计算方法

吉林大学计算机科学与技术学院
机器学习研究室
计算方法课程组

第三章 解非线性方程（组）的数值法

第三章 解非线性方程（组）的数值法

- **3.1 引入**
- 3.2非线性方程(组)问题
- 3.3二分法
- 3.4不动点迭代法及其收敛性
- 3.5 Newton迭代法
- 3.6解非线性方程组的Newton迭代法

3.1 引入

$\sqrt{4} = 2$

…

$\sqrt{81} = 9$

$\sqrt{100} = 10$

…

$\sqrt{90} = ?$

3.1 引入

$\sqrt{4}=2$

…

$\sqrt{81}=9$

$\sqrt{100}=10$

…

$\sqrt{90}=?$

早在四千多年以前，在古巴比伦地区就已经萌发出数学智慧的幼芽。古巴比伦数学取得了一系列的重要成就，譬如制成了有关平方根的计算表。古巴比伦人制造开方表的方法难以考证，不过可以想象其计算方法必定相当的简单。

3.1 引入

给定$a>0$,求开方值的问题就是要解方程

$$x^2-a=0$$

这样归结出的是个非线性方程，从初等数学的角度来看它的求解有难度。该如何化难为易呢？

3.1 引入

设给定某个预报值x_0,希望借助于某种简单方法确定校正量Δx，使校正值$x_1=x_0+\Delta x$能够比较准确地满足所给方程$x^2-a=0$，即有

$$\left(x_0+\Delta x\right)^2 \approx a$$

3.1 引入

设给定某个预报值x_0,希望借助于某种简单方法确定校正量Δx，使校正值$x_1=x_0+\Delta x$能够比较准确地满足所给方程$x^2-a=0$，即有

$$\left(x_0+\Delta x\right)^2 \approx a$$

一般来说，Δx是一个小量，因此忽略掉Δx的平方项，上述方程便是一个关于Δx 的一次方程，据此写出Δx ，从而对校正值$x_1=x_0+\Delta x$ 有

$$x_1=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{a}{x_0}\right)$$

3.1 引入

反复施行这种预报校正方法，即可导出开方公式

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right)$$

从给定的某个初值$x_0>0$出发，利用上式反复迭代，即可获得满足精度要求的$\sqrt{a}$的开方值

3.1 引入

例2.1：用开方算法求根号$\sqrt{90}$ =？误差到10^{-6}

解：分别取x_0=9和x_0=20,

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right)$$

i	x_i	x_i
0	9.000000	20.000000
1	9.500000	12.250000
2	9.486842	9.798469
3	9.486833	9.491789
4	9.486833	9.486834
5	9.486833	9.486833

第三章 解非线性方程（组）的数值法

- 3.1 引入
- 3.2非线性方程(组)问题
- 3.3二分法
- 3.4不动点迭代法及其收敛性
- 3.5 Newton迭代法
- 3.6解非线性方程组的Newton迭代法

例3.2 考虑下面的非线性方程

(1) $e^x+1=0$，

(2) $x^6-2x^5-8x^4+14x^3+11x^2-28x+12=0$,

(3) $\cos x=0$;

例3.2 考虑下面的非线性方程

(1) $e^x+1=0$，此方程无解

(2) $x^6-2x^5-8x^4+14x^3+11x^2-28x+12=0$,

(3) $\cos x=0$;

(1)式无解；

(2)式有三个解，$x=1$，-2，3，无论x取值的区间怎样变化，只要它包含[-2,3]这个区间，解的性质和个数不变。

但这三个解的性质又各不相同，$x=3$是一个单根，$x=-2$是两重根，$x=1$则是三重根。

(3)式随x的取值范围不同，解的个数也不同。事实上，在整个实数轴上有无穷多个解。在讨论非线性问题时，通常总是要更强调“**定义域**”，往往要求的是自变量在一定范围内的解，道理就在于此。

在科学研究和工程设计中, 经常会遇到的一大类问题是非线性方程

$$f(x)=0$$

的求根问题，其中$f(x)$为非线性函数。

方程$f(x)=0$的根, 亦称为函数$f(x)$的零点。

如果$f(x)$是多项式函数，则称为代数方程，否则称为超越方程（三角方程，指数、对数方程等）。一般称n次多项式构成的方程

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

为n次代数方程，当$n>1$时,方程显然是非线性的

给定如下非线性方程组

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \quad i=1,2,\ldots,n \qquad (3.2.1)$$

引入向量、向量函数记号

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.2.2)$$

则方程组可改为

$$\mathrm{F}(x)=0$$

当n=1时，方程组(3.2.1)是一个非线性方程式

$$f(x) = 0 \qquad (3.2.3)$$

定义3.1 设有x^*使$f(x^*)=0$则称x^*为方程(3.2.3)的**根或零点**。若存在正整数m,使

$$f(x)=(x-x^*)^m g(x) \qquad (3.2.4)$$

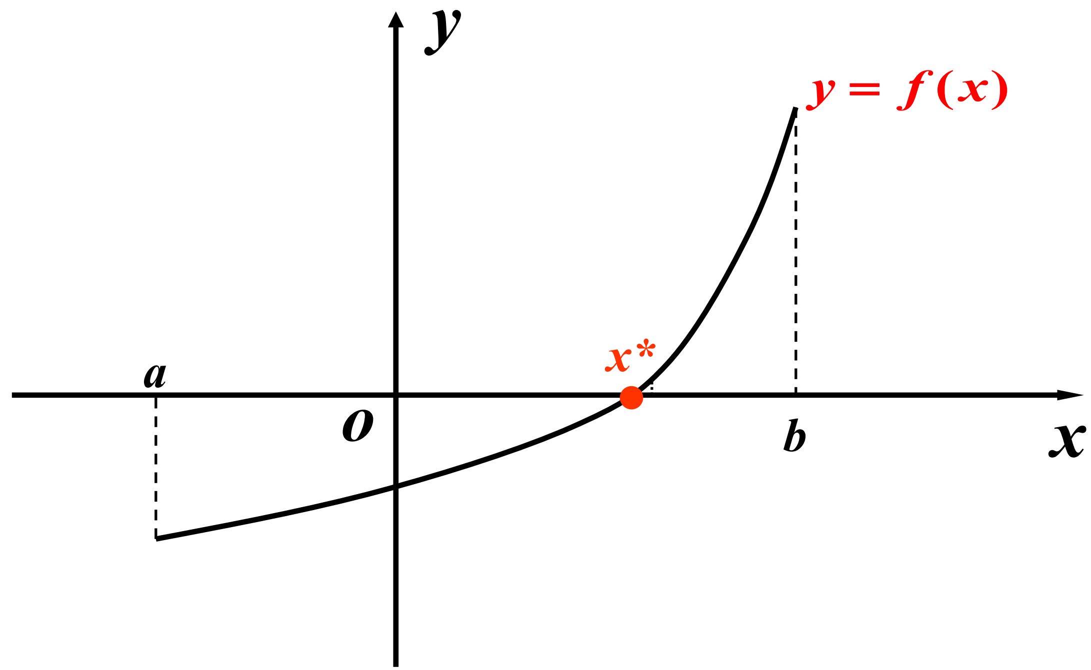
且$0<g(x^*)<+\infty$，则称x^*为(3.2.3)式的***m*重根**。当$m=1$时，x^*为单根，这时x^*满足条件

$$f(x^*)=0, f'(x^*) \neq 0;$$

第三章 解非线性方程（组）的数值法

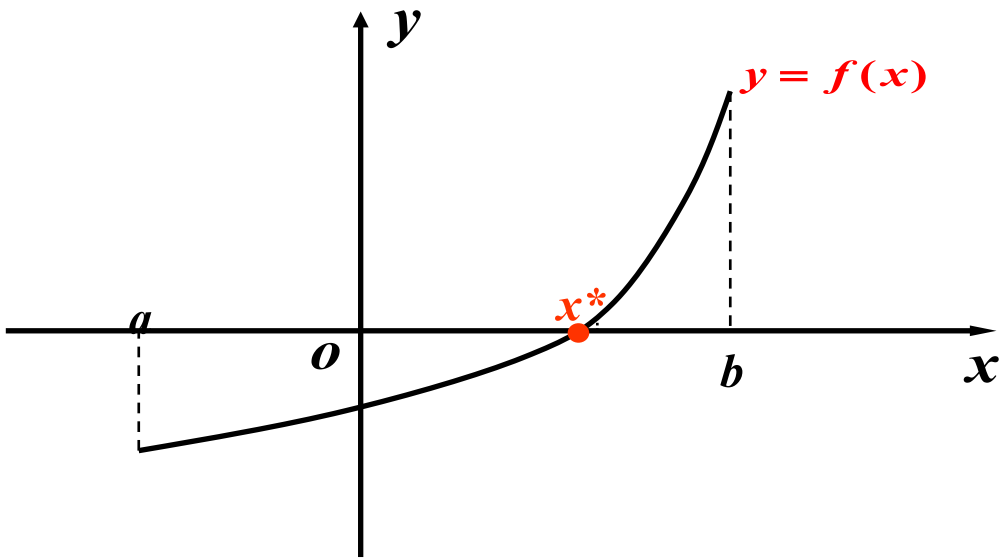
- 3.1 引入
- 3.2非线性方程(组)问题
- **3.3二分法**
- 3.4不动点迭代法及其收敛性
- 3.5 Newton迭代法
- 3.6解非线性方程组的Newton迭代法

求方程$f(x)=0$几何意义



介值定理 如果函数$f(x)$在[a,b] 上连续，且$f(a)\,f(b)<0$则至少有一个数ξ使得$f(\xi)=0$。

求方程$f(x)=0$几何意义



介值定理 如果函数$f(x)$在[a,b] 上连续， 且$f(a)\,f(b)<0$ 则至少有一个数ξ使得$f(\xi)=0$。

若同时$f(x)$的一阶导数 $f'(x)$在[a,b] 内存在且保持定号，即$f'(x)>0$或$f'(x)<0$,则这样的ξ在[a,b]内唯一。

二分法的基本思想: 首先确定有根区间, 将区间二等分， 通过判断$f(x)$的符号， 逐步将有根区间缩小, 直至有根区间足够地小， 便可求出满足精度要求的近似根。

二分法

```
输入：a, b, f(x); 输出：x
While (b-a)>ε do
    x=a+(b-a)/2;
    If sign(f(x))=sign(f(a)) Then
        a:=x;
    else
        b:=x;
    End
End
x:=a+(b-a)/2;
```

算法（3.1）

例3.3 用二分法求方程$f(x)=\sin x-x^2/4=0$的非零实根的近似值，使误差不超过10^{-2}.

解

n	a_n	b_n	x_{n+1}	$f(x_{n+1})$
0	1.5	2	1.75	0.218361
1	1.75	2	1.875	0.0751796
2	1.875	2	1.9375	-0.0496228
3	1.875	1.9375	1.90265	0.0404208
4	1.90625	1.9375	1.921875	0.156014
5	1.921875	1.9375	1.9296875	0.00536340

例3.3 用二分法求方程$f(x)=\sin x-x^2/4=0$的非零实根的近似值，使误差不超过10^{-2}.

解

n	a_n	b_n	x_{n+1}	$f(x_{n+1})$
0	1.5	2	1.75	0.218361
1	1.75	2	1.875	0.0751796
2	1.875	2	1.9375	-0.0496228
3	1.875	1.93		
4	1.90625	1.93		
5	1.921875	1.93		

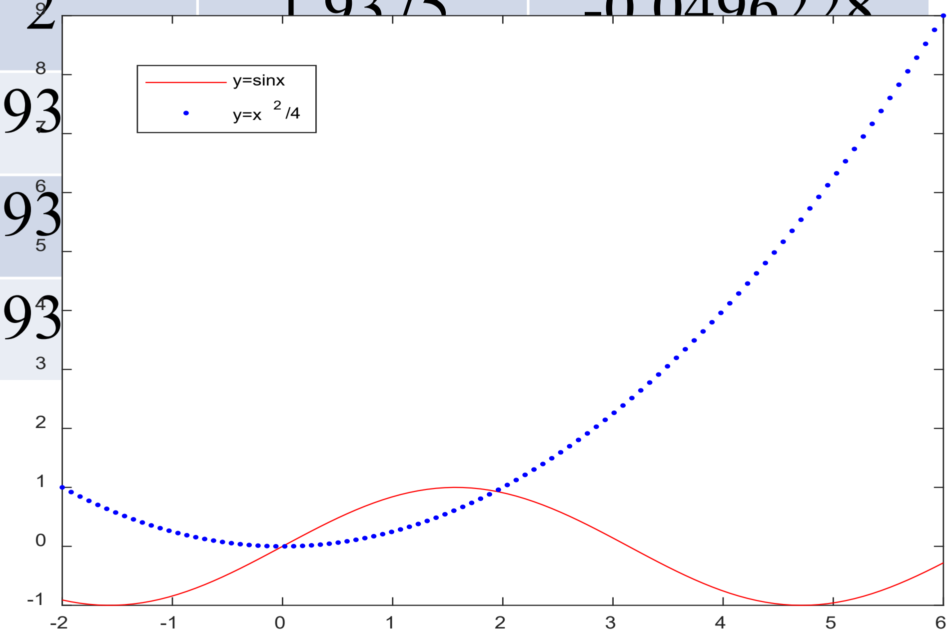


图3.2

第三章 解非线性方程（组）的数值法

- 3.1 引入
- 3.2非线性方程(组)问题
- 3.3二分法
- **3.4不动点迭代法及其收敛性**
- 3.5 Newton迭代法
- 3.6解非线性方程组的Newton迭代法

3.4.1不动点迭代法

不动点迭代法是一种逐次逼近的方法，它的基本思想是通过构造一个递推关系式 (迭代格式)，计算出根的近似值序列,并要求该序列收敛于方程的根.

将方程$f(x)=0$改写成等价形式

$$x=\varphi(x) \tag{3.4.1}$$

定义3.2 称所有满足方程$x=\varphi(x)$的点x，为此**方程的不动点**。

取初始迭代值x_0，记$x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), \dots$，一般有

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) \tag{3.4.2}$$

记数列$x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$为$\{x_k\}$，当$k$充分大时，如果$\{x_k\}$有极限$x^*$存在，即

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^* \tag{3.4.3}$$

则对(2.1.6)式两边同时取极限，得

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \varphi(x^*) \tag{3.4.4}$$

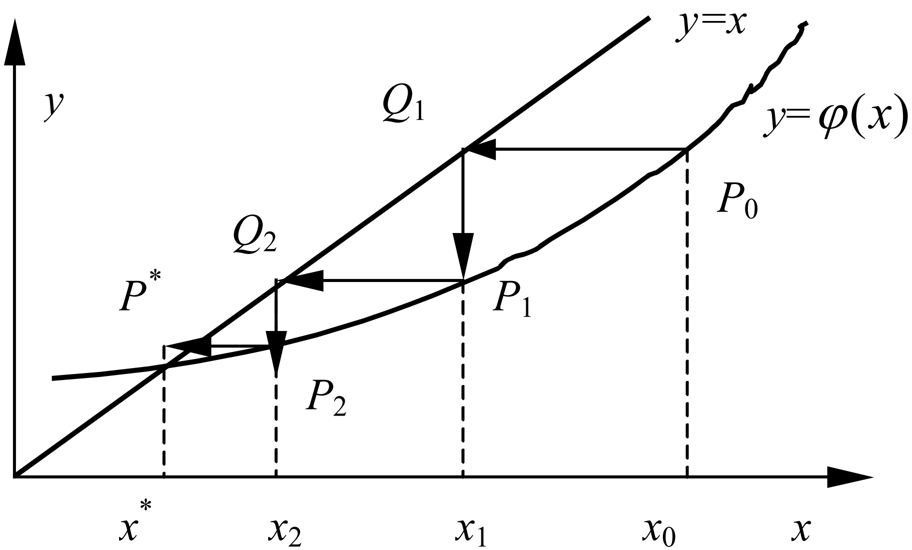
这表明x^*为等价方程$x = \varphi(x)$的不动点，即x^*为方程$f(x)=0$的根。

- 上述求解方程$f(x)=0$的根的近似值的过程，称为**不动点迭代法**，其中(3.4.2)式中的$\varphi(x)$称为**迭代函数**，x_0称为**迭代的初始值**，公式(3.4.2)称为**迭代格式**或**迭代过程**，x_k称为根x^*的第k次近似值，$\{x_k\}$称为**迭代数列**。若极限式(3.4.3)成立，则称此迭代法为**收敛的**，否则称为**发散的**。

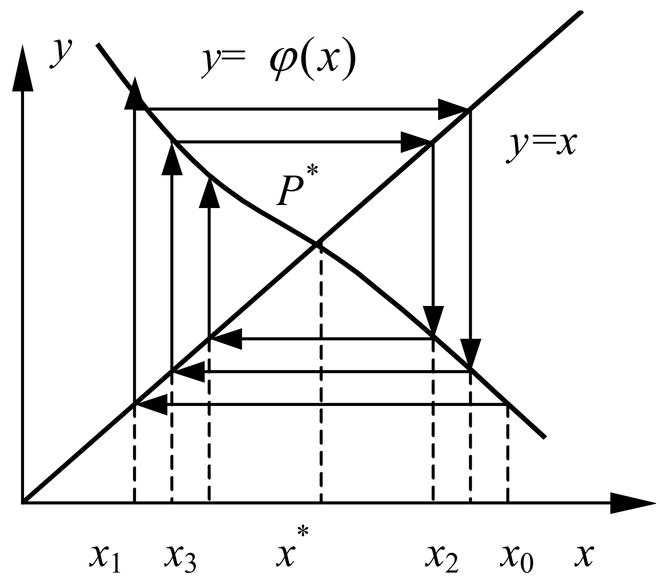
- 应用迭代法求方程根的基本问题是：1）化等价方程，构造迭代函数；2）研究迭代数列$\{x_k\}$的收敛性、收敛速度及误差估计。

3.4.2迭代法的几何解释

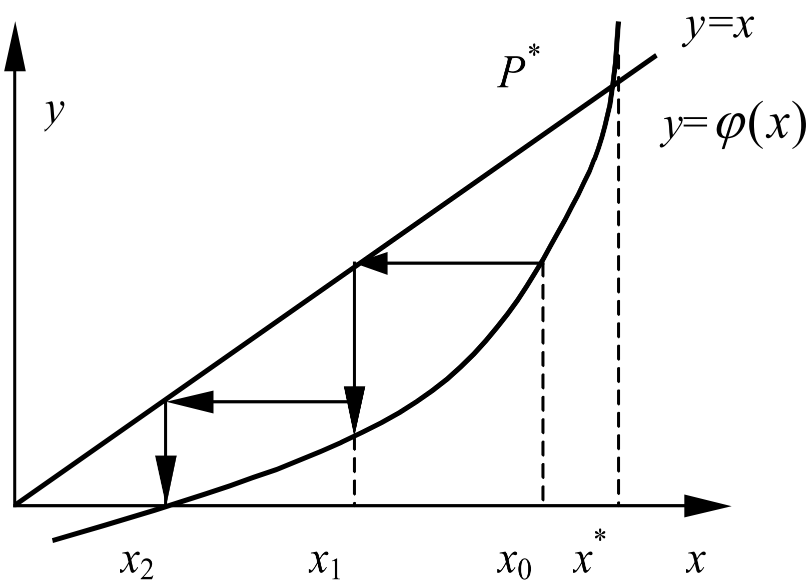
通常将方程$f(x)=0$化为与它同解的方程$x=\varphi(x)$的方法不止一种,有的收敛,有的不收敛,这取决于$\varphi(x)$的性态,方程$x=\varphi(x)$的求根问题在几何上就是确定曲线$y=\varphi(x)$与直线$y=x$的交点P^*的横坐标。



(a) $0<\varphi'(x^*)<1$

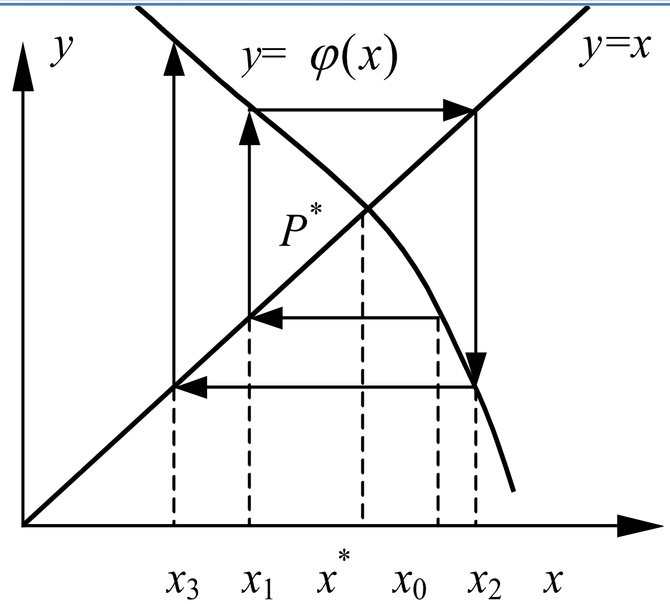


(b) $-1<\varphi'(x^*)<0$



$\varphi'(x^*) > 1$

（c）



$\varphi'(x^*) < -1$

（d）

迭代法的几何意义

3.4.3 迭代法的收敛

定理3.1（**收敛性定理**）假定方程$x=\varphi(x)$满足：

1) $\varphi(x)$在$[a,b]$上连续；

2)当$x\in[a,b]$时, $\varphi(x)\in[a,b]$；

3) $\varphi'(x)$存在，且对任取$x\in[a,b]$有

$$|\varphi'(x)|\le L<1 \qquad (3.4.6)$$

则方程$x=\varphi(x)$ 在$[a,b]$上存在唯一不动点x^*，且对任取$x_0\in[a,b]$，由迭代格式

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)\ ,\ k=0,1,2,\ldots$$

所定义$\{x_k\}$收敛于唯一不动点x^*，即 $\lim x_k=x^*$同时下列误差估计式成立

$$|x^*-x_k|\le\frac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k| \qquad (2.1.11)$$

$$|x^*-x_k|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0| \qquad (2.1.12)$$

证明：

令 $h(x)=x-\varphi(x)$，则 $h(x)$于$[a,b]$上连续且可微。根据条件 2)知 $h(a)\leqslant 0,h(b)\geqslant 0$，由连续函数的介值定理，必有 $x^*\in[a,b]$，使 $h(x^*)=0$，即 $x^*=\varphi(x^*)$.因此 x^*便为方程 $x=\varphi(x)$于$[a,b]$内的不动点。假设另有 $\bar{x}\in[a,b]$，$\bar{x}\neq x^*$ 使 $\bar{x}=\varphi(\bar{x})$，则由拉格朗日中值定理，得

$$x^*-\bar{x}=\varphi(x^*)-\varphi(\bar{x})=\varphi'(\xi)(x^*-\bar{x})$$

其中 ξ 介于 $x^*,\bar{x}$ 之间，从而

$$(x^*-\bar{x})(1-\varphi'(\xi))=0$$

因 $\bar{x}\neq x^*$ 故只有 $\varphi'(\xi)=1$，这与条件 3)中 $|\varphi'(\xi)|\leq L<1$矛盾，可见不动点 x^*是唯一的。

对任 $x\in[a,b]$，由 $|\varphi'(x)|\le L<1$ 得

$$|x^*-x_k|=|\varphi(x^*)-\varphi(x_{k-1})|=|\varphi'(\xi_{k-1})(x^*-x_{k-1})|$$

$$\le L|x^*-x_{k-1}|\le L^2|x^*-x_{k-2}|$$

$$\le\cdots\le L^k|x^*-x_0|\to 0 \qquad\qquad k\to\infty$$

即对任 $x_0\in[a,b]$，$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x^*$

注意

$$|x^*-x_{k+1}|\le L|x^*-x_k|$$

及 $$|x^*-x_{k+1}|\le|x^*-x_{k+1}+x_{k+1}-x_k|$$

$$\le|x^*-x_{k+1}|+|x_{k+1}-x_k|$$

得

$$|x_{k+1}-x_k| \ge |x^*-x_k| - |x^*-x_{k+1}|$$

$$\ge |x^*-x_k| - L|x^*-x_k|$$

$$= (1-L)|x^*-x_k|$$

即(2.1.11)式成立，由于

$$|x_{k+1}-x_k| = |\varphi(x_k)-\varphi(x_{k-1})| \le L|x_k-x_{k-1}|$$

$$\le L^2|x_{k-1}-x_{k-2}| \le \cdots \le L^k|x_1-x_0|$$

再利用已证(2.1.11)式，即知(2.1.12)式成立。

定理3.1给出了迭代法收敛的充分条件且十分适用。
首先，对有根区间$[a,b]$并没有限制其范围大小，只要满足条件1）2）3）即可，故$[a,b]$可取为任意有限大小的区间。因此，可视此定理为**大范围收敛定理**。

其次，在收敛性的证明过程中可以看出，迭代序列收敛速度的快慢取决于L的大小，L越小，收敛越快。结论中的第一个误差估计式可以作为上机控制迭代中止的一个条件；第二个误差估计式可用于估计满足指定误差精度所需的迭代次数k.

事实上，由定理的证明过程可知，定理的条件（3）可放宽为：

若$\varphi(x)$ 在[a, b]满足Lipschitz条件，即对[a, b] 上的任意两点 x_1, x_2, 有

$$\left|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)\right| \le \mathrm{L}\left|x_1 - x_2\right|$$

且Lipschitz常数L<1，则定理依然成立。

- 例3.4　求方程

$$f(x) = xe^x - 1 = 0$$

在[1/2,ln2]中的解。若要求

$$\left| x^* - x_k \right| < \varepsilon = 10^{-6}$$

迭代次数*k*至少应为多少？

解：取迭代函数 $\varphi(x)=e^{-x}$， 当x∈[1/2,ln2]时， $\varphi(x)$连续可微，又 $\phi'(x)=-e^{-x}<0$ ，故φ(x)为单调下降函数，且有

$$\frac{1}{2}=e^{-\ln 2}\le e^{-x}\le e^{-\frac{1}{2}}<\ln 2,\forall x\in\left[\frac{1}{2},\ln 2\right]$$

又

$$\left|\varphi'(x)\right|=\left|e^{-x}\right|\le e^{-\frac{1}{2}}=0.606531<1$$

可见，$\varphi(x)$满足定理2.1的全部条件，因此$x=e^{-x}$于[1/2,ln2]有唯一不动点，且由$x_{k+1}=e^{-x_k}$所定义的迭代序列$\{x_k\}$收敛到此不动点。

取初值$x_0=1/2$，迭代序列$\{x_k\}$见表3.3。

k	x_k	k	x_k
1	0.606531	13	0.567187
2	0.545239	14	0.567119
3	0.579703	15	0. 567157
4	0.560065	16	0. 567135
5	0.571172	17	0. 567147
6	0.564863	18	0. 567141
7	0.568438	19	0. 567145
8	0.566410	20	0. 567142
9	0.567560	21	0. 567144
10	0.566907	22	0. 567143
11	0.567278	23	0. 567143
12	0.567067	24	0. 567143

由定理的第二个误差估计式(3.4.8)知，为使迭代误差满足指定精度ε，即$\left|x^* - x_k\right| < \varepsilon$，须

$$\frac{L^k}{1-L}\left|x_1 - x_0\right| \le \varepsilon$$

从而迭代次数应满足

$$k\ln L + \ln\frac{\left|x_1 - x_0\right|}{1-L} \le \ln\varepsilon$$

由此可解出

$$k \ge \frac{\ln[\dfrac{\varepsilon(1-L)}{\left|x_1 - x_0\right|}]}{\ln L}$$

在本题中，指定控制误差为$\varepsilon=10^{-6}$，取$L=e^{-\frac{1}{2}}$，x_0=1/2, 先算出x_1=0.606531再代入上式，可得

$$k \geq \frac{\ln[\frac{0.393469\times10^{-6}}{0.106531}]}{\ln e^{-\frac{1}{2}}}$$

由上式解出k≥25，即为使$\left|x^*-x_k\right|<10^{-6}$，约需迭代25次。

3.3.4稳定性与收敛阶

- 只要迭代过程是收敛的，误差将随迭代步的增加逐渐趋于零，而不会使得舍入误差随迭代过程逐渐累积。因此，收敛的迭代法总是稳定的

- 对于收敛的迭代法，其收敛速度的快慢也很重要。它关系到达到特定的准确度需要多少步迭代，也就是需要多少计算量。

例3.5 假设有（1）-（3）三个迭代过程，其迭代解的误差 $\left|e(x_k)\right| = \left|x_k - x^*\right|$

随迭代步变化情况分别为：

(1) 10^{-2}，10^{-3}，10^{-4}，10^{-5}，…

(2) 10^{-2}，10^{-4}，10^{-6}，10^{-8}，…

(3) 10^{-2}，10^{-4}，10^{-8}，10^{-16}，…

很显然，迭代法（1）（2）（3）的收敛速度是不同的，方法（3）收敛得最快，而方法（1）收敛得最慢，再仔细观察发现，对于（1）（2），相邻步误差的比例为一常数：对于方法（1），

$$\left|e(x_{k+1}) / e(x_k)\right| = 10^{-1}$$

对于方法（2），

$$\left|e(x_{k+1})/e(x_k)\right| = 10^{-2}$$

而对于方法（3），相邻步误差的比值逐步变小，因此，它表现出更快趋于0的收敛过程。

收敛阶

- **定义3.3** 设迭代格式

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

收敛于方程 $x = \varphi(x)$ 的不动点x^*，如果迭代误差

$$\varepsilon_k = x_k - x^*$$

满足渐近关系

$$\frac{|\varepsilon_{k+1}|}{|\varepsilon_k|^p} = \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} \to C \neq 0 \qquad k \to +\infty, p > 0$$

则称此迭代格式是***p*阶收敛**的。特别的，当$p=1$时，称迭代格式是**线性收敛**的；当$p>1$时，称迭代格式是**超线性收敛**的；当$p=2$时，称迭代格式是**平方收敛**的或**二次收敛**的。

根据定义3.3，前面例3.4中三个迭代过程的收敛阶分别为：

（1）1阶收敛，$c=10^{-1}$;

（2）1阶收敛，$c=10^{-2}$;

（3）2阶收敛，$c=1$;

由定理3.1的证明，可知不动点迭代法一般是线性收敛的。收敛阶越高，迭代法收敛得越快，计算量也越少，所以我们往往寻求收敛阶尽量高的迭代法。

第三章 解非线性方程（组）的数值法

- 3.1 引入
- 3.2非线性方程(组)问题
- 3.3二分法
- 3.4不动点迭代法及其收敛性
- **3.5 Newton迭代法**
- 3.6解非线性方程组的Newton迭代法

3.5.1定义

Newton迭代法是一种重要和常用的迭代法, 它的基本思想是将非线性函数$f(x)$逐步线性化, 从而将非线性方程$f(x)=0$近似地转化为线性方程求解。

- 设已知方程$f(x)=0$有近似根x_k（假定$f'(x_k)\neq 0$）将函数在点x_k处泰勒展开

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{f''(x_k)}{2!}(x-x_k)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_k)}{n!}(x-x_k)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_k)^{n+1}$$

$$f(x)\approx f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)$$

方程$f(x)=0$可以近似地表示成

$$f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)=0$$

这是一个线性方程，其根为

$$x=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

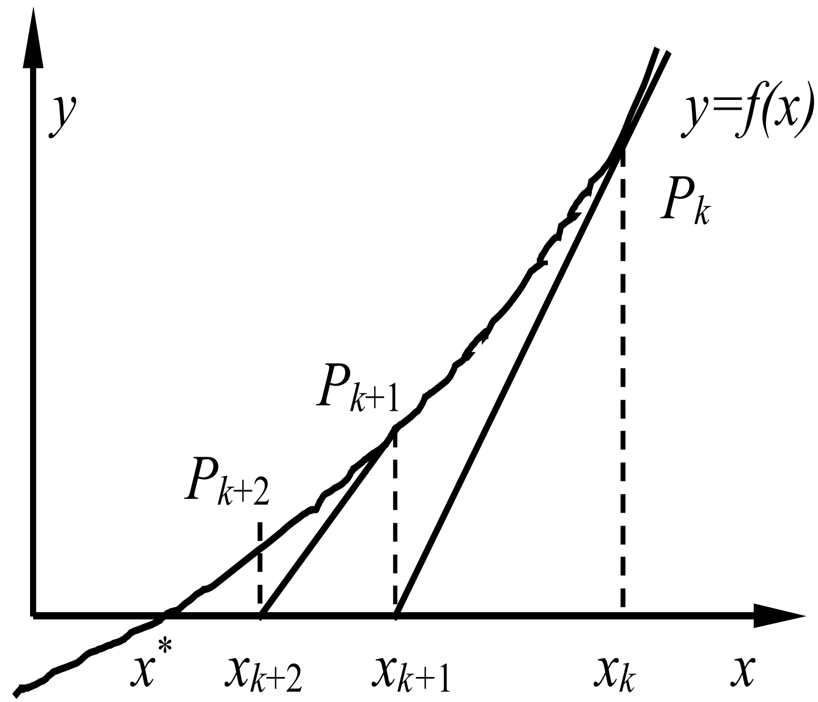
记根为x_{k+1}，则有

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\quad k=0,1,\ldots \qquad (3.5.1)$$

称上式为求方程$f(x)=0$根的**Newton迭代法**，也称为**切线法**。

3.5.2 Newton迭代法的几何解释

方程$f(x)=0$的根x^*是曲线$y=f(x)$与x轴交点的横坐标，设x_k是根x^*的某个近似值，过曲线$y=f(x)$的横坐标为x_k的点$P_k=(x_k, f(x_k))$引切线交x轴于x_{k+1}，并将其作为x^*，新的近似值，重复上述过程，一次次用切线方程来求解方程$f(x)=0$的根，所以牛顿迭代法亦称为切线法。



3.5.3 Newton迭代法的收敛性与收敛阶

对方程$f(x)=0$,若 $f'(x) \neq 0$，并定义等价方程为

$$x = \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

由此看出，Newton迭代法(3.5.1)式即为按上式所定义迭代函数 的一个迭代法。由于Newton迭代法采用特定形式的等价方程及迭代函数，故它必有其自身的特点。不动点迭代法 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 的收敛阶是线性的，但在一定条件下，Newton迭代法的收敛阶可为二次的，即平方收敛。

定理3.2　设函数$f(x)$在根x^*附近有二阶连续导数且 $f'(x^*) \neq 0$ ，则存在x^*的邻域

$$D = \left\{ x \middle| \left| x - x^* \right| \leq \delta \right\}$$

使对任意$x_0 \in D$，由迭代公式(3.5.1)式所定义的所定义的序列$\{x_k\}$收敛到方程$f(x)=0$的根x^* ,且有

$$\lim_{k \to \infty} \frac{x^* - x_{k+1}}{(x^* - x_k)^2} = -\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \qquad (3.5.2)$$

即Newton迭代法是**平方收敛**的。

证明：

已知 Newton 迭代法的迭代函数为 $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，由于

$$\varphi'(x)=1-\frac{(f'(x))^2-f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}=\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

又因 $f(x^*)=0$ 且 $f'(x^*)\neq 0$，故存在 x^*的邻域 $D=\{x\,\big|\,|x-x^*|\le\delta\}$，使得在 D 内 $f'(x)\neq 0$，

并且 $|\varphi'(x)|<1$ 成立。这样一来，Newton 迭代法的局部收敛性（当初值充分靠近 x^*时）可由定理 2.1 推出。下面再证极限式成立

将函数 $f(x)$于 x_k 点 Taylor 展开为

$$f(x)=f(x_k)+(x-x_k)f'(x_k)+\frac{1}{2}(x-x_k)^2f''(\xi_k)$$，ξ_k 介于 x, x_k 之间.

取 $x=x^*$并利用 $f(x^*)=0$，可得

$$f(x_k)+(x^*-x_k)f'(x_k)+\frac{1}{2}(x^*-x_k)^2f''(\xi_k)=0$$

- 例3.5 利用牛顿迭代法求方程

$$f(x)=e^{-\frac{x}{4}}(2-x)-1=0$$

于[0，2]内的根

- 例3.5 利用牛顿迭代法求方程

$$f(x) = e^{-\frac{x}{4}}(2-x)-1=0$$

于[0，2]内的根

解：

显然 $f(0)f(2)<0$，即 $f(x)=0$ 于[0,2]内有根。由于

$$f'(x) = \frac{1}{4}(x-6)e^{-x/4}$$

Newton 迭代格式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{e^{-x_k/4}(2-x_k)-1}{\frac{1}{4}(x_k-6)e^{-x_k/4}}, k=0,1,2\ldots$$

分别取初值 x_0=1.0 和 x_0=8.0，计算结果见下表。当 x_0=1.0 时，得到 $\mathbf{x}^* \approx x_6$，这时 $f(x_6)=3.8\times10^{-8}(\approx 0)$，当取 x_0=8.0 时，迭代法发散.

k	x_k	k	x_k
0	1.0	0	8.0
1	-1.15599	1	34.778107
2	0.189433	2	869.1519
3	0.714043		
4	0.782542		
5	0.783595		
6	0.783596		发散

定理3.3　假定方程$f(x)=0$在$[a,b]$区间上有二阶连续函数，且满足条件① $f(a)f(b)<0$② $f'(x)\neq 0, x\in[a,b]$; ③$f''(x)$在$[a,b]$上不变号。那么对任意$x_0\in[a,b]$，只要满足

$$f(x_0)f''(x)>0$$

则以x_0为初值所产生的Newton迭代序列$\{x_k\}$必定收敛到$f(x)=0$的唯一实根x^*.

3.5.4割线法

- Newton迭代法的主要优点是，适用性强，并具有较快的收敛速度；其缺点是对初始值x_0的要求高，且需计算导数$f'(x_k)$的值。如果$f(x)$比较复杂，致使导数的计算困难，那么使用Newton迭代法就不方便了。

3.5.4割线法

为了避开求导数，可以考虑用差商替代微商，从而避免了复杂的导数计算，利用相邻两次迭代的函数值做差商，得

$$f'(x) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \tag{3.5.3}$$

将上式代入Newton迭代法公式后，得到

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k) \quad k=1,2,\dots \tag{3.5.4}$$

割线法的几何解释

若已知方程$f(x)=0$的根x^*的两个近似值x_{k-1}, x_k，过点$P_{k-1}=$（$x_{k-1}, f(x_{k-1})$)和点$P_k=(x_k, f(x_k))$做一条直线，将该直线与x轴交点的横坐标记x_{k+1}，则x_{k+1}的表达式为(3.5.4)式。由于每迭代一次，都要事先在曲线$y=f(x)$上取两个点，然后连成割线，再取割线与x轴交点的横坐标作为根x^*的近似值x_{k+1}，故此迭代法称为割线法，也叫弦截法。如图3.6所示。

在割线法的计算中，每次求x_{k+1}时要用到前面两步的结果x_{k-1}, x_k，因此，运用割线法进行方程求根，必须先给出两个迭代初始点x_0, x_1.

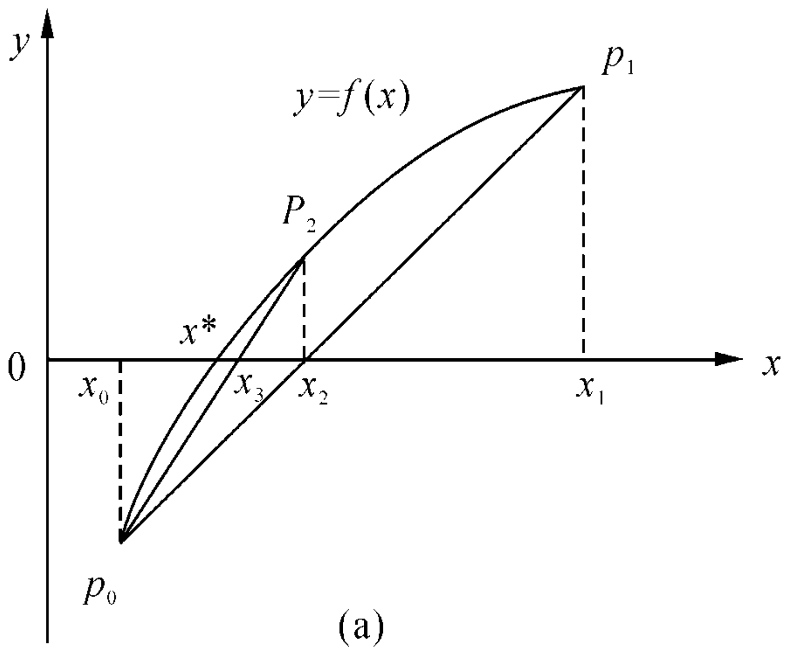


图3.6 割线法的几何解释

例3.6 用割线法求方程

$$f(x)=xe^{x}-1=0$$

于[0.5,0.6]内的根。

解 取初始点x_0=0.5, x_1=0.6, 相应的割线法公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-x_{k-1}}{x_k e^{x_k}-x_{k-1}e^{x_{k-1}}}(x_k e^{x_k}-1) \quad k=1,2,\dots$$

计算结果见下表3.5

k	x_k
0	0.5
1	0.6
2	0.56532
3	0.56709
4	0.56714

比较例3.4中表3.3及本例中表3.5的计算结果可知，用割线法计算迭代4次的精度比不动点迭代法14次所得的近似解的精确度还要好。可见割线法的收敛速度也是相当快的

第三章 解非线性方程（组）的数值法

- 3.1 引入
- 3.2非线性方程(组)问题
- 3.3二分法
- 3.4不动点迭代法及其收敛性
- 3.5 Newton迭代法
- 3.6解非线性方程组的Newton迭代法

- 考虑非线性方程组

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \qquad i=1,2,..,n \tag{3.2.1}$$

设 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots x_n^*)^T$ 是它的一个精确解，讨论如何计算近似解，即x^*的近似值，将方程组(3.2.1)中的每个非线性方程 $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ 于 $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots x_n^{(k)})^T$ 点作泰勒展开，并舍去关于$(x_i - x_i^{(k)})$ 的二次及以上的项，则有

$$
\begin{cases}
f_1(x) \approx f_1(x^{(k)}) + (x_1 - x_1^{(k)}) \dfrac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_1} + \cdots + (x_n - x_n^{(k)}) \dfrac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_n} = 0 \\
f_2(x) \approx f_2(x^{(k)}) + (x_1 - x_1^{(k)}) \dfrac{\partial f_2(x^{(k)})}{\partial x_1} + \cdots + (x_n - x_n^{(k)}) \dfrac{\partial f_2(x^{(k)})}{\partial x_n} = 0 \\
\vdots \\
f_n(x) \approx f_n(x^{(k)}) + (x_1 - x_1^{(k)}) \dfrac{\partial f_n(x^{(k)})}{\partial x_1} + \cdots + (x_n - x_n^{(k)}) \dfrac{\partial f_n(x^{(k)})}{\partial x_n} = 0
\end{cases}
\tag{3.6.1}
$$

记解x^*的第k+1次近似值为 $x^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots x_n^{(k)})^T$

及 $\partial_j f_i(x)=\dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$， 于是(3.6.1)式可表示为

$$\begin{bmatrix} f_1(x^{(k)}) \\ f_2(x^{(k)}) \\ \vdots \\ f_n(x^{(k)}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x) & \partial_2 f_1(x) & \cdots & \partial_n f_1(x) \\ \partial_1 f_2(x) & \partial_2 f_2(x) & \cdots & \partial_n f_2(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_n(x) & \partial_2 f_n(x) & \cdots & \partial_n f_n(x) \end{bmatrix}_{x=x^{(k)}} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)}-x_1^{(k)} \\ x_2^{(k+1)}-x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)}-x_n^{(k)} \end{bmatrix} = 0 \tag{3.6.2}$$

(3.6.2)的矩阵形式为

$$F(x^{(k)})+F'(x^{(k)})(x^{(k+1)}-x^{(k)})=0 \quad (3.6.3)$$

其中

$$F'(x^{(k)})=\begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x) & \partial_2 f_1(x) & \cdots & \partial_n f_1(x) \\ \partial_1 f_2(x) & \partial_2 f_2(x) & \cdots & \partial_n f_2(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_n(x) & \partial_2 f_n(x) & \cdots & \partial_n f_n(x) \end{bmatrix}_{x=x^{(k)}}$$

为$F(x)$于点$x^{(k)}$处的Jacobi矩阵。

如果 $F'(x^{(k)})$ 可逆，则得Newton法的迭代公式

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}) \quad k=0,1,\cdots \tag{3.6.4}$$

当n很大时，求Jacobi阵的逆是比较困难的，通常改写公式(3.6.4)为

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)} \\ F'(x^{(k)})\Delta x^{(k)} = -F(x^{(k)}) \end{cases} \tag{3.6.5}$$

(3.6.5)式中第二式为线性方程组，称为Newton方程。这时Newton迭代法每迭代一步，都要先求解Newton方程，得到 $\Delta x^{(k)}$ 后，再计算$x^{(k+1)}$.

- **例3.7** 用Newton法求解下列非线性方程组

$$\begin{cases} f_1(x) = 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \dfrac{1}{2} = 0 \\ f_2(x) = x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0 \\ f_3(x) = e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \dfrac{10\pi - 3}{3} = 0 \end{cases}$$

解 题中函数向量$F(x)$的Jacobi矩阵 $F'(x)$ 为

$$F'(x)=\begin{bmatrix} 3 & x_3\sin(x_2x_3) & x_2\sin(x_2x_3) \\ 2x_1 & -162(x_2+0.1) & \cos x_3 \\ -x_2e^{-x_1x_2} & -x_1e^{-x_1x_2} & 20 \end{bmatrix}$$

取初始向量 $x^{(0)}=(0.1,0.1,-0.1)^T$ ，

按公式(3.6.5)计算，结果见表3.6.

迭代5次以后，所得近似解基本没有误差。

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty$
0	0.1	0.1	-0.1	
1	0.50003702	0.01946686	-0.52152047	0.423
2	0.50004593	0.00158859	-0.52355711	1.79×10^{-2}
3	0.50000034	0.00001244	-0.52359845	1.58×10^{-3}
4	0.50000000	0.00000000	-0.53259877	1.20×10^{-5}
5	0.50000000	0.00000000	-0.52359877	0

习题

1 .用二分法求方程$f(x)=x^3-2=0$在区间[1，2]上的根。

2 .证明，对任何初始近似x_0，迭代格式$x_{k+1}=\cos x_k$ $(k=0,1,\ldots)$产生的序列$\{x_k\}$都收敛于方程$x-\cos x=0$的根。

3 .用不动点迭代法求解方程

$$x^2=2$$

的正根，迭代一步，要求在迭代公式中不包含开方运算。

4 .用下列方法求$f(x)=x^3-3x-1=0$在$x_0=2$附近的根。根的准确值$x^*=1.87938524\ldots$, 要求计算结果有4位准确的有效数字。

1）用Newton迭代法；

2）用割线法，取$x_0=2, x_1=1.9$.

5 .求解方程$12-3x+2\cos x=0$的迭代法

1）证明它对于任意初值x_0均收敛；

2）证明它具有线性收敛阶；

3）取$x_0=0.4$，求误差不超过10^{-3}的近似根.

6.用Newton法求解下列非线性方程组，取 $x^{(0)}=(1.5,1.0)^T$ 迭代一步。

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2)=x_1+2x_2-3=0 \\ f_2(x_1,x_2)=2x_1^2+x_2^2-5=0 \end{cases}$$

实验题

1. 对于方程

$$f(x)=x^2-3x+2=0$$

可以有以下多种不动点迭代方式：

$$\varphi_1=\frac{x^2+2}{3}，\quad \varphi_2=\sqrt{3x-2}，\quad \varphi_3=3-\frac{2}{x}，\quad \varphi_4=\frac{x^2-2}{2x-3}$$

（1）对于根 $x=2$，通过分析 $\left|\varphi_i'(2)\right|$，$(i=1,2,3,4)$来分析各个算法的收敛性。

（2）用程序验证分析的结果。

2. 编程实现二分法、不动点方法、Newton 法、割线法求解下面各个问题，列表比较各算法的性能。

（1）$x^5-3x-10=0$

（2）$\sin 10x+2\cos x-x-3=0$

（3）$x+\arctan x=3$

（4）$(x+2)\ln(x^2+x+1)+1=0$