保密★启用前

2021-2022 学年第二学期期末考试

《概率论与数理统计 A》

考生注意事项

1．答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生**学号**和考生姓名；在答题卡指定位置上填写考试科目、考生姓名和考生**学号**，并涂写考生**学号**信息点。
2．选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。
3．填(书)写部分必须使用黑色字迹签字笔书写，字迹工整、笔迹清楚；涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
4．考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。

(以下信息考生必须认真填写)

考生教学号								
考生姓名								

一、选择题：共 6 小题,每小题 3 分,满分 18 分．下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的．请将答案写在答题卡上,写在试题册上无效．

1. 设 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1, P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid\overline{B})=1$,则事件 A 与 B (　C　　).

(A) 互不相容；　　(B) 是对立事件；　　(C) 相互独立；　　(D) 不独立.

2. 已知二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(\mu,\mu,\sigma^2,\sigma^2,0)$,则在 $Y=y$ 的条件下, X 的条件概率密度为 $f_{X|Y}(x\mid y)=$ (　A　　).

(A) $f_X(x)$；　　(B) $f_Y(y)$；　　(C) $f_X(x)f_Y(y)$；　　(D) $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$.

3. 设随机变量 X_1与X_2 相互独立,分布函数分别为 $F_1(x)$与$F_2(x)$,则随机变量 $Y=\min\{X_1,X_2\}$ 的分布函数为(　D　　).

(A) $F_1(x)F_2(x)$　；　　(B) $F_1(x)+F_2(x)$；

(C) $\{1-F_1(x)\}\{1-F_2(x)\}$；　　(D) $F_1(x)+F_2(x)-F_1(x)F_2(x)$.

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 为来自总体 X 的简单随机样本,其中 $P\{X=0\}=P\{X=1\}=\dfrac{1}{2}$,记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数,则利用中心极限定理可得 $P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i\le 55\right\}$ 的近似值为(　B　　).

(A) $1-\Phi(1)$；　　(B) $\Phi(1)$；　　(C) $1-\Phi(0.2)$；　　(D) $\Phi(0.2)$.

5. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n\,(n>1)$是取自总体 X 的简单随机样本, $\overline{X},S^2$ 分别为样本均值和样本方差,则下列结论不正确的是(　 D　　) .

(A) $\overline{X}\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$；　　(B) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$；

(C) $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$;　　(D) $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$.

6. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,若 σ^2 已知,总体均值 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$(\overline{X}-\lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+\lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$,则$\lambda$=(　B　).

(A) $u_{-\alpha}$；　　(B) $u_{\frac{\alpha}{2}}$；　　(C) $u_{-\frac{\alpha}{2}}$；　　(D) u_{α}.

二、填空题：共 6 小题,每小题 3 分,满分 18 分．请将答案写在答题卡上,写在试题册上无效．

1. 设随机事件 A与B,若 $P(A)=0.6, P(A\mid B)=1$,则$P(\overline{A}\overline{B})=$ ___0.4___.

2. 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{1}{2^k}, k=1,2,\cdots$,则 $E(X)=$ ___2___.

3. 设随机变量X服从 $(0,3)$ 区间上的均匀分布,随机变量Y服从参数为2 的泊松分布,且 X与Y 的协方差为 -1,则 $D(2X-Y+1)=$ ___9___.

4. 设随机变量 X, $E(X)=50, D(X)=25$, 则由切比雪夫不等式可知 $P\{40<X<60\}\geq$ 0.75___.

5. 设总体的概率密度函数 $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta & ,0<x<1\\ 1-\theta, & 1\leq x<2\\ 0 & ,\text{其它}\end{cases}$,其中 θ 是未知参数,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体的简单随机样本,则θ的矩估计量为 ___$\frac{3}{2}-\overline{X}$___.

6. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, μ和σ^2 均未知,检验假设 $H_0:\mu=\mu_0; H_1:\mu\neq\mu_0$,检验统计量$t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$,在显著性水平$\alpha$ 下,拒绝域为 ___$W=\{|t|\geq t_{\alpha/2}(n-1)\}$___.

三、解答题：满分 10 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

某医院用某种新药医治流感,对病人进行试验,其中$\frac{3}{4}$的病人服用此药,$\frac{1}{4}$的病人不服用此药,5 天后有 70%的病人痊愈.已知不服药的病人 5 天后有 10%可以自愈.(1)求该药的治愈率;(2)若某病人 5 天后痊愈,求他是服此药而痊愈的概率.

解:(1)设 A 表示病人服药, B 表示病人痊愈.

由全概率公式, $P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})$,即

$\frac{3}{4}\times P(B\mid A)+\frac{1}{4}\times 0.1=0.7$. 得 $P(B\mid A)=0.9$. (6 分)

(2) $P(A\mid B)=\dfrac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})}=\dfrac{27}{28}$. (10 分)

四、解答题：满分 10 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布, 若 $Y=X^2$, 求 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

解：X 服从参数为 1 的指数分布，其概率密度为 $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, x>0 \\ 0,\ x\le 0 \end{cases}$， (2 分)

$$F_Y(y)=P\{X^2\le y\}=\begin{cases} 0, & y\le 0 \\ P\{0<X<\sqrt{y}\}=\int_o^{\sqrt{y}} f(x)dx, & y>0 \end{cases}$$ (8 分)

所以

$$f_Y(y)=\begin{cases} 0, & y\le 0, \\ f(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}=e^{-\sqrt{y}}\frac{1}{2\sqrt{y}}, & y>0. \end{cases}$$ (10 分)

五、解答题：满分 8 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $G=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$ 服从均匀分布,对 (X,Y) 独立重复地观察 3 次,求至少一次观察值落在区域 $G_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le \frac{1}{4}\}$ 内的概率.

解: (X,Y) 概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$ $P\{(X,Y)\in G_1\}=\frac{1}{4}$, (4 分)

设 T 表示观察值落在区域 $G_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le \frac{1}{4}\}$ 内的次数,T~B(3,1/4),

$P\{T\ge 1\}=1-C_3^0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{37}{64}$. (8 分)

六、解答题：满分 6 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本,试确定常数 C 使 $C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为参数 σ^2 的无偏估计量.

解：$X_i \sim N(\mu,\sigma^2)(i=1,2,\cdots n), E(X_{i+1}-X_i)=0, D(X_{i+1}-X_i)=2\sigma^2$，　(2 分)

$E(X_{i+1}-X_i)^2 = D(X_{i+1}-X_i)+[E(X_{i+1}-X_i)]^2 = 2\sigma^2$,

$E[C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2] = C\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-X_i)^2 = 2C(n-1)\sigma^2$

$C=\dfrac{1}{2(n-1)}$　(6 分)

七、解答题：满分 10 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

甲、乙两个盒子中均装有 2 个红球和 2 个白球,先从甲盒中任取一球,观察颜色后放入乙盒,再从乙盒中任取一球.令 X 与 Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数.求 (1) (X,Y) 的分布律;(2) X 与 Y 的相关系数.

解:(1)

X \ Y	0	1
0	0.3	0.2
1	0.2	0.3

(6 分)

(2) $E(X)=E(Y)=0.5, D(X)=D(Y)=0.25, E(XY)=0.3$,　(8 分)

$\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\dfrac{0.3-0.5\times 0.5}{0.25}=\dfrac{1}{5}$.　(10 分)

八、解答题：满分 10 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

设随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} be^{-(x+y)}, & 0<x<1, 0<y<+\infty, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ (1)确定常数 b; (2)判断 X 与 Y 是否独立.

解：(1) $b\int_0^1\int_0^\infty e^{-(x+y)}dxdy=1, b=\dfrac{1}{1-e^{-1}}$.　(4 分)

(2) $f_X(x)=\int_0^\infty f(x,y)dy=\begin{cases} \dfrac{e}{e-1}e^{-x} & 0<x<1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}, f_Y(y)=\int_0^1 f(x,y)dx=\begin{cases} e^{-y} & y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

X 与 Y 相互独立.　(10 分)

九、解答题：满分 10 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

设某种元件的使用寿命 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^m}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$ 其中 $\theta>0, m>0$ 为参数.(1)求总体 X 的概率密度;(2)任取 n 个这种元件做寿命试验,测得它们的寿命分别为 $x_1,\cdots,x_n(x_i>0,i=1,2,\cdots,n)$,若 m 已知,求 θ 的最大似然估计值.

解: 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的随机样本,

(1) $f(x;\theta)=\begin{cases}m\theta^{-m}x^{m-1}\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^m}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$ (4 分)

(2)似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=m^n\theta^{-mn}(x_1x_2\cdots x_n)^{m-1}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^m}{\theta^m}}$

$\ln L(\theta)=n\ln m-mn\ln\theta+(m-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\theta^{-m}\sum_{i=1}^{n}x_i^m$,

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=-\dfrac{mn}{\theta}+m\theta^{-m-1}\sum_{i=1}^{n}x_i^m=0$, (8 分)

得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\sqrt[m]{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^m}$. (10 分)