1. (30 נק׳) עבור כל אחת מהשפות הבאות:
   - הציגו את מחלקות השקילות של R_L (אם יש אינסוף מחלקות תארו אותן באופן כללי, למשל: לכל $k > 0$ יש מחלקה מהצורה...)
   - לכל שפה, בחרו שתי מחלקות והציגו מלים מפרידות ביניהן.
   - אם השפה היא רגולרית, בנו אס״ד המקבל אותה.

   א. $L_1 = \{a, aaa, aab, b^i \big| i \geq 0\}$

   ב. $L_2 = \{a^i b^j c^k \big| i \geq j \geq 1, i \geq k \geq 1\}$

   ג. $L_3 = \{a^i b^j \big| i = 3s$ וגם $j = 3t$ עבורם s, t קיימים$\}$

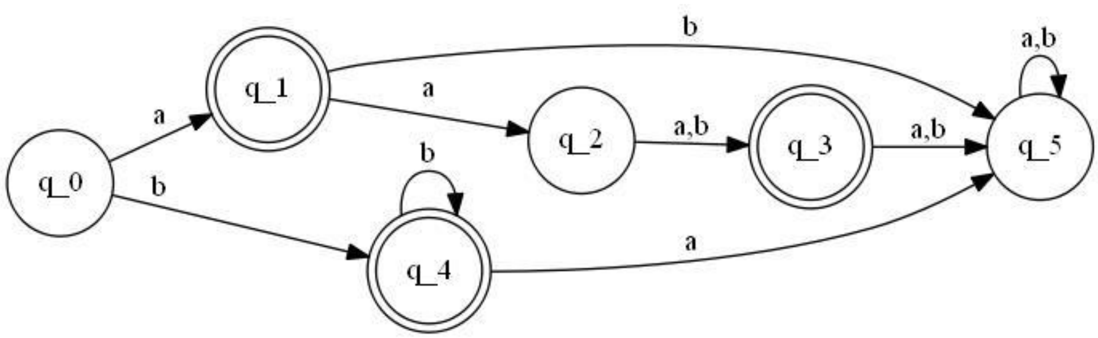
פתרון

א. מחלקות שקילות [ε], [a], [aa], [aab], [b⁺], [ab]

נתאר כל מחלקה בעזרת ביטוי רגולרי.

1. ε
2. a
3. aa
4. aab+aaa
5. b^+
6. $ab\Sigma^*+(aaa+aab)\,\Sigma^++b^+\,\Sigma^+$

השפה רגולרית.

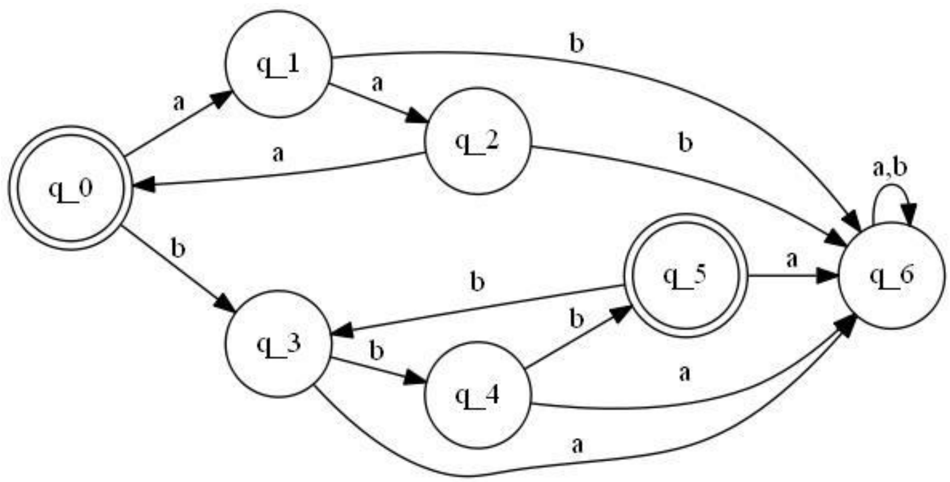


ב. מחלקות השקילות:

1. לכל $k > 0$ יש מחלקות מהצורה a^k. מילים מפרידות בין $a^k, a^j, k < j$: b^j
2. לכל $i = k - j$ עם יש מחלקה $a^k b^j$ משלה, שתלויה במספר ה-b שעוד מותר להוסיף.
3. $a^k b^j c$ עם $k < j$: אין מילה שאפשר לשרשר שתכניס לשפה
4. ϵ

5. $a^k b^j c$ עם $k \geq j$: אפשר לשרשר רק c^i

ג. המחלקות : [ε], [a], [aa], [b], [bb] , [bbb] , [ab] על פי השארית בחלוקה ל 3 של a ו b במילה.



2. (25 נקי)

א. בנו דקדוק חופשי הקשר המייצר את השפה : $L_1 = \{a^i b^j \mid i \leq j \leq 2i\}$

ב. בנו אוטומט מחסנית עבור השפה :

$$L_2 = \{w \mid w \in \{a,b\}^*, \#_a(w) = 2\#_b(w)\}$$

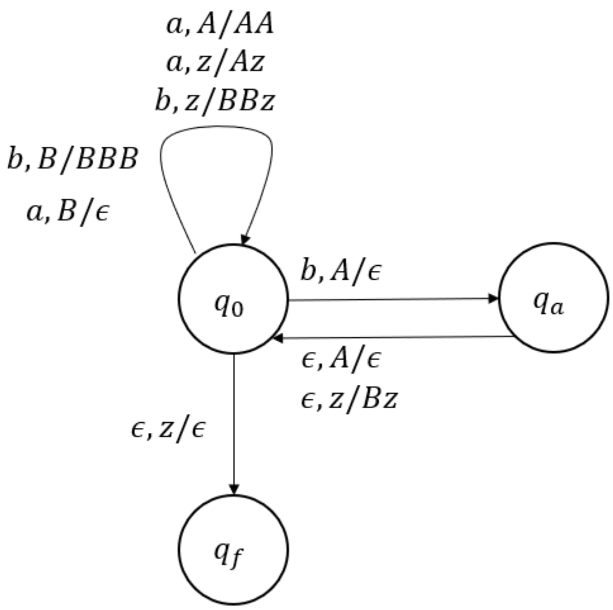
(כלומר, כל המילים מעל $\{a,b\}$ שבהן מספר מופעי ה-a הוא בדיוק כפול ממספר מופעי ה-b).

נמקו היטב את כל בניותיכם.

פתרון :

א. $S \to \epsilon \mid aSb \mid aSbb$. הסבר : על כל a משמאל מוסיפים או b יחיד או שני b. אפשר להראות באינדוקציה שהתנאי על j מתקיים בכל שלב בגזירה.

ב. הרעיון : המחסנית תשמור מידע על ההפרש בין מספר ה- a לבין פעמיים מספר ה-b, ולטובת מי. על כל שני מופעי a עודפים צריך להגיע עוד b. על כל b עודף צריכים להגיע עוד שני מופעי a. לכן, על כל b עודף נדחוף BB למחסנית, על כל a עודף נדחוף A למחסנית. אם יש עודף של האות הנגדית : על כל a נוציא B, על כל b נוציא AA (אם אפשר – במקרה הקצה שהמחסנית מתרוקנת אחרי הוצאת A, נדחוף B אחד במקום – אנחנו בעודף של b).



3. (20 נק׳) הוכיחו או הפריכו:

א. אם $L \in R$ וכן $L' \subseteq L$ אז $L' \in R$

ב. אם $L \notin RE$ וכן $L' \notin RE$ אז $L \cup L' \notin RE$

ג. אם $L \notin RE$ אז $\bar{L} \notin co-RE$.

פתרון:

א. לא נכון. דוגמה נגדית: $\Sigma = \{0,1\}, L = \Sigma^*, L' = L_{halt}$.
$\Sigma^* \in R$ כי אפשר לבנות מ״ט שעוצרת מיד במצב מקבל וזוהי שפתה, ולמדנו ש-$L_{halt} \notin R$.
ברור ש - $L' \subseteq L$ כי L כוללת את כל המילים האפשריות.

ב. לא נכון. דוגמה נגדית: $L = L_{\Sigma^*}, L' = \overline{L_{\Sigma^*}}$.
למדנו ש - $L, L' \notin RE$. מתקיים: $L \cup L' = \Sigma^*$ (כי זו שפה ומשלימתה), ולכן האיחוד ב-R .

ג. נכון. לפי הגדרה: $L \in RE \leftrightarrow \bar{L} \in co-RE$, שזה שקול ל - $L \notin RE \leftrightarrow \bar{L} \notin co-RE$,
לכן הטענה נכונה לפי ההגדרה.

4. (25 נק׳) לכל אחת מהשפות הבאות, קבעו האם הן ב-R, ב-RE, ב-$co-RE$.
הוכיחו את תשובותיכם.

א. $L_1 = \{<M><w> \mid$ M לא מקבלת אף רישא של $w\}$
ב. $L_2 = \{<M> \mid$ קיימת w כך ש $-$ M מקבלת את כל הרישאות של $w\}$

פתרון:

א. $L_1 \in co-RE, L_1 \notin R, RE$

$L \in co-RE$: נתאר מ״ט M' שמקבלת את $\overline{L_1}$: בהנתן קלט $<M><w>$, אם הקידוד אינו חוקי – מקבלת.
אחרת, מריצה את M בהרצה מבוקרת על כל הרישאות של w (רצה באיטרציות, בכל איטרציה מבצעת צעד אחד על כל רישא). אם באחת האיטרציות M מקבלת - M' מקבלת. אם כל הריצות של M דחו - M' דוחה, ובשאר המקרים ממשיכה לרוץ. השפה של M' היא קבוצת הקידודים הלא חוקיים, וקבוצת הקידודים החוקיים בהם יש רישא שמתקבלת. זוהי בדיוק השפה המשלימה ל-L_1.

נראה - $L_1 \notin RE$ ע״י רדוקציה $f: \overline{L_{halt}} \to L_1$. בהנתן $<M><w>$, אם הקידוד לא חוקי נחזיר $<M'><0>$ כאשר M' היא מכונה שעוצרת מיד במצב דוחה.
(נשים לב ש - $<M'><0> \in L_1$).
אחרת אם הקידוד חוקי נחזיר $<M'><w>$, כאשר $M' = M_w$, שהיא מכונה שלכל קלט מריצה את M על w ומקבלת או דוחה באופן זהה לשל M. זוהי פונקציה חשיבה.

מתקיים: אם $<M><w> \in \overline{L_{halt}}$ אז $L(M') = \emptyset$ ולכן לא מקבלת אף רישא לכל מילה ובפרט ל-w, ולכן $f(<M><w>) \in L_1$.
אם $<M><w> \notin \overline{L_{halt}}$ אז $<M><w>$ קידוד חוקי כך ש $-$ M מקבלת את w, ולפי אופן הגדרת M'. מתקיים $L(M') = \Sigma^*$, ולכן מקבלת את כל הרישאות של w, ולכן $f(<M><w>) \notin L_1$

ב. $L_2 \in RE, L_1 \notin R, co-RE$.

נשים לב ש - $< M >\in L_2$ אמ״ם $\epsilon \in L(M)$. אכן, אם $\epsilon \in L(M)$ אז M מקבלת את כל הרישאות של ϵ. אם $< M >\in L_2$ אז קיימת w שכל הרישאות שלה בשפה של M, כולל ϵ.

לכן, נבנה M' שפועלת כך: M' מריצה את M על ϵ, ומגיבה כמו M. כפי שהראנו, M' מקבלת אמ״ם $< M >\in L_2$, ולכן השפה ב – RE.

נראה $L_2 \notin R$ (וביחד עם שייכות ל- RE נסיק גם $L_2 \notin co-RE$).

נראה רדוקציה $f: L_{acc} \to L_2$: בהנתן $< M >< w >$,

אם הקלט לא חוקי נחזיר $< M >< w >$, אחרת נחזיר $< M_w >$, שזו המכונה שמתנהגת על כל קלט כפי ש-M מתנהגת על w. ברור ש-f חשיבה.

מתקיים: $< M >< w >\in L_{acc}$ אז M_w מקבלת כל קלט, ובפרט את ϵ, ולכן $< M_w >\in L_2$.

אם $< M >< w >\notin L_{acc}$ אז או $< M >< w >$ לא חוקי ולכן $< M >< w >\notin L_2$ או M_w לא מקבלת אף קלט, ובפרט לא את ϵ, ולכן $< M_w >\notin L_2$.