$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C \quad (\text{令 } x = \sec x)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x\,dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C.$$

三角函数换元积分：用 $t = \tan\frac{x}{2}$ $\therefore x = 2\arctan t$ $\therefore dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx \quad (\text{区间再现公式})$$

Γ函数：$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx$ $\quad \Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ $\quad \Gamma(1)=1$

$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ $\quad \Gamma(n+\frac{1}{2})=(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\cdots\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\sqrt{\pi}$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 时积分用极坐标，令 $x=a\rho\cos\theta$，$y=b\rho\sin\theta$，则 $dx\,dy=ab\rho\,d\theta\,d\rho$

摆线：$x=a(t-\sin t)$ $\quad y=a(1-\cos t)$

心形线：$r=a(1+\cos\theta)$

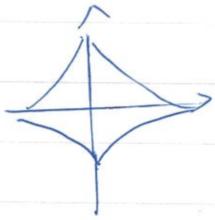
双纽线：$r^2=a^2\cos 2\theta$

$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$

$ds=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta$

$=\frac{a^2}{r}\,d\theta$

星形线：$|x|^{\frac{2}{3}}+|y|^{\frac{2}{3}}=1$



$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

在球面中：$ds=R^2\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta$

$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ 则曲率 $K=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{[x'^2(t)+y'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}$

$a^2\cos 2\theta + a^2\left(\sqrt{\cos 2\theta}\right)'^2$

$\arctan x \to x-\frac{x^3}{3}$

$\tan x \to x+\frac{x^3}{3}$

$\sin x \to x-\frac{x^3}{6}$

$\arcsin x \to x+\frac{x^3}{6}$

$\frac{-2\sin 2\theta}{2\sqrt{\cos 2\theta}}$

B函数 $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$

$p>0$ $\quad q>0$ 收敛.

$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

求收敛半径 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$ 或 $\lim\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$.

$$R=\begin{cases}\frac{1}{\rho}, & 0<\rho<+\infty\\ 0, & \rho=+\infty\\ +\infty, & \rho=0\end{cases}$$

幂级数运算：

代数运算：① 加法
② 乘法

分析运算：① 连续性.
② 可微.
③ 可积.

函数展开成幂级数： $\to \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

① $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)}x^{n+1}$ $\to 0$. $(-\infty,+\infty)$

② $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\frac{\sin(\theta x+(2n+1)\frac{\pi}{2})}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

$(-\infty,+\infty)$

直接法

间接法

③. 求导： $\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$ $(-\infty,+\infty)$

④ $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots$

~~≤~~ Σ $(-1,1]$

⑤ $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)}(-1)^{n-1}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ $[-1,1]$

No.

Date $\ln 2 = 0.06931$

⑥ $(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$

二项式级数. $x \in (-1, 1)$

幂级数应用：
- ① 利用幂级数展开式进行近似计算
- ② 欧拉公式推导
- ③ 求解积分方程.

Fourier 级数

① 三角函数的正交性.

三角函数系 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x \cdots$

任何2个两相异的相乘在$[-\pi, \pi]$的积分为0

且：$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \pi$. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi$ $\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$.

② 以 2π 为周期函数的 Fourier 级数

假设能展开成三角级数, 则 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$

$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$ $(k = 0, 1, 2 \ldots)$

$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$ $(k = 1, 2 \ldots)$

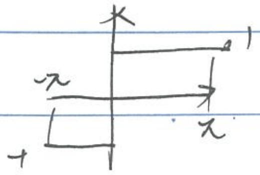
③. Dirichlet 收敛定理.

条件：
- ① 连续或只有有限个第一类间断点
- ② 至多只有有限个极值点

连续时 级数收敛于 $f(x)$. 间断点处 收敛于 $\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$

Campus

$x = \pm\pi$ 时 收敛于 $\frac{1}{2}[f(-\pi+0) + f(\pi-0)]$



$a_n=0$

这玩意 fourier 展开 $b_n = \frac{4}{n\pi}$ (奇) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$.

奇偶函数的展开：
- 正弦级数
- 余弦级数.

奇延拓/偶延拓.

以2l为周期的函数的 fourier 级数.

$t=\frac{\pi x}{l}$ $x=\frac{lt}{\pi}$ $\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ $\frac{\pi^2}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2}$$

也有对应的余弦级数，正弦级数，奇延拓，偶延拓，

常微分方程：阶

偏微分方程.

线性微分方程 / 非线性微分方程.

显式 / 隐式 特解.

一类：可分离变量的方程.

二类、齐次方程：$\frac{dy}{dx}=\varphi(\frac{y}{x})$

准齐次. $\frac{dy}{dx}=f(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1})$

$\begin{vmatrix} a_0 & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$ =0 / ≠0

一阶线性微分方程. 齐次 / 非齐次.

$\frac{dy}{dx}=P(x)y+q(x)$ 齐次：$q(x)=0$. ~~$y=y_0\int_{x_0}^{x}P(x)dx$~~

非齐次：$y=C(x)e^{\int P(x)dx}$ (常数变易法) ~~$y=C\int P(x)dx$~~

$C(x)=\int q(x)e^{-\int P(x)d(x)}dx+C$ $y=Ce^{\int P(x)dx}$

齐次的通解加个特解.

Bernoulli 方程：

$\frac{dy}{dx}=P(x)y+q(x)y^n$

No.

Date

如果有初值 $y(x_0)=y_0$

全微分方程(恰当方程) $u(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy=0$.

积分因子：$u(x,y)$ $u(x,y)P(x,y)dx+u(x,y)Q(x,y)dy=0$ $u(x,y)\neq 0$.

情形1：$u(x)$形式：$u(x)=\exp\left[\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\,dx\right]$

情形2：$u(y)$形式 $u(y)=\exp\left\{\int -\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dy\right\}$

一阶隐方程.

参数形式的解： $y'=t\ \ldots$ 然后才导出 x 可以用t表示、或 y 可以用t表示、

→ $y=f(x,y')$ 令 $P=P(x)=y'$

$x=f(y,y')$ 令 $P=y'$.

可降阶的高阶微分方程.

$$y=\underbrace{\int\cdots\int}_{n} f(x)(dx)^n+\frac{C_1x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2}+\cdots+C_{n-1}x+C_n$$

方程：$y^{(n)}=f(x)$

方程：$y''=f(x,y')$

$y''=f(y,y')$

高阶齐次线性微分方程.

$$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+\cdots-P_{n-1}(x)y'+P_n(x)y=f(x)$$

$f(x)=0$ n阶齐次线性微分方程、 $f(x)\neq 0$ n阶非齐次线性微分方程.

Campus

No.

Date

数项级数：u_n一般项 S_n部分合。收敛 发散、敛散性。

几何级数：$\sum_{n=0} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$

$$S_n = \begin{cases} \frac{a(1-q^n)}{1-q} & q \neq 1 \\ na & q = 1 \end{cases}$$

$|q|<1$ 收敛 $\frac{a}{1-q}$

数项级数性质：

$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = s \pm \sigma$

$\sum_{n=1}^{\infty} a u_n = as \ (a \neq 0)$

加或去掉有限项，敛散不变。

收敛 → 任加括号 → 仍收敛和不变。

收敛 $\xrightarrow{\text{加括号}}$ 收敛

发散 — 收敛 / 发散

收敛的必要条件 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ 因为 $u_n = S_n - S_{n-1}$

调和级数：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 发散 $S_{2n} - S_n$.

正项级数的敛散性：

各项非负。

有界即收敛。

比较判别法。

P-级数。$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$

$p \le 1$ 时 发散。 $p > 1$ 收敛于 $\frac{1}{1-\frac{1}{2^{p-1}}}$

比值判别法、达朗贝尔、

根值判别法、积分判别法

任意项级数（一般数项级数）

Cauchy收敛准则

交错级数：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \quad (u_n \geq 0)$

Leibniz判别法

绝对收敛与条件收敛　　根值和比值判别法可以判别任意项级数

函数项级数：收敛点、发散点，收敛域、发散域

和函数 $S(x)$ 逐点收敛于 $S(x)$ 或处处收敛于 $S(x)$

{ 前n项和 $S_n(x)$　余项 $S(x)-S_n(x)$

级数在I上收敛于 $S(x) \Leftrightarrow$ ~~R(x)~~ R $R_n(x) \to 0$ 或 $S_n(x) \to S(x)$

函数项级数的一致收敛性

判断一致收敛 { 用定义找N
用cauchy收敛判准则
M-判别法（强级数）

一致收敛级数和函数的性质

和函数的连续性：u_n 连续 + 一致收敛 → 和函数连续性

和函数可积性　　和函数可微性

幂级数：

Abel定理，收敛半径，收敛区间

No.
Date

7.1 通解结构　　线性相关、线性无关.

$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

通解的求法：① 置换法：已知一解，设 $y_2(x) = u(x) y_1(x)$

② 幂级数法 ?:

常系数齐次线性微分方程：{ 2阶常系数齐次线性微分方程.
2阶变系数齐次线性微分方程.

① 常系数：特征方程 特征根. $y_1(x) = e^{a_1 x}$　$y_2(x) = e^{a_1 x}$.

{ 2实根 →
2虚根. $y_1(x) = e^{ax} \cos\beta x$.
$y_2(x) = e^{ax} \sin\beta x$

同样适用于高阶的微分方程 ←

① 全为单根：

$y(x) = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots + C_n e^{\alpha_n x}$

重根：$y_1 = e^{ax}$ → 再用置换法
$y = (C_1 + C_2 x) e^{ax}$

② 有虚根.

③ 有重根.

高阶非齐次线性方程：$y'' + P_1(x) y'(x) + P_2(x) y = f(x)$

{ 通解结构：$y(x) = Y(x) + y^*(x)$ → 可以推到高阶次.

叠加原理.

通解的求法：$y(x) = \underbrace{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)} - y_1(x) \int \frac{f(x) y_2(x)}{W(x)} dx$

$+ y_2(x) \int \frac{f(x) y_1(x)}{W(x)} dx$

可推到高阶

$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x) \end{cases}$

$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$

No.

Date

二阶常系数非齐次线性方程：$y''+p_1 y'+p_2 = q(x)$

①. 待定系数法 方程 $y''+p_1 y'+p_2 y = R_m(x)e^{\lambda x}$

有形如 $y^*(x) = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$ 的特解

$$Q''(x) + (2\lambda + p_1)Q'(x) + (\lambda^2 + p_1\lambda + p_2)Q(x) = R_m(x)$$

请注意 $Q(x) = x^k Q_m(x)$

可推广到高阶

② $f(x) = e^{\lambda x}[R_l(x)\cos wx + R_n(x)\sin wx]$

$y^*(x) = x^k e^{\lambda x}[\cancel{Q_m} Q_m^{(1)}(x)\cos wx + Q_m^{(2)}(x)\sin wx]$

③. Euler 方程. $x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + p_2 x^{n-2} y^{(n-2)}$

$+ \cdots + P_n y = f(x)$.

令 $x = e^t$ 化成 ~~记~~ $D = \frac{dy}{dt}$.

$\cancel{Q} D(D-1)\cdots(D-(n-1))y + P_1 D(D-1)\cdots(D-(n-2))y$

$+ \cdots + P_{n-1}Dy + P_n y = f(e^t)$

Campus

椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

二次锥面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

双曲面 单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

双叶双曲面：

抛物面：椭圆抛物面：$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$.

双曲抛物面：$\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=z$.