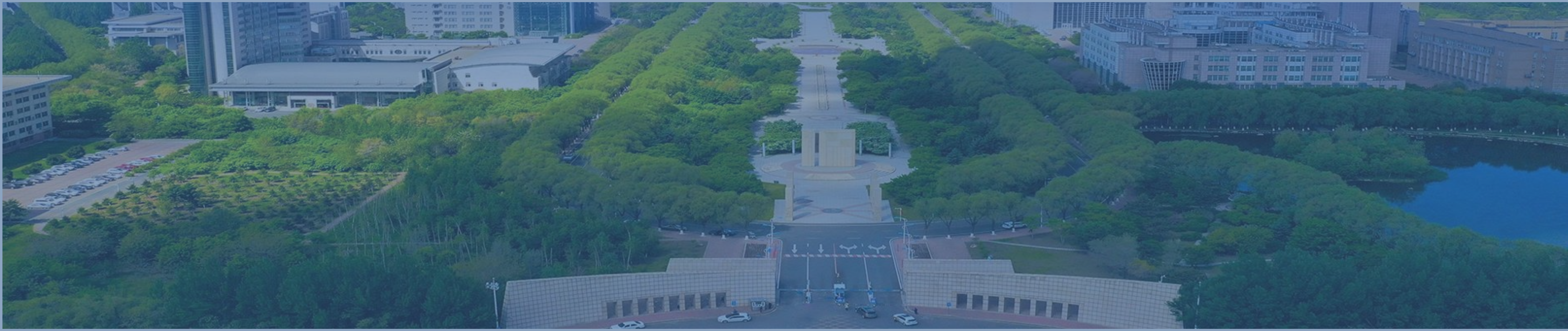

第二章 导引作业

作业

1. 证明 $2n^2+11n-10=O(n^2)$；
2. 证明 $n^2 = O(n^3)$；
3. 证明 $O(f(n)) \times O(g(n)) = O(f(n) \times g(n))$；
4. 证明 $O(cf(n)) = O(f(n))$，其中c是一个正的常数；
5. 证明 $n^3 \neq O(n^2)$；
6. 如果$g(n) = \Omega(f(n))$，则$\Omega(f(n))+ \Omega(g(n)) = \Omega(f(n))$?
7. $\Omega(cf(n)) = \Omega(f(n))$，其中c是一个正的常数？
8. $\Theta(f(n)) + \Theta(g(n)) = \Theta(\min(f(n), g(n))$?
9. $\Theta(f(n)) + \Theta(g(n)) = \Theta(\max(f(n), g(n))$?
10. $\Theta(f(n)) + \Theta(g(n)) = \Theta(f(n)+g(n))$?

1.证明 $2n^2+11n-10=O(n^2)$

- 回顾概念
  - 如果存在两个正常数c和n_0，对于所有的$n \geq n_0$，有$|f(n)| \leq c|g(n)|$，则记做 $f(n) = O(g(n))$
- 证明：

对于$f(n)=2n^2+11n-10$，$g(n)=n^2$，当$c_0=3$，$n_0=10$时，有$n \geq n_0$时，$f(n) \leq c_0 \times g(n)$。

命题得证。

2. 证明 $n^2 = O(n^3)$

- 证明：

  对于$f(n)=n^2$，$g(n)=n^3$，取$c_0=1$，$n_0=1$，当$n \geq n_0$时，$f(n) \leq g(n)$。命题得证。

3. 证明 $O(f(n)) \times O(g(n)) = O(f(n) \times g(n))$

- 证明：

设$f_1(n)=O(f(n))$，则存在正整数n_1和c_1，使得当$n \geq n_1$时，有$f_1(n) \leq c_1 \times f(n))$，

设$f_2(n)= O(g(n))$，则存在正整数n_2和c_2，使得当$n \geq n_2$时，有$f_2(n) \leq c_2 \times f(n))$，

当$n \geq \max\{n_1, n_2\}$时，

$O(f(n))O(g(n)) = f_1(n)\, f_2(n) \leq c_1\, f(n) \times c_2\, g(n) = c_1\, c_2\, f(n)g(n)$ ，

令$c_0=c_1\, c_2$， $n_0= \max\{n_1, n_2\}$，命题得证。

4.证明 $O(cf(n)) = O(f(n))$，其中c是一个正的常数

- 证明：

  设$f_1(n)= O(cf(n))$，则存在正常数n_1，c_1，使得$n \geq n_1$时，有$f_1(n) \leq c_1 \times cf(n))$.

  令$c_0= c_1c$，$n_0= n_1$，当$n \geq n_0=n_1$时，有

  $O(cf(n)) = f_1(n) \leq c_1 \times cf(n)) =c_0f(n)= O(f(n))$,

  命题得证。

5. 证明 $n^3 \neq O(n^2)$

- 反证法证明：

  假设$n^3 = O(n^2)$成立，则存在正的常数c_0和n_0，使得$n \geq n_0$时，有$n^3 \leq c_0 n^2$。

  令$n_1 = c_0 + n_0$，有$n_1 > n_0$，$n_1 > c_0$，根据假设有$n_1^3 \leq c_0 n_1^2$，即$n_1 < c_0$，与假设相矛盾。

  假设不成立，命题得证。

6.如果$g(n) = \Omega(f(n))$，则$\Omega(f(n)) + \Omega(g(n)) = \Omega(f(n))$？

- 证明：

设$f_1(n)=\Omega(f(n))$，则存在正常数n_1和c_1，使得$n \ge n_1$时，有$f_1(n) \ge c_1 f(n)$；
设$f_2(n)=\Omega(g(n))$，则存在正常数n_2和c_2，使得$n \ge n_2$时，有$f_2(n) \ge c_2 g(n)$；
由$g(n)=\Omega(f(n))$，可知存在正常数n_3和c_3，使得$n \ge n_3$时，有$g(n) \ge c_3 f(n)$；
当$n \ge \max\{n_1, n_2, n_3\}$时，

$$\Omega(f(n))+\Omega(g(n))=f_1(n)+f_2(n) \ge c_1 f(n)+c_2 g(n) \ge c_1 f(n)+c_2 c_3 f(n)$$
$$=(c_1+c_2 c_3) f(n),$$

令$c_0=(c_1+c_2 c_3)$，$n_0=\max\{n_1, n_2, n_3\}$，命题得证。

7. $\Omega(cf(n)) = \Omega(f(n))$，其中c是一个正的常数？

- 该命题成立
- 证明：

设$f_1(n)=\Omega(cf(n))$，可知，存在正常数n_1和c_1，使得$n \geq n_1$时，

有$\Omega(cf(n)) = f_1(n) \geq c_1 cf(n)$。

令$c_0 = c_1 c$，$n_0 = n_1$，命题得证。

8. $\Theta(f(n)) + \Theta(g(n)) = \Theta(\min(f(n), g(n)))$?

- 该命题不成立，举反例如下：

  $f(n) = n = \Theta(n)$,

  $g(n) = 1 = \Theta(1)$,

  $f_3(n) = \min\{ f(n), g(n) \} = 1$。

  而 $f(n) + g(n) = n+1 \leq cf_3(n) = c$ 不成立。

  结论得证。

9.$\Theta(f(n)) + \Theta(g(n)) = \Theta(\max(f(n), g(n))$?

- 该命题成立，证明如下：

设$f_1(n)=\Theta(f(n))$，则存在正常数n_1，c_1和c'_1，使得$n\geq n_1$时有$c_1 f(n)\leq f_1(n) \leq c'_1 f(n)$；
设$f_2(n)=\Theta(g(n))$，则存在正常数n_2，c_2和c'_2，使得$n\geq n_2$时有$c_2 g(n)\leq f_2(n) \leq c'_2 g(n)$；
设$f_3(n)= \max((f(n), g(n))$，
当$n\geq \max\{n_1, n_2\}$时，令$c_0=\min\{c_1, c_2\}$，$c'_0=\max\{c'_1, c'_2\}$
$c_0 f_3(n) \leq c_0 f(n) + c_0 g(n) \leq c_1 f(n) + c_2 g(n) \leq$
$f_1(n) + f_2(n) \leq c'_1 f(n) + c'_2 g(n) \leq c'_0 f(n) + c'_0 g(n) \leq 2c'_0 f_3(n)$
结论得证。

10.$\Theta(f(n)) + \Theta(g(n)) = \Theta(f(n)+g(n))$?

- 该命题成立，证明如下：

设$f_1(n)=\Theta(f(n))$，则存在正常数n_1，c_1和c'_1，使得$n\geq n_1$时有$c_1 f(n)\leq f_1(n)\leq c'_1 f(n)$；

设$f_2(n)=\Theta(g(n))$，则存在正常数n_2，c_2和c'_2，使得$n\geq n_2$时有$c_2 g(n)\leq f_2(n)\leq c'_2 g(n)$；

设$f_3(n)=f(n)+g(n)$；

当$n\geq\max\{n_1, n_2\}$时，令$c_0=\min\{c_1, c_2\}$，$c'_0=\max\{c'_1, c'_2\}$，

$c_0 f_3(n)=c_0 f(n)+c_0 g(n)\leq c_1 f(n)+c_2 g(n)\leq$

$f_1(n)+f_2(n)\leq c'_1 f(n)+c'_2 g(n)\leq c'_0 f(n)+c'_0 g(n)=c'_0 f_3(n)$

结论得证。

本 章 作 业 结 束