## 作业习题答案

## 习题二

**2.1证明：在一个至少有2人的小组中，总存在两个人，他们在组内所认识的人数相同。**

**证明：**

**假设没有人谁都不认识：那么每个人认识的人数都为[1,n-1]，由鸽巢原理知，n个人认识的人数有n-1种，那么至少有2个人认识的人数相同。**

**假设有1人谁都不认识：那么其他n-1人认识的人数都为[1,n-2]，由鸽巢原理知，n-1个人认识的人数有n-2种，那么至少有2个人认识的人数相同。**

**2.3证明：平面上任取5个坐标为整数的点，则其中至少有两个点，由它们所连线段的中点的坐标也是整数。**

**证明：**

**方法一：**

**有5个坐标，每个坐标只有4种可能的情况：（奇数，偶数）；（奇数，奇数）；（偶数，偶数）；（偶数，奇数）。由鸽巢原理知，至少有2个坐标的情况相同。又要想使中点的坐标也是整数，则其两点连线的坐标之和为偶数。因为 奇数+奇数 = 偶数 ； 偶数+偶数=偶数。因此只需找以上2个情况相同的点。而已证明：存在至少2个坐标的情况相同。证明成立。**

**方法二：**

**对于平面上的任意整数坐标的点而言，其坐标值对2取模后的可能取值只有4种情况，即：(0,0) ,(0,1) ,(1,0), (1,1)，根据鸽巢原理5个点中必有2个点的坐标对2取模后是相同类型的，那么这两点的连线中点也必为整数。**

**2.4一次选秀活动，每个人表演后可能得到的结果分别为“通过”、“淘汰”和“待定”，至少有多少人参加才能保证必有100个人得到相同的结果？**

**证明：**

**根据推论2.2.1，若将3\*（100-1）+1=298个人得到3种结果，必有100人得到相同结果。**

**2.9将一个矩形分成(*m*+1)行列的网格每个格子涂1种颜色，有m种颜色可以选择，证明：无论怎么涂色，其中必有一个由格子构成的矩形的4个角上的格子被涂上同一种颜色。**

**证明：**

**（1）对每一列而言，有（m+1）行，m种颜色，有鸽巢原理，则必有两个单元格颜色相同。**

**（2）每列中两个单元格的不同位置组合有种，这样一列中两个同色单元格的位置组合共有 种情况**

**（3）现在有列，根据鸽巢原理，必有两列相同。证明结论成立。**

**2.11证明：从S={1,3,5,…,599}这300个奇数中任意选取101个数，在所选出的数中一定存在2个数，它们之间最多差4。**

**证明：**

**将S划分为{1,3,5}，{7,9,11}……,{ 595,597,599}共100组，由鸽巢原理知任意选取101个数中必存在2个数来自同一组，即其差最多为4.**

**2.12证明：从1~200中任意选取70个数，总有两个数的差是4，5或9。**

**设从1~200中任意选取的70个数构成一组，即**

**第一组： ；**

**第二组： ；**

**第三组：；**

**显然，这三组数均在1~209之间，且共有3\*70=210个数，根据鸽巢原理一定有两个数相等，又因为任取的这70个数均不相同，所以这2个相等的数一定来自不同组，根据不同组的分布讨论如下：**

1. **如果这两个数分别来自第一组和第二组，则有；**
2. **如果这两个数分别来自第一组和第三组，则有；**
3. **如果这两个数分别来自第二组和第三组，则有；**

**得证。**

## 习题三

* 1. **确定多重集的11-排列数？**
  2. **求方程，满足的整数解的个数。**
  3. **架上有20卷百科全书，从中选出4卷使得任意两本的卷号都不相邻的选法有多少种？**

**解：n=20，r=4，**

* 1. **一局乒乓球比赛中，运动员甲以11:7战胜运动员乙，若在比赛过程中甲从来没有落后过，求有多少种可能的比分记录？**

**解：根据题意，相当于求从点(0,0)到点(11,7)且从下方不穿过y=x的非降路径数，即为：**

* 1. **1)会议室中有2*n*+1个座位，现摆成3排，要求任意两排的座位都占大多数，求有多少种摆法？**

**解：**

**(1)**

**方法1：如果没有附加限制则相当于把2n+1个相同的小球放到3个不同的盒子里，有种方案，而不符合题意的摆法是有一排至少有n+1个座位。这相当于将n+1个座位先放到3排中的某一排，再将剩下的2n+1-(n+1)=n个座位任意分到3排中，这样的摆法共有种方案，所以符合题意的摆法有：**

**方法2：设第一排座位有x1个，第二排座位有x2个，第三排座位有x3个。x1+x2+x3=2n+1，且x1+x2≥(2n+1)/2，x1+x3≥(2n+1)/2，x2+x3≥(2n+1)/2，即x1+x2≥n+1，x1+x3≥n+1，x2+x3≥n+1，令y1= x1+x2-n-1，y2= x1+x3-n-1，y3= x2+x3-n-1，可知y1+y2+y3=2(2n+1)-3(n+1)=n-1且yi≥0，1≤i≤3。显然，x方程满足要求的解与y方程非负整数解一一对应，有**

**种。**

**方法3：要求每行非空**

**如果没有附加限制则相当于把2n+1个相同的小球放到3个不同的盒子里，不允许为空，有种方案，而不符合题意的摆法是有一排至少有n+1个座位。这相当于将n个座位先放到3排中的某一排，再将剩下的2n+1-n=n+1个座位任意分到3排中，每排不允许为空，这样的摆法共有种方案，所以符合题意的摆法有：**

**(2)会议室中有2*n*个座位，现摆成3排，要求任意两排的座位都占大多数，求有多少种摆法？**

**解：**

**(2)**

**方法1：如果没有附加限制则相当于把2n个相同的小球放到3个不同的盒子里，有种方案，而不符合题意的摆法是有一排至少有n个座位。这相当于将n个座位先放到3排中的某一排，再将剩下的2n-n=n个座位任意分到3排中，这样的摆法共有种方案。需要注意的是，三排中如果任意两排都是n个座位共有3种情况，这3种情况在中被重复计算了2次，因此需要将重复减去的3次加上。所以符合题意的摆法有：**

**方法2：设第一排座位有x1个，第二排座位有x2个，第三排座位有x3个。x1+x2+x3=2n，且x1+x2≥n+1，x1+x3≥n+1，x2+x3≥n+1，令y1=x1+x2-n-1，y2=x1+x3-n-1，y3=x2+x3-n-1，可知y1+y2+y3=2(2n)-3n-3=n-3且yi≥0，1≤i≤3。显然，x方程满足要求的解与y方程非负整数解一一对应，有**

**种。**

**方法3：要求每行非空**

**如果没有附加限制则相当于把2n个相同的小球放到3个不同的盒子里，不允许为空，有种方案，而不符合题意的摆法是有一排至少有n个座位。这相当于将n-1个座位先放到3排中的某一排，再将剩下的2n-(n-1)=n+1个座位任意分到3排中，每排不允许为空，这样的摆法共有种方案，所以符合题意的摆法有：**

* 1. **n(n≥2)个不同的球分给甲、乙、丙3人，使得甲至少分得两个球，有多少种不同的分法？**

**解：**

* 1. **24个相同的球分堆，使得每堆的球不少于5，有多少种不同的分堆方法？**

**方法1：**

**每堆去掉4个球，剩余球分堆的方法数**

**其中**

## 习题四

* 1. **一项对于A,B,C三个频道的收视调查表明，有20%的用户收看A，16%的用户收看B，14%的用户收看C，8%的用户收看A和B，5%的用户收看A和C，4%的用户收看B和C，2%的用户都看。求不收看A,B,C任何频道的用户百分比？**

**解：设性质P1是收看A频道的用户百分比；P2是收看B频道的用户百分比；P3是收看C频道的用户百分比；Ai={x|x∈S∧x具有性质Pi}，i=1,2,3。S是受调查的所有用户的集合。**

**；**

**根据定理4.1.1，有**

A

C

B

2

3

2

7

6

9

6

65

* 1. **某杂志对100名大学新生的爱好进行调查，结果发现他们喜欢看球赛和电影、戏剧。其中58人喜欢看球赛，38人喜欢看戏剧，52人喜欢看电影，既喜欢看球赛又喜欢看戏剧的有18人，既喜欢看电影又喜欢看戏剧的有16人，三种都喜欢看的有12人，求有多少人只喜欢看电影？**

**解：**

**方法1：**

**设性质P1喜欢看球赛；P2喜欢看戏剧；P3喜欢看电影。Ai={x|x∈S∧x具有性质Pi}，i=1,2,3。S是100名大学新生的集合。**

**由题意可得，这100名大学生中每人至少有三种兴趣中的一种，**

**所以可得既喜欢看球赛有喜欢看电影的人有**

**因此只喜欢看电影的人有**

**=52-(26+16)+12=22人**

**方法2：**

**方法3：**

**设只喜欢看球赛的人数为x；设只喜欢看电影的人数为y；喜欢看球赛和电影但不喜欢看戏剧的人数为z，则**

**解得y=22，所以22人只喜欢看电影。**

球赛

戏剧

电影

12

6

4

16

14

26

22

* 1. **某人有六位朋友，他跟这些朋友每一个都一起吃过晚餐12次，跟他们中任二位一起吃过6次晚餐，和任意三位一起吃过4次晚餐，和任意四位一起吃过3次晚餐，任意五位一起吃过2次晚餐，跟六位朋友全部一起吃过一次晚餐，另外，他自己在外吃过8次晚餐而没碰见任何一位朋友，问他共在外面吃过几次晚餐?**

**解：设n为在外面共吃过晚餐的次数，性质Pi(1?i?6)表示他和第i位朋友吃过晚餐，Ai(1?i?6)表示他和第i位朋友吃过晚餐的次数。显然满足对称筛公式，其中**

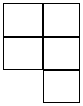
**由题可得方程：**

**解得吃饭次数为**

**4.13 计算棋盘多项式R()。**

**解：**

**R() = x\*R()+R() =x\*(1+3x+x2)+(1+x)\*R( )**



**= x3+3x2+x+(1+x)[xR()+R()]**



**= x3+3x2+x+(1+x)[x(1+x)+(1+4x+2x2)]**

**= 5x3+12x2+7x+1**

**4.14 *A*,*B*,*C*,*D*,*E*五种型号的轿车，用红、白、蓝、绿、黑五种颜色进行涂装。要求*A*型车不能涂成黑色；*B*型车不能涂成红色和白色；*C*型车不能涂成白色和绿色；*D*型车不能涂绿色和蓝色；*E*型号车不能涂成蓝色，求有多少种涂装方案？**

**解：**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** |
| **红** |  |  |  |  |  |
| **白** |  |  |  |  |  |
| **蓝** |  |  |  |  |  |
| **绿** |  |  |  |  |  |
| **黑** |  |  |  |  |  |
|  | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** |
| **蓝** |  |  |  |  |  |
| **绿** |  |  |  |  |  |
| **白** |  |  |  |  |  |
| **红** |  |  |  |  |  |
| **黑** |  |  |  |  |  |
|  | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** |
| **红** |  |  |  |  |  |
| **白** |  |  |  |  |  |
| **绿** |  |  |  |  |  |
| **蓝** |  |  |  |  |  |
| **黑** |  |  |  |  |  |

**1.若未规定不同车型必须涂不同颜色，则：**

**涂装方案**

**2.若不同车型必须涂不同颜色，则：**

**禁区的棋盘多项式为：**

**R()**

**=R()R()=(1+x)(xR()+R())**

**=(1+x)(xR()R()+R()R())**

**=(1+x)(x(1+2x) 2+(1+3x+x2)2)**

**=1+8x+22x2+25x3+11x4+x5**

**所以：**

**N =5!-r1×4!+r2×3!–r3×2!+r4×1!- r5×0!**

**=5！-8\*4！+22\*3！-25\*2！+11\*1！-1=20**

## 习题五

* 1. **求如下数列的生成函数。**

**（1）；（2）；**

**（3）； （4）；**

**（5）； （6）；**

**解：**

* 1. **已知数列的生成函数是，求.**
  2. **知数列{}的指数生成函数是，求。**

**6.5 平面上有*n*条直线，它们两两相交且沿有三线交于一点，设这*n*条直线把平面分成个区域，求的递推关系并求解.**

**解：设n-1条直线把平面分成个区域，则第n条直线与前n-1条直线都有一个交点，即在第n条直线上有n-1个交点，并将其分成n段，这n段又把其所在的区域一分为二。**

**6.6 一个的方格图形用红、蓝两色涂色每个方格，如果每个方格只能涂一种颜色，且不允许两个红格相邻，设有种涂色方案，求的递推关系并求解.**

**解：**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  | |

**设*f*(*n*)为的方格图形的涂色方案。**

**当n=1时，*f*(1)=2，即一个方格有红、蓝两种涂色方案。**

**当n=2时，*f*(2)=3，即两个方格有（红、蓝），（蓝、红）、（蓝、蓝）三种涂色方案。由于不允许两个红格相邻，所以不存在（红、红）的情况。**

**当n>2时，如果第一个格子涂为蓝色，则剩余n-1个格子的涂色方案数为*f*(*n*-1)；如果第一个格子涂为红色，由于不允许两个红格相邻，所以第二个格子必为蓝色，则剩余n-2个格子的涂色方案数为*f*(*n*-2)。于是，当n>2时涂色方案数为*f*(*n*)= *f*(*n*-1)+ *f*(*n*-2)。**

**先求解这个递推关系的通解，它的特征方程为**

**解这个方程，得**

**所以，通解为**

**代入初值来确定和，得**

**求解这个方程组，得**

**所以，原递推关系的解为**

**（）.**

**6.7 核反应堆中有和两种粒子，每秒钟内1个粒子可反应产生出3个粒子，而1个粒子又可反应产生出1个粒子和2个粒子.若在*t*=0*s*时刻反应堆中只有1个粒子，求*t*=100*s*时刻反应堆里将有多少个粒子和粒子.**

**解：**

**设t时刻反应堆中粒子数为，粒子数为**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| **在t-1时刻** |  |  |
| **在t时刻** |  |  |

**6.8 求下列*n*阶行列式的值**

**解：当n=1时，**

**当n=2时，**

**当n>2时，**

**先求解这个递推关系的通解，它的特征方程为**

**解这个方程，得**

**所以，通解为**

**代入初值来确定和，得**

**求解这个方程组，得**

**所以，原递推关系的解为**

** （）.**

**6.9设h(n)表示n+2条边的凸多边形为它的对角线划分所得的区域数，其中假定没有二条对角线在凸多边形内有一公共点。定义h(0)=0，对n=l，2，…，证明**

**证明：**

**如图所示，在凸n+2边形中，划出以任意两相邻边为边的三角形，例如△ABC。则余下的是n+1个顶点的凸多边形，它的对角线划分所得的区域数为h(n-1)。由A点引出的对角线共有n-1条，分△ABC为n块。下面我们计算一下由A点引出的对角线对n+1条边的凸多边形划分所增加的区域数。**

**在n+1个顶点中仟取三个，不妨设为D，F，H，其中必有一个顶点(这里是F)使得对角线AF把D和H分在两边。所以对角线DH必与对角线AF相交。又由题意知，这个交点不会有其它对角线通过。这说明每新增加一个交点必与n+1个顶点中的三个顶点相对应。故新增加的交点数为C(n+1,3)个。**

**另外，从A引出的每一条对角线上的交点数正好与这条对角线在凸n+1边形内截成的线段数相同，而每一线段恰好把n+1边形内某一区域分为两个，故新增加区域数为C(n+1,3)个。所以有**

**这是一个线性常系数非齐次递推关系，可以求得**