计算方法

吉林大学计算机学院、软件学院
机器学习研究室
计算方法课程组

第三章习题

1. 用不动点迭代法求解方程

$$x^2=2$$

的正根，迭代一步，要求在迭代公式中不包含开方运算。

第三章习题

1. 用不动点迭代法求解方程

$$x^2=2$$

的正根，迭代一步，要求在迭代公式中不包含开方运算。

$x^2=2 \quad \frac{x^2}{2}=1$

$x^2=1+\frac{x^2}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{x}+\frac{x}{2}$

对于任意 $x>0$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{x}+\frac{x}{2}-\sqrt{2}\geq 0$$

于是 $\varphi(x)=\frac{1}{x}+\frac{x}{2}\geq\sqrt{2}>1$

对于 $x>1 \quad \varphi'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2} \qquad |\varphi'(x)|\leq\frac{1}{2}<1$

由此迭代公式 $x_{k+1}=\frac{1}{x_k}+\frac{x_k}{2} \quad k=0,1,\ldots\ldots$ 收敛于方程

$x^2=2$ 的根.

取 $x_0=1 \quad$ 则 $x_1=1+\frac{1}{2}=1.5$

第三章习题

2.用下列方法求$f(x)=x^3-3x-1=0$在$x_0=2$附近的根。根的准确值$x^*=1.87938524\ldots$, 要求计算结果有4位准确的有效数字。

1）用Newton迭代法；

2）用割线法，取$x_0=2$, $x_1=1.9$.

第三章习题

2.用下列方法求$f(x)=x^3-3x-1=0$在$x_0=2$附近的根。根的准确值$x^*=1.87938524\ldots$, 要求计算结果有4位准确的有效数字。

1）用Newton迭代法;

2）用割线法，取$x_0=2$, $x_1=1.9$.

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad k=0,1,\ldots$$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}f(x_k)$$

$\because f(x)=x^3-3x-1 \quad \therefore f'(x)=3x^2-3$

$$\therefore x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$=x_k-\frac{x_k^3-3x_k-1}{3x_k^2-3}$$

将$x_0=2$代入得

$x_1=1.8889$，$x_2=1.8795$，$x_3=1.8794$，$x_4=1.8794$

$\therefore x^* \approx 1.879$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}$$

$$=x_k-\frac{(x_k-x_{k-1})(x_k^3-3x_k-1)}{(x_k^3-3x_k-1)-(x_{k-1}^3-3x_{k-1}-1)}$$

将$x_0=2$，$x_1=1.9$代入得

$x_2=1.9811$，$x_3=1.8794$

$\because |x_3-x^*|<\frac{1}{2}\times 10^{-3}$

$\therefore x^*=1.879$

第三章习题

3.求解方程$12－3x+2\cos x=0$的迭代法

$$x_{k+1}=4+\frac{2}{3}\cos x_k$$

1）证明它对于任意初值x_0均收敛；

2）证明它具有线性收敛阶；

3）取$x_0=0.4$，求误差不超过10^{-3}的近似根.

第三章习题

4. 给出计算

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}$$

的迭代公式及迭代区间。讨论迭代过程的收敛性并证明

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

第四章习题

1 .用乘幂法求下列矩阵按模最大的特征值和相应的特征向量：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\text{，取}x^{(0)} = (1, 1)^T;$$

第四章习题

1 .用乘幂法求下列矩阵按模最大的特征值和相应的特征向量：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{取} x^{(0)} = (1, 1)^T;$$

$\max(x^{(0)}) = 1$

$y^{(0)} = x^{(0)}/\max(x^{(0)}) = (1,1)^T$

$x^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\max(x^{(1)}) = 2$

$y^{(1)} = x^{(1)}/\max(x^{(1)}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$

$x^{(2)} = Ay^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

∴ 最大主特征值为2，其特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

第四章习题

2用Jacobi方法求解下列矩阵的全部特征值和特征向量（只迭代一步）。

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \left| a_{jj} - a_{ii} \right| \qquad \mu = sign(a_{jj} - a_{ii}) \bullet 2a_{ij}$$

$$\tan 2\theta = \mu / \lambda$$

$$\cos 2\theta = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} = \omega \qquad \cos\theta = \sqrt{\frac{1+\omega}{2}}$$

$$\sin 2\theta = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \qquad \sin\theta = \frac{\mu\omega}{\lambda\sqrt{2(1+\omega)}}$$

- 若想经过一次正交相似变换，使得

$$c_{ij} = c_{ji} = 0$$

- 只需令**(3.3.3)**式的右端为零，即选角

θ ,使得 $\boxed{\frac{1}{2}(a_{ii} - a_{jj})\sin 2\theta + a_{ij}\cos 2\theta = 0}$

或 $$\tan 2\theta = \frac{2a_{ij}}{a_{jj} - a_{ii}} \quad (|\theta| \le \frac{\pi}{4}) \qquad \textbf{(3.3.9)}$$

- $\boldsymbol{S_k=P_1P_2\ldots P_k}$ 的各列为相应特征向量的近似值。由$\boldsymbol{S_k=S_{k-1}P_k}$得

$$\begin{cases} S_{ip}^{(k)} = S_{ip}^{(k-1)}\cos\theta - S_{iq}^{(k-1)}\sin\theta, \\ S_{iq}^{(k)} = S_{ip}^{(k-1)}\sin\theta + S_{iq}^{(k-1)}\cos\theta, \quad i=1,2,\cdots,n \\ S_{ij}^{(k)} = S_{ij}^{(k-1)}, \qquad\qquad j\neq p,q, \end{cases}$$

这样就不用保留每步的旋转矩阵$\boldsymbol{P_k}$，而只需存储矩阵$\boldsymbol{S_k}$。当**Jacobi**方法完成时，$\boldsymbol{S_k}$的列向量就是所求矩阵**A**的特征向量。

第四章习题

3用QR方法求解下列矩阵的全部特征值（只迭代一步）.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

第四章习题

3用QR方法求解下列矩阵的全部特征值（只迭代一步）.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

记$A_1=A$,对$k=1,2,\ldots$都可以进行QR分解：

$$A_k=Q_kR_k, \tag{4.5.1}$$

并构造新的矩阵

$$A_{k+1}=R_kQ_k, \tag{4.5.2}$$

便可得到矩阵序列$\{A_k\}$。

由(4.5.1)式，知，

$$R_k=Q_k^TA_k, \tag{4.5.3}$$

代入(4.5.2)式，有

$$A_{k+1}=Q_k^TA_kQ_k, \tag{4.5.4}$$

即这个矩阵序列是正交相似的，特征值不变。

QR分解

设A为n阶非奇异矩阵，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, 是A的各列构成的线性无关的向量。类似地有：

$\beta_1' = \alpha_1$, $\beta_1 = \beta_1' / ||\beta_1'||_2$,

$\beta_2' = \alpha_2 - (\alpha_2, \beta_1)\beta_1$, $\beta_2 = \beta_2' / ||\beta_2'||_2$

$\beta_3' = \alpha_3 - (\alpha_3, \beta_1)\beta_1 - (\alpha_3, \beta_2)\beta_2$, $\beta_3 = \beta_3' / ||\beta_3'||_2$

……

$$\beta_n' = \alpha_n - \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_n, \beta_j)\beta_j$$ $\beta_n = \beta_n' / ||\beta_n'||_2$,

可以验证$(\beta_i, \beta_j) = 0$ $(i \neq j)$,即β_i和β_j正交。

QR分解

于是

$$
\begin{aligned}
A &= [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n] \\
&= [\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n]
\begin{bmatrix}
\|\beta_1'\|_2 & (\alpha_2, \beta_1) & (\alpha_3, \beta_1) & \cdots & (\alpha_n, \beta_1) \\
 & \|\beta_2'\|_2 & (\alpha_3, \beta_2) & \cdots & (\alpha_n, \beta_2) \\
 & & \|\beta_3'\|_2 & \cdots & (\alpha_n, \beta_3) \\
 & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & \|\beta_n'\|_2
\end{bmatrix} \qquad (3.3.5) \\
&= QR
\end{aligned}
$$

其中，Q是正交矩阵，R是上三角矩阵。此方法称为Schimidt正交化方法。

Givens方法

Givens方法又称为平面旋转变换法，它仍然借助于3.2节所介绍的平面旋转矩阵进行变换。

$$P = P_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \cdots & & & & & \\ & & \cos\theta & \cdots & \sin\theta & & \\ & & \cdots & & \cdots & & \\ & & -\sin\theta & \cdots & \cos\theta & & \\ & & & & & & \\ & & & & \cdots & & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

(1) P为正交矩阵，即$P^{-1}=P^T$

(2) 对方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$, P(i,j)A只改变A中的第i行和第j行，且

$$\begin{bmatrix}\tilde{a}_{ik}\\ \tilde{a}_{jk}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{ik}\\ a_{jk}\end{bmatrix},\quad k=1,2,\cdots,n \tag{3.3.6}$$

(3) AP(i,j)只改变A中的第i列和第j列

$$\begin{bmatrix}\tilde{a}_{ik} & \tilde{a}_{jk}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{ik} & a_{jk}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix},\quad k=1,2,\cdots,n \tag{3.3.7}$$

若a_{ii}和a_{ji}不全为0，则当取

$$\sin\theta=\frac{a_{ji}}{\sqrt{a_{ii}^2+a_{ji}^2}},\quad \cos\theta=\frac{a_{ii}}{\sqrt{a_{ii}^2+a_{ji}^2}} \tag{3.3.8}$$

时，P(i,j)A中位置(i,j)上的元素$\tilde{a}_{ji}$=0.

定理3.1 （基于Givens变换的矩阵QR分解）设A为n阶非奇异实方阵，则存在正交矩阵$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$，使得

$$P_{n-1} \cdots P_2 P_1 A = R \text{ (上三角阵)} \qquad (3.3.9)$$

从而A有QR分解：A=QR.

其中，P_k为若干个平面旋转矩阵的乘积，Q为正交矩阵$(P_{n-1} \cdots P_2 P_1)^T$.当R的主对角元素都为正时，分解是唯一的。

第五章习题

1 .试利用**Lagrange** 插值函数及其余项证明等式

$$\sum_{i=0}^{n}\left(x_i^m\cdot\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)\right)\equiv x^m$$

其中，

$$x_j\neq x_i,\ \forall j\neq i;\ 0\leq m\leq n,$$

第五章习题

2.分别写出一阶差商f [x, x]、二阶差商f [x, x, x]与一阶导数f’ (x)和二阶导数$f^{(2)}(x)$的关系。并利用此关系用差商表方法求不高于4次插值多项式，满足下列插值条件。

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f^{(2)}(x)$
0	1	-3	0
1	4	16	

第五章习题

3.已知函数f(x)的函数值如下：

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
f(x)	1.000	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

分别用线性插值和二次插值求f(0.33)的值。

第五章习题

4. 已知 $f(x)$在两个不同插值节点 x_0，x_1 上的函数值$y_0=f(x_0)$， $y_1=f(x_1)$，及导数值$m_0=f'(x_0)$，

$m_1=f'(x_1)$。设$H_3(x_0)=y_0$， $H_3(x_1)=y_1$， $H_3'(x_0)=m_0$， $H_3'(x_1)=m_1$。 $\forall x\in(x_0,x_1)$试证明余项公式

$$f(x)-H_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2$$

其中$\xi\in(x_0,x_1)$

第五章习题

5.设f(x)于[a,b]区间有二阶连续导数，且f(a)=f(b)=0，求证

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$$

第五章习题

6.设$l(x)$ 是以 为插值节点的n次Lagrange插值多项式的基函数，证明

$$l_0(x)=1+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\ldots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}$$

第五章习题

6.设$l(x)$ 是以 为插值节点的n次Lagrange插值多项式的基函数，证明

$$l_0(x)=1+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\dots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}$$

解: $l_0(x)$是关于x的n次多项式，如果用n次的Newton插值多项式对$l_0(x)$插值，则余项为零，两者相等。构造如下的差商表

第五章习题

6.设$l(x)$ 是以 为插值节点的n次Lagrange插值多项式的基函数，证明

$$l_0(x)=1+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\dots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}$$

k	x_i	$l_0(x_i)$	一阶差商	二阶差商	...	n阶差商
0	x_0	1			...	
1	x_1	0	$\frac{1}{x_0-x_1}$		...	
2	x_2	0	0	$\frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$	...	
...	...	...	...	...	...	...
n	x_n	0	0	0	...	$\frac{1}{(x_0-x_1)\dots(x_0-x_n)}$

故由Newton插值公式得

$$l_0(x)=1+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\dots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}$$