习题二

2.1 证明：在一个至少有 2 人的小组中，总存在两个人，他们在组内所认识的人数相同。

证明：

假设没有人谁都不认识：那么每个人认识的人数都为[1,n-1]，由鸽巢原理知，n 个人认识的人数有 n-1 种，那么至少有 2 个人认识的人数相同。

假设有 1 人谁都不认识：那么其他 n-1 人认识的人数都为[1,n-2]，由鸽巢原理知，n-1 个人认识的人数有 n-2 种，那么至少有 2 个人认识的人数相同。

假设至少有两人谁都不认识，则认识的人数为 0 的至少有两人。

2.2 任取 11 个整数，求证其中至少有两个数的差是 10 的整数倍。

证明：对于任意的一个整数，它除以 10 的余数只能有 10 种情况：0，1，…，9。现在有 11 个整数，由鸽巢原理知，至少有 2 个整数的余数相同，则这两个整数的差必是 10 的整数倍。

2.3 证明：平面上任取 5 个坐标为整数的点，则其中至少有两个点，由它们所连线段的中点的坐标也是整数。

2.3 证明：

有 5 个坐标，每个坐标只有 4 种可能的情况：（奇数，偶数）；（奇数，奇数）；（偶数，偶数）；（偶数，奇数）。由鸽巢原理知，至少有 2 个坐标的情况相同。又要想使中点的坐标也是整数，则其两点连线的坐标之和为偶数。因为 奇数+奇数 = 偶数 ； 偶数+偶数=偶数。因此只需找以上 2 个情况相同的点。而已证明：存在至少 2 个坐标的情况相同。证明成立。

2.4 一次选秀活动，每个人表演后可能得到的结果分别为“通过”、“淘汰”和“待定”，至少有多少人参加才能保证必有 100 个人得到相同的结果？

证明：

根据推论 2.2.1，若将 3*（100-1）+1=298 个人得到 3 种结果，必有 100 人得到相同结果。

2.5 一个袋子里装了 100 个苹果、100 个香蕉、100 个橘子和 100 个梨。那么至少取出多少水果后能够保证已经拿出 20 个相同种类的水果？

证明：

根据推论 2.2.1，若将 4*（20-1）+ 1 = 77 个水果取出，必有 20 个相同种类的水果。

2.6 证明：在任意选取的 *n*+2 个正整数中存在两个正整数，其差或和能被 2*n* 整除。（书上例题 2.1.3）

证明：对于任意一个整数，它除以 2n 的余数显然只有 2n 种情况，即：0，1，2，…，2n-2，2n-1。而现在有任意给定的 n+2 个整数，我们需要构造 n+1 个盒子，即对上面 2n 个余数进行分组，共 n+1 组：

{0},{1，2n-1},{2，2n-2},{3,2n-3},…，{n-1,n+1}，{n}。

根据鸽巢原理，n+2 个整数，必有两个整数除以 2n 落入上面 n+1 个盒子里中的一个，若是{0}或{n}则说明它们的和及差都能被 2n 整除；若是剩下 n-1 组，因为一组有两个余数，余数相同则它们的差能被 2n 整除，不同则它们的和能被 2n 整除。证明成立。

2.7 一个网站在 9 天中被访问了 1800 次，证明：存在连续的 3 天，这个网站的访问量超多 600 次。

证明：

设网站在9天中访问数分别为a1，a2，...，a9 其中a1+a2+...+a9 = 1800，

令a1+a2+a3 = b1，a4+a5+a6 = b2，a7+a8+a9 = b3

因为（b1+b2+b3）/3 >= 600 由推论2.2.2知，b1，b2，b3中至少有一个数大于等于600。

所以存在有连续的三天，访问量大于等于600次。

2.8 将一个矩形分成 5 行 41 列的网格，每个格子涂 1 种颜色，有 4 种颜色可以选择，证明：无论怎样涂色，其中必有一个由格子构成的矩形的 4 个角上的格子被涂上同一种颜色。

证明：首先对一列而言，因为有5行，只有4只颜色选择，根据鸽巢原理，则必有两个单元格的颜色相同。另外，每列中两个单元格的不同位置组合有$\binom{5}{2}$**=10**种，这样一列中两个同色单元格的位置组合共有10*4=40种情况。

而现在共有41列，根据鸽巢原理，无论怎样涂色，则必有两列相同，也就是必有一个由格子构成的矩形的4个角上的格子是同一颜色。

2.9 将一个矩形分成(*m*+1)行 $m\binom{m+1}{2}+1$ 列的网格每个格子涂 1 种颜色，有 m 种颜色可以选择，证明：无论怎么涂色，其中必有一个由格子构成的矩形的 4 个角上的格子被涂上同一种颜色。

证明：

（1）对每一列而言，有（m+1）行，m种颜色，有鸽巢原理，则必有两个单元格颜色相同。

（2）每列中两个单元格的不同位置组合有$\binom{m+1}{2}$种，这样一列中两个同色单元格的位置组合共有 $\binom{m+1}{2}m$ 种情况

（3）现在有 $m\binom{m+1}{2}+1$ 列，根据鸽巢原理，必有两列相同。证明结论成立。

2.10 一名实验员在 50 天里每天至少做一次实验，而实验总次数不超过 75。证明一定存在连续的若干天，她正好做了 24 次实验。

证明：令b1，b2，...，b50 分别为这50天中他每天的实验数，并做部分和

a1 = b1，a2 = b1+b2 ，。。

a50 = b1+b2+...+b50 .

由题，bi>=1(1<=i<=50)且a50<=75

所以 1<=a1<a2<a3<…<a50<=75 (*)

考虑数列 a1，a2，...，a50，a1+24，a2+24，a50+24，它们都在1与75+24=99之间。

由鸽巢原理知，其中必有两项相等。由（*）知，a1，a2，...，a50互不相等，从而a1+24，...a50+24 也互不相等，所以一定存在1<=i<j<=50, 使得aj = ai+24，即 24=aj-ai=(b1+b2+b3+…+bi+…+bj)-(b1+b2+…+bi)= $b_{i+1}+b_{i+2}+...+b_j$

所以从第i+1天到第j天这连续j-i天中，她正好做了24次实验。

2.11 证明：从 S={1,3,5,⋯,599}这 300 个奇数中任意选取 101 个数，在所选出的数中一定存在 2 个数，它们之间最多差 4。

证明：

将S划分为{1,3,5}，{7,9,11}……,{ 595,597,599}共100组，由鸽巢原理知任意选取101个数中必存在2个数来自同一组，即其差最多为4.

2.12 证明：从 1~200 中任意选取 70 个数，总有两个数的差是 4，5 或 9。

证明：设这 70 个数为

a1,a2,…,a70,

a1+4,a2+4,…,a70+4,

a1+9,a2+9,…,a70+9,

取值范围209，共210个数

2.13 证明：对于任意大于等于 2 的正整数 *n*，都有 *R*(2,*n*)=*n*。

2.13 证明：

要证 R（2，n）= n，用红蓝两色涂色 Kn 的边。

当 n=2 时，R(2,2)=2，因为不管用红还是蓝色都是完全二边形。

假设当 n=k 时 成立 ，即存在 R(2,k)=k（没有一条红边，只有蓝边），

当 n=k+1 时，R（2，k+1）

若无红边，要想有完全 k+1 边形，必得有 k+1 个点，即 R（2，k+1）=k+1。证明成立。

习题三

3.1 有 10 名大学生被通知参加用人单位的面试，如果 5 个人被安排在上午面试，5 个人被安排在下午面试，则有多少种不同的安排面试的顺序？

解：上午的 5 个人全排列为 5!

下午的 5 个人全排列为 5!

所以有 $C_{10}^{5}*5!*5!=10!$，共 14400 种不同的安排方法。

3.2 某个单位内部的电话号码是 4 位数字，如果要求数字不能重复，那么最多可有多少个号码？如果第一位数字不能是 0，那么最多能有多少个电话号码？

解：由于数字不能重复，0-9 共 10 个数字，所以最多有 10*9*8*7=5040 种号码；若第一位不能是 0，则最多有 9*9*8*7=4536 种号码。

3.3 18 名排球运动员被分成 *A,B,C* 三个组，使得每组有 6 名运动员，那么有多少种分法？如果是分成三个组（不可区别），使得每组仍有 6 名运动员，那么有多少种分法？

解：1) $C_{18}^{6}*C_{12}^{6}*C_{6}^{6}$ 种

2) $C_{18}^{6}*C_{12}^{6}*C_{6}^{6}/3!$

3.4 教室有两排，每排 8 个座位。现有学生 14 人，其中的 5 个人总坐在前排，4 个人总坐在后排，求有多少种方法将学生安排在座位上？

解：前排 8 个座位，5 人固定，共 $C_{8}^{5}*5!$ 种方法；后排 8 个座位，4 人固定，共 $C_{8}^{4}*4!$ 种方法；前排和后排还剩 7 个座位，由剩下的 5 人挑选 5 个座位，共 $C_{7}^{5}*5!$ 种方法；则一共有 $C_{8}^{5}*C_{8}^{4}*C_{7}^{5}*5!*5!*4!$ 种安排方法。

3.5 将英文字母表中的 26 个字母排序，要求任意两个元音字母不能相邻，则有多少种排序方法？

解：先排 21 个辅音字母，共有 21!

再将 5 个元音插入到 22 个空隙中，P_{22}^{5}

故所求为 $21!\times P_{22}^{5}$

(插入法)

3.6 有 6 名先生和 6 名女士围坐一个圆桌就餐，要求男女交替就坐，则有多少种不同的排坐方式？

解：6 男全排列 6!；6 女全排列 6!；6 女插入 6 男的前 6 个空或者后 6 个空，即女打头或男打头 6!*6!*2；再除以围圈重复得(6!*6!*2)/12=6!*5!　　或

男 6 的圆排列为 5！，对每个男的排列，女要在他们之间的 6 个位置，进行线性排列 6！（而不是 5！）。

（圆排列可以通过线性排列来解决）

3.7　15 个人围坐一个圆桌开会，如果先生 *A* 拒绝和先生 *B* 和 *C* 相邻，那么有多少种排坐方式？

解：15 人圆排列 14！；

A 与 B 相邻有 2*14!/14=2*13!;

A 与 C 相邻有 2*14!/14=2*13!;

A 与 BC 同时相邻有 2*13!/13=2*12!;

于是 A 不与 B、C 相邻的坐法共 14!- 2*13!- 2*13!+ 2*12!（用到了容斥原理）

3.8　确定多重集 $M=\{3\cdot a,4\cdot b,5\cdot c\}$ 的 11-排列数？

解：M 的 11 排列=[M-{a}]的 11 排列+[M-{b}]的 11 排列+[M-{c}]的 11 排列，即 $\frac{11!}{2!4!5!}+\frac{11!}{3!3!5!}+\frac{11!}{3!4!4!}$ =27720

当然了，容斥原理，生成函数也可以做。

3.9　求方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=20$，满足 $x_1\ge 2,x_2\ge 0,x_3\ge 5,x_4\ge -1$ 的整数解的个数。

解：令 $y_1=x_1-2\ge 0,y_2=x_2\ge 0,y_3=x_3-5\ge 0,y_4=x_4+1\ge 0$

则有 $y_1+y_2+y_3+y_4=14$，由定理 3.3.3，解个数为：$\binom{14+4-1}{14}=\binom{17}{14}=\binom{17}{3}=680$

3.10　书架上有 20 卷百科全书，从中选出 4 卷使得任意两本的卷号都不相邻的选法有多少种？

解：n=20，r=4，$\binom{n-r+1}{r}=\binom{20-4+1}{4}=\binom{17}{4}=2380$

证明见 38 页。

3.11　确定 $(2x-3y)^5$ 展开式中 x^4y 和 x^2y^4 的系数。

解：1）x^4y：$C_5^4*(2x)^4*(-3y)^1$，系数为-240

2）x^2y^4：系数为 0。

3.12　确定 $(1+x)^{-5}$ 展开式中 x^4 的系数。

解：$(1+x)^{-n}=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{n+r-1}{r}x^r$，n=5，r=4，则系数为 $(-1)^4\binom{5+4-1}{4}=70$

3.13　确定 $(x+2y+3z)^8$ 展开式中 $x^4y^2x^2$ 的系数。

解：$\frac{8!}{4!*2!*2!}*2^2*3^2=15120$

3.14　证明组合等式：$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}$，其中 ***n,k*** 为正整数。

解：右边 $\binom{n+k+1}{k}$ 是（n+k+1）元集合 $S=\{a_1,a_2,\ldots,a_{n+k+1}\}$ 上 k 个元素子集的个数，这些子集可分为以下 k+1 类：

第 1 类：k 元子集中不含 a_1 的子集有 $\binom{n+k}{k}$ 个；

第 **2** 类：**k** 元子集中含 a_1 而不含 a_2 的子集是 个; $\binom{n+k-1}{k-1}$

第 **3** 类：**k** 元子集中含 a_1 和 a_2，而不含 a_3 的子集是 $\binom{n+k-2}{k-2}$

……

第 **k+1** 类：**k** 元子集中含 a_1，a_2，……, a_k，而不含 a_{k+1} 的子集是 $\binom{n}{0}$

由加法原理得证。

根据组合意义进行证明

3.15 利用 $k^2=2\binom{k}{2}+\binom{k}{1}$，求 $1^2+2^2+\cdots+n^2$。

解： 首先有：

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n-1}{k}+\cdots+\binom{0}{k}$$ （**p51** 的**(3)**）

根据已知条件代入以上等式得：

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=\sum_{i=1}^{n}(2\binom{i}{2}+\binom{i}{1})=2\binom{1}{2}+\binom{1}{1}+2\binom{2}{2}+\binom{2}{1}+\ldots+2\binom{n}{2}+\binom{n}{1}$$

$$=2\binom{1}{2}+2\binom{2}{2}\ldots+2\binom{n}{2}+\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\ldots+\binom{n}{1}$$

$$=2(\binom{1}{2}+\binom{2}{2}\ldots+\binom{n}{2})+\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\ldots+\binom{n}{1}$$

又由 $\binom{1}{k}+\binom{2}{k}+\ldots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$

得 $\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\ldots+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{2}$，$\binom{1}{2}+\binom{2}{2}+\ldots+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3}$

则原式 $=2\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}=\frac{2(n-1)n(n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3.16 在一局排球比赛中，双方最终的比分是 **25:11**，在比赛过程中没有出现 **5** 平的比分，求有多少种可能的比分记录

解：根据题意，相当于求从点 **(0,0)** 到点 **(25,11)** 且不经过 **(5,5)** 的非降路径数，即为：

$$\binom{25+11}{11}-\binom{5+5}{5}\binom{25-5+11-5}{11-5}=\binom{36}{11}-\binom{10}{5}\binom{26}{6}$$

3.17 在一局乒乓球比赛中，运动员甲以 **11:7** 战胜运动员乙，若在比赛过程中甲从来没有落后过，求有多少种可能的比分记录？

解：根据题意，相当于求从点**(0,0)**到点**(11,7)**且从下方不穿过 **y=x** 的非降路径数，见 **58** 页，即为：$\binom{11+7-1}{11\text{-}1}$-$\binom{11{+}1{+}7\text{-}2}{11{+}1}$

3.18 把 **20** 个苹果和 **20** 个橘子一次一个的分发给 **40** 个幼儿园的小朋友，如果要求分发过程中任意时刻篮子中余下的两种水果数目都不相同（开始和结束时除外），求有多少种分法方法？

解：根据题意，相当于求从点**(0,0)**到点**(20,20)**且不接触 **y=x** 的非降路径数，即为：$2(\binom{2n-2}{n-1}-\binom{2n-2}{n})=\frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}$

n=20，则方法数为：$2(\binom{38}{19}-\binom{38}{20})$

3.18 计算 $\left\{ \begin{matrix} 7 \\ 3 \end{matrix} \right\}$ 和 $\left[\begin{matrix} 7 \\ 3 \end{matrix} \right]$。

$$\left\{ \begin{matrix} 7 \\ 3 \end{matrix} \right\}=\left\{ \begin{matrix} 6 \\ 2 \end{matrix} \right\}+3\left\{ \begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix} \right\}=\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix} \right\}+2\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right\}+3\left(\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right\}+3\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right\}\right)$$

解：1）
$$=1+5\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right\}+9\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right\}=1+5\left(\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right\}+2\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\}\right)+9\left(\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\}+3\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\}\right)$$
$$=6+19*7+27*6=301$$

一个递推公式，$\binom{n}{2}=\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\}=\left[\begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right]$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\}=2^{n-1}-1$$

2）

$$\left[\begin{matrix} 7 \\ 3 \end{matrix} \right]=\left[\begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix} \right]+6\left[\begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix} \right]=\left[\begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix} \right]+5\left[\begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right]+6\left(\left[\begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right]+5\left[\begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right]\right)$$
$$=1+11\left[\begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right]+30\left[\begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right]=1+11\left(\left[\begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right]+4\left[\begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right]\right)+30\left(\left[\begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right]+4\left[\begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right]\right)$$
$$=1+11(1+4*11)+30(11+4*C_4^2)=1546$$

3.19 （**1**）证明 **S(n,3)=**

方法一：先 考虑 **3** 个盒子不同，要保证每个盒子非空：总数为 3^n，排除到一个盒子为空和两个盒子为空的情况，即：

一个盒子为空（放到两个盒子去），例如第一个盒子为空,第二和第三不空：**3**（ 2^n**-2**）

两个盒子为空，例如第一个和第二盒子为空：**3*1**

（3^n**-3**（ 2^n**-2**）**-3**）**/3!**

还可以直接考虑盒子相同。

（**2**）证明：相当于 **n** 个不同球放到相同的 **n-2** 个盒子，每个盒子非空，至少为 **1** 个，这样使得剩余的 **2** 个球要到 **n-2** 个盒子，即使得一个盒子有 **3** 个，或有二个盒子都装 **2** 个球：

使得一个盒子有 **3** 个球：**C(n,3);**　　　　有二个盒子都装 **2** 个球：**C**（**n,4**）**C(4,2)/2!**

3.21（1）会议室中有 $2n+1$ 个座位，现摆成 3 排，要求任意两排的座位都占大多数，求有多少种摆法？

解：如果没有附加限制则相当于把 **2n** 个相同的小球放到 **3** 个不同的盒子里，有 $\binom{2n+3-1}{2n}=\binom{2n+2}{2}$ 种方案，而不符合题意的摆法是有一排至少有 **n+1** 个座位。这相当于将 **n+1** 个座位先放到 **3** 排中的某一排，再将剩下的 **2n-(n+1)=n-1** 个座位任意分到 **3** 排中，这样的摆法共有 $3\times\binom{2n-(n+1)+3-1}{2}=3\times\binom{n+1}{2}$ 种方案，所以符合题意的摆法有：

$$\binom{2n+2}{2}-3\times\binom{n+1}{2}=\binom{n+2}{2}$$

可以用代数法

习题四

4.1 在 **1** 到 **1000** 之间不能被 **2，5** 和 **11** 整除的整数有多少个？

解：设 **S** 是这 **1000** 个数的集合，性质 P_1 是可被 **2** 整除，性质 P_2 是可被 **5** 整除，性质 P_3 是可被 **11** 整除。

$$A_i=\{x\mid x\in S\wedge x\text{具有性质P}_i\},(i=1,2,3)$$

$|A_1|=1000/2=500$，$|A_2|=1000/5=200$，$|A_3|=\lfloor 1000/11\rfloor=90$

$|A_1\cap A_2|=1000/10=100$，$|A_1\cap A_3|=\lfloor 1000/22\rfloor=45$，

$|A_2\cap A_3|=\lfloor 1000/55\rfloor=18$，$|A_1\cap A_2\cap A_3|=\lfloor 1000/110\rfloor=9$

$$\therefore|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=1000-(500+200+90)+(100+45+18)-9=364$$

4.3 一项对于 **A,B,C** 三个频道的收视调查表明，有 **20%** 的用户收看 **A**，**16%** 的用户收看 **B**，**14%** 的用户收看 **C**，**8%** 的用户收看 **A** 和 **B**，**5%** 的用户收看 **A** 和 **C**，**4%** 的用户收看 **B** 和 **C**，**2%** 的用户都看。求不收看 **A,B,C** 任何频道的用户百分比？

解 $|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=1-(20\%+16\%+14\%)+(8\%+5\%+4\%)-2\%=65\%;$

4.2 求 **1** 到 **1000** 之间的非完全平方，非完全立方，更不是非完全四次方的数有多少个？

解：设 **S** 是 **1000** 个数的集合，

性质 P_1 是某数的完全平方，

性质 P_2 是某数的完全立方，

性质 P_3 是某数的完全四次方。$A_i=\{x\mid x\in S\wedge x\text{具有性质P}_i\},(i=1,2,3)$

$|A_1|=\lfloor\sqrt{1000}\rfloor=31$，$|A_2|=\lfloor\sqrt[3]{1000}\rfloor=10$，$|A_3|=\lfloor\sqrt[4]{1000}\rfloor=5$

$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \sqrt[6]{1000} \right\rfloor = 3$，$|A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \sqrt[4]{1000} \right\rfloor = 5$，$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \sqrt[12]{1000} \right\rfloor = 1$，

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \sqrt[12]{1000} \right\rfloor = 1$

$$\therefore |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 1000 - (31 + 10 + 5) + (3 + 5 + 1) - 1 = 962$$

4.4 某杂志对 **100** 名大学新生的爱好进行调查，结果发现他们都喜欢看球赛和电影、戏剧。其中 **58** 人喜欢看球赛，**38** 人喜欢看戏剧，**52** 人喜欢看电影，既喜欢看球赛又喜欢看戏剧的有 **18** 人，既喜欢看电影又喜欢看戏剧的有 **16** 人，三种都喜欢看的有 **12** 人，求有多少人只喜欢看电影？

解：由题意可得，**P1,P2,P3** 分别表示喜欢看球赛、电影和戏剧的学生，相应的学生集合分别为 **A1,A2,A3**，依题意，这 **100** 名大学生中每人至少有三种兴趣中的一种，则 $|\overline{A1} \cap \overline{A2} \cap \overline{A3}| = 0$

所以可得既喜欢看球赛有喜欢看电影的人有

$$|A_1 \cap A_2| = (58 + 38 + 52) - 100 - (18 + 16) + 12 = 26$$

因此只喜欢看电影的人有 $|A2| - |A1 \cap A2| - |A2 \cap A3| + |A1 \cap A2 \cap A3|$

=52-(26+16)+12=22 人

4.5 某人有六位朋友，他跟这些朋友每一个都一起吃过晚餐 **12** 次，跟他们中任二位一起吃过 **6** 次晚餐，和任意三位一起吃过 **4** 次晚餐，和任意四位一起吃过 **3** 次晚餐，任意五位一起吃过 **2** 次晚餐，跟六位朋友全部一起吃过一次晚餐，另外，他自己在外吃过 **8** 次晚餐而没碰见任何一位朋友，问他共在外面吃过几次晚餐？

$$C_6^1 \times 12 - C_6^2 \times 6 + C_6^3 \times 4 - C_6^4 \times 3 + C_6^5 \times 2 - C_6^6 \times 1 + 8 = 36$$

4.6 计算多重集 **S={4•a, 3•b, 4•c,6•d }**的 **12-**组合的个数？

解：令 $T = \{\infty \cdot a, \infty \cdot b, \infty \cdot c, \infty \cdot d\}$的所有12组合构成 $W = \binom{4+12-1}{12} = 455$

其中 $|A_1| = \binom{4+7-1}{7} = 120$，$|A_2| = \binom{4+8-1}{8} = 165$，

$|A_3| = \binom{4+7-1}{7} = 120$，$|A_4| = \binom{4+5-1}{5} = 56$，

$|A_1 \cap A_2| = \binom{4+3-1}{3} = 20$，$|A_1 \cap A_3| = \binom{4+2-1}{2} = 10$，$|A_1 \cap A_4| = \binom{4+0-1}{0} = 1$，

$|A_2 \cap A_3| = \binom{4+3-1}{3} = 20$，$|A_2 \cap A_4| = \binom{4+1-1}{1} = 4$，$|A_3 \cap A_4| = \binom{4+0-1}{0} = 1$，

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$

$$\therefore |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}| = 455 - (120 + 120 + 165 + 56) + (20 + 10 + 1 + 20 + 4) = 50$$

4.7 计算多重集 **S={∞•a, 4•b, 5•c,6•d }**的 **10-**组合的个数？

解：将$\infty\cdot a$，其他思想同上题。

$$W=\binom{4+10-1}{10}=286$$

其中$|A_1|=0$，$|A_2|=\binom{4+5-1}{5}=56$，$|A_3|=\binom{4+4-1}{4}=35$，$|A_4|=\binom{4+3-1}{3}=20$，

$$|A_1\cap A_2|=0，|A_1\cap A_3|=0，|A_1\cap A_4|=0，|A_2\cap A_3|=0，|A_2\cap A_4|=0，$$

$$|A_3\cap A_4|=0，|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$$

$$\therefore|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}|=286-(56+35+20)=175$$

4.8 用容斥原理确定如下两个方程的整数解的个数。

1） $x_1+x_2+x_3=15$，其中 x_1, x_2, x_3 都是非负整数其都不大于 **7**；

2） $x_1+x_2+x_3+x_4=20$，其中 x_1, x_2, x_3, x_4 都是正整数其都不大于 **9**；

解：

1）$x_1+x_2+x_3=15\quad(0\le x_1\le 7, 0\le x_2\le 7, 0\le x_3\le 7)$与**{7a,7b,7c}**的 **15** 组合数相等，为 **28**

2）

$x_1+x_2+x_3+x_4=20\quad(1\le x_1\le 9, 1\le x_2\le 9, 1\le x_3\le 9, 1\le x_4\le 9)$，因此用 y_1+1 代替 x_1，y_2+1代替 x_2，y_3+1代替 x_3，y_4+1代替 x_4 有

$y_1+y_2+y_3+y_4=16\quad(0\le y_1\le 8, 0\le y_2\le 8, 0\le y_3\le 8, 0\le y_4\le 8)$与**{8a,8b,8c,8d}**的 **16** 组合数相等为 **489**

4.9 定义 $D_0=1$，证明：$n!=\binom{n}{0}D_n+\binom{n}{1}D_1+\binom{n}{2}D_2+\cdots+\binom{n}{n}D_0$

证明：考虑到 **n** 个数的全排列包含错位排列和非错排，其中$\binom{n}{k}D_k$表示在 **n** 个数中任选 **k** 个，这个 **k** 个数构成了一个错排，而剩余的 **n-k** 个数还在原来的位置。

$$\because\binom{n}{0}=\binom{n}{n}，显然\ n!=\binom{n}{0}D_0+\binom{n}{1}D_1+\binom{n}{2}D_2+\ldots+\binom{n}{n}D_n$$

4.10 证明：D_n 满足：

$$\begin{cases}D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})\\ D_1=0, D_2=1\end{cases}\qquad n\ 为整数且\ n\ge 3$$

证明：由定理 **4.3.1** 得

$$D_{n-1}=(n-1)!(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!})$$

$$=(n-1)!(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\ldots+(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-2)!})+(-1)^{n-1}$$

$$D_{n-2}=(n-2)!(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\ldots+(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-2)!})$$

$$\therefore D_{n-1}+D_{n-2}=(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\ldots+(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-2)!})[(n-2)!\times n]+(-1)^{n-1}$$

$$\therefore (n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})=n!(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\ldots+(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-2)!})+(-1)^{n-1}(n-1)$$

$$=(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\ldots+(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-2)!}+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}+(-1)^{n}\frac{1}{n!})$$

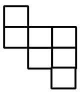
4.11 有 **10** 名女士参加一个宴会，每人都寄存了一顶帽子和一把雨伞，而且帽子、雨伞都是互不相同的，当宴会结束的离开的时候，如果帽子和雨伞都是随机的还回的，那么有多少种方法使得每位女士拿到的物品都不是自己的？

解：由于帽子全部拿错和雨伞全部拿错是两个相互独立的事件，设帽子全错为

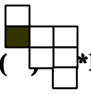
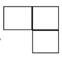
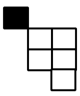
$$D_{10}^{1}=10!(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}-\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!})$$

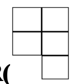
雨伞全错为 $D_{10}^{2}=D_{10}^{1}$ 解

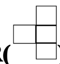
$$\therefore D_{10}=D_{10}^{1}\cdot D_{10}^{2}=\frac{10!\times 10!}{e^{2}}$$

4.13 计算棋盘多项式 **R(**  **)**。

解：

R( **)=x*R(**  **)+R(**  **)**

=x*(1+3x+x²)+(1+x)*R( **)**

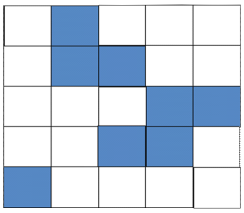
= x³+3x²+x+(1+x)[xR( **)+R(**  **)]**

= x³+3x²+x+(1+x)[x(1+x)+(1+4x+2x²)]

= 5x³+12x²+7x+1

4.14 有 ***A,B,C,D,E*** 五种型号的轿车，用红、白、蓝、绿、黑五种颜色进行涂装。要求 ***A*** 型车不能涂成黑色；***B*** 型车不能涂成红色和白色；***C*** 型车不能涂成白色和绿色；***D*** 型车不能涂绿色和蓝色；***E*** 型号车不能涂成蓝色，求有多少种涂装方案？

解：**A B C D E**



红
白
蓝
绿
黑

1.若未规定不同车型必须涂不同颜色，则：

涂装方案 $4\times 3\times 3\times 3\times 4=432$

2.若不同车型必须涂不同颜色，则：

禁区的棋盘多项式为：

$1+8x+22x^2+25x^3+11x^4+x^5$

所以：

5！-8*4！+22*3！-25*2！+11*1！-1=20

补：**（1）在 1~2000 中能被 7 整除，但不能被 6 和 10 整除的个数。**

证明：**A1,A2,A3** 表示被 **6**、**7** 和 **10** 整除的数的子集，所求：

$$\begin{aligned}&\left|\overline{A1}\cap A2\cap\overline{A3}\right|=\left|A2\cap\overline{A1\cup A3}\right|\\&=|A2|-|A2\cap(A1\cup A3)|\\&=|A2|-|(A2\cap A1)\cup(A2\cap A3)|\\&=|A2|-(|A2\cap A1|+|A2\cap A3|-|(A2\cap A1)\cap(A2\cap A3)|)\end{aligned}$$

=219

(2)在 1~2000 中至少被 2、3 和 5 两个数整除的数的个数？

$|A2\cap A1|+|A2\cap A3|+|A1\cap A3|-2|A1\cap A2\cap A3|$**=534**

习题五

5.1 求如下数列的生成函数。

（1） $a_k=(-1)^k(k+1)$；**（2）** $a_k=(-1)^k k2^k$；

（3） $a_k=k+6$；**（4）** $a_k=k(k+2)$；

（5） $a_k=\binom{n+k}{k}$；**（6）** $a_k=\binom{n}{3}$；

解：**（1）**由已知得

$b_k=k+1$

$B(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$

故 $A(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$

解：

（2）设 $b_k=(-2)^k$ 则 $G\{b_k\}=\frac{1}{1-2x}$

又因为 $a_k=kb_k$ 故 $G\{a_k\}=x(G\{b_k\})^1=\frac{-2x}{(1-2x)^2}$

$$b_k=k$$

或者

$$B(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$$

（3）$G\{a_k\}=G\{b_k=k\}+G\{c_k=6\}=\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{6}{1-x}=\frac{6-5x}{(1-x)^2}$

（4）$G\{a_k\}=x(G\{b_k=k+2\})^1=\frac{x(3-x)}{(1-x)^3}$

（5）

$$a_k=\binom{n+k}{k}=\binom{n+1+k-1}{k}$$

$$G\{a_k\}=\frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$

（6）

$$a_k=\binom{k}{3}$$

$$n=4,$$

$$b_k=\binom{4+k-1}{k}=\binom{3+k}{k}$$

$$=\binom{3+k}{3}$$

$$G\{a_k\}=\frac{x3}{(1-x)^4}$$

5.2 求如下数列的指数生成函数。

（1）$a_k=(-1)^k$；

（2）$a_k=2^k k!$；

（3）$a_k=\frac{1}{k+1}$；

解：（1）$G_e\{a_k\}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k!}=e(-x)$；（2）$G_e\{a_k\}=\sum_{k=0}^{\infty}2^kx^k=G\{b_k=2^k\}=\frac{1}{1-2x}$

(3) $G_e\{a_k\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+k)!}x^k=f(x)$

则 $\begin{aligned} xf(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+k)!} x^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k - 1 = e^x - 1 \end{aligned}$ 故 $G_e\{a_k\} = \dfrac{e^x - 1}{x}$

5.3 已知数列 $\{a_k\}$ 的生成函数是 $A(x) = \dfrac{2+3x-9x^2}{1-3x}$，求 a_k.

解： $A(x) = \dfrac{2}{1-3x} + 3x$ 而 $A(x) = \dfrac{2}{1-3x} = 2\sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k$

故 $a_k = \begin{cases} 2 \cdot 3^k & ,k \neq 1 \\ 9 & ,k = 1 \end{cases}$

5.4 求 $(1+x^4+x^8)^{100}$ 展开式中 x^{20} 的系数是多少？

(1) 若 x^8 取 0，则 x^4 取 5 个，这种情况有 C_{100}^5 种；

(2) 若 x^8 取 1，则 x^4 取 3 个，这种情况有 $C_{100}^1 \cdot C_{99}^3$ 或 $C_{100}^3 \cdot C_{97}^1$；

(3) 若 x^8 取 2，则 x^4 取 1 个，这种情况有 $C_{100}^1 \cdot C_{99}^2$；

故系数为 $C_{100}^5 + C_{100}^1 \cdot C_{99}^3 + C_{100}^1 \cdot C_{99}^2$ = 91457520。

5.5 **三个人每个人投一次骰子，有多少种方法使得总点数为 9？**

解：这相当于有 9 个球，用隔板将其分成 3 组，共有 $C_8^2 = 28$ 种方法。又因为这次点数小于等于 6，即 711，171 和 117 三种情况不符，故共有 25 种方法。

$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3$

=

$(x-x^7)^3 \sum \binom{2+k}{k(2)} x^k$

5.6 求在 **10²** 和 **10⁴** 之间的各位数字之和等于 **5**？

解: **(1)** 三位数时，相当于 $x_1+x_2+x_3=5$ $(1 \le x_1 \le 5, 0 \le x_2 \le 5, 0 \le x_3 \le 5)$ 的非负整数解的个数。

故 $G(x) = (x+x^2+x^3+x^4+x^5) \bullet (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5) \bullet (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$ 中

C_5 为 $G(x)$ 展开式 x^5 的系数。

(2) 四位数时，相当于 $x_1+x_2+x_3+x_4=5$ $(1 \le x_1 \le 5, 0 \le x_2 \le 5, 0 \le x_3 \le 5, 0 \le x_4 \le 5)$ 的非负整数解的个数。

5.7 一个 **1×*n*** 的方格图形用红、蓝、绿和橙四种颜色涂色，如果有偶数个方格被涂成红色，还有偶数个方格被涂成绿色，求有多少种方案？

解：涂色方案数为 b_k 则：

$$G_e\{b_k\}=(1+\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^4}{4!}+\cdots)^2\bullet(1+\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^3}{3!}+\cdots)^2=(\tfrac{e^x+e^{-x}}{2})^2\bullet(e^x)^2=\tfrac{e^{4x}+2e^{2x}+1}{4}$$

$$=\tfrac{1}{4}+\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{4^k+2^{k+1}}{4}\bullet\tfrac{x^k}{k!}$$

因此：$b_k=4^{k-1}+2^{k-1}$，所以有 $4^{n-1}+2^{n-1}$ 种方案。

5.8 有 **4** 个红球，**3** 个黄球，**3** 个蓝球，每次从中取出 **5** 个排成一行，求排列的方案数？

解：设每次取出的 **k** 个球的排列数为 b_k，数列 $\{b_k\}$ 的指数型生成函数为 $G_e\{b_k\}$ 则有

$G_e\{b_k\}=(1+\tfrac{x}{1!}+\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^3}{3!}+\tfrac{x^4}{4!})\bullet(1+\tfrac{x}{1!}+\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^3}{3!})\bullet(1+\tfrac{x}{1!}+\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^3}{3!})$ 而我们所求的是 $\tfrac{x^5}{5!}$ 的系数 b_5。故有 $b_5=220$。

5.9 计算用 **3** 个 ***A*，3** 个 ***G*，2** 个 ***C*** 和 **1** 个 ***U*** 构成长度为 **2** 不同的 ***RNA*** 链的数量。

解：$(1+x+\dfrac{x^2}{2})^2\bullet(1+x+\dfrac{x^2}{2})(1+x)$ 中 x^2 的系数 C_2，有 C_2 **=15.**

5.10 计算 $\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}$ 和 $\begin{Bmatrix}7\\3\end{Bmatrix}$。

解：**(1)** 构造多项式 $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$ 则 $\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}$ 即 x^3 的系数 b_3，则 $b_3=1524$，故 $\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}=1524$。

(2) $\begin{Bmatrix}7\\3\end{Bmatrix}=\sum\limits_{n_1+n_2+n_3=4}1^{n_1}\bullet2^{n_2}\bullet3^{n_3}$，$n_1+n_2+n_3=4$ 的非负整数解为 **(0,0,4), (1,2,3), (0,2,2), (0,3,1), (0,4,0), (1,0,3), (1,1,2), (1,2,1) , (1,3,0), (2,0,2), (2,1,1) , (2,2,0) , (3,0,1), (3,1,0), (4,0,0)**

$$\therefore\begin{Bmatrix}7\\3\end{Bmatrix}=3+2^1\bullet3^3+2^2\bullet3^2+2^3\bullet3^1+2^4+1^1\bullet3^3+1^1\bullet2^1\bullet3^2+1^1\bullet2^2\bullet3^1+1^1\bullet2^3+1^2\bullet3^2$$

$$+1^2\bullet2^1\bullet3^1+1^2\bullet2^2++1^3\bullet3^1+1^3\bullet2^1+1^4=301$$

5.11 设 B_n 表示把 n 元集划分成非空子集的方法数，我们称 B_n 为 ***Bell*** 数。

证明：$B_n=\begin{Bmatrix}n\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}n\\2\end{Bmatrix}+\cdots\begin{Bmatrix}n\\n\end{Bmatrix}$。

证明：当有 **1** 个盒子时，方法数 $b_1=\left\{\begin{matrix}n\\1\end{matrix}\right\}$，；　当有 **2** 个盒子时，方法数 $b_2=\left\{\begin{matrix}n\\2\end{matrix}\right\}$，

当有 **k** 个盒子时，方法数 $b_k=\left\{\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right\}$，；　当有 **n** 个盒子时，方法数 $b_n=\left\{\begin{matrix}n\\n\end{matrix}\right\}$，

当有 **n+1** 个盒子时，至少有一个空盒，不符。

故 $B_n=\sum_{i=1}^{n}b_i=\left\{\begin{matrix}n\\1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}n\\2\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}n\\3\end{matrix}\right\}+\cdots+\left\{\begin{matrix}n\\n\end{matrix}\right\}$

5.12 有重为 **1*g*** 的砝码重为 **1*g*** 的 **3** 个，重为 **2*g*** 的 **4** 个，重为 **4*g*** 的 **2** 个，求能称出多少种重量?

解：即求多项式 $(1+x+x^2+x^3)\bullet(1+x^2+x^4+x^6+x^8)\bullet(1+x^4+x^8)$ 中展开式有多少项 **(**除 **1** 外**)**，原多项式

$=(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+x^{11})\bullet(1+x^2+x^4+x^6+x^8)$ 故共有 **19** 种重量。

5.13 已知数列 $\{a_k\}$ 的指数生成函数是 $G_e(x)=x^2+5e^x$，求 a_k.

解：设 $\begin{aligned}f(x)&=x^2+5e^x\\&=x^2+5(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+..)\end{aligned}$ ；　**a$_k$=5, k** 不等于 **2;**　**a$_k$=7, k =2;**

补：3 个 1，2 个 2，5 个 3 这十个数字能构成多少个 4 位数偶数。

解　问题是求多重集 S＝{3 个 1，2 个 2，5 个 3}的 4 排列数，且要求排列的末尾为 2（偶数）。可以把问题转化成求多重集 S＝{3 个 1，1 个 2，5 个 3}，

$$G_e(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)(1+x)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\right)$$

其指数生成函数为

$$=\cdots+\left(\frac{3!}{3!}+\frac{3!}{1!2!}+\frac{3!}{1!2!}+\frac{3!}{3!}+\frac{3!}{1!2!}+\frac{3!}{1!1!1!}+\frac{3!}{2!1!}\right)\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$=\cdots+20\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

展开后得 $\frac{x^3}{3!}$ 的系数为 **20**，所以能组成 **20** 个 **4** 位数的偶数。

习题六

6.1 设 $f(n)=1^2+2^2+\cdots+n^2$**，建立** $f(n)$ **的递推关系并求解。**

解：

$$\begin{cases} f(n) = f(n-1) + n^2, \quad (n \ge 2) \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

齐次特征方程：$x-1=0$

特征根：$x=1$

非齐次特解：

$$f^*(n) = (b_0 + b_1 n + b_2 n^2)n$$

代入递推关系得：

$b_0 = \frac{1}{6}$，$b_1 = \frac{1}{2}$，$b_2 = \frac{1}{3}$

$\therefore\ f(n) = (\frac{1}{6} + \frac{1}{2}n + \frac{1}{3}n^2)n$

6.2 求解递推关系：

（1） $\begin{cases} f(n) - 7f(n-1) + 12f(n-2) = 0, (n \ge 2) \\ f(0) = 4, f(1) = 6; \end{cases}$

解：

齐次特征方程：$x^2 - 7x + 12 = 0$

特征根：$x_1 = 4, x_2 = 3$

齐次通解：

$$f^{\#}(n) = c_1 4^n + c_2 3^n$$

代入递推关系得：

$c_1 =$ -6，$c_2 = 10$

$\therefore\ f(n) = -6 \cdot 4^n + 10 \cdot 3^n$

（2） $\begin{cases} f(n) + f(n-2) = 0, (n \ge 2) \\ f(0) = 0, f(1) = 2; \end{cases}$

解：$x^2 + 1 = 0$

$x1 = -i, x2 = i$

（3） $\begin{cases} f(n) = 5f(n-1) - 6f(n-2) - 4f(n-3) + 8f(n-4), (n \ge 4) \\ f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 2,; \end{cases}$

解：

�次特征方程：$x^4-5x^3+6x^2+4x-8=0$

特征根：$x_1=x_2=x_3=2, x_4=-1$

�次通解：

$$f^{\#}(n)=c_1 2^n+c_2 n2^n+c_3 n^2 2^n+c_4(-1)^n$$

代入�推�系得：

$c_1=\frac{8}{27}$，$c_2=\frac{7}{36}$，$c_3=-\frac{1}{24}$，$c_4=-\frac{8}{27}$

$\therefore \quad f(n)=\frac{8}{27}2^n+\frac{7}{36}n2^n-\frac{1}{24}n^2 2^n-\frac{8}{27}(-1)^n$

（4） $\begin{cases} f(n)-3f(n-1)+2f(n-2)=1,(n\geq 2) \\ f(0)=4, f(1)=6; \end{cases}$

解：

齐次特征方程：$x^2-3x+2=0$

特征根：$x_1=2, x_2=1$

非齐次特解：

$$f^*(n)=b_0 n$$

代入递推关系得：

$b_0=-1$

$$f^{\#}(n)=c_1 2^n+c_2-n$$

$c_1=3$，$c_2=1$

$\therefore \quad f(n)=3\cdot 2^n+1-n$

6.3 求解递推关系：

（1） $\begin{cases} f(n)=4f(n-1)-4f(n-2)+3n+1,(n\geq 2) \\ f(0)=1, f(1)=2; \end{cases}$

解：

齐次特征方程：$x^2-4x+4=0$

特征根：$x_1=x_2=2,$

非齐次特解：

$$f^*(n)=b_0+b_1 n$$

代入递推关系得：

$b_0=13, b_1=3$

$$f^{\#}(n)=c_1 2^n+c_2 n2^n+3n+13$$

$c_1=-12$，$c_2=10$

$\therefore \quad f(n)=-12\cdot 2^n+10\cdot n2^n+3n+13$

（2）$\begin{cases} f(n)=6f(n-1)-9f(n-2)+2n,(n\ge 2) \\ f(0)=1, f(1)=0; \end{cases}$

解：

齐次特征方程：$x^2-6x+9=0$

特征根：$x_1=x_2=3,$

非齐次特解：

$$f^*(n)=b_0+b_1 n$$

代入递推关系得：

$b_0=12, b_1=4$

$$f^{\#}(n)=c_1 3^n+c_2 n3^n+4n+12$$

$c_1=-11$，$c_2=\dfrac{17}{3}$

$\therefore \quad f(n)=-11\cdot 3^n+17\cdot n3^{n-1}+4n+12$

（3）$\begin{cases} f(n)=4f(n-1)+3\times 2^n,(n\ge 1) \\ f(0)=1, \end{cases}$

解：

齐次特征方程：$x-4=0$

特征根：$x=4,$

非齐次特解：

$$f^*(n)=\alpha\cdot 2^n$$

代入递推关系得：

$\alpha=-3$

$$f^{\#}(n)=c_1 4^n-3\cdot 2^n$$

$c_1=4,$

$\therefore \quad f(n)=4^{n-1}-3\cdot 2^n$

（4）$\begin{cases} f(n)=2f(n-1)+n,(n\ge 1) \\ f(0)=1, \end{cases}$

解：

齐次特征方程：$x-2=0$

特征根：$x=2,$

非齐次特解：

$$f^*(n)=b_0+b_1 n$$

代入递推关系得：

$b_0=-2, b_1=-1$

$$f^{\#}(n)=c_1 2^n-n-2$$

$c_1=3,$

$\therefore \quad f(n)=3\cdot 2^n-n-2$

6.5 平面上有 n 条直线，它们两两相交且沿有三线交于一点，设这 n 条直线把平面分成 $f(n)$ 个区域，求 $f(n)$ 的递推关系并求解.

解：设 **n-1** 条直线把平面分成 $f(n-1)$ 个区域，则第 **n** 条直线与前 **n-1** 条直线都有一个交点，即在第 **n** 条直线上有 **n-1** 个交点，并将其分成 **n** 段，这 **n** 段又把其所在的区域一分为二。

$$\therefore \begin{cases} f(n)=f(n-1)+n, & (n\geq 2) \\ f(1)=2 \end{cases}$$

齐次特征方程：$x-1=0$

特征根：$x=1$

非齐次特解：

$$f^*(n)=(b_0+b_1 n)n$$

代入递推关系得：

$$b_0=b_1=\frac{1}{2},$$

$$f^{\#}(n)=c_1+\frac{(1+n)n}{2}$$

代入递推关系得：

$$c_1=1$$

$$\therefore\ f(n)=1+\frac{(1+n)n}{2}$$

第七章

例 n 种颜色涂色装有 7 颗珠子的手镯，如果只考虑手镯的旋转，求有多少种涂色方案？

解　对象集 D＝{1,2,3,4,5,6,7}，颜色集是 R＝(1,2,3,…,n)，D 上的置换群 G＝{$g_0,g_1,g_2,\ldots,g_6$}，其中 g_i 表示旋转 360°*i/7，因 7 是质数，所以除 $\lambda(g_0)$＝7 外，其它 $\lambda(g_i)$＝1，(i=1,2,3,4,5,6)，代入 Polya 公式，得 L＝1/7*[n^7+6n]

补：上有 n 个大圆，任意两个大圆皆相交，且没有三个大圆通过同一点，则这些大圆所形成的区域数 $f(n)$ 满足的递推关系是

f(n+1)= f(n)+2n，n>1,

f(1)=2

f(n)可以由 f(n)来生成，当在 f(n)个大圆的基础上，在球面上再加上第 n+1 个大圆时，它同前 n 个大圆共得到 2n 个交点(因无三个大圆相交于一点)，而每增加一个交点就增加一个新的面，故共增加 2n 个面。所以有 f(n+1)= f(n)+2n。