2022-2023 学年《微积分 BII》期末试题

一、选择题

1.设函数 $f(x,y)=x|x|+|y|$，则（　　）

(A) $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,\ 0)},\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}$ 都存在　　(B) $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)},\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}$ 都不存在

(C) $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}$ 存在，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}$ 不存在　　(D) $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}$ 不存在，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}$ 存在

2.设方程 $f(e^z,2z-x-y^2)=0$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$，其中 $f\in C^{(1)}$，则$\frac{\partial z}{\partial y}=$（　　）

(A) $\frac{f_2'}{f_1'\cdot e^z+2f_2'}$　(B) $\frac{2f_2'}{f_1'\cdot e^z+2f_2'}$　(C) $\frac{yf_2'}{f_1'\cdot e^z+2f_2'}$.　(D) $\frac{2yf_2'}{f_1'\cdot e^z+2f_2'}$

3.设 $f(x,y),g(x,y)$ 在有界闭区域 D_1,D_2 上都连续，下列结论正确的是（　　）

(A)当 $D_1\supset D_2$ 时，$\iint_{D_1}f(x,y)dxdy\geqslant\iint_{D_2}f(x,y)dxdy$

(B) 当 $D_1=D_2$ 且 $f(x,y)\geqslant g(x,y)$ 时，$\iint_{D_1}f(x,y)dxdy\geqslant\iint_{D_2}g(x,y)dxdy$

(C) 当 $D_1\supset D_2$，在 D_2 上 $f(x,y)\geqslant g(x,y)$ 时，$\iint_{D_1}f(x,y)dxdy\geqslant\iint_{D_2}g(x,y)dxdy$

(D) 当 $D_1\supset D_2$，在 D_1 上 $f(x,y)\geqslant g(x,y)$ 时，$\iint_{D_1}|f(x,y)|dxdy\geqslant\iint_{D_2}|g(x,y)|dxdy$

4.设光滑闭曲面 Σ 所围立体的体积为 V，曲面 Σ 取外侧，则 $V=$（　　）

(A) $\oiint_\Sigma xdydz$　(B) $\oiint_\Sigma ydxdy$　(C) $\oiint_\Sigma zdzdx$　(D) $\oiint_\Sigma xdxdy$

5.当（　　）时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{\sqrt{n}}(a>0)$ 收敛.

(A) $a>1$　(B) $a>\frac{1}{2}$　(C) $1<a<2$　(D) $0<a<1$

6.如果函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 都是以下四个选项中给出的方程的解，设 C_1,C_2 是任意常数，则 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 必是（　　）的解.

(A) $y''+y'+y^2=0$　　(B) $y''+y'+2y=1$

(C) $xy''+y'+\frac{1}{x}y=0$　　(D) $x+y+\int_0^x y(t)dt=0$

二、填空题：

1.若 $f(x,y)=xy^3+(x-1)\arccos\frac{y^2}{2x}$，则 $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,y)}=$ ________

2.设 $\vec{A}=xy^2\vec{i}+yz\vec{j}+x^2z\vec{k}$，则 grad (div $\vec{A}$) = ________

3.积分 $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy =$ ____________________ .

4.设 $\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x+y+z=0 \end{cases} (R>0)$，则 $\oint_\Gamma 3xyds =$ ____________________

5.设 $f(x)=\begin{cases} x, 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}, \\ 2-2x, \frac{1}{2}<x<1, \end{cases}$ $s(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x,$

其中 $a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x dx (n=0,1,2,\cdots)$，则 $s\left(-\frac{1}{2}\right)=$____________________

6.幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}(x-1)^n$ 的收敛域为 ____________________

三、计算题

设函数 $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)+2yf\left(\frac{x}{y}\right)$，其中 $f\in C^{(2)}$，求 $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

四、计算题:

在椭球面 $x^2+y^2+\frac{1}{4}z^2=1$ 位于第一卦限的部分上求一点，使该点处的切平面在三个坐标轴上的截距平方和最小，求该点坐标并写出切平面方程.

五、计算题

求微分方程 $y'' - y = 4xe^x$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 0, y'\big|_{x=0} = 1$ 的特解.

六、计算题.

设 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$ 与 $x^2 + y^2 = 2z$ 所围成的立体区域, 求 Ω 的表面积.

七、计算题

将函数 $f(x)=\arctan x$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$的和.

八、计算题.

计算 $I=\iiint_{\Omega}\left|z-x^2-y^2\right|dxdydz$, 其中 $\Omega=\{(x,y,z)|0\leqslant z\leqslant 1, x^2+y^2\leqslant 1\}$.

九、证明题

已知平面区域 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\}$, L 为 D 的正向边界试证:

$\oint_{L} xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\geqslant 2\pi^{2}$.

2022-2023 学年《微积分 BII》参考答案

一、选择题参考答案

题目	1	2	3	4	5	6
答案	C	D	B	A	D	C

1.【解析】C

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x| = 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{|\Delta y|}{\Delta y}\text{不存在}$$

故$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}$存在，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}$不存在

综上，应选 C

2.【解析】D

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-f'y}{f'z} = \frac{-f'_2(-2y)}{f'_1e^z+2f'_2} = \frac{2yf'_2}{f'_1e^z+2f'_2}.$$

综上，应选 D

3.【解析】B

A 项:若$f(x,y)=-1$. 则 $D_1\ni D_2$ 时. $\iint_{D_1}f(x,y)dxdy \le \iint_{D_2}f(x,y)dxdy$

B 项: 二重积分的性质

C 项. 设 $f(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in D_2\\ -1 & \text{其他}\end{cases}$，$g(x,y)=0$

$D_1: x^2+y^2=4$，$D_2: x^2+y^2=1$

则 $\iint_{D_1}f(x,y)dxdy=-2\pi$，$\iint_{D_2}g(x,y)dxdy=0$

此时 $\iint_{D_1}f(x,y)dxdy<\iint_{D_2}g(x,y)dxdy$

D 项: 设 $f(x,y)=\begin{cases}-\frac{1}{16} & (x,y)\in D_1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，$g(x,y)=\begin{cases}-1 & (x,y)\in D_1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$D_1: x^2+y^2=4$，$D_2: x^2+y^2=1$.

$\iint_{D_1}|f(x,y)|dxdy=\frac{\pi}{4}$，$\iint_{D_2}|g(x,y)|dxdy=\pi$.

此时 $\iint_{D_1}\big(f(x,y)dxdy<\iint_{D_2}|g(x,y)\big)dxdy$

综上，应选 B

4.【解析】A

$V=\iiint_V dxdydz=\oiint_{\varepsilon} xdydz$

综上，应选 A

5.【解析】D

利用根值判别法，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n^{\frac{1}{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{e^{\frac{\ln n}{2n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{e^{\frac{1}{2n}}}=a$

所以当 $0<a<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，

综上，应选 D

6.【解析】C

$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$

$y'=c_1y_1'(x)+c_2y_2'(x)$

$y''=c_1y_1''(x)+c_2y_2''(x)$

A项:

$y''+y'+y^2=c_1y_1''(x)+c_2y_2''(x)+c_1y'(x)+c_2y_2'(x)+(c_1y_1(x)+c_2y_2(x)^2$

$=c_1\left(y_1''(x)+y_1'(x)+c_1y_1^2(x)\right)+c_2\left(y_2''(x)+y_2'(x)+c_2y_2^2(x)\right)+2c_1(2y_1(x)y_2(x))\neq 0.$

当$c_1\neq 0, c_2\neq 0$ 时.$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$不是方程的解

B 项

$y''+y'+2y=c_1y_1''(x)+c_2y_2''(x)+c_1y_1'(x)+c_2y_2'(x)+2c_1y_1(x)+2c_2y_2(x)$

$=c_1\left(y_1''(x)+y_1'(x)+2y_1(x)\right)+c_2\left(y_2''(x)+y_2'(x)+2y_2(x)\right)=c_1+c_2$

当$c_1+c_2\neq 1$时，$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$不是方程的解

C 项：$xy''+y'+\frac{y}{x}=c_1xy_1''(x)+c_1y_1'(x)+\frac{C_1y_1(x)}{x}+c_2xy_2''(x)+c_2y_2'(x)+\frac{C_2y_2(x)}{x}$

$$c_1\left(xy_1''(x)+y_1'(x)+\frac{y_1(x)}{x}\right)+C_2\left(xy_2''(x)+y_2'(x)+\frac{y_2(x)}{x}\right)=0$$

故 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 是方程的解

D 项：$x+2y+\int_0^x y(t)dt=x+c_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\int_0^x(c_1y_1(x)+c_2y_2(x))dx$

$$=x+c_1\left(y_1(x)+\int_0^x y_1(x)dx\right)+c_2\left(y_2(x)+\int_0^x y_2(x)dx\right)$$

$$=x-c_1x-c_2x=(1-c_1-c_2)x$$

当 $C_1+c_2\neq 1$ 时. $y=C_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ 不是方程的解

综上，应选 C

二、填空题参考答案

1.【解析】$3y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3xy^2+(x-1)\left(-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y^2}{2x}\right)^2}}\right)\frac{y}{x}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|(1,y)=3y^2$$

2.【解析】$(2x,2y,1)$

$\operatorname{div}\vec{A}=y^2+z+x^2$

$\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{A})=2x\vec{i}+2y\vec{j}+\vec{k}$，则答案为$(2x,2y,1)$

3.【解析】$\frac{1}{2}(1-e^{-4})$

$$\int_0^2dx\int_x^2e^{-y^2}dy=\int_0^2dy\int_0^ye^{-y^2}dx=\int_0^2ye^{-y^2}dy=\frac{1}{2}(1-e^{-4})$$

4.【解析】$-\pi R^3$

联立 P. $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\x+y+z=0\end{cases}$

得$x^3+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=R^2+2xy+2yz+2zx=0$

即 $xy+yz+zx=-\frac{R^2}{2}$

$\therefore$ 由轮换对称性得

$$\oint_p 3xyds=\oint(xy+yz+zx)ds=\oint -\frac{R^2}{2}ds=-\frac{R^2}{2}\cdot 2\pi R=-\pi R^3$$

5.【解析】$\frac{3}{4}$

由于 $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$ ，易知 $S(x)$ 是偶函数

则 $S\left(-\frac{1}{2}\right)=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{S\left(\frac{1}{2}^-\right)+S\left(\frac{1}{2}^+\right)}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{4}$

6.【解析】 $\left(1-\frac{1}{e},1+\frac{1}{e}\right)$

设 $t=x-1$ ，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}t^n$ 的收敛半径为 $R=\frac{1}{\rho}$其中 $\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$

所以 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ 即收敛半径为 $\frac{1}{e}$

当 $t=\frac{1}{e}$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}$ 发散。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{e^n}=\lim_{n\to\infty}e^{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n}$$

令$t=\frac{1}{n}$，则

$$\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}t^2+0\cdot t^2}{t^2}=-\frac{1}{2}\neq0$$

当$t=-\frac{1}{e}$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{(-e^n)}$ 发散

$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{(-e)^n}=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}=-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(-1)^n$.极限不存在

故 $\sum_{i=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}t^n$ 的收敛域为 $\left(-\frac{1}{e},\ \frac{1}{e}\right)$

$\sum_{i=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}(x-1)^n$ 的收敛域为 $\left(1-\frac{1}{e},1+\frac{1}{e}\right)$

三、【解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+2f'\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{y}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^3}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{2}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{2x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)$$

所以$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{2x}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)$

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y^2}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{2x}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$$

四、【解析】

设切点坐标: $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 切平面法向量为 $\left(2x_0,2y_0,\ \frac{1}{2}z_0\right)$

则切平面方程为 $2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+\frac{1}{2}z_0(z-z_0)=0$ 。

即 $xx_0+yy_0+\frac{1}{4}zz_0=1$

$\therefore x$ 轴上截距为 $\frac{1}{x_0}$, Y 轴上截距为 $\frac{1}{y_0}$ ， Z 轴上截距为 $\frac{4}{z_0}$

$\therefore$ 设 $f(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{y_0^2}+\frac{16}{z_0^2}$

设 $L(x_0,\ y_0,\ \partial_0,\ \lambda)=\left(\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{y_0^2}+\frac{16}{z_0^2}\right)+\lambda\left(x_0^2+y_0^2+\frac{1}{4}z_0^2-1\right)$

$L_{x_0}=-\frac{2}{x_0^3}+2\lambda x_0$, $L_{y_0}=-\frac{2}{y_0^3}+2\lambda y_0$, $L_{z_0}=-\frac{32}{z_0^3}+\frac{1}{2}\lambda z_0$.

$L_\lambda=x_0^2+y_0^2+\frac{1}{4}z_0^2-1=0$

令L_{x_0}, L_{y_0}, $L_{z_0}=0$ 得$x_0^2=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, $y_0^2=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, $z_0^2=\frac{8}{\sqrt{\lambda}}$

代入$L\lambda=0$ 中. 得$\lambda=16$, 则$x_0=\frac{1}{2}$, $y_0=\frac{1}{2}, z_0=\sqrt{2}$

$\therefore$ 切平面方程为 $\left(x-\frac{1}{2}\right)+\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}(z-\sqrt{2})=0$

五、【解析】

设特征方程为 $x^2-1=0$. 得 $\alpha_1=1$，$\alpha_2=-1$

则设齐次方程的通解为 $Y=c_1e^x+c_2e^{-x}$

$\because x=1$ 是特征方程的根.

$\therefore$ 设非齐次方程的特解为$y^*=x(b_0+b_1x)e^x=(b_1x^2+b_0x)e^x$.

$\therefore y^{*'}=(b_0+2b_1x)e^x+(b_0x+b_1x^2)e^x=(b_1x^2+(2b_1+b_0)x+b_0)e^x$.

$y^{x''}=(2b_1x+(2b_1+b_0)+b_1x^2+(2b_1+b_0)x+b_0)e^x$.

$=\left(b_1x^2+（4b_1+b_0)x+(2b_1+2b_0)\right)e^x$.

$\therefore$ 代入微分方程得$\left(4b_1x+(2b_1+2b_0)\right)e^x=4xe^x$.

$\therefore\begin{cases}4b_1=4\\2b_1+2b_0=0\end{cases}$得$\begin{cases}b_0=-1\\b_1=1\end{cases}$.

$\therefore$ 该方程的一个特解为 $y^*=(x^2-x)e^x$

$\therefore$ 该方程的通解为 $y=Y+y^*=c_1e^x+c_2e^{-x}+(x^2-x)e^x$

代 $\lambda y|_{x=0}=0$. $y'|_{x=0}=1$ 得 $\begin{cases}c_1+c_2=0\\c_1-c_2-1=1\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}c_1=1\\c_2=-1\end{cases}$

满足条件的特解为 $y=(x^2-x+1)e^x-e^{-x}$

六、【解析】

联立$\begin{cases}z=\sqrt{3-x^2-y^2}\\x^2+y^2=2z\end{cases}$得$\begin{cases}x^2+y^2=2\\z=1\end{cases}$

$\therefore S_1=\iint_{\Sigma 1}dS=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\dfrac{x^2}{3-x^2-y^2}+\dfrac{y^2}{3-x^2-y^2}}dxdy$

$=\iint_{D_{xy}}\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3-x^2-y^2}}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3-r^2}}rdr=2\pi(3-\sqrt{3})$

$S_2=\iint_{\Sigma 2}dS=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+r^2}\cdot rdr$

$=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+r^2}d(1+r^2)=\left(2\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}\right)\pi$

$$S=S_1+S_2=2\pi(3-\sqrt{3})+\left(2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\right)\pi=\frac{16\pi}{3}$$

七、【解析】

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

$$\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\therefore\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}=\sqrt{3}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$

八、【解析】

设$\Omega_1:\{(x,y,z)|0\leqslant z\leqslant 1，x^2+y^2\leqslant 1，x^2+y^2>z\}$

$\Omega_2:\{(x,y,z)|0\le z\le 1，x^2+y^2\le 1，x^2+y^2<z\}$

$\therefore I=\iiint_{\Omega_1}(x^2+y^2-z)dxdydz+\iiint_{\Omega_2}(z-x^2-y^2)dxdydz$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^{r^2}(r^2-z)dz+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1(z-r^2)dz=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

九、【解析】

证明：设 $Q(x,y)=xe^{\sin y}$，$P(x,y)=-ye^{-\sin x}$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=e^{\sin y}$，$\frac{\partial P}{\partial y}=-e^{-\sin x}$

由 Green 公式知. $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\iint_{D_{xy}}\left(e^{\sin y}+e^{-\sin x}\right)dxdy$

由切线不等式知 $e^{\sin y}\geqslant 1+\sin y$，$e^{-\sin x}\geqslant 1-\sin x$

$$\iint_{D_{xy}}\left(e^{\sin y}+e^{\sin x}\right)dxdy\geqslant\iint_{D_{xy}}(2+\sin y-\sin x)dxdy$$

$$=2\pi^2+\pi\int_0^{\pi}\sin ydy-\pi\int_0^{\pi}\sin xdx=2\pi^2$$

$\therefore\oint xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\geqslant 2\pi^2$.证毕