2018-2019《微积分 BII》期末考试

一、选择题(1-6 小题，每小题 3 分，共 18 分.)

1. 设$f(1,1)=-1$为函数$f(x,y)=ax^3+by^3+cxy$的极值，则a,b,c分别等于(　).

$(A)1,1,-1$; $(B)-1,-1,3$; $(C)-1,-1,3$; $(D)1,1,-3$.

2. $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)偏导数存在，是该函数在点(x_0,y_0)可微的(　).

(A)必要且非充分条件；　(B)充分但非必要条件；

(C)充分必要条件；　(D)既非充分，也非必要条件.

3. 设$I_1=\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)d\sigma$,其中$D_1$是矩形闭区域,$-1\le x\le 1$，$-2\le y\le 2$,

又$I_2=\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)d\boldsymbol{\sigma}$，其中$D_2$是矩形闭区域,$0\le x\le 1$，$0\le y\le 2$,

利用二重积分几何意义说明 I_1与 I_2之间的关系(　).

(A) $I_1=3I_2$；　(B) $I_1=2I_2$;　(C) $I_1=I_2$；　(D) $I_1=4I_2$.

4. 设 L 是圆周$x^2+y^2=a^2(a>0)$负向一周，则曲线积分

$$\oint_L(x^3-x^2y)dx+(xy^2-y^3)dy=$$

(A) 0;　　(B) $-\frac{\pi a^4}{2}$;　　(C) $-\pi a^4$;　　(D) πa^4.

5. 方程 $y''-3y'+2y=e^x\cos 2x$ 的特解形式为(　　).

(A) $e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$;　　(B) $C_1e^x\cos 2x$;

(C) $xe^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$;　　(D) $C_2e^x\sin 2x$.

6. 设山坡的高度为 $z=5-x^2-2y^2$, 一个登山者在山坡上点 $(-\frac{3}{2}, -1, \frac{3}{4})$ 处,

沿最陡的道路向上攀登，则他应当选取的方向 l 是（　　）.

(A) (-4, 3);　　(B) (-3, -4);　　(C) (3, 4);　　(D) (4, -3).

二、填空题（共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1. 设 $z=\cos e^{xy}$, 则 dz=__________.

2. 计算积分 $\int_0^8 dx\int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{1+y^4}dy$=________.

3. 如果幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛半径是 1 则级数的收敛区间为__________.

4. 曲面 Σ: $|x|+|y|+|z|=1$, 则 $\oiint_{\Sigma} |y|\,dS$=__________

5. 设函数 $f(x)=x^2, 0\le x<1$, 而 $S_{(x)}=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin n\pi x$, 其中

$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx, n = 1,2,\dots$ 则 $S\left(-\frac{1}{2}\right) =$ ________.

6. 以$y = 2e^x\cos 3x$为一个特解的二阶常系数齐次线性微分方程为 ________.

三．解答题（共 7 小题）

1. 求曲面$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$平行于平面$x + 4y + 6z = 0$ 的切平面方程.

2. 设 $z = x^3 f\left(xy,\frac{y}{x}\right)$, f 具有二阶连续偏导，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

3.计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}(xz+y^2)\,dy\,dz+(2yz+x^2)\,dz\,dx+3xy\,dx\,dy$，

其中$\sum$为曲面 $z=1-x^2-\frac{y^2}{4}$ $(0\le z\le 1)$的上侧.

4.求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$的收敛域及和函数，并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$的和.

5. 求函数 $z = x^2 + y^2$ 在圆域 $\{(x,y) | (x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 \le 9\}$ 上的最大值与最小值.

6. 设 $y = f(x)$ 可导，求解方程 $\int_0^x f(t)dt + \frac{1}{2}f(x) = x^2$.

7. 设$a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_{n+}\frac{1}{a_n}\right)$，$a=1$，$2\ldots\ldots$.

证明：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在并求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ ；

(2)级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$收敛.

2018-2019《微积分 BII》参考答案

一. 单选题

题号	1	2	3	4	5	6
答案	D	A	D	B	A	C

1.【解】

依题意, 该函数为可导函数, 其极值点必定为其驻点

$$\text{则有}\quad \begin{cases} f_{(1,1)} = -1 \\ f_{x(1,1)} = 3ax^2 + cy = 3a + c = 0 \\ f_{y(1,1)} = 3by^2 + cx = 3b + c = 0 \end{cases}$$

解上述方程可得到 a=1, b=1, c=-3;

综上，应选 D.

2.【解】

可微的充分条件：若函数对 x 和 y 的偏导数在这点的某一邻域内都存在，且均在这点连续，则该函数在这点可微。

必要条件：若函数在某点可微分，则函数在该点必连续；若二元函数在某点

可微分，则该函数在该点对 x 和 y 的偏导数必存在。

所以，$z=f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 偏导数存在，是该函数在点 (x_0, y_0) 可微的必要非充分条件.

综上，应选 A.

3.【解】

依题意，D_1关于 x 轴，y 轴对称。被积函数 X^2+y^2 是 x，y 的偶函数，故 $I_1=4I_2$

综上，应选 D.

4.【解】

依题意，本题使用基本计算较为繁琐，可使用 Green 公式

$\frac{\partial P}{\partial Y}=-x^2, \frac{\partial Q}{\partial X}=y^2$

$$\oint_L=-\iint_D (y^2+x^2)d\sigma=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2\cdot rdr=-\frac{\pi a^4}{2}$$

综上，应选 B.

5.【解】

特征方程为$\lambda^2-3\lambda+2=0$,可求得$\lambda=1,2$,所以 $1\pm 2i$ 不是特征根

所以$y^*=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)\cdot x^0=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$

综上，应选 A.

6.【解】

依题意，最陡方向为方向导数最大方向。

$$\nabla z=\left(Z_x,Z_y\right)\Big|_{\left(-\frac{3}{2},-1\right)}=(-2x,-4y)\Big|_{\left(-\frac{3}{2},-1\right)}=(3,4)$$

综上，应选 C.

二、填空题

题号	1	2	3	4	5	6
答案	$-e^{xy}\cdot \sin e^{xy}(xdy+ydx)$	$\frac{1}{4}\ln 17$	$(0,2)$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$y''-2y'+10y=0$

1. 【解】

依题意，利用微分法则

$$dz=d\cos e^{xy}=-\sin e^{xy}de^{xy}=-\sin e^{xy}\cdot e^{xy}d(xy)$$

$$=-e^{xy}\cdot \sin e^{xy}(xdy+ydx)$$

2. 【解】

依题意，本题直接计算十分繁琐，但积分区域已知为

$$\begin{cases} 0 \le x \le 8 \\ \sqrt[3]{x} \le y \le 2 \end{cases}$$，可以换限计算

$$I= \int_0^2 dy \int_0^{y^3} \frac{1}{1+y^4} dx = \int_0^2 \frac{y^3}{1+y^4} dy = \frac{1}{4} \ln(1+y^4)|_{(0,2)} = \frac{1}{4} \ln 17$$

3. 【解】

$|x-1|<1$，可得 $0<x<2$, 收敛区间为(0,2)

4. 【解】

简便计算，x, y, z 无论怎么变化，曲面不变

根据轮换对称性可知 $\oiint_{\Sigma} |y|\, dS = \frac{1}{3} \oiint_{\Sigma} (|x|+|y|+|z|)\, dS = \frac{1}{3} \oiint_{\Sigma} 1\, dS$

$$= \frac{1}{3} \times 8 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$ (第一卦限乘以 8)

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

5. 【解】

由题知：和函数 S(x)为奇函数，可得 $S\left(-\frac{1}{2}\right) = -S\left(\frac{1}{2}\right)$

且 x 在 $\frac{1}{2}$ 处连续，所以 $S\left(-\frac{1}{2}\right) = -S\left(\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$

6. 【解】

由题知：$\lambda = 1 \pm 3i$，整理得 $(\lambda-1)^2 = -9$ 展开 $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$

可推得微分方程为 $y'' - 2y' + 10y = 0$

三，解答题

1. 【解】

令 $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ -

—

曲面在点 (x,y,z) 处的法向量 $\vec{n} = \left(F_x, F_y, F_z\right) = \left(2x, 4y, 6z\right)$

已知平面法向量为 $\vec{n}_1 = \left(1,4,6\right)$ 而切平面与已知平面平行 $\vec{n} \,//\, \vec{n}_1$

从而我们有 $\dfrac{2x}{1} = \dfrac{4y}{4} = \dfrac{6z}{6}$

又因为点在切面上，应该满足于曲面方程

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$$

联立上述方程解得切点为（1，2，2）及（-1，-2，-2）

所以所求切平面方程为：

$$(x-1)+4(y-2)+6(z-2)=0,$$

或

$$(x+1)+4(y+2)+6(z+2)=0$$

2.【解】

设

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2f+x^3\left[f_1'\cdot y+f_2'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right]=3x^2f+x^3yf_1'-xyf_2',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3x^2\left[f_1\cdot y+f_2\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right]+[f_1\cdot x^3-xf_2]+$$

$$y\left[x^3\left(f_{11}x+f_{12}\cdot\frac{1}{x}\right)-x\left(f_{21}\cdot x+f_{22}\cdot\frac{1}{x}\right)\right]$$

3.【解】

Σ_0：$z=0$ 的下侧，投影区域 $D_{xy}=\left\{(x,y)\mid\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}\le 1\right\}$

补充面

由Gauss公式 $\displaystyle\oiint_{\Sigma+\Sigma_0}(xz+y^2)dydz+(2zy+x^2)dzdx+3xydxdy$

$$=\iiint_{\Omega}(z+2z+0)\,dV=\int_0^1 3zdz\iint_{D_2}dxdy=3\pi\int_0^1 2\sqrt{3}z(1-z)dz$$

$=\sqrt{3}\pi$

$$\iint\limits_{\Sigma_0} = -\iint\limits_{\Sigma_0} 3xydxdy = 0$$

$$I = \oiint\limits_{\Sigma_0+\Sigma} - \iint\limits_{\Sigma_0} = \sqrt{3}\pi$$

4.【解】

此级数在(−1, 1)区间内收敛，则收敛域为（−1，1

设级数$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$.

则$\int_0^x s(x)dx = \int_0^x (\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1})dx = \frac{x}{1-x}$,

所以$s(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, 且$x\epsilon(-1, 1)$

将 $x=\frac{1}{2}$ 代入设定级数可得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{1}{2})^{n-1} = 4, 则\sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{1}{2})^{n} = 2$$

5.【解】

若函数在圆内部取极值点则可令 $\begin{cases} z_x = 2x = 0 \\ z_y = 2y = 0 \end{cases}$

Z (0,0)

故而解的点（0，0），而=0.

再求函数在圆周上的最值. 构建题干式子拉格朗日函数

$$F(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda\left[\left(x-\sqrt{2}\right)^2 + \left(y-\sqrt{2}\right)^2 - 9\right],$$

$$\begin{cases} F_x = 2x + 2\lambda\left(x-\sqrt{2}\right) = 0, \\ F_y = 2y + 2\lambda\left(y-\sqrt{2}\right) = 0, \\ \left(x-\sqrt{2}\right)^2 + \left(y-\sqrt{2}\right)^2 = 9 \end{cases}$$

$\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

解得,

前者 z 值为 25，后者 z 值为 1

比较 $z(0,0)$ $z\left(\frac{5\sqrt{2}}{2},\ \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$，$z\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 三值可知，

$$\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2\le 9$$

在圆上函数最大值 z=25, 最小值$z=0$.

6. 【解】

$$f(x)+\frac{1}{2}f'(x)=2x,$$

解 等式两边同时求导，得

即 y’+2y=4x,

由一阶线性微分方程通解公式，有

$$y=e^{-\int 2dx}\left(\int 4xe^{\int 2dx}dx+C\right)=e^{-2x}+2x-C$$

$$x=0\ 时,\ y=0,$$

由原方程可知

可求得 $C=1$，所以$y=e^{-2x}+2x-1$.

7. 【解】

$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \geq 1, a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n} - a_n\right) \leq 0$

a_n单调递减有下界1，故$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在

设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$=t，对 $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$两边取极限有:

$t = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$,所以$t = 1$ 或$t = -1$(舍去)，故$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在且值为1..

(2) $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \geq 1$, 且$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2a_n}{a_n + \frac{1}{a_n}} \geq 1$,

$\{a_n\}$单调减少且有界，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$为正项级数

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k - a_{k+1}}{a_{k+1}}\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k - a_{k+1}}{a_{n+1}}\right) = \frac{a_1 - a_{n+1}}{a_{n+1}}$$

$n \to \infty$时，s_n极限存在，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$收敛..