吉林大学

计算方法

吉林大学计算机科学与技术学院
机器学习研究室
计算方法课程组

第5章 函数插值与曲线拟合

- 5.1 引入
- 5.2 拉格朗日插值法
- 5.3 牛顿插值法
- 5.4 三次埃尔米特插值
- 5.5 差分与等距节点的插值公式*

5.1 引入——图像缩放

- 我们所说的图像都是指**点阵图**，也就是用一个像素矩阵来描述图像
- 对于另一种图像：用函数来描述图像的**矢量图**，不在本文讨论之列。

- 当**点阵图**类型的图像放大时，像素也会相应地增加，那么这些**增加的像素**从何而来呢？这时**插值方法**就派上用场了。
- 插值能够在不生成光学像素的情况下增加图像像素大小
- 其方法是在缺失像素周围像素值的基础上使用数学公式计算该缺失像素值。
- 所以在放大图像时，图像看上去会比较平滑、干净。
- 但必须注意的是插值并不能增加图像的光学信息。

常见的图像处理方法

- 最近邻插值算法
- 双线性插值算法
- 双三次插值算法

最近邻插值算法

- 当图片放大时，“照搬”旁边的像素
- 也就是缺失的像素值通过直接使用与之最接近的原有像素值生成
- 假设有一个 3×3 的 256 级灰度图的像素矩阵 A：

$$A=\begin{bmatrix}99 & 88 & 77\\66 & 55 & 44\\33 & 22 & 11\end{bmatrix}$$

- 放大成一个4×4大小的256级灰度图的像素矩阵为B

最近邻插值算法

- 用A矩阵的元素值填充B矩阵的元素值。
- 设矩阵的行坐标和列坐标为从 0 开始的整数
- B_x为欲填充的矩阵 B某个位置的横坐标
- B_y为欲填充的矩阵 B某个位置的纵坐标
- A_x为B映射回矩阵A之后该位置的横坐标
- A_y为B映射回矩阵A之后该位置的纵坐标
- 则有对应关系如下：

$$A_x = B_x \times (A\text{的列数}/ B\text{的列数}) \qquad (5.1.1)$$

$$A_y = B_y \times (A\text{的行数}/ B\text{的行数}) \qquad (5.1.2)$$

最近邻插值算法

- A_x 或A_y出现小数时，采用四舍五入的方法把非整数坐标转换成整数。
- 也可以采用直接舍掉小数位的方法
- B(1,0)对应的A的坐标(1,0)，计算方法为：

$$(1\times(3/4),\ 0\times(3/4)) \Rightarrow (0.75,0) \Rightarrow (1,0)$$

由此可得$B(1,0)= A(1,0)= 88$

- 放大后的像素矩阵B为：

$$\begin{bmatrix} 99 & 88 & 77 & 77 \\ 66 & 55 & 44 & 44 \\ 33 & 22 & 11 & 11 \\ 33 & 22 & 11 & 11 \end{bmatrix}$$

插值像素

数码变焦

- 公元六世纪，我国**刘焯**将等距二次插值应用于天文计算；
- 十七世纪，**牛顿**，**格雷哥里**建立了等距节点上的一般插值公式；
- 十八世纪，**拉格朗日**给出了非等距节点上的插值公式。
- 插值方法在数值分析的许多分支(例如，数值积分，数值微分，微分方程数值解，曲线曲面拟合，函数值近似计算，等等)均有应用。

5.2 拉格朗日插值法

基本原理

- 函数是通过实验和观测得到的,不知道具体的解析表达式

- 有明确的解析表达式，但由于形式复杂，不便于进行分析和计算

数学描述

设函数$y=f(x)$在$[a,b]$上是有定义的，已知$x_0, x_1,\cdots, x_n \in [a,b]$ 及$f(x)$在$x_i(i=0,1,\ldots,n)$点的值$y_i=f(x_i)$或直至r阶导数值$f^{(k)}(x_i)$ $k=1,\ldots,r$.若存在一个简单函数，使

$$\varphi(x_0)=y_0,\varphi(x_1)=y_1,\cdots,\varphi(x_n)=y_n \quad \textbf{(5.2.1)}$$

或还有

$$\varphi^{(k)}(x_i)=f^{(k)}(x_i) \qquad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n;\ k=1,2,\ \ldots,r) \quad \textbf{(5.2.2)}$$

成立

数学描述

则称

$\varphi(x)$	插值函数
$f(x)$	被插值函数
x_i $(i=0,1,\ldots,n)$	插值节点
$[a,b]$	插值区间
(5.2.1)（5.2.2）式	插值条件

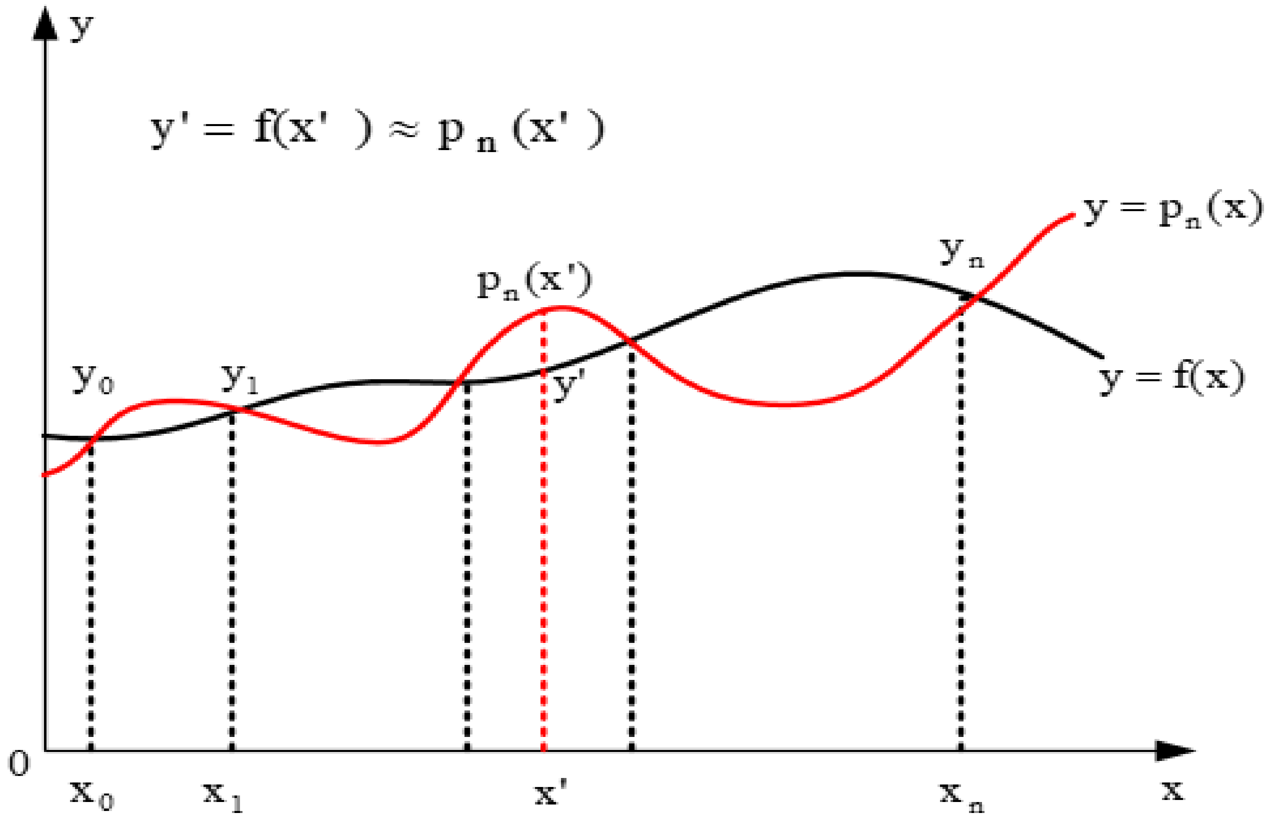
- 求插值函数$\varphi(x)$的方法称为插值法

数学描述

- 设

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

- 为次数不超过n的**代数多项式，**
- 其中$a_0, a_1,\cdots, a_n$为系数。
- 当取插值函数 $\varphi(x)=P_n(x)$ 时，称此插值法为**代数多项式插值**
- $P_n(x)$称为代数插值多项式。


y
y' = f(x') ≈ p n (x')
y = pn(x)
yn
pn(x')
y0
y1
y'
y = f(x)
0
x0
x1
x'
xn
x

5.2.1 Lagrange 插值

设函数$y=f(x)$在$[a,b]$上有定义，

$x_0, x_1, \cdots, x_n$为$[a,b]$上$n+1$个互异的点。

已知$f(x)$于点x_i的值y_i,求一个不高于n次的代数多项式

$$L_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

使之满足

$$L_n(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n) \qquad \textbf{(5.2.3)}$$

$L_n(x)$的存在性和唯一性

由插值条件(5.2.3)式可知， $L_n(x)$的系数$a_0, a_1, \cdots, a_n$满足

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases} \qquad (5.2.4)$$

- 要证明$L_n(x)$是存在的且唯一的，只需要证明$a_0,a_1,\ldots,a_n$的存在且唯一即可。
- 而(5.2.4)是一个以$a_0,a_1,\ldots,a_n$作为未知数的n+1阶线性方程组，此方程组解存在且唯一的充分必要条件是此方程组系数行列式不为零。由于此系数行列式

$$V_n(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix}1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{i-1}(x_i-x_j)$$

是Vandermonde行列式，利用节点互异，知

$$V_n(x_0,x_1,\ldots,x_n)\neq 0$$

此方程组有唯一解，从而插值多项式$P_n(x)$是存在的且唯一的.

通常我们并不使用解线性方程组的方法去求插值多项式，而是采用不同的方法去构造插值多项式。

5.2.2 插值余项

- 函数$f(x)$的插值多项式$L_n(x)$只是在$x_0, x_1, \ldots x_n$处有

$$L_n(x_i) = f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

- 若$x \neq x_\mathrm{i}$ $(i=0,1,\ldots,n)$，则一般的

$$L_n(x_i) \neq f(x_i)$$

- 令$R_n(x)=f(x)-L_n(x)$，则$R_n(x)$表示用$L_n(x)$代替$f(x)$时，在点x处产生的误差,称为**插值余项或截断误差项**。

定理5.1 设 $f(x)\in C^n$，$f^{(n+1)}(x)$ 在 (a,b) 内存在，节点 $a\le x_0<x_1\cdots<x_n\le b$，$L_n(x_j)=f(x_j)$ $(j=0,1,2,\ldots,n)$，则对任何 $x\in[a,b]$ 有

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)\quad \xi\in(a,b) \qquad (5.2.7)$$

$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

- 若$f(x)$在$[a,b]$区间上有直到$n+1$阶导数,
- $x_i(i=0,1,\ldots,n)$ 为$[a,b]$上的插值节点， x_i互异,
- $L_n(x)$为$f(x)$满足(5.2.3)式的n次插值多项式,
- 对$[a,b]$上任何取定的$x\neq x_i$，记

$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

$$F(x)=(f(x)-L_n(x))/\omega_{n+1}(x)$$

从而有函数

$$\varphi(t)=f(t)-\mathrm{L}_n(t)-F\omega_{n+1}(t)$$

- 在$t=x, x_0,x_1, \ldots x_n$这n+2个点处取零值，反复应用Rolle定理$n+1$次，则至少存在一个点$\xi\in(a,b)$，使得

$$\varphi^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-F(n+1)!=0 \qquad (5.2.5)$$

- 从而有

$$F=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \qquad (5.2.6)$$

- 将F的表达式代入(5.2.6)式，得**插值余项公式**

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

其中$\xi \in (a,b)$.

5.2.3 插值公式

1 线性插值

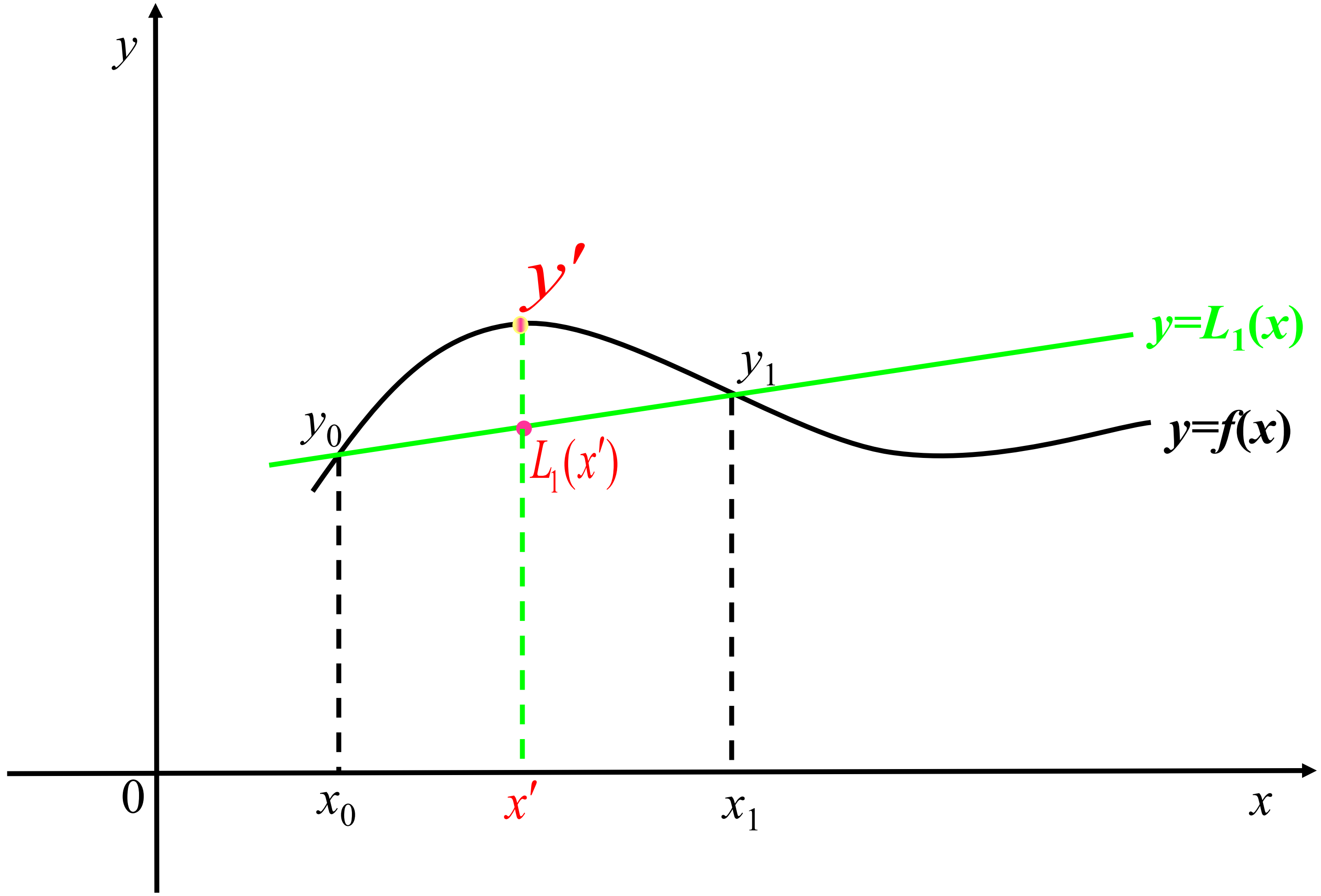
已知函数表

x	x_0	x_1
y	y_0	y_1

要构造一个次数不超过 *1*次的多项式$L_1(x)$，使得它满足插值条件

$$L_1(x_i) = y_i \qquad i = 0,1$$

线性插值



- 点斜式 $L_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$

- 对称式

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

1 线性插值

$$L_1(x) = \underbrace{\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}}_{l_0(x)} y_0 + \underbrace{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}}_{l_1(x)} y_1 \qquad (5.2.11)$$

$$L_1(x) = l_0(x) y_0 + l_1(x) y_1$$

2 抛物线插值

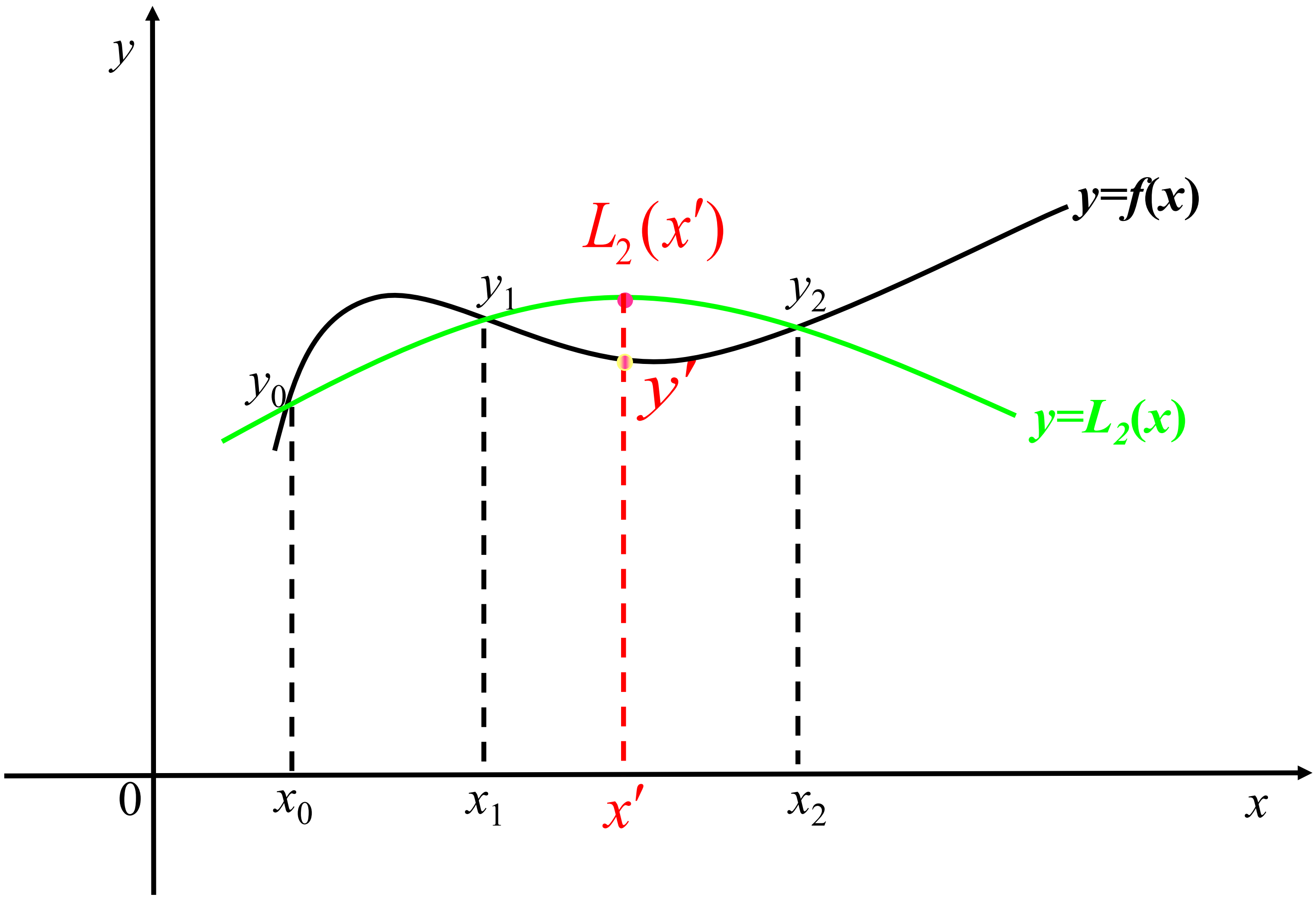
已知函数表

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2

要构造一个次数不超过2次的多项式$L_2(x)$，使得它满足插值条件:

$$L_2(x_i) = y_i \quad i = 0,1,2$$

2 抛物线插值



2 抛物线插值

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 \qquad (5.2.12)$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

其中 $l_0(x)=\dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$ $\qquad l_1(x)=\dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$L_2(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+l_2(x)y_2$$

3 一般插值公式

已知

x	x_0	x_1	x_2	…………	x_n
y	y_0	y_1	y_2	…………	y_n

要构造一个次数不超过n的多项式$L_n(x)$，使得它满足(n+1)个插值条件:

$$L_n(x_i) = y_i \quad i = 0,1,\cdots,n$$

3 一般插值公式

- 构造n次多项式$l_i(x)$使其满足如下条件

$$l_i(x_k)=\begin{cases}1 & k=i\\ 0 & k\neq i\end{cases}\qquad i,k=0,1,\cdots,n \qquad (5.2.8)$$

- 由于$l_i(x)=0$有n个根$x_0, x_1,\cdots, x_{i-1}, x_{i+1},\cdots, x_n$，故设

$$l_i(x)=A(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)$$

- 由$l_i(x_i)=1$，可求出

$$A=\frac{1}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \quad (5.2.9)$$

$$=\prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

称$l_i(x)$为以x_0，$x_1,\ldots x_n$为节点的**插值基函数**

n次拉格朗日插值多项式为

$$L_n(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+\cdots+l_n(x)y_n$$

$$=\sum_{i=0}^{n}l_i(x)y_i=\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)y_i \quad (5.2.10)$$

带余项的Lagrange插值公式

$$f(x) = L_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \qquad a < \xi < b$$

余项为 $$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

例5.1已知$\sqrt{100}=10, \sqrt{121}=11, \sqrt{144}=12, \sqrt{169}=13$,求 $\sqrt{125}$

解1：选择x_0=121, x_1=144为插值节点，则

$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}=\frac{x-144}{121-144} \qquad l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{x-121}{144-121}$$

$$L_1(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1$$

$$L_1(x)=11\times\frac{x-144}{121-144}+12\times\frac{x-121}{144-121}$$

$$\sqrt{125}\approx L_1(125)=11.17391$$

例5.1已知 $\sqrt{100}=10, \sqrt{121}=11, \sqrt{144}=12, \sqrt{169}=13$,求 $\sqrt{125}$

解2： 选取x_0=100, x_1=121, x_2=144，则

$$l_0(x)=\frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)}$$

$$l_1(x)=\frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)}$$

$$l_2(x)=\frac{(x-100)(x-121)}{(144-100)(144-121)}$$

则插值多项式为

$$L_2(x)=10\times l_0(x)+11\times l_1(x)+12\times l_2(x)$$

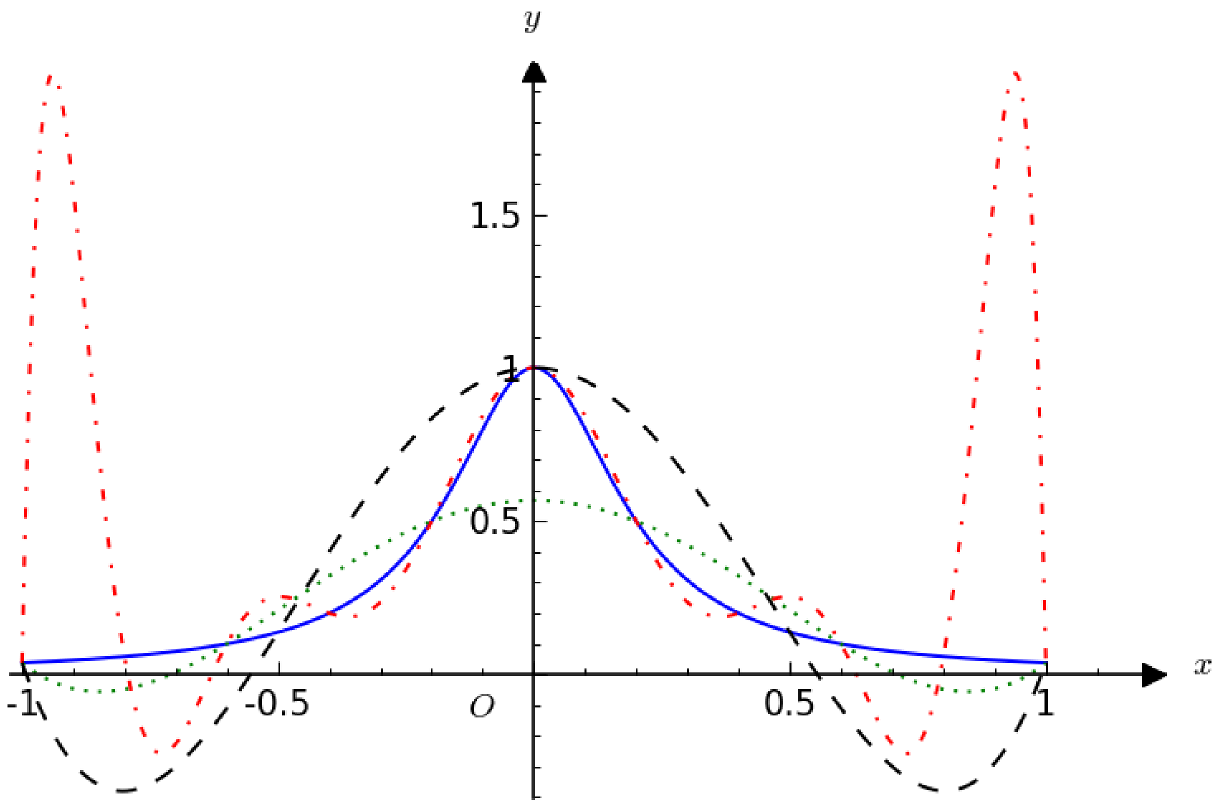
故有 $\sqrt{125}\approx L_2(125)=11.18107$

结果比较

	$\sqrt{125}$
线性插值(n=1)	11.17391
抛物线插值(n=2)	11.18107
拉格朗日插值(n=3)	11.18047
准确值	11.18034

- 是否插值多项式的次数越高，结果越准确呢？
- 一般情况下,如何估计拉格朗日插值结果的精度呢？

Runge现象



- **蓝：f(x)**
- **绿：$L_5(x)$**
- **黑：$L_6(x)$**
- **红：$L_{10}(x)$**

$$f(x)=\frac{1}{1+25x^2}$$

- 例5.2 已知函数

x	0.32	0.34	0.36
$\sin x$	0.314567	0.333487	0.352274

分别用线性插值及抛物线插值计算sin0.3367的值

解: 1 用线性插值计算

由定理5.1知误差为

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n),\qquad \xi\in(a,b)$$

因此应尽量选择离x近的点作为插值节点，故选择x_0=0.32, x_1=0.34为插值节点，则

$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}=\frac{x-0.34}{0.32-0.34}$$

$$l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{x-0.32}{0.34-0.32}$$

令

$$L_1(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1$$

则插值多项式为$L_1(x)=0.314567\times\frac{x-0.34}{0.32-0.34}+0.333487\times\frac{x-0.32}{0.34-0.32}$

故有$sin 0.3367\approx L_1(0.3367)=0.330365$。

解: 1 用线性插值计算

在区间[0.32, 0.34]上，有

$$|sin''x| = |sin\, x| \le sin(0.34) = 0.3335$$

于是线性插值的误差满足

$$|R_1(x)| = \left|\frac{f^{(2)}(\xi)}{(2)!}(x-x_0)(x-x_1)\right| \le \frac{0.3335}{2}(0.0167)(0.033) = 0.92 \times 10^{-5}$$

2 用抛物线插值计算

选取x_0=0.32, x_1=0.34, x_2=0.36， 则

$$l_0(x)=\frac{(x-0.34)(x-0.36)}{(0.32-0.34)(0.32-0.36)}$$

$$l_1(x)=\frac{(x-0.32)(x-0.36)}{(0.34-0.32)(0.34-0.36)}$$

$$l_2(x)=\frac{(x-0.32)(x-0.34)}{(0.36-0.32)(0.36-0.34)}$$

则插值多项式为

$L_2(x)=0.314567\times l_0(x)+0.333487\times l_1(x)+0.352274\times l_2(x)$

故有 $sin0.3367\approx L_2(0.3367)=0.330387$ 。

5.3 NEWTON插值法

拉格朗日插值

已知

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots\cdots\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\cdots\cdots\cdots$	y_n

要构造一个次数不超过n的多项式$L_n(x)$，使得它满足插值条件

$$L_n(x_i) = y_i \qquad i = 0,1,\cdots,n$$

- 定义5.1　称函数$f(x)$于点$x_i,x_j(x_i \neq x_j)$上的平均变化率为$f(x)$在x_i,x_j处的**一阶差商**，记作$f[x_i,x_j]$，即

$$f[x_i,x_j]=\frac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i} \tag{5.3.1}$$

- 一阶差商的差商为$f(x)$在点x_i,x_j,x_k处的**二阶差商**，记作$f[x_i,x_j,x_k]$，即

$$f[x_i,x_j,x_k]=\frac{f[x_j,x_k]-f[x_i,x_j]}{x_k-x_i} \tag{5.3.2}$$

- 一般地，在求出$f(x)$的m-1阶差商之后，就可以构造$f(x)$的m阶差商，称

$$f[x_{i0},x_{i1},\cdots,x_{im-1},x_{im}]=\frac{f[x_{i1},\cdots,x_{im}]-f[x_{i0},\cdots,x_{im-1}]}{x_{im}-x_{i0}} \tag{5.3.3}$$

为$f(x)$在点$x_{i0},x_{i1},\ldots,x_{im}$处的**$m$阶差商**

- 特别地，规定零阶差商$f[x_i]=f(x_i)$

差商的性质

- 零阶差商　$f[x_i]=f(x_i)$

- k阶差商

$$f[x_0,\dots,x_k]=\frac{f[x_1,x_2,\dots,x_k]-f[x_0,x_1,\dots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$$

差商的性质

- k阶差商可表示为函数值$f(x_0),\ldots,f(x_k)$的线性组合，即

$$f[x_0,\ldots,x_k]=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)} \qquad (5.3.4)$$

- 各阶差商均具有对称性，即改变节点的位置，差商值不变.

$$f[x_0,\ldots,x_k]=f[x_1,x_0,x_2,\ldots,x_k]=f[x_1,x_2,\ldots,x_k,x_0] \qquad (5.3.5)$$

差商的性质

- 差商与导数的关系

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \qquad \xi\in[a,b] \quad (5.3.6)$$

- 若$f(x)$是n次多项式，则一阶差商是n-1次多项式

- 计算各阶差商，可按**差商表**进行

差商表构造

- 按照给定顺序$x_0, x_1, \ldots, x_n$,计算差商表

节点	零阶差商	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_4	$f(x_4)$	$f[x_3, x_4]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$

Newton插值多项式

$$f[x,x_0]=\frac{f[x]-f[x_0]}{x-x_0}$$

$$f[x]=f[x_0]+(x-x_0)f[x,x_0]$$

$$f[x,x_0,x_1]=\frac{f[x,x_0]-f[x_0,x_1]}{x-x_1}$$

$$f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+(x-x_1)f[x,x_0,x_1]$$

$$\vdots$$

$$f[x,x_0,\cdots x_n]=\frac{f[x,x_0,\cdots,x_{n-1}]-f[x_0,x_1,\cdots,x_n]}{x-x_n}$$

$$f[x,x_0,\cdots,x_{n-1}]=f[x_0,x_1,\cdots,x_n]+(x-x_n)f[x,x_0,\cdots,x_n]$$

$$f[x] = f[x_0] + (x - x_0) f[x, x_0]$$

$$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + (x - x_1) f[x, x_0, x_1]$$

$$\vdots$$

$$f[x, x_0, \cdots, x_{n-1}] = f[x_0, x_1, \cdots, x_n] + (x - x_n) f[x, x_0, \cdots, x_n]$$

$$f[x] = f[x_0] + (x - x_0) f[x, x_0]$$

$$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + (x - x_1) f[x, x_0, x_1]$$

$$\vdots$$

$$f[x, x_0, \cdots, x_{n-1}] = f[x_0, x_1, \cdots, x_n] + (x - x_n) f[x, x_0, \cdots, x_n]$$

$$f[x] = f[x_0] + (x - x_0) f[x, x_0]$$

$$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + (x - x_1) f[x, x_0, x_1]$$

$$\vdots$$

$$f[x, x_0, \cdots, x_{n-1}] = f[x_0, x_1, \cdots, x_n] + (x - x_n) f[x, x_0, \cdots, x_n]$$

$$\begin{aligned} f[x] = f[x_0] &+ f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &+ \cdots + f[x_0, x_1, x_2, \cdots x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \\ &+ f[x, x_0, x_1, x_2, \cdots x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \end{aligned}$$

$$f[x] = f[x_0] + (x - x_0) f[x, x_0]$$

$$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + (x - x_1) f[x, x_0, x_1]$$

$$\vdots$$

$$f[x, x_0, \cdots, x_{n-1}] = f[x_0, x_1, \cdots, x_n] + (x - x_n) f[x, x_0, \cdots, x_n]$$

$$f[x] = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f[x_0, x_1, x_2, \cdots x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

$$+ f[x, x_0, x_1, x_2, \cdots x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

$$f[x] = N_n(x) + R(x)$$

- n次**Newton插值多项式**

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$+ \cdots + f[x_0, x_1, x_2, \cdots x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

(5.3.8)

- 由插值多项式的唯一性可知，当$f^{(n+1)}(x)$存在时，n次Newton插值多项式的余项与n次Lagrange插值多项式的余项相同，即

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

- ξ介于$x, x_0, x_1, \ldots, x_n$之间

- 在实际计算中，特别当函数$f(x)$的高阶导数比较复杂或$f(x)$的表达式没有给出时，常用差商来表示插值余项公式。由差商与导数的关系(5.3.6)式，有

$$R_n(x) = f[x_0, x_1, \cdots x_n, x]\omega_{n+1} \qquad (5.3.10)$$

$$\omega_{n+1} = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

Newton插值法

1）各阶差商可以由差商表给出， Newton插值法使用的是差商表中斜线部分（带横线差商）

2）每当增加一个插值节点,只需要增加一项就行了,即有

$$N_{n+1}(x) = N_n(x) + f[x_0, x_1, \cdots x_n, x_{n+1}](x - x_0)\cdots(x - x_n)$$

3）Newton余项与Lagrange方法相同

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

$$R_n(x) = f[x_0, x_1, \cdots x_n, x]\omega_{n+1}$$

4）牛顿插值法求解过程

根据给定节点构造差商表；

根据差商表写出$N_n(x)$;

将x代入

5）插值节点的选择

- 极小值原则

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

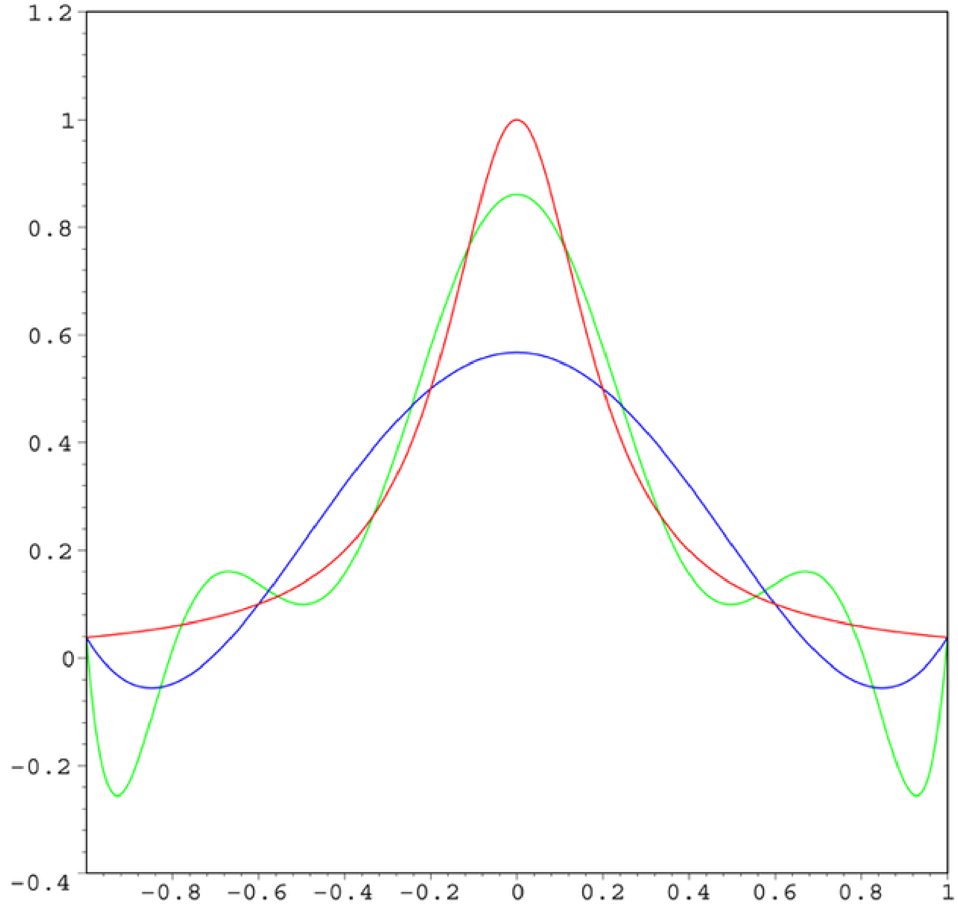
$$M_{n+1} = \max_{a \le x \le b} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$$

$$\left| R_n(x) \right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{a \le x \le b} \left| \omega_{n+1}(x) \right|$$

- 避免出现高次插值，不稳定

龙格现象

$$f(x) = \frac{1}{(1+25x^2)}$$



红色曲线是龙格函数
蓝色曲线是 5 阶多项式
绿色曲线是 9 阶多项式
随着阶次的增加，误差逐渐变大

- **例5.3** 已知函数的函数表，

x_k	$f(x_k)$
0.40	0.41075
0.55	0.57815
0.65	0.69675
0.80	0.88811
0.90	1.02652
1.05	1.25386

作插值多项式计算$f(0.596)=\mathrm{sh}0.596$的值

解： 差商表的计算结果见表。由表中可以看出其四阶差商相同，则五阶差商为0，因此可取四次插值多项式，并有余项为0。根据极小化原理选择0.40~0.90的5个节点作为插值节点，由(5.3.8)式，有

$$N_n(x) = 0.41075 + 1.1160(x-0.4) + 0.2800(x-0.4)(x-0.55)$$
$$+0.197(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65) + 0.034(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65)(x-0.8)$$

于是，$f(0.596) = \mathrm{sh}(0.596) \approx N_4(0.596) = 0.63192.$

f(0.596)的差商表计算结果

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
0.40	0.41075				
0.55	0.57815	1.1160			
0.65	0.69675	1.1860	0.2800		
0.80	0.88811	1.2757	0.3588	0.197	
0.90	1.02652	1.3841	0.4336	0.214	0.034
1.05	1.25386	1.6156	0.5260	0.237	0.034

5.4 三次Hermite插值

许多应用问题不但要求构造插值函数在节点上的值与被插函数值相等的条件外，还要求它的导数值也要与被插函数的导数值相等，如一阶导数值，高阶导数等

- 这种插值称为**Hermite(埃尔米特)插值**。

- 整齐的Hermite插值，节点处的函数值与导数值成对出现。
- 非整齐的Hermite插值，节点处的函数值与导数值不成对出现。

问题一 整齐的

- 已知下面的函数表，构造Hermite插值多项式$H_3(x)$，使得 $H(x_k)=y_k, H'(x_k)=m_k$

x	x_0	x_1
y	y_0	y_1
y'	m_0	m_1

解1 基于插值基函数构造插值多项式

令 $$H_3(x) = \alpha_0(x)y_0 + \alpha_1(x)y_1 + \beta_0(x)m_0 + \beta_1(x)m_1 \quad (5.4.2)$$

$$= \sum_{i=0}^{1}\left(\alpha_i(x)y_i + \beta_i(x)m_i\right)$$

其中$\alpha_0(x), \alpha_1(x), \beta_0(x), \beta_1(x)$为插值基函数.
为3次多项式，且满足如下条件：

$$\alpha_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases} \quad \alpha_i'(x_j) = 0$$

$$i, j = 0,1$$

$$\beta_i(x_j) = 0 \qquad \beta_i'(x_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

容易验证$H_3(x)$满足Hermite插值条件

插值基函数应有下面形式

$$\alpha_0(x) = (x - x_1)^2 (ax + b)$$

$$\alpha_1(x) = (cx + d)(x - x_0)^2$$

$$\beta_0(x) = e(x - x_0)(x - x_1)^2$$

$$\beta_1(x) = f(x - x_0)^2 (x - x_1)$$

其中：***a,b,c,d,e,f*** 为待定系数。

由基函数固有性质

$$\alpha_0(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2$$

$$\alpha_1(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$

$$\beta_0(x) = (x - x_0)\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2$$

$$\beta_1(x) = (x - x_1)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$

带回到式(5.4.2)中，即可得到满足插值条件的多项式$H_3(x)$

插值余项

$$R_3(x)=\frac{f^4(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2 \qquad (5.4.7)$$

$$\xi\in[\min(x,x_0,x_1),\max(x,x_0,x_1)]$$

已知x_0，x_1处函数值及导数值，在构造差商表时，引入重点x_0，x_1，（知道哪点导数值，哪点为重点）。

对于差商表中的一阶差商$f[z_0,z_1]$，
根据导数定义

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f[z_1]-f[z_0]}{z_1-z_0}=f[z_0,z_1]$$

- 解2 （利用差商的方法）

写出差商表

$z_0 = x_0$	$f(z_0)$			
$z_1 = x_0$	$f(z_1)$	$f'(x_0)$		
$z_2 = x_1$	$f(z_2)$	$f[z_1, z_2]$	$f[z_0, z_1, z_2]$	
$z_3 = x_1$	$f(z_3)$	$f'(x_1)$	$f[z_1, z_2, z_3]$	$f[z_0, z_1, z_2, z_3]$

$$H_3(x) = f[z_0] + f[z_0, z_1](x - z_0) + f[z_0, z_1, z_2](x - z_0)(x - z_1)$$
$$+ f[z_0, z_1, z_2, z_3](x - z_0)(x - z_1)(x - z_2)$$

问题二　非整齐的

- 已知下面的函数表，构造Hermite插值多项式$H_2(x)$，使得 $H(x_k)=y_k, H'(x_0)=y_0'$

x	x_0	x_1	x_1
y	y_0	y_1	m_1
y'		m_1	

• 解2 （利用差商的方法）

写出差商表

$z_0 = x_0$	$f(z_0)$			
$z_1 = x_0$	$f(z_1)$	$f'(x_0)$		
$z_2 = x_1$	$f(z_2)$	$f[z_1, z_2]$	$f[z_0, z_1, z_2]$	
$z_3 = x_1$	$f(z_3)$	$f'(x_1)$	$f[z_1, z_2, z_3]$	$f[z_0, z_1, z_2, z_3]$

$$H_3(x) = f[z_0] + f[z_0, z_1](x - z_0) + f[z_0, z_1, z_2](x - z_0)(x - z_1)$$

$$+ f[z_0, z_1, z_2, z_3](x - z_0)(x - z_1)(x - z_2)$$

三次Hermite插值

- 非整齐的插值余项

$$R_3(x)=\frac{f^4(\xi)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_i)$$

i的取值取决于给定的插值条件

- 整齐的插值余项

$$R_3(x)=\frac{f^4(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2$$

思考题

1 .是否插值多项式的次数越高，结果越准确呢？如果不是，应如何处理许多插值节点的情况？

习题1

1 .试利用**Lagrange** 插值函数及其余项证明等式

$$\sum_{i=0}^{n}\left(x_i^m\cdot\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)\right)\equiv x^m$$

其中，$x_j\neq x_i,\forall j\neq i;0\leq m\leq n,$

习题2

已知$f(x)$在两个不同的插值节点x_0,x_1上的函数值$y_0=f(x_0)$，$y_1=f(x_1)$，及导数值$m_0=f'(x_0)$，$m_1=f'(x_1)$。设$H_3(x_0)=y_0$，$H_3(x_1)=y_1$，$H_3'(x_0)=m_0$，$H_3'(x_1)=m_1$。$\forall x\in(x_0,x_1)$试证明余项公式

$$f(x)-H_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2$$

其中$\xi\in(x_0,x_1)$

习题3

3.已知函数f(x)的函数值如下：

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
f(x)	1.000	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

分别用线性插值和二次插值求f(0.33)的值。

习题4

4.令$f(x)=(4x-7)/(x-2)$，且$x_0=1.7$, $x_1=1.8$, $x_2=1.9$, $x_4=2.1$.

(1) 利用x_0, x_1及x_2点，构造一个次数不高于二次的多项式，求$f(1.75)$的近似值；

(2) 利用x_0, x_1 , x_2及x_3点，构造一个三次插值多项式，求$f(1.75)$和$f(2.00)$的近似值。

习题

5.已知函数表如下。

x	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7
sinx	0.6442	0.7833	0.8912	0.9636	0.9975	0.9917

试构造差商表，并分别用两点、三点及四点Newton插值多项式计算sin(1.0)的近似值。

习题

6.分别写出一阶差商f [x, x]、二阶差商f [x, x, x]与一阶导数f’ (x)和二阶导数$f^{(2)}$ (x)的关系。并利用此关系用差商表方法求不高于4次插值多项式，满足下列插值条件。

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f^{(2)}(x)$
0	1	-3	0
1	4	16	

习题

7.设f(x)于[a,b]区间有二阶连续导数，且f(a)=f(b)=0，求证

$$\max_{a\le x\le b}\left|f(x)\right| \le \frac{1}{8}(b-a)^2 \max_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right|$$

习题

8 构造一个三次Hermite插值多项式，满足

$$f(0)=1, f'(0)=0.5, f(1)=2, f'(1)=0.5$$

实验题

1 比较几种不同的插值方法的效果。

Octave中插值函数为interp1，用help interp1查看其用法。仍以上面的Runge函数为例，运行给出的代码。读懂程序，并分析得到的结果。

```
a=-1;
b=1;
h=(b-a)/100;
xf = [a:h:b];
yf = 1./(1+25*xf.*xf);
xp = a+(b-a)*rand(1,11);
yp = 1./(1+25*xp.*xp);
lin = interp1 (xp, yp, xf);
near = interp1 (xp, yp, xf, "nearest");
pch = interp1 (xp, yp, xf, "pchip");
spl = interp1 (xp, yp, xf, "spline");
plot (xf,yf,"r", xf,near,"g", xf,lin,"b", xf,pch,"c", xf,spl,"m", xp,yp,"r*");
legend ("original", "nearest", "linear", "pchip", "spline");
```