矢量及其运算法则

一、标量和矢量

1. 标量：

定　　义：只有大小，没有方向的物理量。

如质量、时间、能量、温度等。

表示方法：用普通字母表示，其大小带有正负号的数字表示。

加 减 法：代数和。

2. 矢量：

定　　义：即有大小又有方向的物理量。

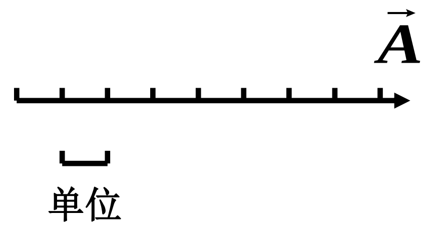
如位移、速度、加速度、力等。

表示方法：

（1）矢量通常用带箭头的字母表示，如 $\vec{A}$ ，

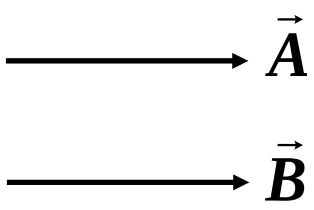
或黑体字母***A***、***B***等表示。

（2）在空间用一有向线段表示，如

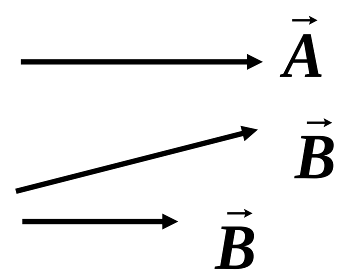


注意：

（1）只有大小相等且方向相同的两个矢量才相等；

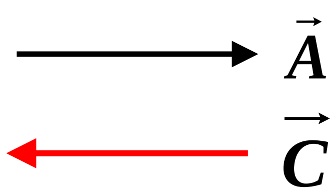


则： $\vec{A}=\vec{B}$



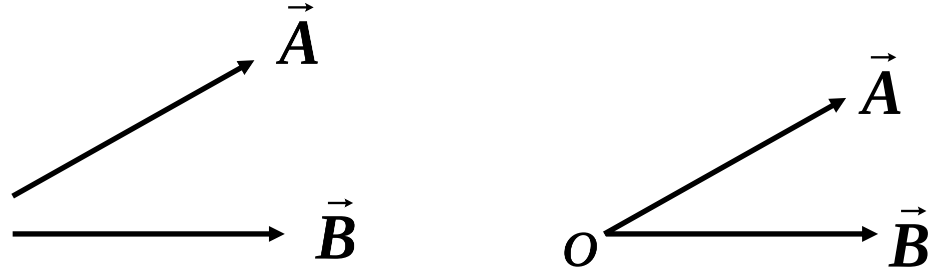
则：$\vec{A}\neq\vec{B}$

（2）若两个矢量的大小相等、方向相反，则互称负矢量；



则：$\vec{A}=-\vec{C}$

（3）矢量具有平移不变性。



二、矢量的模和单位矢量

矢量的大小称为矢量的模，用A或 $|\vec{A}|$ 表示。

如果某一矢量的模为1，且方向与矢量 $\vec{A}$ 相同，则称该矢量为矢量 $\vec{A}$ 的单位矢量，用 $\vec{e}$ 表示。

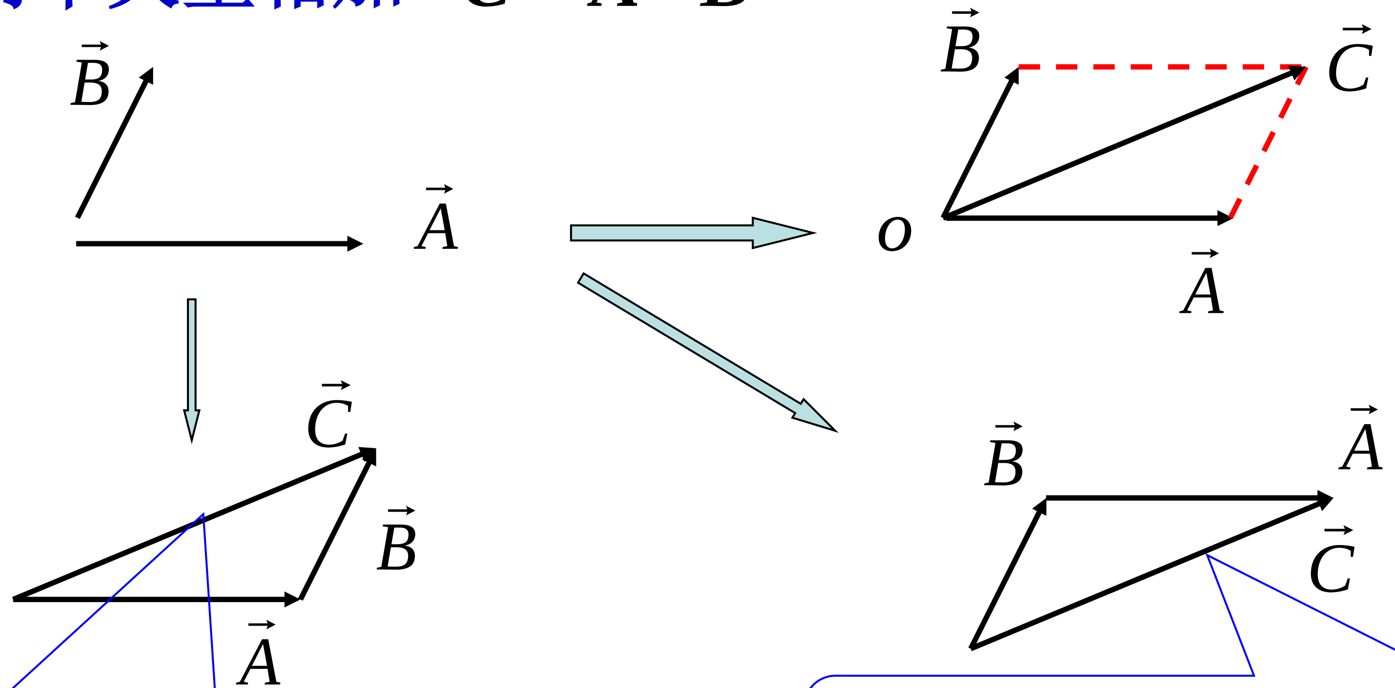
$$\vec{A} = |\vec{A}|\vec{e} = A\vec{e} \qquad \vec{e} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

在正交直角坐标系，常用 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 分别表示 x, y, z 轴的单位矢量。

三、矢量的加法和减法

(1)平行四边形法则(三角形法则)

两个矢量相加 $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$



从矢量A的头到矢量B的尾的矢量

从矢量B的头到矢量A的尾的矢量

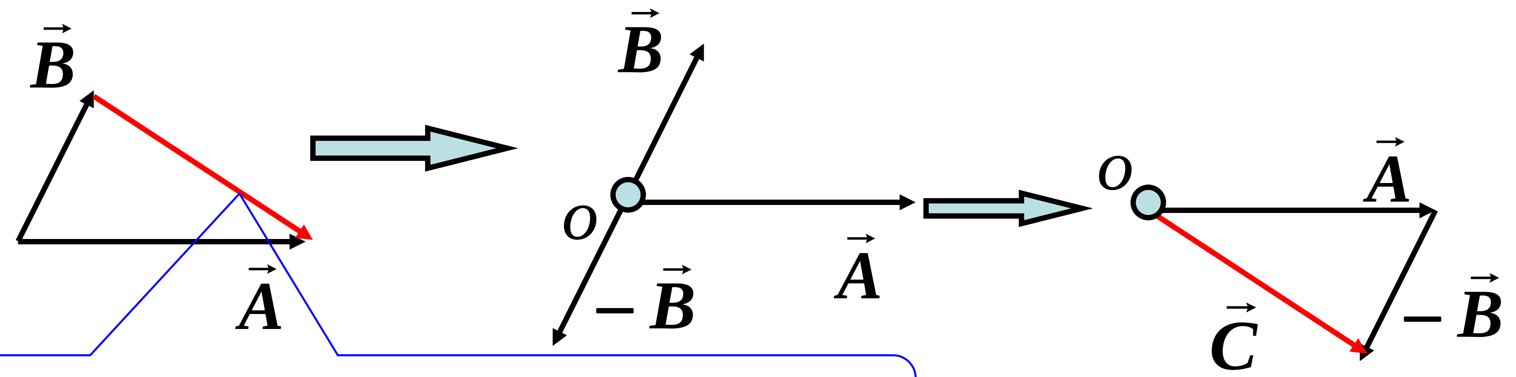
$$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$

满足交换律和结合律

两个矢量相减（同加法）

$$\vec{C}=\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$

等于矢量A加上矢量B的负矢量

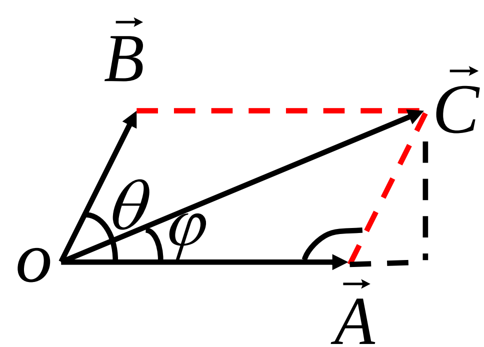


从矢量B的尾到矢量A的尾的矢量

合矢量的大小和方向

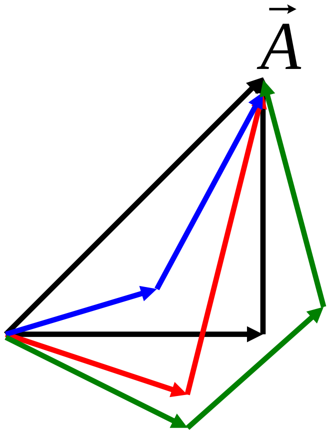
$$C=\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos(180^\circ-\theta)}$$

$$=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta}$$



$$\tan\varphi=\frac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta}$$

(2)矢量合成的解析法



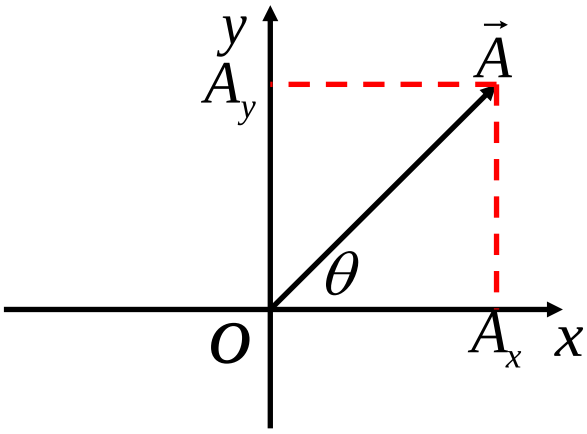
$\Rightarrow \begin{cases} \text{二分矢量：取平面直角坐标系} \\ \text{三分矢量：取空间直角坐标系} \end{cases}$

①平面直角坐标系

表示方法

$$\left.\begin{aligned} A_x &= A\cos\theta \\ A_y &= A\sin\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{A_y}{A_x} \end{cases}$$



两矢量和差运算

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j}$$

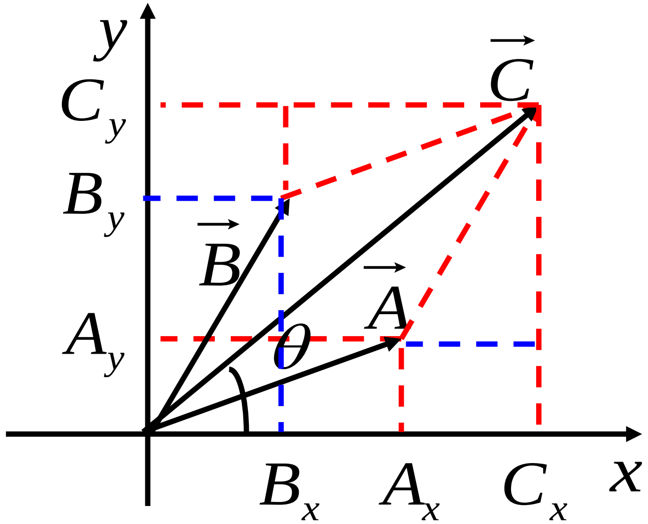
$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j}$$

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j}$$

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$$

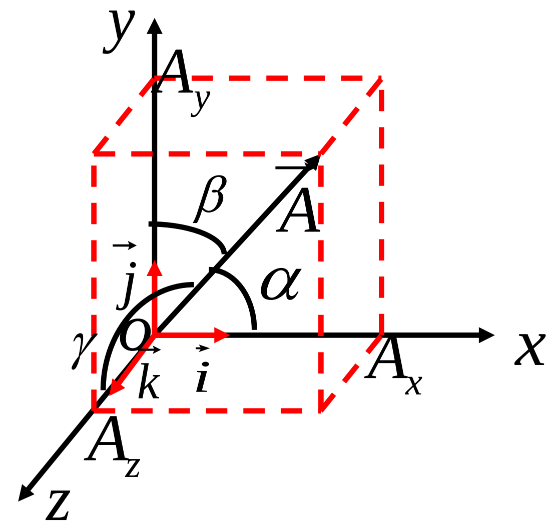
$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x)\vec{i} + (A_y - B_y)\vec{j}$$



两矢量对应坐标分量相加减

$$\vec{C} = C_x \vec{i} + C_y \vec{j} \qquad \begin{cases} C_x = A_x \pm B_x \\ C_y = A_y \pm B_y \end{cases}$$

②空间直角坐标系



表示方法

$$\left.\begin{aligned}\vec{A}_x &= A_x\vec{i}\\ \vec{A}_y &= A_y\vec{j}\\ \vec{A}_z &= A_z\vec{k}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \\ \alpha = \arccos\dfrac{A_x}{A}, \beta = \arccos\dfrac{A_y}{A}, \gamma = \arccos\dfrac{A_z}{A} \end{cases}$$

两矢量相加减

$$\left.\begin{aligned}\vec{A} &= A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\\ \vec{B} &= B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} \vec{A}+\vec{B} = (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j} + (A_z + B_z)\vec{k} \\ \vec{A}-\vec{B} = (A_x - B_x)\vec{i} + (A_y - B_y)\vec{j} + (A_z - B_z)\vec{k} \end{cases}$$

四、矢量的乘积

1. 矢量乘以标量

一个数m和一个矢量 $\vec{A}$相乘得另一矢量$\vec{C}$，则

$$\vec{C} = m\vec{A}$$

矢量 $\vec{C}$ 的大小为 $C = mA$

矢量 $\vec{C}$ 的方向： 若$m>0$，与 $\vec{A}$ 同向；

$m<0$，与 $\vec{A}$ 反向。

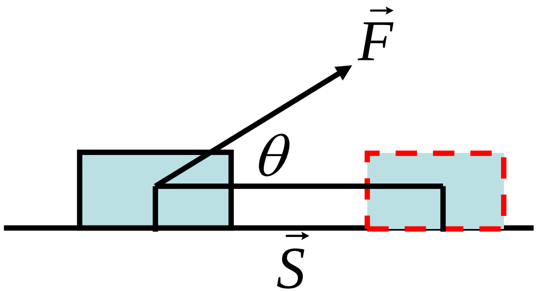
性质： $m(\vec{A} \pm \vec{B}) = m\vec{A} \pm m\vec{B}$

2. 矢量的标积

如果两矢量相乘得到一个标量，称为矢量的**标积**或**点积**。定义为

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta$$

则 $W=F\cos\theta S=\vec{F}\cdot\vec{S}$



1.性质：

（1）$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$

（2）当$\theta=0$时，$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB$

（3）当$\theta=\dfrac{\pi}{2}$时，$\vec{A}\cdot\vec{B}=0$

（4）$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$

2.直角坐标系的单位矢量点积的关系

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$$

3. 在直角坐标系下，两个矢量点积

各坐标分量相乘然后再相加

则 $$\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k})\cdot(B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k})$$

$$=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

4. 在直角坐标系下，任一矢量与单位矢量的点积

$$\vec{A}\cdot\vec{i}=A_x,\ \vec{A}\cdot\vec{j}=A_y,\ \vec{A}\cdot\vec{k}=A_z$$

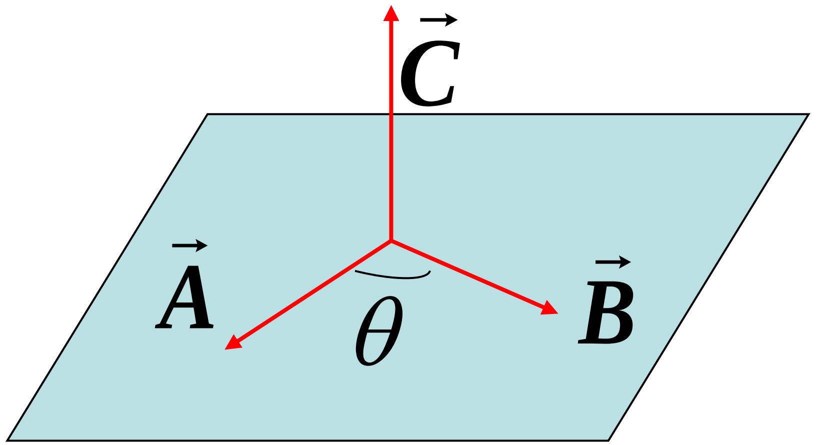
3. 矢量的矢积

若两矢量相乘得到一个矢量，称为矢量的矢积，定义为

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$$

矢量 $\vec{C}$ 的大小为： $C=AB\sin\theta$

矢量 $\vec{C}$ 的方向： 符合右手螺旋法则



1.性质：（1）$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$

（2）$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$

（3）当$\theta=0$时，$\vec{A}\times\vec{B}=0$

（4）当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=AB$

2.直角坐标系的单位矢量矢积的关系

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$$

3. 在直角坐标系下，两个矢量矢积

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

$$=(A_yB_z-A_zB_y)\vec{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\vec{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\vec{k}$$

在做矢积时，构造一个行列式，第一行是坐标系的各坐标轴的单位矢量，第二行是 $\vec{A}$的分量，第三行是 $\vec{B}$ 的分量。