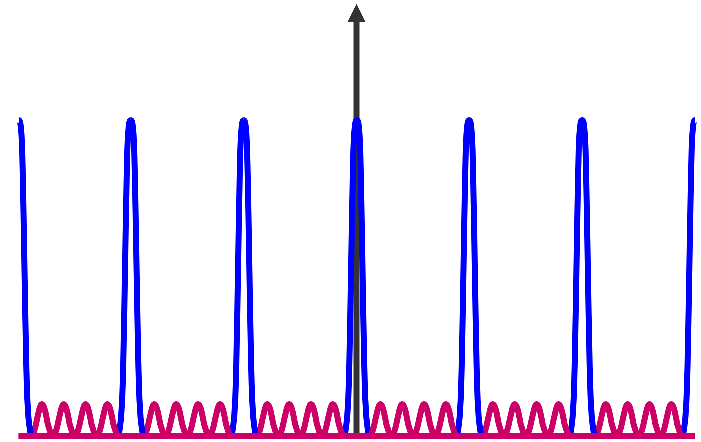


结果：在几乎黑暗的背景上出现了一系列又细又亮的明条纹。

条纹特点：亮度高、间距宽、条纹窄。

分析思考问题

(1) 条纹级次有限



主极大明条纹中心位置：

$$(a+b)\sin\varphi = k\lambda$$

λ一定时， 因$\sin\varphi \leq 1$， k只能取有限值。

屏幕上出现最高级次是

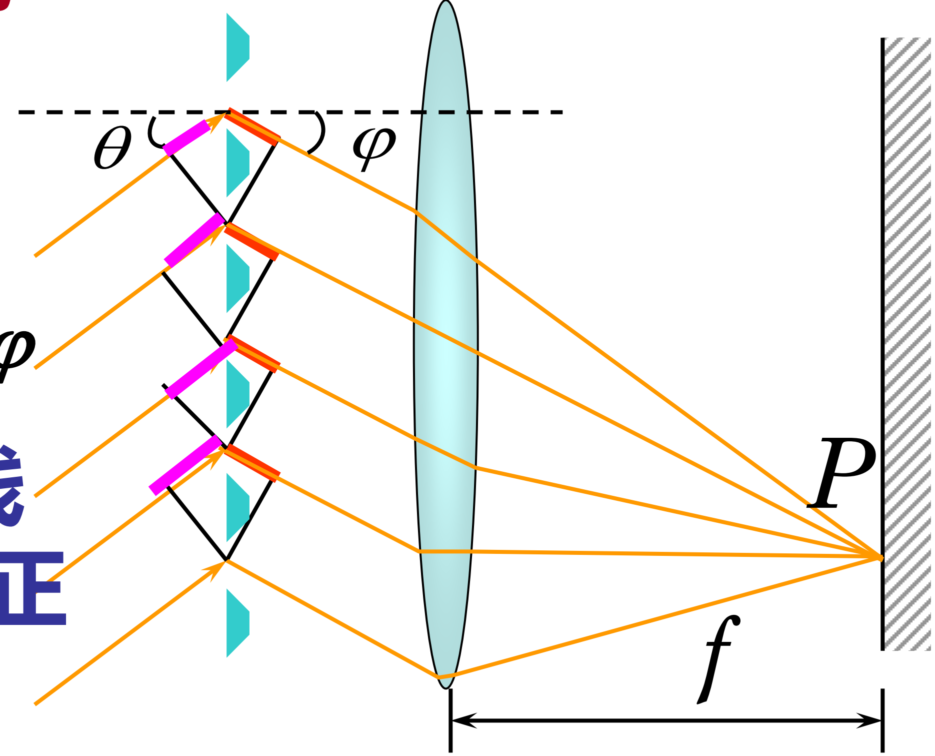
$$\varphi = 90^{\circ} \Rightarrow \quad k_{max} = \frac{a+b}{\lambda}$$

注意：$\varphi \neq 90^{\circ}$，k向下取整数。

(2) 光斜入射光栅情况

两两相邻光线的光程差仍都相同。

$$\delta=(a+b)\sin\theta+(a+b)\sin\varphi$$



衍射光线和入射光线在光栅平面法线同侧时正号，反之取负号。

斜入射光栅的光栅方程为：

$$(a+b)(\sin\theta\pm\sin\varphi)=\pm k\lambda$$

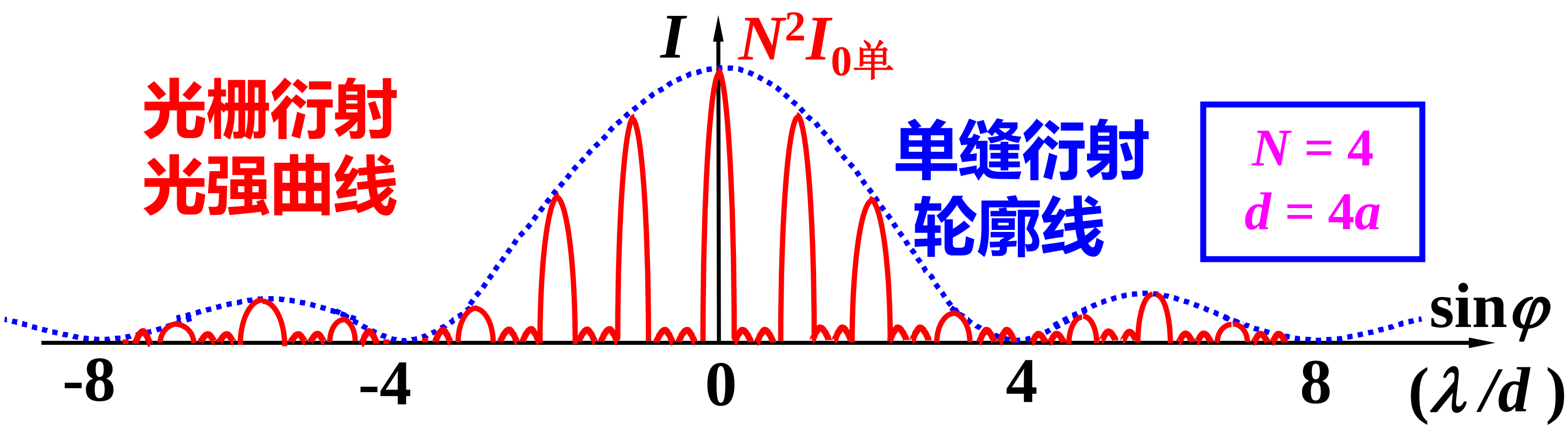
$$(k=0,1,2\cdots)$$

（3）（a+b）/a为整数比时，会出现缺级。

当φ值同时满足 $\begin{cases}(a+b)\sin\varphi = k\lambda \\ a\sin\varphi = k'\lambda\end{cases}$

$$k = \frac{a+b}{a}k' \quad k' = 1, 2, 3, \cdots$$

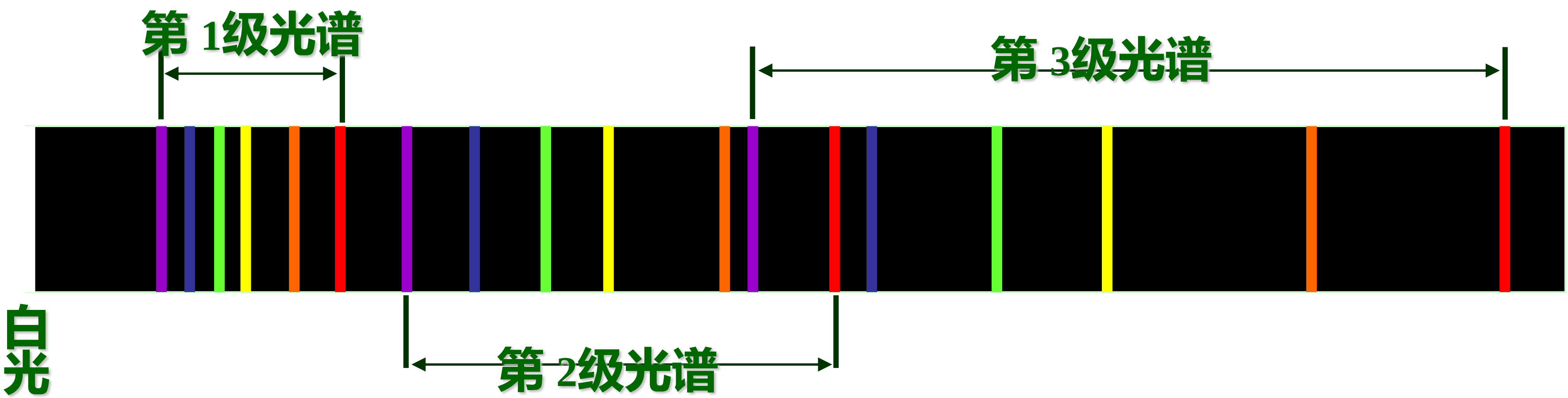
例如：$a+b = 4a$ $\pm4, \pm8, \cdots$缺级



8.4.3 光栅光谱

$(a+b)$ 一定时，λ 不同，条纹在屏上位置不同。白光入射，中央条纹为白亮明条纹外，其它各级明纹将按由紫到红的顺序依次分开，形成彩色光带对称地排列在中央明纹两侧，称为**光栅光谱**。

光栅能把光源中不同波长的光分开的这种性质称为**色散**（dispersion）。



例8.5 波长为500nm及520nm的光照射光栅常量为0.002cm的光栅上。在焦距为2m的透镜屏上观察衍射条纹。求两种光线第一级光谱线的距离。

解： 根据光栅方程 $\sin\varphi_1=\dfrac{\lambda}{a+b}$，$\sin\varphi_1'=\dfrac{\lambda'}{a+b}$

$$\Delta x=x_1'-x_1=f\tan\varphi_1'-f\tan\varphi_1$$

$$\approx\frac{f}{a+b}(\lambda'-\lambda)$$

$$=\frac{200}{0.002}(5.2\times10^{-4}-5.0\times10^{-4})\ \text{mm}$$

$$=2\text{mm}$$

例8.6 用波长589.3nm的钠黄光垂直照射在每毫米有500条刻痕的光栅上，光栅后放一焦距20cm的凸透镜，试求:

(1) 第一级与第三级条纹的距离;

(2) 最多能看到几条明条纹;

(3) 若以30°角斜入射，最多看到第几级条纹。

解: (1) 光栅常量为

$$a+b=\frac{L}{N}=\frac{1\times10^{-3}}{500}\,\mathrm{m}=2\times10^{-6}\,\mathrm{m}$$

根据光栅方程 $(a+b)\sin\varphi=k\lambda$

$$\sin\varphi=\frac{k\lambda}{a+b}\qquad \begin{aligned} k=1\quad \varphi_1&=17.14^\circ\\ k=3\quad \varphi_1&=62.12^\circ\end{aligned}$$

$$\Delta x=f(\tan\varphi_3-\tan\varphi_1)$$

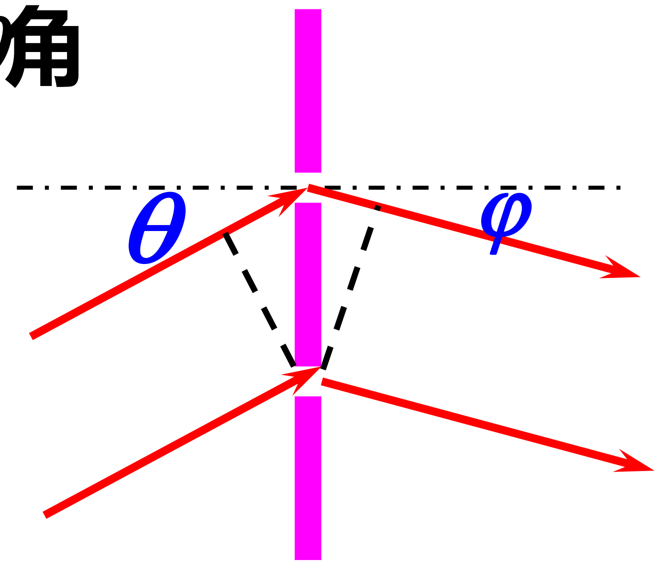
$$=0.2\times(1.89-0.31)\,\mathrm{m}=0.316\,\mathrm{m}$$

（2）由光栅方程，k 的最大值相应于$\sin 90° = 1$

$$k = \frac{a+b}{\lambda} = \frac{2\times 10^{-6}}{5.893\times 10^{-7}} = 3.4$$

可看到7条明纹

（3）入射线与光栅面的法线成θ角



这时光栅方程应为

$$(a+b)(\sin\theta + \sin\varphi) = k\lambda$$

最大级次满足

$$(a+b)(\sin 30^{\circ} + \sin 90^{\circ}) = k_{\max}\lambda$$

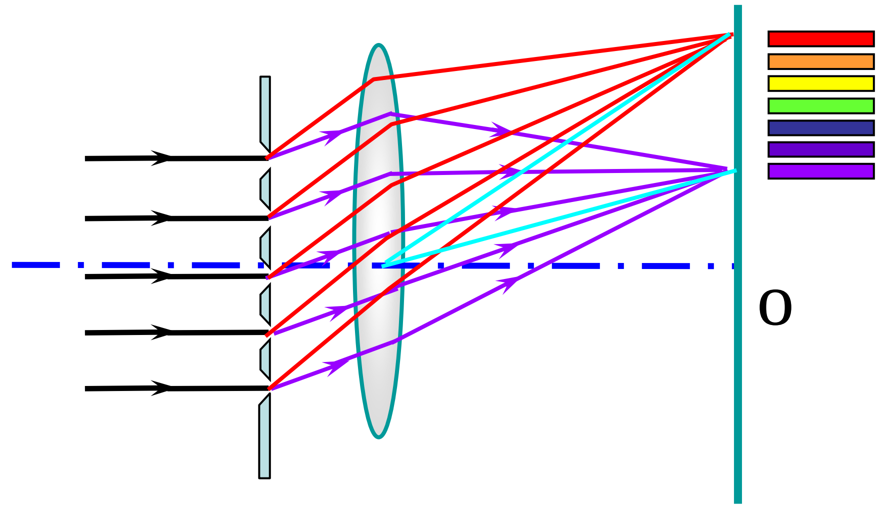
$$k_{\max} = \frac{(a+b)\times\frac{3}{2}}{\lambda} = \frac{2\times 10^{-6}\times\frac{3}{2}}{5.893\times 10^{-7}} = 5.09$$

$$k_{\max} = 5$$

最多能看到第五级谱线

例8.7 用白光垂直照射在每厘米中有6500条刻线的平面透射光栅上，求第三级光谱的张角。

解： 光栅常量为



$$a+b=\frac{L}{N}=\frac{1.0\times10^{-2}}{6500}\text{m}$$

由 $(a+b)\sin\varphi=k\lambda$

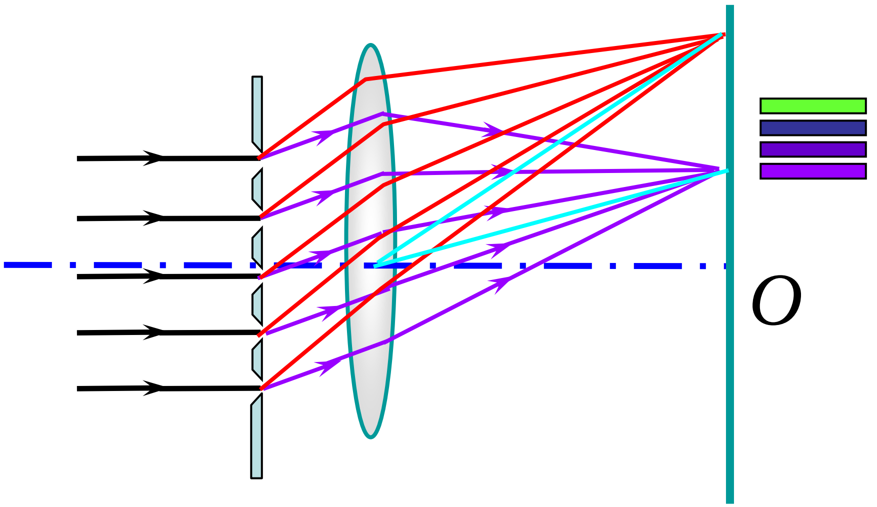
$$\Rightarrow \sin\varphi=\frac{k\lambda}{a+b}$$

对应红光 $\sin\varphi_1=\dfrac{3\lambda_1}{a+b}=1.48>1$ 不存在

对应紫光 $\sin\varphi_2=\dfrac{3\lambda_2}{a+b}=0.78$ $\varphi_2=51.26^{\circ}$

考虑极限情况：

$$\sin 90^{\circ} = \frac{3\lambda'}{a+b} = 1$$



$$\lambda' = 5.13 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$$

$$\Delta\varphi = \varphi' - \varphi_2 = 90^{\circ} - 51.26^{\circ} = 38.74^{\circ}$$

可见到的光谱颜色范围为：绿青蓝紫

$$\lambda \Rightarrow 4.0 \times 10^{-7} \sim 5.13 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$$

例8.8 波长$\lambda = 600\text{nm}$单色平行光垂直照射透光缝宽$a = 1.5\times10^{-6}\text{m}$的光栅，在衍射角$\varphi = \arcsin 0.2$方向出现第二级明纹，求在$-90° < \varphi < 90°$范围内，实际上呈现的全部级数。

解： 根据光栅方程

$$(a+b) = \frac{k\lambda}{\sin\varphi} = \frac{2\times6\times10^{-7}}{0.2}\text{m} = 6\times10^{-6}\text{m}$$

$$k_{\text{m}} = \frac{(a+b)\sin 90^{\circ}}{\lambda} = \frac{a+b}{\lambda} = \frac{6\times10^{-6}}{6\times10^{-7}} = 10$$

缺级 $$k = \frac{a+b}{a}k' = \frac{6\times10^{-6}}{1.5\times10^{-6}}k' = 4k'$$

实际呈现级数为 $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm5, \pm6, \pm7, \pm9$