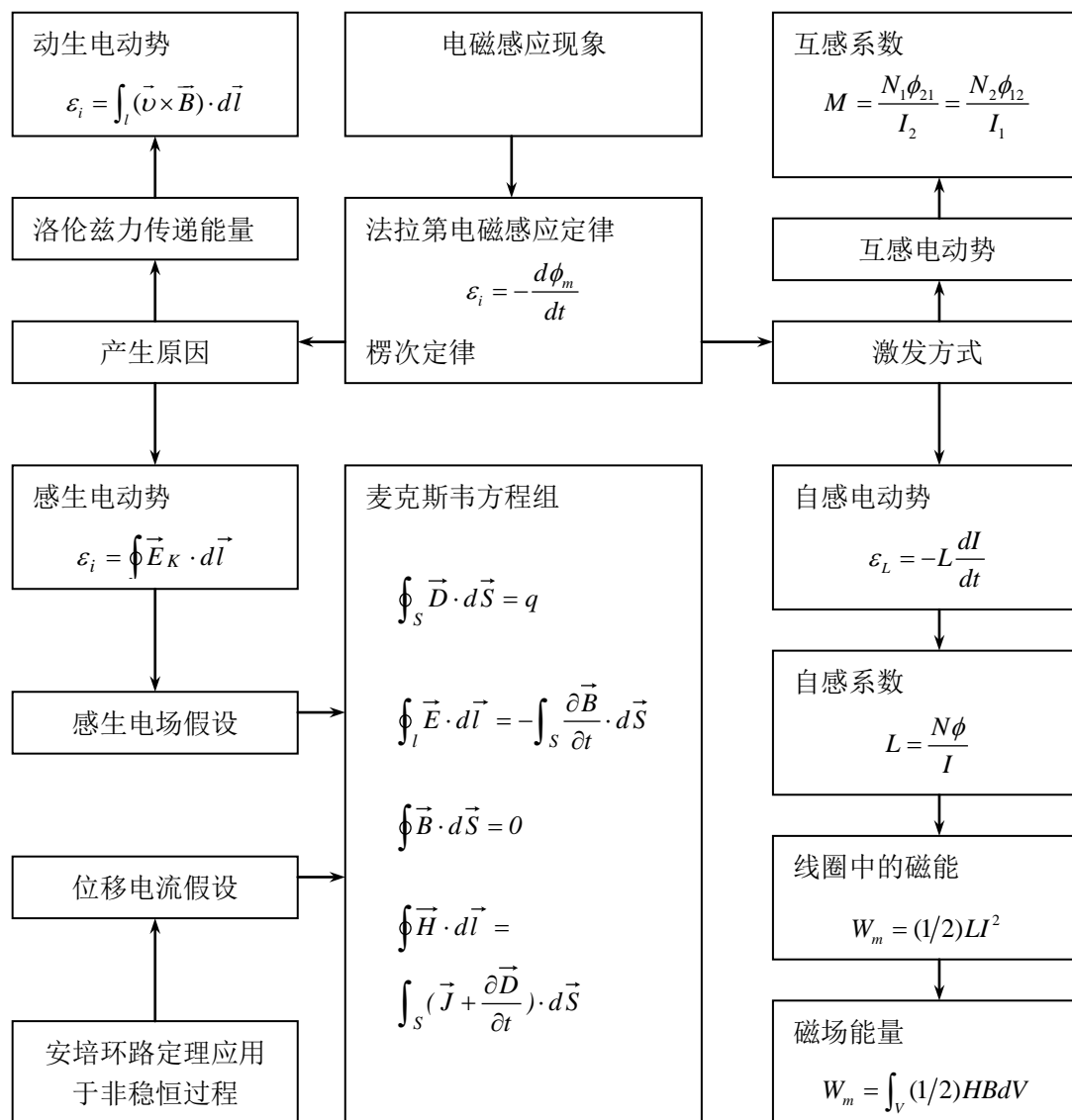


第七章 电磁场理论基础

一、知识网络



二、基本题型

- 关于电磁场理论一些核心概念的理解。
- 利用 $\varepsilon = \int_l (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$ 和 $\varepsilon_i = -\frac{d\phi_m}{dt}$ 计算动生电动势。包括下面一些情形：

- (1) 一段导体（或导体回路）在均匀磁场中平动或转动；
- (2) 一段导体（或导体回路）在非均匀磁场中平动或转动。
3. 利用 $\varepsilon_i = -\frac{d\phi_m}{dt}$ 计算感生电动势。包括下面一些情形：
 - (1) 线圈（或其中一部分）在时变均匀磁场中静止、平动或转动；
 - (2) 线圈（或其中一部分）在时变非均匀磁场中静止或平动；
 - (3) 均匀时变轴对称磁场下感生电动势的计算。
4. 自感、互感的计算。
5. 位移电流及其产生磁场的计算。
6. 磁场能量的计算。

三、典型例题

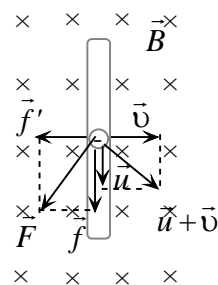
例 7—1 我们知道，洛伦兹力总是垂直于电荷的运动速度，因此洛伦兹力对电荷不作功。然而，建立动生电动势的非静电力却是洛伦兹力，如何解释这一现象？

【解】 如图所示，在运动导体中的自由电子不但具有导体本身的运动速度 \vec{v} ，而且还具有相对于导体的定向运动速度 \vec{u} 。于是自由电子受到的总的洛伦兹力为

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -e(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{B} \\ &= -e\vec{u} \times \vec{B} - e\vec{v} \times \vec{B} \\ &= \vec{f}' + \vec{f}\end{aligned}$$

洛伦兹力做功为

$$\begin{aligned}P &= \vec{F} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{f} + \vec{f}') \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \vec{f} \cdot \vec{u} + \vec{f}' \cdot \vec{v} = -evBu + euBv = 0\end{aligned}$$



图例7—1

即总的洛伦兹力不对电子做功。然而，为使导体棒以速度 \vec{v} 匀速运动，必须施加外力 \vec{f}_0 以克服洛伦兹力的一个分力 $\vec{f}' = -e\vec{u} \times \vec{B}$ 。而利用上式的结果 $-\vec{f}' \cdot \vec{v} = \vec{f} \cdot \vec{u}$ 可以看到，外力 \vec{f}_0 克服 \vec{f}' 所做的功为

$$\vec{f}_0 \cdot \vec{v} = -\vec{f}' \cdot \vec{v} = \vec{f} \cdot \vec{u}$$

这就是说，外力克服洛伦兹力的一个分量 \vec{f}' 所做的功 $\vec{f}_0 \cdot \vec{v}$ ，通过洛伦兹力另一个分量 \vec{f} 对电子的定向运动做了正功 $\vec{f} \cdot \vec{u}$ ，从而全部转化成感应电流的能量。因此，洛伦兹力并不提供能量，而只是传递能量。洛伦兹力在这里起到了能量转化作用，其前提是运动物体中必须有能自由移动的电荷。

例 7-2 简述感生电场和静电场的异同。

【解】 感生电场与静电场的共同之处在于，它们都是一种客观存在的物质，它们对电荷都有作用力。感生电场与静电场的不同之处在于，感生电场是由变化磁场激发的，而静电场则是由静止电荷激发的；感生电场是无源场、有旋场（或非保守场），其电场线是闭合的，而静电场是有源场、无旋场（或保守场），其电场线是非闭合的。

例 7-3 简述位移电流和传导电流的异同。

【解】 麦克斯韦的位移电流假说的实质在于，它说明了位移电流与传导电流都是激发磁场的源泉，其核心是变化的电场可以激发磁场。位移电流与传导电流在激发磁场这一点上是等效的。它们之间的不同之处在于，位移电流实质上是变化的电场，而传导电流则是自由电荷的定向运动。此外，传导电流在通过导体时会产生焦耳热，而位移电流则不会产生焦耳热，应注意焦耳热与热效应不是同一概念。

例 7-4 将磁铁插入非金属的环中时，环内有无感生电动势？有无感生电流？环内将发生何种现象？

【解】 单位正电荷沿闭合回路移动一周，非静电力所做的功称为电源电动势。此题中产生感生电动势的非静电力是感生电场力，所以感生电动势 $\varepsilon = \oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_m}{dt}$ 。当磁铁插入非金属环中时，此环中磁通量的变化不为零，或者说 $\vec{E}_{\text{感}}$ 在环中的环积分 $\oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l}$ 不为零，所以环中有感生电动势。这也说明了感生电动势完全与导电材料的种类和性质无关，而是由磁场本身的变化引起的。由于非金属材料内几乎不存在自由电子，故感生电流几乎为零。环内介质在感生电场作用下发生极化。

例 7-5 讨论感生电场与变化磁场之间的关系。

【解】 按电动势定义，感生电动势等于感生电场沿回路的线积分

$$\varepsilon_i = \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

按法拉第电磁感应定律，感生电动势等于回路中磁通量的时间变化率的负值

$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

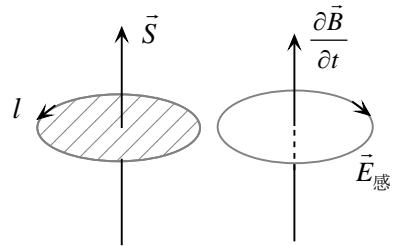
综合以上两式得

$$\oint_l \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

当回路形状不变时，可将对时间的微商与对面积的积分运算互易，即

$$\oint_l \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

上式给出了感生电场和变化磁场之间的定量关系。这里应特别注意的是，在使用这个公式时，环路的绕行方向与环路所围平面的法向成右手螺旋关系，结果 $\vec{E}_{\text{感}}$ 的方向与 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 的方向成左手螺旋关系，如图所示。



图例7-5

在大多数情况下，由磁场的变化 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 求感生电场 $\vec{E}_{\text{感}}$ 会碰到许多数学的困难，只有少数具有某种对称性的简单情况例外。

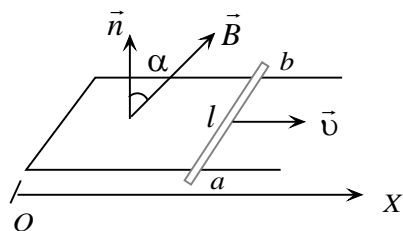
例 7-6 已知在一载流的密绕长直螺线管内部的圆柱形空间内存在均匀分布的磁场 \vec{B} ， \vec{B} 的方向沿螺线管轴线方向。当螺线管中的电流按一定规律变化时，则螺线管内的磁场 \vec{B} 也随之变化。于是在螺线管内外空间都将产生感生电场，试分析这种感生电场的特点。

【解】 根据螺线管内磁场分布的轴对称性及感生电场与变化磁场之间的关系，可以断定感生电场的电场线处在垂直于轴线的平面内，它们是以轴为圆心的一系列同心圆，亦就是说，到轴距离相同的点感生电场 $\vec{E}_{\text{感}}$ 的大小相等，方向为同心圆的切线方向，与径向垂直。

例 7-7 如图所示，均匀磁场与导体回路法线 \vec{n} 的夹角为 α ，磁感应强度 $B = kt$ (k 为大于零的常数)， ab 导体长为 l ，且以速度 \vec{v} 水平向右运动，求任意时刻感应电动势的大小和方向 (设 $t=0$ 时， $x=0$)。

【解】 解法一：设 ab 上的动生电动势为 ε_{i1} ，回路中的感生电动势为 ε_{i2} 。则

$$\begin{aligned}\varepsilon_{i1} &= \int_l (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (d\vec{l} \text{ 方向为 } a \rightarrow b) \\ &= -\int_0^l vB \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) dl \\ &= -vBl \cos \alpha = -vltk \cos \alpha\end{aligned}$$



图例7-7

ε_{i1} 的方向为 $b \rightarrow a$ ，同 $d\vec{l}$ 方向相反，若积分结果为

正值， ε_{i1} 的方向与 $d\vec{l}$ 方向相同。回路中的感生电动势大小为

$$\varepsilon_{i2} = \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \int_s k \cos \alpha dS = kvlt \cos \alpha$$

ε_{i2} 的方向为顺时针，故有

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2} = 2kvlt \cos \alpha$$

ε_i 的方向为顺时针方向。

解法二：应用法拉第电磁感应定律求解。任一时刻通过回路的磁通量为

$$\phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos \alpha$$

所以

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(BS \cos \alpha) \\ &= -\frac{dB}{dt}S \cos \alpha - B \frac{dS}{dt} \cos \alpha \\ &= -kvlt \cos \alpha - Bvl \cos \alpha \\ &= -2kvlt \cos \alpha\end{aligned}$$

式中第一项为感生电动势，第二项为动生电动势。

ε_i 的方向可由楞次定律判定为顺时针方向。

例 7-8 将一圆形导体回路放在均匀磁场中，磁场的磁感应强度为 B ，方向垂直于回路平面。当回路的半径以恒定速率 $\frac{dr}{dt}$ 缩短时，试问回路中的感应电动势多大？

【解】 依题意，当回路收缩时，穿过回路的磁通减小，因此产生感应电动势。由于磁通的减小是由导体回路运动所致，所以产生的是动生电动势。

$$\phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS = B\pi r^2$$

$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi_m}{dt} = -2\pi r B \frac{dr}{dt}$$

式中的负号表示感应电动势的方向，感应电动势的大小为 $2\pi r B \left| \frac{dr}{dt} \right|$ 。

例 7-9 如图所示将一形状不规则的平面导线置于恒定不变的匀强磁场中，磁场的磁感应强度为 B ，方向垂直纸面向里。现使导线以恒定速度 v 沿着 y 轴运动，设 $t=0$ 时，导线两个端点的坐标分别为 $A(0, 0)$ 、 $D(L, 0)$ ，求 t 时刻导线中的动生电动势。

【解】 如果用一段直导线将 A 、 D 连上，则构成闭合导体回路，显然，当导体回路向上运动时，磁通量不变，回路中的动生电动势为零，因此弯曲导线中的动生电动势与直导线中的动生电动势量值相等，方向相反。故所求的动生电动势为

$$\varepsilon_i = BLv$$

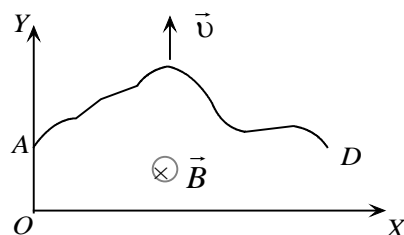
方向为 $D \rightarrow A$ 。

此题亦可根据 $d\varepsilon_i = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$ 计算。

$$\begin{aligned} d\varepsilon_i &= (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = [v\vec{j} \times B(-\vec{k})] \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}) \\ &= -vB\vec{i} \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}) = -vBdx \end{aligned}$$

故
$$\varepsilon_i = \int_0^L -vBdx = -vBL$$

式中负号表示动生电动势的方向与积分的方向相反，即为由 D 到 A 。



图例7-9

例 7-10 一个 n 匝圆形细线圈，半径为 b ，以匀角速度 ω 绕其某一直径为轴而转动，该转轴与均匀磁场 \vec{B} 垂直。假定有一个面积为 A （很小）的小铜环，固定在该转动线圈的圆心上，环面与磁场垂直。若大线圈的电阻为 R ，自感系数忽略，如图所示。试求在小铜环内产生的感应电动势（忽略小铜环对圆形线圈的感应）。

【解】 设大圆形线圈的法线与磁场夹角为 θ ，线圈由 $\theta=0$ 的初位置开始转动，任一时刻 $\theta = \omega t$ ，则线圈在磁场中转动时所产生的感应电动势和电流为

$$\begin{aligned}
\varepsilon_i &= -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(\vec{B} \cdot \vec{S}) \\
&= -\frac{d}{dt}(n\pi b^2 B \cos \omega t) \\
&= n\pi b^2 \omega B \sin \omega t \\
i &= \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{n\pi b^2 \omega B}{R} \sin \omega t
\end{aligned}$$

感应电流 i 在小铜环处产生磁场 \vec{B}' ，在环面范围内视为均匀（因 A 很小）。于是

$$B' = \frac{\mu_0 i}{2b} = \frac{\mu_0 n\pi b \omega B}{2b} \sin \omega t$$

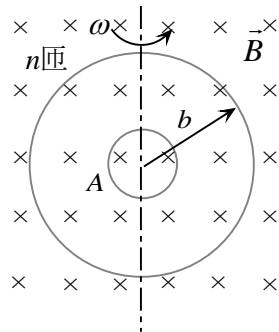
所以铜环中的感应电动势为

$$\begin{aligned}
\varepsilon'_i &= -\frac{d\phi'_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(\vec{B}' \cdot \vec{A}) = -\frac{d}{dt}(B'A \cos \omega t) \\
&= -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 n\pi b \omega B A}{2R} \sin \omega t \cos \omega t\right) \\
&= -\frac{\mu_0 n\pi b \omega^2 B A}{2R} \cos 2\omega t
\end{aligned}$$

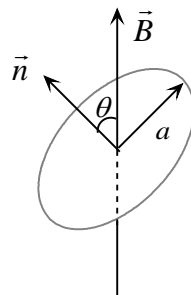
例 7—11 半径为 a 的导体圆形回路，在均匀分布的外磁场 $B = B_0 \cos \omega t$ 中转动，回路转动中保持回路平面法线方向 \vec{n} 与 \vec{B} 方向间夹角 θ 不变，每秒钟转动圈数为 N 。求回路中的感应电动势。

【解】 稍加分析就可判定，导体回路虽做转动，但导线并未做切割磁力线运动，因此回路中没有动生电动势，只有感生电动势。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_i &= -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(\vec{B} \cdot \vec{S}) \\
&= -\frac{d}{dt}(\pi a^2 B_0 \cos \omega t \cos \theta) \\
&= \pi a^2 B_0 \omega \sin \omega t \cos \theta
\end{aligned}$$



图例7—10

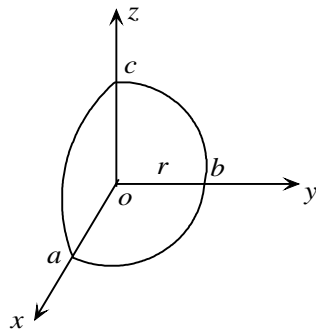


图例7—11

例 7—12 将一根导线弯成三段半径均为 r 的圆弧，如图所示。每一段圆弧为圆周的四分之一， ab 位于 xy 平面上， bc 位于 yz 平面上， ca 位于 zx 平面上。假如一空间均匀磁场 \vec{B} 指向 x 轴，且随时间变化 $B = kt$ (k 为正常数)，求在导线中产生的感应电动势。

【解】 由于均匀磁场 \vec{B} 指向 x 方向，所以穿过 $abca$ 回路的磁通与穿过 obc 平面的磁通相等，因而有

$$\phi_m = A_{obc} B = \frac{1}{4} \pi r^2 B$$



图例7—12

弧形回路中的感应电动势为

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{1}{4}\pi r^2 \frac{dB}{dt} \\ &= -\frac{1}{4}\pi r^2 k\end{aligned}$$

故感应电动势的大小为 $\frac{1}{4}\pi r^2 k$ ，方向为 $acba$ 。

例 7-13 如图所示，一长直导线中通有电流 I ，有一长为 l 的金属 AB 放置在包含线的平面内，以恒定的速度 \vec{v} 沿水平方向移动，金属棒与速度 \vec{v} 成 θ 角，开始时 ($t=0$)，棒的 A 端到导线的距离为 a ，求任意时刻金属棒中的动生电动势。

【解】 建立图示坐标系，则

$$\begin{aligned}d\varepsilon_i &= (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ &= [\vec{v} \vec{i} \times B(-\vec{k})] \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}) \\ &= vB\vec{j} \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}) \\ &= vBdy = vB \tan \theta dx\end{aligned}$$

对上式积分得

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \int_{x_A}^{x_B} vB \tan \theta dx = \int_{x_A}^{x_B} v \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \cdot \tan \theta dx \\ &= \frac{\mu_0 I v \tan \theta}{2\pi} \ln \frac{x_B}{x_A}\end{aligned}$$

已知 t 时刻， $x_B = a + l \cos \theta + vt$ ， $x_A = a + vt$ ，所以

$$\varepsilon_i = \frac{\mu_0 I v \tan \theta}{2\pi} \ln \frac{a + l \cos \theta + vt}{a + vt}$$

由于积分值为正，故动生电动势的方向为 $A \rightarrow B$ 。

在此题中，当 $\theta = 0$ 时，金属棒不切割磁力线， ε_i 应为零，与上面的结果一致；当 $\theta = \frac{\pi}{2}$

时， $\varepsilon_i = Blv = \frac{\mu_0 Ilv}{2\pi(a+vt)}$ ，与上面结果是否一致呢？由于 $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时， $\tan \theta \ln \frac{a + l \cos \theta + vt}{a + vt}$ 为 $\infty \cdot 0$

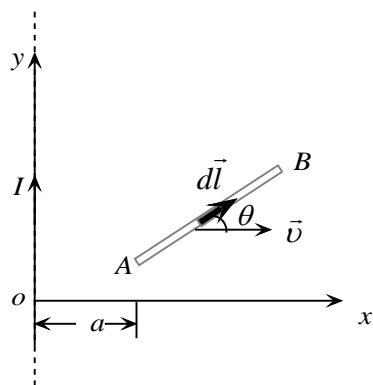
型极限问题，经过简单的运算会得到同样的结论。

例 7-14 如图所示，在通有电流 I 的无限长直导线右侧，放置一 U 形支架（支架固定），该支架由导线和电阻 R 串联而成，载流导线与 U 形支架在同一竖直平面内，另一质量为 m 、长为 l 的金属杆 DE 可在支架上无摩擦地滑动。将 DE 从静止释放，求 DE 所能达到的最大速度。

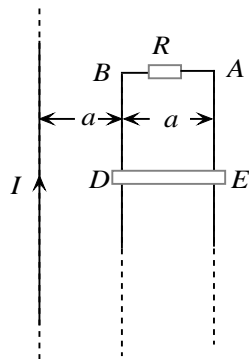
【解】 金属杆向下运动时，切割磁力线，产生的感应电动势为

$$\varepsilon_i = \int_a^{2a} vBdx = \int_a^{2a} v \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 Iv}{2\pi} \ln 2$$

回路 $ABDEA$ 中的感应电流



图例 7-13



图例 7-14

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi R} \ln 2$$

由楞次定律可判定, I_i 的方向在杆中是由 D 指向 E 。

载流杆 DE 在磁场中运动时, 受磁力作用

$$\begin{aligned} f &= \int_a^{2a} B I_i dx = \int_a^{2a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} I_i dx \\ &= \frac{\mu_0 I I_i}{2\pi} \ln 2 = \left(\frac{\mu_0 I \ln 2}{2\pi} \right)^2 \frac{v}{R} \end{aligned}$$

\vec{f} 的方向向上。

当重力与磁力平衡时, DE 作匀束直线运动, 此时速率最大, 即

$$mg = \left(\frac{\mu_0 I \ln 2}{2\pi} \right)^2 \frac{v}{R}$$

解得

$$v_{\max} = v = \left(\frac{2\pi}{\mu_0 I \ln 2} \right)^2 mgR$$

例 7—15 如图所示, 真空中一长直导线通有电流 $I=I(t)$, 有一带滑动边的矩形导线框与长直导线平行共面, 二者相距 a , 矩形线框的滑动边与长直导线垂直, 它的长度为 b , 并且以匀速 \vec{v} (方向平行长直导线) 滑动, 若忽略线框中的自感电动势, 并设开始时滑动边与对边重合。求: (1) 任意时刻矩形线框内的动生电动势; (2) 任意时刻矩形线框内的感应电动势。

【解】 通过矩形框所围面积的磁通量为

$$\begin{aligned} \phi_m &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B dS = \int_a^{a+b} B l dx \\ &= \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} \\ &= \frac{\mu_0 I v t}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} \end{aligned}$$

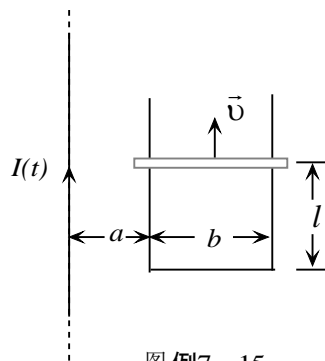
(1) 任意时刻 t 矩形框内的动生电动势为

$$\begin{aligned} \varepsilon'_i &= \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \left(\frac{a+b}{a} \right) \frac{dt}{dt} \\ &= \frac{\mu_0 I(t) v}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} \end{aligned}$$

动生电动势的方向为逆时针方向。

(2) 任意时刻矩形线框内的感应电动势为

$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{\mu_0 v}{2\pi} \ln \left(\frac{a+b}{a} \right) \frac{d}{dt} (It)$$

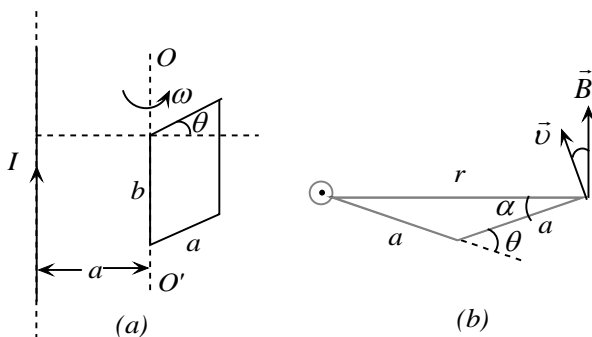


图例7—15

$$= \frac{\mu_0 v}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{a}\right) \left(t \frac{dI}{dt} + I \right)$$

其方向按照 I 随时间 t 的具体变化规律来判定。

例 7-16 如图 (a) 所示, 一长直导线通有电流 I , 其旁放置一边长为 a 和 b 的矩形平面线圈, 线圈以平行于直导线的 b 边为轴做匀角速度 ω 转动, b 边和直电流的距离为 a , 求线圈平面从与直导线共面转过 60° 时的电动势。



图例7-16

【解】 矩形线框中只有与 oo' 轴平行的一条边切割磁力线产生感应电动势 ε_i , 如俯视图 (b) 所示

$$\varepsilon_i = vBb \sin \alpha = \omega a \frac{\mu_0 I}{2\pi r} b \sin \alpha$$

由三角关系知

$$\alpha = 30^\circ, r = 2a \cos 30^\circ = \sqrt{3}a$$

故

$$\varepsilon_i = \frac{\mu_0 I b \omega}{4\pi\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I b \omega}{12\pi}$$

感应电动势的方向为顺时针方向。

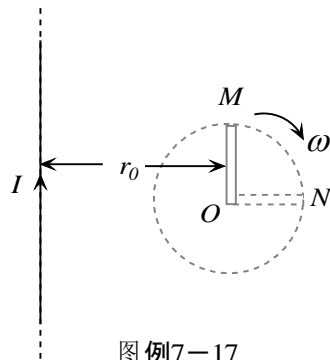
例 7-17 一无限长直导线上通过稳恒电流 I , 电流方向向上, 导线旁有一长度为 L 的金属棒, 绕其一端 O 在一平面内顺时针匀速转动, 转动角速度为 ω , O 点至导线的垂直距离为 r_0 , 设长直导线在金属棒旋转的平面内, 试求: (1) 当金属棒转至与长直导线平行、且 O 端向下 (即图中 OM 位置) 时, 棒内感应电动势的大小和方向; (2) 当金属棒转至与长直导线垂直、且 O 端靠近导线 (即图中 ON 位置) 时, 棒内的感应电动势的大小和方向。

【解】 (1) 在 OM 位置上, 长直电流 I 在 OM 处的磁场为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}, \quad \text{方向垂直纸面向里}$$

在这时, 金属棒上各点的磁场是均匀相等的, 非均匀场情形

转化为均匀场情形。在棒上任取线元 $d\vec{l}$, 方向向上, 其速



图例7-17

度为 $v = l\omega$ ，方向向右，则 dl 上动生电动势为

$$d\varepsilon_i = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = vBdl = \omega Bldl$$

积分得

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \int_0^L \omega Bldl = \frac{1}{2} \omega BL^2 \\ &= \frac{\mu_0 I \omega L^2}{4\pi r_0}\end{aligned}$$

ε_i 的方向是由 O 指向 M 。

(2) 在 ON 位置上，棒上各点所在处的磁感应强度方向相同，但大小不等，即

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}, \quad \text{方向垂直纸面向里}$$

对应于线元 dx 的速度为 $v = \omega(x - r_0)$ ，则 dx 段的动生电动势为

$$d\varepsilon_i = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = vBdx$$

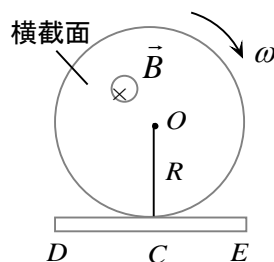
积分得

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \int_{r_0}^{r_0+L} vBdx = \int_{r_0}^{r_0+L} \omega(x - r_0) \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dx \\ &= \frac{\mu_0 \omega I}{2\pi} (L - r_0 \ln \frac{r_0 + L}{r_0})\end{aligned}$$

ε_i 的方向是由 O 指向 N 。

例 7—18 一无限长直圆柱面，半径为 R ，其上均匀带电，单位长度上电荷为 $\lambda (> 0)$ 。有一金属杆 DE 与圆柱面绝缘相切，已知 $DC = CE = R$ ，金属杆与圆柱面轴线垂直，如图所示。若圆柱面以恒定角加速度 β 绕其轴线做顺时针转动，求金属杆 DE 上的感应电动势。

【解】 当带电圆柱面绕其中心轴转动时，它等效于通以电流的无限长密绕直螺线管。当它匀速转动时，在圆柱面内产生恒定的、均匀的轴对称性磁场，方向如图所示，圆柱面外无磁场；当它匀加速转动时，在圆柱面内产生时变的、均匀的轴对称性磁场，圆柱面外的磁场仍为零，由于磁场变化将激发感生电场，根据磁场分布的对称性及感生电场的电场线是闭合曲线这两个特点，可以断定感生电场的电场线是以轴为圆心且垂直于轴的一系列同心圆，其方向可由 $\vec{E}_{\text{感}}$ 与 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 的关



图例7—18

系或楞次定律判断为逆时针方向，依据感生电动势的定义 $\varepsilon_i = \int_l \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l}$ ，这种电场在径向（比如图中的直线段 OD ）不会产生感生电动势。下面具体求解。

载流长直螺线管内的磁场为 $B = \mu_0 ni$

其中 ni 就是单位长度上的电流，对于旋转的圆柱面来说

$$ni = \lambda \frac{\omega}{2\pi} = \lambda \frac{\beta t}{2\pi}$$

所以圆柱面内的磁场为

$$B = \frac{\mu_0 \lambda \beta}{2\pi} t$$

由几何关系可知，通过 $\triangle ODE$ 面积的磁通量为

$$\phi_m = \frac{1}{4} \pi R^2 B = \frac{\mu_0 \lambda \beta R^2}{8} t$$

金属棒 DE 中感应电动势的大小为

$$\varepsilon_i = \left| -\frac{d\phi_m}{dt} \right| = \frac{1}{8} \mu_0 \lambda \beta R^2$$

ε_i 的方向为由 D 指向 E 。

例 7-19 设有一根长为 l 的导线。试证：这根导线的自感值中只与导线内部的磁通量有联系那一部分值为 $\frac{\mu_0 l}{8\pi}$ 。假设电流均匀分布在导线的横截面上。

【解】 将此导线看成是无限长直导线的一段，当通有电流 I 时，导线内部磁场的表示式为

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

式中 R 为导线半径。导线内部储藏的能量为

$$\begin{aligned} W_m &= \int_V w_m dV = \frac{1}{2} \int_V \frac{B^2}{\mu_0} dV \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \int_0^R \left(\frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \right)^2 l 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi} \end{aligned}$$

将上式与 $W_m = \frac{1}{2} LI^2$ 比较，即得导线的自感值中只与导线内部的磁通有联系的那一部分值为

$$L = \frac{\mu_0 l}{8\pi}$$

四、习题选解

7-2 一铜棒 ab 长 $l=0.50\text{m}$ ，放在匀强磁场 B 中，磁场方向垂直纸面向外，如图所示，设铜棒绕距 a 端为 $l/5$ 处的 O 点水平轴在纸面内以匀角速度 ω 逆时针转动，设 $\omega = 4\pi \text{ rads}^{-1}$ ，已知 $B=5.0 \times 10^{-5}\text{T}$ ，试求 a 、 b 两端的电势差 U_{ab} ，并比较 a 、 O 、 b 三点的电势高低。

【解】 应用法拉第电磁感应定律求解。先计算铜棒内 Ob 段的感应电动势，设想有一个回路 $Ob'bO$ ，如图 (b) 所示。 Ob' 是导体棒在 $t=0$ 时的位置， $b'b$ 是铜棒 b 端的轨道，则在 t 时刻，通过回路的磁通量为

$$\phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS = \frac{1}{2} BL^2 \omega t$$

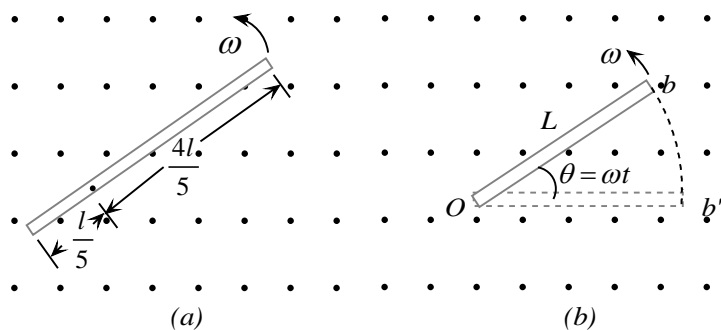


图 7-2

感应电动势为

$$\varepsilon_{i1} = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = \frac{1}{2} \omega B L^2 = \frac{8}{25} \omega B l^2$$

ε_{i1} 的方向为 $O \rightarrow b$

同理, Oa 段内的感应电动势为

$$\varepsilon_{i2} = \frac{1}{2} B \left(\frac{l}{5} \right)^2 \omega = \frac{1}{50} \omega B l^2$$

ε_{i2} 的方向为 $O \rightarrow a$

a 、 b 两端的电势差为

$$\begin{aligned} U_{ab} &= U_a - U_b = \varepsilon_{i2} - \varepsilon_{i1} = -\frac{3}{10} \omega B l^2 \\ &= -0.3 \times 4 \times 3.14 \times 5.0 \times 10^{-5} \times 0.5^2 \\ &= -4.71 \times 10^{-5} \text{ V} \end{aligned}$$

电势由高到低依次是: b 、 a 、 O 。

7-3 一导线弯成如图所示形状 (其中 cd 是一个半径为 $r=0.10\text{m}$ 的半圆弧, $ac=db=0.1\text{m}$), 在 $B=0.5\text{T}$ 的均匀磁场中绕轴线 ab 转动, 转速 $n=60\text{rs}^{-1}$, 设电路的总电阻为 $R=1000\Omega$, 试求:

- (1) 任一时刻导线中的感应电动势和感应电流;
- (2) 感应电动势和感应电流的最大值。

【解】 (1) 在导线转动过程中, 整个回路中只有以 cd 为直径的半圆面积上的磁通量发生变化。以图示半圆位置为参考位置, 当半圆转过角度 θ 时, 通过半圆的磁通量为

$$\phi_m = BS \cos \theta = \frac{1}{2} \pi r^2 B \cos \omega t$$

导线中的感应电动势为

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= -\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{1}{2} \pi r^2 \omega B \sin \omega t = \pi^2 r^2 n B \sin(2\pi n t) \\ &= 3.14^2 \times 0.1^2 \times 60 \times 0.5 \times \sin(2 \times 60 \pi t) \\ &= 2.96 \sin(120 \pi t) \text{ V} \end{aligned}$$

感应电流为

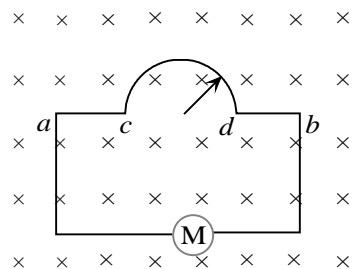


图 7-3

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{2.96}{1000} \sin(120\pi t) = 2.96 \times 10^{-3} \sin(120\pi t) \text{ A}$$

(2) 感应电动势和感应电流的最大值分别为

$$\varepsilon_{i\max} = 2.96 \text{ V}, \quad I_{i\max} = 2.96 \times 10^{-3} \text{ A}$$

7-4 在如图所示的回路中, 导线 ab 是可以移动的, 设整个回路处在 $B=0.50\text{T}$ 的匀强磁场中, 回路平面与磁场垂直, 若 $R=0.2\Omega$, ab 长 $l=0.5\text{m}$, 并正以 $v=4.0\text{ms}^{-1}$ 的速率向右作匀速运动, 摩擦可不计。试求:

- (1) 作用在 ab 导线上的拉力 F ;
- (2) 拉力 F 的功率 P ;
- (3) 感应电流消耗在电阻 R 上的电功率 P' 。

【解】 (1) 导体回路中的感应电动势大小为

$$\varepsilon = Blv = 0.5 \times 0.5 \times 4 = 1 \text{ V}$$

方向由 a 指向 b 。

感应电流大小为

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{1}{0.2} = 5 \text{ A}$$

方向由 a 指向 b 。导线 ab 受到的磁力, 方向向左, 为使导线 ab 保持匀速运动, 所需外界拉力须与磁力平衡。即

$$F = BIl = 0.5 \times 5 \times 0.5 = 1.25 \text{ N}$$

(2) 拉力 F 做功的功率为

$$P = Fv = 1.25 \times 4 = 5 \text{ W}$$

(3) 消耗在电阻 R 上的电功率为

$$P' = I^2 R = 5^2 \times 0.2 = 5 \text{ W}$$

由上可见, 外力做功的功率等于电路中焦耳热功率, 符合能量守恒。

7-6 如图所示, 长直导线中通有电流 $I=5.0\text{A}$, 在与其相距 $b=5.0\text{cm}$ 处放有一矩形线圈, 共 1000 匝, 设线圈长 $l=4.0\text{cm}$, 宽 $a=2.0\text{cm}$ 。不计线圈自感, 若线圈以速度 $v=3.0\text{ms}^{-1}$ 沿垂直于长导线的方向向右运动, 线圈中的感应电动势多大?

【解】 不失一般性, 设线圈处于图示位置的时刻为 $t=0$, 依题意所求的感应电动势就是 $t=0$ 时的感应电动势。为了利用法拉第电磁感应定律, 须求出 t 时刻穿过线圈的磁通量。

$$\begin{aligned} \phi_m &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{b+vt}^{a+b+vt} B l dx \\ &= \int_{b+vt}^{a+b+vt} \frac{\mu_0 I l}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} [\ln(a+b+vt) - \ln(b+vt)] \end{aligned}$$

感应电动势的大小为

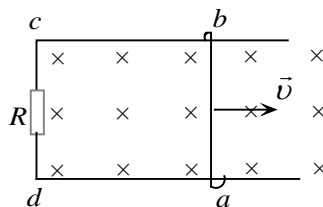


图 7-4

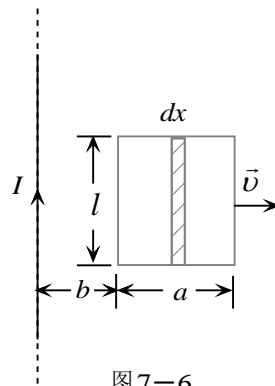


图 7-6

$$\varepsilon_i = \left| -\frac{d\phi_m}{dt} \right| = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \left(\frac{v}{b+vt} - \frac{v}{a+b+vt} \right)$$

$t=0$ 时

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \frac{\mu_0 I l a v}{2\pi b(a+b)} \\ &= \frac{2 \times 10^{-7} \times 5 \times 0.04 \times 0.02 \times 3}{0.05 \times (0.02 + 0.05)} \\ &= 6.86 \times 10^{-7} \text{ V}\end{aligned}$$

以上计算的结果只是单匝线圈中的电动势，总的感应电动势为

$$\varepsilon_i^T = 1000 \varepsilon_i = 6.86 \times 10^{-4} \text{ V}$$

7-11 一无限长直导线与一矩形导体线框在同一平面内，彼此绝缘，如图所示。试求：

- (1) 直导线和线框的互感系数；
- (2) 若直导线中通有 $I=At$ 的电流，线框中的感生电动势。

[解] (1) 由磁场的对称性知，通过图中所做的阴影部分面积上的磁通量相互抵消，故穿过线框的磁通量为

$$\phi_m = \int_S B dS = \int_a^{3a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} b dx = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln 3$$

互感系数

$$M = \frac{\phi_m}{I} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln 3$$

(2) 由法拉第电磁感应定律可知，线框中的感生电动势为

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = -M \frac{dI}{dt} = -MA = -\frac{\mu_0 b A}{2\pi} \ln 3$$

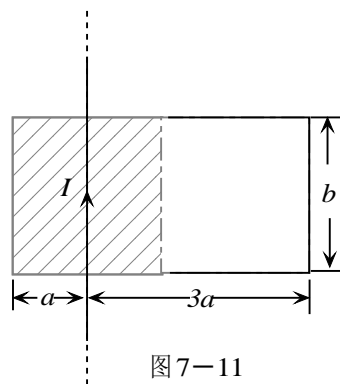


图 7-11

由楞次定律判断知，感生电动势的方向为逆时针方向。

7-14 一平行板电容器两极板都是半径为 0.05m 的圆形导体板，在充电时两极板间电场强度的变化率为 $\frac{dE}{dt} = 1.0 \times 10^{12} \text{ Vm}^{-1}\text{s}^{-1}$ 。求：

- (1) 两极板间的位移电流 I_d ；
- (2) 极板边缘处磁感应强度 B 的大小（忽略边缘效应）。

[解] (1) 平行板电容器中位移电流强度为 I_d 为

$$\begin{aligned}I_d &= \frac{d\phi_e}{dt} = \frac{d}{dt}(DS) = \varepsilon_0 S \frac{dE}{dt} = \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt} \\ &= 8.85 \times 10^{-12} \times 3.14 \times 5^2 \times 10^{-4} \times 1.0 \times 10^{12} = 6.95 \times 10^{-2} \text{ A}\end{aligned}$$

- (2) 由安培环路定律 $\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{d\phi_e}{dt}$ 可得
- $$H 2\pi r = I_d$$

故边缘处磁感应强度 B 的大小为

$$\begin{aligned} B &= \mu_0 H = \frac{\mu_0 I_d}{2\pi r} \\ &= \frac{2 \times 10^{-7} \times 6.95 \times 10^{-2}}{5 \times 10^{-2}} = 2.78 \times 10^{-7} \text{ T} \end{aligned}$$