函數方程

陳信睿

2024 年 8 月

目錄

1 函數方程基本概念

在數奧領域中，函數方程是數奧中，代數 (Algebra) 領域中常見的一種題目類型，像是 2019 年的 IMO：

範例 1 (2019 IMO P1). *設 $\mathbb{Z}$ 爲所有整數的集合，試找到所有 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ 滿足*

$$f(2a)+2f(b)=f(f(a+b)) \tag{1}$$

對所有整數 a,b 成立。

如上所示，函數方程最常見的形式就是給定函數的定義域、對應域，並且一條關於函數的等式，而我們的目標是要找到滿足所有這樣條件的函數，並且證明我們找到了所有解。像是上面這題的解包含以下

$$f(x)=0 \qquad \text{或} \qquad f(x)=2x+d\text{，其中 } d\in\mathbb{Z} \text{ 是常數。}$$

不過知道所有解，離正確答案還很遠，我們還要證明這是所有解，才能在數奧的競賽中拿到滿分。因此以下我們將探討常見的解函方技巧。

2 代值法

基本上，解決函方的核心作法就是要用已知的方程式來推到其他有用的條件。因此最基本的手法就是代入一些特殊值，並且看能不能得到有用的結果。以下爲範例：

範例 2. *試找到所有 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得*

$$xf(x+f(y))+xf(y)=2yf(x)+x^2 \tag{2}$$

對所有 $x,y\in\mathbb{R}$ 成立。

解答. 在式 (2) 中代入 $x=0$，可得 $f(0)y=0$ 對所有 $y\in\mathbb{R}$ 成立，因此 $f(0)=0$ 成立。接下來在式 (2) 中代入 $y=0$，可以得到 $xf(x)=x^2$ 對所有 $x\in\mathbb{R}$ 成立，因此 $f(x)=x$ 對所有 $x\neq 0$ 成立。加上前面已經得到 $f(0)=0$，我們可以得到 $f(x)=x$ 對於所有 $x\in\mathbb{R}$ 成立。經代回原式後驗證確實爲解。

有時候代值不一定要代一個常數，以下是個例子：

範例 3. *試找到所有 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得*

$$f(x+f(y))=x+y \tag{3}$$

對所有 $x,y\in\mathbb{R}$ 成立。

解答. 將 $x=-f(y)$ 代入即可得到

$$f(0)=y-f(y)\text{，}$$

故 $f(y)=y+c$ 其中 c 爲一常數。可驗證 $c=0$ 爲唯一可能，因此所求函數爲 $f(x)=x$。

3 單射與滿射

在這小節，要介紹函方中我認爲最重要的技巧，單射與滿射。

定義 1 (單射)**.** 我們稱函數 f 爲單射的 (一對一, injective, one-to-one)，如果 $f(a) \neq f(b)$ 對所有 $a \neq b$ 成立。換句話說，若 $f(a) = f(b)$ 則 $a = b$。

而滿射的定義如下：

定義 2 (滿射)**.** 我們稱函數 $f : X \to Y$ 爲滿射的 (surjective, onto)，如果對於每個 $y \in Y$，都存在 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$。

爲什麼單射以及滿射這好用呢? 以下爲常用的性質：

性質 1. *若 $f : X \to X$ 爲單射的或是滿射的 (其中一個成立即可) 且 $f(f(x)) = f(x)$，則 $f(x) = x$。*

更廣泛地說，如果有單射，且我們有 $f(\text{expr1}) = f(\text{expr2})$，則我們可以得到 $\text{expr1} = \text{expr2}$。而如果我們有滿射且有 $\text{expr3} = 0$，爲 $f(x)$ 的表達式，則可以把 $f(x)$ 用 x 替換。

以下幾個例子爲常見的使用方法：

範例 4. *試找到所有函數 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使得*

$$f(xy + f(x)) + f(x - yf(x)) = 2x \tag{4}$$

對所有 $x, y \in \mathbb{R}$ 成立。

解答. 以 $P(a,b)$ 表示將 $x = a, y = b$ 代入式 (4)。首先 $P(x,0)$ 可得

$$f(f(x)) + f(x) = 2x \tag{5}$$

如果 $f(a) = f(b)$ 則

$$2a = f(f(a)) + f(a) = f(f(b)) + f(b) = 2b$$

即可得 $a = b$，這告訴我們 f 是單射的。

接下來，注意到 $P(x, -f(x)/x)$ $(x \neq 0)$ 可以得到

$$f\left(x + \frac{f(x)^2}{x}\right) = 2x - f(0) \tag{6}$$

我們現在利用這條式子證明 $f(0) = 0$，假設 $f(0) \neq 0$，則在式 (6) 中代入 $x = f(0)/2$，可以得到

$$f(c) = 0 \qquad \text{其中} \qquad c = \frac{f(0)}{2} + \frac{2}{f(0)} f\left(\frac{f(0)}{2}\right)^2$$

現在考慮 $P(c,y)$ 可以得到 $f(cy) = 2c$，若 $c \neq 0$，則 f 爲常數函數，與 f 單射矛盾，因此可以知道 $c = 0$，即得 $f(0) = 0$，又與假設矛盾，因此我們證出了 $f(0) = 0$。現在考慮 $P(x, x/f(x))$ $(x \neq 0)$，可以得到

$$f\left(\frac{x^2}{f(x)} + f(x)\right) = 2x,$$

與式 (6) 加上單射比較可得

$$x + \frac{f(x)^2}{x} = \frac{x^2}{f(x)} + f(x)，$$

化簡可得 $f(x) = x$ 對所有 $x \neq 0$ 成立。綜合前面得到的 $f(0) = 0$，我們有 $f(x) = x$ 對所有 $x \in \mathbb{R}$ 成立，代回式 (4) 後檢驗確實成立。

這題我們可以看出單射確實是一個很強大的工具。下一題我們將示範滿射的使用方法。

範例 5. *試找到所有函數 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使得*

$$f(xf(y) + f(x+y)) + yf(x) + f(x) = y \tag{7}$$

對所有 $x, y \in \mathbb{R}$ 成立。

解答. 由於我們想證明 f 滿射，改寫式(7)可得

$$f(xf(y) + f(x+y)) = (1 - f(x))y - f(x)，$$

也就是如果存在 $k \in \mathbb{R}$ 使得 $f(k) \neq 1$，則 f 滿射。這樣的 k 存在，否則 $f(x) \equiv 1$，但易見這不是一個解。因此現在我們有 f 滿射。以 $P(a,b)$ 表示將 $x = a, y = b$ 代入式(7)。由 $P(0,y)$ 可得

$$f(f(y)) + yf(0) + f(0) = y \tag{8}$$

若 $f(0) = 1$，則有 $f(f(y)) = -1$，由 f 滿射可知 $f(y) = -1$，與滿射矛盾，因此 $f(0) \neq 1$，改寫式(8)成以下

$$f(f(y)) = (1 - f(0))y - f(0)，$$

可以看出 f 單射。由於 f 滿射，存在 $c \in \mathbb{R}$ 使得 $f(c) = 0$，則 $P(c,0)$ 可得 $f(cf(0)) = 0$，故 $cf(0) = c$ (根據 f 單射)，因此 $c = 0$ ($f(0) \neq 1$)。現在我們比較 $P(x,0) : f(f(x)) + f(x) = 0$ 以及 $P(0,y) : f(f(y)) = y$，我們可以得到 $f(x) = -x$ 對所有 $x \in \mathbb{R}$ 成立，代回式 (7) 確實爲解。

4 柯西方程

柯西方程是以下特殊形式的函數方程

$$f(x+y) = f(x) + f(y)，$$

有的時候，若我們能創造出這種形式的方程式，則我們能直接使用定理得出結論。

定理 3 (柯西方程)**.** *假設 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ 或是 $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ 滿足*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{9}$$

則存在 $c \in \mathbb{Q}$ 使得 $f(x) = cx$。

證明. 以 $P(a,b)$ 表示將 $x = a, y = b$ 代入式 (9)。則 $P(0,0)$ 可得 $f(0) = 0$。假設 $f(1) = c$，則我們證明 $f(n) = cn$ 對於所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立。根據假設可知 $n = 1$ 是對的，假設對於某個 $k \in \mathbb{N}$ 我們有所有 $n \leq k$ 是對的，則

$$f(k+1) = f(k) + f(1) = ck + c = c(k+1)$$

代表 $n = k+1$ 是對的，根據數學歸納法，$f(n) = cn$ 對所有正整數 n 成立。

接下來由 $P(n,-n): 0=f(0)=f(n)+f(-n)$ 可得 $f(-n)=-cn$，這證明完 $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{Z}$ 的情況。現在我們證明對於所有有理數 $x=p/q\ (q\neq 0)$ 的情況。注意到使用前面數學歸納法的手法，我們可以得到

$$f(mx)=mf(x),$$

其中 m 爲整數。故我們有 $f(p)=qf(p/q)$，因此 $f(p/q)=cp/q$，也就是說對於所有的 $x\in\mathbb{Q}$，我們有 $f(x)=cx$。 □

性質 2. *假設 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 滿足柯西方程，則我們有 $f(cx)=cf(x)$ 對所有 $c\in\mathbb{Q}, x\in\mathbb{R}$ 成立。*

這個性質可以從上面的證明看出來。接下來，我們可能會有一個疑問，如果目標函數 f 的定義域爲 $\mathbb{R}$ 那麼定理 3 的結果還會成立嗎？事實上是不成立的，用大學的線性代數的語言來說是因爲 $\mathbb{R}$ 不是 $\mathbb{Q}$ 的有限維向量空間，此處的反例以現階段知識難以給出，因此放在附錄中。儘管如此，只要有更強的條件，我們還是能有一樣的結論。

定理 4 ($\mathbb{R}$ 上的柯西方程)**.** *假設 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 滿足*

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$

且 f 滿足以下三條件之一：

1. *f 在某區間上有上界或下界。*
2. *f 在某區間上單調。*
3. *f 在某區間上連續。*

則存在 $c\in\mathbb{R}$ 使得 $f(x)=cx$。

這個定理仰賴部份微積分知識以及一些關於無理數的不等式，因此就不詳細談這部份的理論，我認爲大概知道就好了。以下爲一些例題，首先最一開始提到的**範例** 1，就可以用代值加上柯西方程來解決，以下爲一種範例解法：

解答. 以 $P(x,y)$ 表示將 $a=x$ 及 $b=y$ 代入式 (1)。注意到 $P(0,a+b)$ 可以得到

$$f(0)+2f(a+b)=f(f(a+b)),$$

與式 (1) 比較可得：

$$f(0)+2f(a+b)=f(2a)+2f(b) \tag{10}$$

在式 (10) 中代入 $b=0$ 可以得到：

$$f(2a)=2f(a)-f(0)$$

代回式 (10) 可得：

$$f(a+b)+f(0)=f(a)+f(b).$$

令 $g(x)=f(x)-f(0)$，則我們有 $g(a+b)=g(a)+g(b)$，根據定理 3，可以知道 $g(x)=cx$，而 $f(x)=cx+d$，其中 $c,d\in\mathbb{Z}$。代回原式化簡可得

$$(c-2)(c(a+b)+d)=0,$$

故 $c=2$ 或是 $c=0$ 且 $d=0$。綜合以上，所有解爲 $f(x)=2x+d, d\in\mathbb{Z}$，以及 $f(x)=0$。

範例 6. *試找到所有函數 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使得*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{且} \qquad f(xy) = f(x)f(y) \tag{11}$$

對所有 $x, y \in \mathbb{R}$ 成立。

解答. 注意到在第二式中代入 $y = x$ 可得 $f(x^2) = f(x)^2$，因此對於所有 $t \geq 0$，我們有 $f(t) \geq 0$，這代表 f 在區間 $[0,1]$ 上有下界，根據定理 4 可知 $f(x) = cx$ 其中 $c \in \mathbb{R}$ 爲常數。代回原第二式可得 $c = 0,1$，因此 $f(x) = x$ 或是 $f(x) = 0$。

範例 7. *試找到所有函數 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使得*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{且} \qquad f(x^3) = f(x)^3 \tag{12}$$

對所有 $x, y \in \mathbb{R}$ 成立。

解答. 首先根據性質 2 我們有 $f(p) = pf(1)$ 對所有 $p \in \mathbb{Q}$ 成立。接下來在第二式代入 $x = a + p$ $(p \in \mathbb{Q}, a \in \mathbb{R})$，可以得到

$$f(a+p)^3 = (f(a) + pf(1))^3 = f(a)^3 + 3pf(1)f(a)^2 + 3f(a)p^2f(1)^2 + (pf(1))^3$$
$$f((a+p)^3) = f(a^3) + 3pf(a^2) + 3p^2f(a) + p^3f(1)$$

此二式視爲 p 的多項式，爲恆等多項式，因此我們有

$$f(1)^3 = f(1); \quad (f(1)^2 - 1)f(a) = 0; \quad f(1)f(a)^2 = f(a^2); \quad f(a)^3 = f(a^3),$$

由第一個條件可以得到 $f(1) = 0, 1, -1$。若 $f(1) = 0$ 則 $f(a) = 0$ 對所有 $a \in \mathbb{R}$ 成立。而第二式可以得到 $f(a^2) = f(a)^2$ 或是 $f(a^2) = -f(a)^2$，不管是何種情形，f 要嘛有上界，要嘛有下界，因此 f 爲線性。可知 f 有三種解 $f(x) = x$，$f(x) = -x$，$f(x) = 0$。

接下來我們要討論另一種很類似柯西方程的函數方程，稱爲詹森方程 (Jenson's equation)，在多數情況與柯西方程等價。

定義 5 (詹森方程)**.** 我們稱 $f: X \to Y$ 滿足詹森方程若

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x) + f(y) \tag{13}$$

對所有 $x, y \in X$ 成立。在數奧領域中，X 通常爲 $\mathbb{Q}$，$\mathbb{R}$，或 $\mathbb{R}^+$。

以下介紹關於詹森方程的性質。

性質 3. *$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ 或是 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 滿足詹森方程，若且唯若 $g(x) = f(x) - f(0)$ 滿足柯西方程。此外若 $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}+$ 滿足詹森方程，則 $f(x) = ax + b$ 其中 $a, b \geq 0$ 爲滿足 $a^2 + b^2 > 0$ 的常數。*

證明. 首先，我們證明第一部份。在式(13)中代入 $y = 0$ 可得

$$2f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) + f(0),$$

將此式代回式(13)可得

$$f(x+y) + f(0) = f(x) + f(y),$$

令 $g(x) = f(x) - f(0)$ 則 $g(x+y) = g(x) + g(y)$。此外，我們容易看出如果 g 滿足柯西方程，則 $f(x) = g(x) + f(0)$ 滿足詹森方程，這證明了第一部份。現在證明第二部份，我們宣稱

$$f(nz) = (f(2z) - f(z))n + 2f(z) - f(2z) \tag{14}$$

對所有 $z \in \mathbb{R}^+$ 及 $n \in \mathbb{N}$ 成立。式(14)對 $n = 1, 2$ 成立，假設式(14)對 $n \le k$ $(k \ge 2)$ 成立，則

$$\begin{aligned} f((k+1)z) &= 2f(kz) - f((k-1)z) \\ &= 2\Big((f(2z) - f(z))k + 2f(z) - f(2z)\Big) - \Big((f(2z) - f(z))(k-1) + 2f(z) - f(2z)\Big) \\ &= (f(2z) - f(z))(k+1) + 2f(z) - f(2z) \end{aligned}$$

此式(14)對 $n = k + 1$ 亦成立。事實上，使用完全相同的手法，我們可以進一步證明對於所有的 $b > a > 0$，我們有

$$f((b-a)n + a) = \Big(f(b) - f(a)\Big)n + 2f(a) - f(b) \tag{15}$$

由式(15)可得若 $b > a$，則 $f(b) > f(a)$。此外，由式(14)可以看出對於所有 $(p/2^k, f(p/2^k))$ $(p \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ 這樣形式的點都落在同一直線上，這是因爲對於每個固定的 $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，$(p/2^{k_0}, f(p/2^{k_0}))$ 皆落在同一直線 L_{k_0} 上，而對於更大的 $k' > k_0$，$p/2^{k_0} = p \cdot 2^{k'-k_0}/2^{k'}$ 落在直線 $L_{k'}$ 上，這表示 $L_{k_0} = L_{k'}$。現在我們可以假設所有 $(p/2^k, f(p/2^k))$ $(p \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ 這樣形式的點都落在直線 $y = ax + b$ $(a \ge 0, b \ge 0, a^2 + b^2 > 0)$ 上。

假設存在 $s \in \mathbb{R}^+$ 使得 $f(s) \ne as + b$，則有兩種可能：$f(s) > as + b$ 與 $f(s) > as + b$。如果 $f(s) < as + b$，注意到對於所有 $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，考慮 $t_k := \lceil s2^k \rceil / 2^k \le s + 2^{-k}$，$f(t_k) = at_k + b$。現在取 k 夠大使得

$$a2^{-k} < f(s) - as - b，$$

則有

$$f(t_k) \le a(s + 2^{-k}) + b < f(s) \qquad \text{然而} \qquad t_k \ge s，$$

故矛盾。類似地我們也可以使用類似手法在 $f(s) < as + b$ 的狀況下導出矛盾。 □

5 三變數法

三變數法這個技巧爲引入一個新的變數，來破壞對稱性的技巧。以下爲使用的範例：

範例 8. *試找到所有函數 $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 使得*

$$f(x+y)^2 = f(x)^2 + f(xy) + f(y)^2 \tag{16}$$

對所有 $x, y \in \mathbb{R}^+$ 成立。

解答. 以 $P(a, b)$ 表示將 $x = a$ 及 $y = b$ 代入式 (16)。比較 $P(x, y+z)$ 與 $P(x+z, y)$，我們有

$$\begin{aligned} P(x, y+z): \quad f(x+y+z)^2 &= f(x)^2 + f(xy + xz) + f(y+z)^2 \\ &= f(x)^2 + f(xy + xz) + f(y)^2 + f(yz) + f(z)^2 \\ P(x+z, y): \quad f(x+y+z)^2 &= f(x+z)^2 + f(xy + zy) + f(y)^2 \\ &= f(x)^2 + f(xz) + f(z)^2 + f(xy + zy) + f(y)^2 \end{aligned}$$

可得

$$f(xy + xz) + f(yz) = f(xz) + f(xy + zy) \tag{17}$$

對所有 $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ 成立。現在我們證明 f 滿足詹森方程，對於任意的 $b > a > 0$，在式(17)中

代入

$$(x,y,z)\mapsto\left(\sqrt{\frac{a(b-a)}{b+a}},\sqrt{\frac{b^2-a^2}{4a}},\sqrt{\frac{a(b+a)}{b-a}}\right)\in\mathbb{R}^3_{>0}\text{，}$$

我們可以得到

$$2\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+f(b)$$

對於所有的 $a,b\in\mathbb{R}^+$ 成立。因此根據**性質**3可以知道 $f(x)\equiv cx+d$ 其中 $c,d\geq 0$ 不同時爲 0。將此結果代回式(16) 可得

$$\begin{aligned}\Big(c(x+y)+d\Big)^2&=(cx+d)^2+cxy+d+(cy+d)^2\\ \Longrightarrow\qquad 2c^2xy+d^2&=cxy+2d^2+d\end{aligned}$$

由此可得 $c=1/2$ 且 $d=0$，因此 $f(x)\equiv x/2$ 爲唯一解。

範例 9 (2005 ISL A2). *試找到所有函數 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 使得*

$$f(x)f(y)=2f(x+yf(x))\tag{18}$$

對所有 $x,y\in\mathbb{R}^+$ 成立。

解答. 以 $P(a,b)$ 表示將 $x=a$ 及 $y=b$ 代入式 (18)。考慮 $P(x+zf(x),y)$ 我們有

$$\begin{aligned}\text{左式}&=f(x+zf(x))f(y)=\frac{1}{2}f(x)f(y)f(z)\\ \text{右式}&=2f(x+zf(x)+yf(x+zf(x)))=2f\left(x+zf(x)+\frac{1}{2}yf(x)f(z)\right)\\ &=f(x)f\left(z+\frac{1}{2}yf(z)\right)=\frac{1}{2}f(x)f\left(\frac{1}{2}y\right)f(z)\end{aligned}$$

因此 $f(y)=f(y/2)$ 對於所有 $y\in\mathbb{R}^+$ 成立，等價地 $f(x)=f(2^kx)$ 對於所有 $k\in\mathbb{N}$ 及 $x\in\mathbb{R}^+$ 成立。對於每個 $x\in\mathbb{R}^+$，存在 $k=k(x)\in\mathbb{N}$ 使得 $2^k>f(x)$。考慮 $P(x,x/(2^k-f(x)))$ 則我們有

$$f(x)f\left(\frac{x}{2^k-f(x)}\right)=2f\left(\frac{2^kx}{2^k-f(x)}\right)\text{，}$$

由於

$$f\left(\frac{x}{2^k-f(x)}\right)=f\left(\frac{2^kx}{2^k-f(x)}\right)\text{，}$$

因此 $f(x)=2$，這對所有 x 成立，因此 $f(x)\equiv 2$ 爲唯一解。

6 2007 ISL A4 引理

這個小節主要介紹關於 2007 ISL A4 的一個小延伸引理。以下爲該題的題目敘述：

範例 10 (2007 ISL A4). *試找到所有函數 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 使得*

$$f(x+f(y))=f(x+y)+f(y)\tag{19}$$

對所有 $x,y\in\mathbb{R}^+$ 成立。

解答. 以 $P(a,b)$ 表示將 $x=a$ 及 $y=b$ 代入式 (18)。考慮 $P(x,y+f(z))$，則我們有

$$\begin{aligned}
\text{左式} &= f(x+f(y+f(z))) = f(x+f(y+z)+f(z)) \\
&= f(x+y+z+f(z)) + f(y+z) = f(x+y+2z) + f(z) + f(y+z) \\
\text{右式} &= f(x+y+f(z)) + f(y+f(z)) \\
&= f(x+y+z) + f(z) + f(y+z) + f(z)
\end{aligned}$$

因此 $f(x+y+2z) = f(x+y+z) + f(z)$ 對所有 $x,y,z \in \mathbb{R}^+$ 成立。現在對於 $b > a > 0$，令 $x = y = (b-a)/2$ 及 $z = a$，則我們有 $f(a) + f(b) = f(a+b)$ 對所有 $a \neq b$ 成立。

現在證明 $f(x) = cx$ 其中 $c > 0$ 爲常數。假設 f 不是線性的，則存在 $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^+$，使得 $f(\alpha) = s\alpha$ 且 $f(\beta) = t\beta$，其中 $s < t$。我們宣稱存在 $m,n \in \mathbb{N}$ 使得

$$m\alpha - n\beta > 0 \qquad \text{但} \qquad ms\alpha - nt\beta < 0，$$

這等價

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{n}{m} > \frac{s\alpha}{t\beta}，$$

根據有理數的稠密性，這樣的 $m,n \in \mathbb{N}$ 存在。

現在固定正實數 $\gamma \notin \{p\alpha + q\beta : p,q \in \mathbb{Z}\}$，我們取足夠大的 $k \in \mathbb{N}$ 使得

$$k(ms\alpha - nt\beta) + f(\gamma) < 0，$$

則因爲

$$\begin{aligned}
f(\gamma + k(m\alpha - n\beta)) + knf(\beta) &= f(\gamma + km\alpha) \\
f(\gamma) + kmf(\alpha) &= f(\gamma + km\alpha)
\end{aligned}$$

因此，

$$f(\gamma + k(m\alpha - n\beta)) = f(\gamma) + k(ms\alpha - nt\beta) < 0，$$

矛盾。在以上推論中，我們選的 γ 確保了以上使用 $f(a+b) = f(a) + f(b)$ 的過程中，都有 $a \neq b$。因此存在 $c \in \mathbb{R}^+$ 使得 $f(x) = cx$，代回式(19)可得 $f(x) \equiv 2x$ 爲唯一可能。

事實上，後面所使用的手法可以被推廣成以下引理。

引理 1 (2007 A4 引理)**.** 假設 $f,g,h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 滿足

$$f(x+g(y)) = f(x) + h(y) \tag{20}$$

對所有 $x,y \in \mathbb{R}^+$ 成立，則 $h(y)/g(y) = c$ ($c \in \mathbb{R}^+$) 爲常數。

我們前面在做**範例**10的時候可能還有 $y \neq x$ 的條件，因此多數時候可以根據有的條件微調一下證明，但是大致思路不變。

證明. 假設 $h(y)/g(y)$ 不是常數，則存在 $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^+$ 使得 $h(\alpha) = s \cdot g(\alpha)$ 及 $h(\beta) = t \cdot g(\beta)$，其中 $s < t$。我們宣稱存在 $m,n \in \mathbb{N}$ 使得

$$m \cdot g(\alpha) - n \cdot g(\beta) > 0 \qquad \text{但} \qquad ms \cdot g(\alpha) - nt \cdot g(\beta) < 0，$$

這等價

$$\frac{g(\alpha)}{g(\beta)} > \frac{n}{m} > \frac{s \cdot g(\alpha)}{t \cdot g(\beta)}，$$

根據有理數的稠密性，這樣的 $m,n\in\mathbb{N}$ 存在。現在固定 $\gamma\in\mathbb{R}^+$，並取足夠大的 $k\in\mathbb{N}$ 使得

$$k(ms\cdot g(\alpha)-nt\cdot g(\beta))+f(\gamma)<0，$$

則因爲

$$\begin{aligned}f(\gamma+km\cdot g(\alpha))&=f(\gamma+k(m\cdot g(\alpha)-n\cdot g(\beta)))+kn\cdot h(\beta)\\ f(\gamma+km\cdot g(\alpha))&=f(\gamma)+km\cdot h(\alpha)\end{aligned}$$

因此，

$$f\left(\gamma+k(m\cdot g(\alpha)-n\cdot g(\beta))\right)=f(\gamma)+k(ms\cdot g(\alpha)-nt\cdot g(\beta))<0，$$

矛盾。 □

範例 11. *試找到所有函數 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 使得*

$$f(x+3f(y))=f(x)+f(y)+2y \tag{21}$$

對所有 $x,y\in\mathbb{R}^+$ 成立。

解答. 根據**引理**1，考慮 $g(y)=3f(y)$ 且 $h(y)=f(y)+2y$，則我們有 $f(y)+2y=c\cdot 3f(y)$ 其中 $c\in\mathbb{R}^+$ 爲常數。由此可知 $f(y)=c_\star y$，其中 $c_\star\in\mathbb{R}^+$ 爲常數。代回式21可得 $3c_\star^2=c_\star+2$，可解出 $c_\star=1$ 爲唯一正實數解。因此 $f(x)\equiv x$。

7 數論函方

數論函方在數奧中是一類特殊的函方，通常關於函數的關係式爲一個整除關係，或是一個關於數論的敘述。最常見的兩個手法爲：如果一個整數 x 被無限多個正整數整除，則 $x=0$；此外，我們常常也會先嘗試炸出 $f(1)$ 及 $f(p)$ 的值，其中 $p\in\mathbb{P}$ 爲質數。以下爲一個例子：

範例 12 (2019 APMO P1). *試找到所有函數 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 使得*

$$f(a)+b\mid a^2+f(a)f(b) \tag{22}$$

對所有 $a,b\in\mathbb{N}$ 成立。

解答. 以 $P(x,y)$ 表示將 $a=x$ 及 $b=y$ 代入式 (22)。首先，$P(1,1)$ 可得 $f(1)+1\mid f(1)^2+1$，因此

$$f(1)+1\mid f(1)^2+1-(f(1)-1)(f(1)+1)=2，$$

因此 $f(1)=1$。接下來令 $p\in\mathbb{P}$ 爲質數，考慮 $P(p,p)$ 可得 $f(p)+p\mid f(p)^2+p^2$，因此

$$f(p)+p\mid f(p)^2+p^2-(f(p)-p)(f(p)+p)=2p^2，$$

因此 $f(p)+p$ 有六種可能：$1,2,p,2p,p^2,2p^2$。然而，前三個小於等於 p，因此不可能是前三個，故 $f(p)=p,p^2-p,2p^2-p$。考慮 $P(p,1)$，我們有 $f(p)+1\mid p^2+f(p)$，即 $f(p)+1\mid p^2-1$。如果 $f(p)=p^2-p$，則

$$p^2-p+1\mid p^2-1\implies p^2-p+1\mid p，$$

因此 $p^2-p+1=1,p$，無論哪種情形都不合。如果 $f(p)=2p^2-p$，則

$$2p^2-p+1\mid p^2-p\implies 2p^2-p+1\le p^2-1，$$

矛盾。因此 $f(p)=p$ 對於所有 $p\in\mathbb{P}$ 成立。

現在考慮 $P(a,p)$ $(p\in\mathbb{P})$，我們有 $f(a)+p\mid a^2+f(a)p$，因此

$$f(a)+p\mid a^2+f(a)p-(f(a)+p)f(a)=a^2-f(a)^2，$$

這表示 $a^2-f(a)^2$ 被所有 $f(a)+p$ $(p\in\mathbb{P})$ 整除，因此 $a^2-f(a)^2=0$，即 $f(a)=a$ 對於所有 $a\in\mathbb{N}$ 成立。

以下爲另一個例子：

範例 13 (2013 ISL N1)**.** *試找到所有函數 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 使得*

$$m^2+f(n)\mid mf(m)+n \tag{23}$$

對所有 $m,n\in\mathbb{N}$ 成立。

解答. 以 $P(x,y)$ 表示將 $m=x$ 及 $n=y$ 代入式 (23)。令 $p\in\mathbb{P}$ 爲大於 $f(1)$ 的質數。由 $P(1,p-f(1))$ 可得 $1+f(p-f(1))\mid p$，因此 $f(p-f(1))=p-1$。考慮 $P(p-f(1),p-f(1))$，有 $(p-f(1))^2+p-1\mid(p-f(1))p$，因此

$$\begin{aligned}&(p-f(1))^2+p-1\mid\Big((p-f(1))^2+p-1\Big)\cdot p-\Big((p-f(1))p\Big)\cdot(p-f(1))\\ \Longrightarrow\ &(p-f(1))^2+p-1\mid p(p-1)\end{aligned}$$

由於 $(p-f(1))^2+p-1>p-1$ 且 $(p-f(1))^2+p-1$ 爲 $p(p-1)$ 的因數，因此 $p\mid(p-f(1))^2+p-1$，我們可以推論

$$p\mid f(1)^2-1，$$

這對所有質數 $p>f(1)$ 成立，故 $f(1)=1$ 且 $f(p-1)=p-1$ 對所有 $p\in\mathbb{P}$ 成立。

現在考慮 $P(m,p-1)$ $(p\in\mathbb{P})$，有 $m^2+p-1\mid mf(m)+p-1$，因此

$$m^2+p-1\mid\Big(mf(m)+p-1\Big)-\Big(m^2+p-1\Big)=mf(m)-m^2，$$

因此 $mf(m)-m^2$ 被無窮多個正整數 m^2+p-1 整除，可得 $mf(m)=m^2$ 即 $f(m)=m$。

8 附錄

定理 6. *存在 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 滿足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 但是對於所有 $c\in\mathbb{R}$ 存在 $x_0\in\mathbb{R}$ 使得 $f(x_0)\neq cx_0$。也就是 f 不是線性函數。*

證明. 在線性代數中，我們可以知道 $\mathbb{R}$ 關於 $\mathbb{Q}$ 的向量空間存在基底 (basis)，不妨假設此基底爲 $\{1,\beta_1,\beta_2,\dots\}$。若

$$x=c+\sum_{i=1}^{N}c_i\beta_i，\qquad c,c_i\in\mathbb{Q}，$$

定義 $f(x)=c$，則可以看到 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 爲柯西方程。然而 $f(\beta_1)=0\neq\beta_1$，因此 f 不是線性函數。 □

9 習題

這些習題多數都只是幫讀者整理，前面有分類的題目選自 IMO, IMO shortlist, APMO 等競賽，並以年份排序，並不見得越前面越簡單，而後面的「其他」類別則是來自其他國家的題目，以我自己感受的難度排序。許多題目的難度非常高，我也不一定會寫。而有 $*$ 標記的題目表示我有自己做出來的題目，可以優先寫這些題目。

9.1 IMO

問題 1 (2008 IMO 第四題 *). *試找到所有 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 使得*

$$\frac{\left(f(w)\right)^2+\left(f(x)\right)^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2} \tag{24}$$

對所有滿足 $wx=yz$ 的 $w,x,y,z\in\mathbb{R}^+$ 成立。

問題 2 (2010 IMO 第一題 *). *試找到所有 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得*

$$f(\lfloor x\rfloor y)=f(x)\left\lfloor f(y)\right\rfloor \tag{25}$$

對所有 $x,y\in\mathbb{R}$ 成立。

問題 3 (2012 IMO 第四題 *). *試找到所有 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ 使得*

$$f(a)^2+f(b)^2+f(c)^2=2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a) \tag{26}$$

對所有滿足 $a+b+c=0$ 的 $a,b,c\in\mathbb{Z}$ 成立。

問題 4 (2015 IMO 第五題). *試找到所有 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得*

$$f(x+f(x+y))+f(xy)=x+f(x+y)+yf(x) \tag{27}$$

對所有 $x,y\in\mathbb{R}$ 成立。

問題 5 (2017 IMO 第二題). *試找到所有 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得*

$$f(f(x)f(y))+f(x+y)=f(xy) \tag{28}$$

對所有 $x,y\in\mathbb{R}$ 成立。

問題 6 (1999 IMO 第六題). *試找到所有 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得*

$$f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1 \tag{29}$$

對所有 $x,y\in\mathbb{R}$ 成立。

9.2 ISL

問題 7 (2009 ISL A7). *試找到所有 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得*

$$f\left(xf(x+y)\right)=f\left(yf(x)\right)+x^2 \tag{30}$$

對所有 $x,y\in\mathbb{R}$ 成立。

問題 8 (2010 ISL A5). *試找到所有 $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ 使得*

$$f\left(f(x)^2y\right) = x^3f(xy) \tag{31}$$

對所有 $x, y \in \mathbb{Q}^+$ 成立。

問題 9 (2011 ISL A3). *試找到所有函數對 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使得*

$$g(f(x+y)) = f(x) + (2x+y)g(y) \tag{32}$$

對所有 $x, y \in \mathbb{R}$ 成立。

問題 10 (2012 ISL A5). *試找到所有 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使得*

$$f(1+xy) - f(x+y) = f(x)f(y) \tag{33}$$

對所有 $x, y \in \mathbb{R}$ 成立，且 $f(-1) = 0$。

問題 11 (2014 ISL A4). *試找到所有 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 使得*

$$f\left(f(m)+n\right) + f(m) = f(n) + f(3m) + 2014 \tag{34}$$

對所有 $m, n \in \mathbb{Z}$ 成立。

問題 12 (2014 ISL A6). *試找到所有 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 使得*

$$n^2 + 4f(n) = f(f(n))^2 \tag{35}$$

對所有 $n \in \mathbb{Z}$ 成立。

問題 13 (2015 ISL A2*). *試找到所有 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 使得*

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1 \tag{36}$$

對所有 $x, y \in \mathbb{Z}$ 成立。

問題 14 (2015 ISL A5). *試找到所有 $f : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}+1$ 使得*

$$f(x + f(x) + y) + f(x - f(x) - y) = f(x+y) + f(x-y) \tag{37}$$

對所有 $x, y \in \mathbb{Z}$ 成立。

問題 15 (2016 ISL A4). *試找到所有 $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 使得*

$$xf(x^2)f(f(y)) + f(yf(x)) = f(xy)\left(f(f(x^2)) + f(f(y^2))\right) \tag{38}$$

對所有 $x, y \in \mathbb{R}^+$ 成立。

問題 16 (2016 ISL N6). *試找到所有 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 使得 $f(m) + f(n) - mn \neq 0$ 且*

$$f(m) + f(n) - mn \mid mf(m) + nf(n) \tag{39}$$

對所有 $m, n \in \mathbb{N}$ 成立。

問題 17 (2018 ISL A1*). *試找到所有 $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ 使得*

$$f(x^2f(y)^2) = f(x)^2f(y) \tag{40}$$

對所有 $x, y \in \mathbb{Q}^+$ 成立。

問題 18 (2018 ISL A5). *試找到所有* $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ *使得*

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)f(y)=f(xy)+f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{41}$$

對所有 $x,y\in\mathbb{R}^+$ *成立。*

問題 19 (2020 ISL N5*). *試找到所有* $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ *滿足以下條件：*

(*1*) *至少存在一個* $n\in\mathbb{N}$*，使得* $f(n)\neq 0$*。*

(*2*) $f(xy)=f(x)+f(y)$ *對所有* $x,y\in\mathbb{N}$ *成立。*

(*3*) *存在無窮多個* $n\in\mathbb{N}$ *使得* $f(k)=f(n-k)$ *對所有* $0<k<n$ *成立。*

附註. 這題是 2021 年三階選訓的模競第一題，由於二階選訓我失去太多分，我需要做出這題才有機會成爲國手，我有做出這題，算是延續了該年的國手夢到隔天的第二場模競。

問題 20 (2020 ISL A6). *試找到所有* $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ *使得*

$$f^{(a^2+b^2)}(a+b)=af(a)+bf(b) \tag{42}$$

對所有 $a,b\in\mathbb{Z}$ *成立。註：*$f^{(n)}(x)=f\left(f^{(n-1)}(x)\right)$ $(n\in\mathbb{N})$ *且* $f^{(0)}(x)=x$*。*

附註. 這題是 2021 年三階選訓的模競第四題，如前個備註所述，我在二階表現不佳，因此這題對我來說是一定要寫出來才能當上國手，惋惜的是，我沒做出這題。

9.3 APMO

問題 21 (2015 APMO 第二題 *). *令* S *爲所有大於* 1 *的正整數的集合。試找到所有* $f:S\to S$ *使得*

$$f(a)f(b)=f(a^2b^2) \tag{43}$$

對所有 $a,b\in S,\ a\neq b$ *成立。*

9.4 其他

問題 22 (2014 韓國奧林匹亞 *). *試找到所有* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *使得*

$$f(xf(x)+f(x)f(y)+y-1)=f(xf(x)+xy)+y-1 \tag{44}$$

對所有 $x,y\in\mathbb{R}$ *成立。*

問題 23 (2008 加拿大 *). *試找到所有* $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ *使得*

$$f(2f(x)+f(y))=2x+y \tag{45}$$

對所有 $x,y\in\mathbb{Q}$ *成立。*

問題 24 (2010 印尼 *). *試找到所有* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *使得*

$$f(x^3+y^3)=xf(x^2)+yf(y^2) \tag{46}$$

對所有 $x,y\in\mathbb{R}$ *成立。*

問題 25 (2019 Baltic Way*). *試找到所有 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得*

$$f(xf(y)-y^2)=(y+1)f(x-y) \tag{47}$$

對所有 $x,y\in\mathbb{R}$ 成立。

問題 26 (2007 義大利 *). *試找到所有 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得*

$$f(xy+f(x))=xf(y)+f(x) \tag{48}$$

對所有 $x,y\in\mathbb{R}$ 成立。

問題 27 (2020 香港 *). *試找到所有 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得*

$$f(f(x)+y)+f(x+f(y))=2f(xf(y)) \tag{49}$$

對所有 $x,y\in\mathbb{R}$ 成立。

問題 28. *試找到所有 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得*

$$f(x+y)+f(x)f(y)=f(xy)+f(x)+f(y) \tag{50}$$

對所有 $x,y\in\mathbb{R}$ 成立。

問題 29. *試找到所有 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得*

$$f\left(x^2+xf(y)\right)=xf(x+y) \tag{51}$$

對所有 $x,y\in\mathbb{R}$ 成立。

10 習題解答

這個小節將放上一些習題的參考解答，大部分的解答都是我的答案，並不一定是最乾淨、最簡單的答案，如果想看看有沒有更簡潔的作法可以去 AOPS `https://artofproblemsolving.com/` 找。此外，有標 † 的解答表示我是參考別人的解答的。

解答 (問題1). 以 $P(a,b,c,d)$ 表示將 $w=a,x=b,y=c,z=d$ 代入式(24)。$P(1,1,1,1)$ 可以得到 $f(1)^2=f(1)$ 因此 $f(1)=1$，而 $P(w,w,w,w)$ 可以得到 $f(w^2)=f(w)^2$。現在我們可以將式(24)改寫成

$$\frac{f(w^2)+f(x^2)}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

現考慮 $P(\sqrt{t},\sqrt{1/t},1,1)$，則我們有

$$f(t)+f\left(\frac{1}{t}\right)=t+\frac{1}{t} \tag{52}$$

此式對所有 $t\in\mathbb{R}^+$ 成立。將式(52) 左右兩式平方並且使用 $f(w^2)=f(w)^2$ 可得

$$f(t^2)+2f(t)f\left(\frac{1}{t}\right)+f\left(\frac{1}{t^2}\right)=t^2+2+\frac{1}{t^2}\text{，}$$

與式 (52) 中，t 代入 t^2 比較可得

$$f(t)f\left(\frac{1}{t}\right)=1 \tag{53}$$

式(52)與式(53)綜合可得

$$f(t)^2-\left(t+\frac{1}{t}\right)+1=0 \qquad 即 \qquad (f(t)-t)\left(f(t)-\frac{1}{t}\right)=0，$$

可得對於所有 $t\in\mathbb{R}^+$，要嘛 $f(t)=t$ 要嘛 $f(t)=1/t$。我們現在證明不可能存在 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+-\{1\}$，使得 $f(\alpha)=\alpha$ 但是 $f(\beta)=1/\beta$。這也代表 $f(x)\equiv x$ 以及 $f(x)\equiv 1/x$ 爲唯二解。考慮 $P(\alpha,\beta,\alpha\beta,1)$，則可以得到

$$\frac{\alpha^2+1/\beta^2}{f(\alpha^2\beta^2)+1}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2+1} \implies f(\alpha^2\beta^2)=\frac{(\alpha^2\beta^2+1)^2}{\beta^2(\alpha^2+\beta^2)}-1。$$

如果 $f(\alpha^2\beta^2)=\alpha^2\beta^2$，則

$$\alpha^2\beta^2+1=\beta^2(\alpha^2+\beta^2) \implies \beta^4=1，$$

與 $\beta\in\mathbb{R}^+-\{1\}$ 矛盾，而若 $f(\alpha^2\beta^2)=1/(\alpha^2\beta^2)$，則

$$\alpha^2\beta^2(\alpha^2\beta^2+1)=\beta^2(\alpha^2+\beta^2) \implies \alpha^4=1，$$

一樣矛盾。因此這樣的 α,β 不存在，故得證。

解答 (問題2). 以 $P(a,b)$ 表示將 $x=a,y=b$ 代入式(25)。$P(0,0)$ 可得 $f(0)=f(0)\lfloor f(0)\rfloor$，即有 $\lfloor f(0)\rfloor=1$ 或是 $f(0)=0$。

狀況 (1) $\lfloor f(0)\rfloor=1$，考慮 $P(x,0)$ 可得 $f(x)=f(0)=c$ $(1\le c<2)$，代回式(25)驗證正確。

狀況 (2) $f(0)=0$。考慮 $P(1,1)$ 可得 $f(1)=f(1)\lfloor f(1)\rfloor$，因此 $f(1)=0$ 或是 $\lfloor f(1)\rfloor=1$。第一種狀況中，$P(1,y)$ 可得 $f(y)\equiv 0$，易驗證這是解。現在我們假設 $\lfloor f(1)\rfloor=1$。首先 $P(x,1)$ 可得

$$f(x)=f(\lfloor x\rfloor) \tag{54}$$

接下來考慮 $P(1,y)$ 可得 $f(y)=f(1)\lfloor f(y)\rfloor$ 以此改寫式(25)可得

$$f\left(\lfloor x\rfloor y\right)=\frac{f(x)f(y)}{f(1)} \tag{55}$$

在此式中將 y 代入 $\lfloor y\rfloor$ 並使用式(54)可得

$$f\left(\lfloor x\rfloor y\right)=f\left(\lfloor x\rfloor\lfloor y\rfloor\right)，$$

在此式中代入 $x=2$ 與 $y=1/2$ 可得 $f(1)=f(0)=0$，與 $\lfloor f(1)\rfloor=1$ 矛盾。

解答 (問題3). 以 $P(x,y,z)$ 表示將 $a=x,b=y,c=z$ 代入式(26)。$P(0,0,0)$ 可得 $3f(0)^2=0$ 即 $f(0)=0$，而 $P(a,-a,0)$ 可得 $f(a)^2+f(-a)^2=2f(a)f(-a)$ 因此 $f(a)=f(-a)$。因此式(26)對於滿足 $a+b=c$ 也成立，$P(x,x,2x)$ 化簡可得 $f(2x)^2=4f(x)f(2x)$，即 $f(2x)=0$ 或是 $f(2x)=4f(x)$。令 $A:=\{n\in\mathbb{N}:f(n)=0\}$，我們將討論 $A=\varnothing$ 與否。

狀況 (1) $A=\varnothing$。因爲對於任何 $x\in\mathbb{Z}$，$f(2x)=0$ 或是 $f(2x)=4f(x)$ 至少其中一個是對的，但 $A=\varnothing$，因此 $f(2x)=4f(x)$ 對所有 $x\in\mathbb{Z}$ 成立。現在我們宣稱 $f(n)=n^2f(1)$ 對所有 $n\in\mathbb{N}$ 成立。使用數學歸納法證明，這對 $n=1$ 是對的，假設此敘述對 $n\le k$ $(k\in\mathbb{N})$ 都是對的，化簡 $P(1,k,k+1)$ 則有

$$\left(f(k+1)-(k+1)^2f(1)\right)\left(f(k+1)-(k-1)^2f(1)\right)=0，$$

如果 $f(k+1)=(k-1)^2f(1)$，$P(2,k-1,k+1)$ 可得 $f(2)^2=4f(2)\left((k-1)^2f(1)\right)$，由於 $A=\varnothing$，$f(2)\neq 0$，因此 $4f(1)=4(k-1)^2f(1)$ 且 $k=2$。故 $f(3)=f(1)$。$P(1,3,4)$ 可得 $f(4)^2=4f(4)f(1)$ 因此 $f(4)=4f(1)=f(2)$，但我們又有 $f(4)=4f(2)$，這導致 $f(2)=0$ 與 $A=\varnothing$ 矛盾。因此我們可以得到 $f(k+1)=(k+1)^2f(1)$，根據數學歸納法可以知道 $f(n)=n^2f(1)$ 對所有 n 成立。可以驗證 $f(n)=an^2$ $(a\in\mathbb{Z}-\{0\})$ 爲解。

狀況 (2) $A\neq\varnothing$，首先注意到若 $z\in A$ 則 $P(a,z-a,z)$ 可得 $f(a)=f(z-a)$ 因此 $f(a)=f(-a)=f(z+a)$ 爲週期函數。令 $w=\min A$，則對於所有 $z\in A$，我們都有 $w\mid z$，否則 $f(z')=0$，其中 $z'<w$ 爲 z 除以 w 的餘數。我們不妨將 w 寫成 2^ts，其中 s 爲奇數且 $t\in\mathbb{N}\cup\{0\}$。若 $s\neq 1$ 則取 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $2^k\equiv 1 \pmod s$ [1] 則因爲 $f(a)=f(a+w)$ 且 $s\mid 2^k-1$ 我們有 $f(2^t)=f(2^k2^t)$。我們又有 $f(2^k2^t)=4^kf(2^t)$，因此 $(4^k-1)f(2^t)=0$ 這代表 $f(2^t)=0$，與 $s\neq 1$ 矛盾。因此 w 只能是 2^t 的形式。

如果 $w=2^t$ 其中 $t\geq 3$，則考慮 $P(2,w/2-1,w/2+1)$，因爲 $f(w/2-1)=f(w/2+1)\neq 0$，我們可以寫下 $4f(1)=f(2)=4f(w/2-1)$，故 $f(w/2-1)=f(1)$，接下來 $P(1,w/2-1,w/2)$ 可得 $f(w/2)=4f(1)$，然而我們又有 $f(w/2)=f(2^{t-1})=4^{t-1}f(1)$，由於 $t\geq 3$，故矛盾。因此 $t=0,1,2$。如果 $t=0$，表示 f 的週期爲 1，則 $f(n)\equiv 0$。如果 $t=1$，則表示 f 的週期爲 2，因此 $f(2n)=0$ 且 $f(2n+1)=f(1)$ 對所有 $n\in\mathbb{Z}$ 成立，我們可以驗證這對所有 $f(1)\neq 0$ 都是解。如果 $t=2$，則有 $f(4n+1)=f(4n+3)=f(1), f(4n+2)=4f(1), f(4n)=0$ 對所有 $n\in\mathbb{Z}$ 成立，可以驗證此解對所有 $f(1)\neq 0$ 成立。

解答 (問題13). 以 $P(a,b)$ 表示將 $x=a,y=b$ 代入式(36)。由 $P(f(y),y)$ 可得

$$f(0)+1=f(f(f(y)))-f(y) \tag{56}$$

考慮 $P(f(x),f(f(x)))$ 並使用式(56)代換可得 $f(-1-f(0))=-1$。現在 $P(x,-1-f(0))$ 可得 $f(x+1)=f(f(x))$。使用此式代換式(56)可得

$$f(y+2)=f(f(y+1))=f(f(f(y)))=f(y)+f(0)+1,$$

也就是

$$f(y+2)=f(y)+f(0)+1 \tag{57}$$

考慮 $P(f(0)+1,2)$ 我們有

$$\begin{aligned}
& f(f(0)+1-2f(0)-1)=f(f(0)+2)-f(2)-1\\
\implies\quad & f(f(0))-f(0)(f(0)+1)=f(f(0))-f(0)-1\\
\implies\quad & (f(0)-1)(f(0)+1)=0
\end{aligned}$$

因此 $f(0)=1$ 或是 $f(0)=-1$。接下來我們計算 $f(-1)$。考慮 $P(-1+f(-1),-1)$，我們得到

$$\begin{aligned}
f(-1)&=f(f(-1+f(-1)))-f(-1)-1\\
&=f(-1+f(-1)+1)-f(-1)-1 \quad (\text{因爲 } f(f(x))=f(x+1))\\
&=f(0)-f(-1)-1 \quad (\text{又因爲 } f(f(x))=f(x+1))
\end{aligned}$$

因此，

$$f(0)=2f(-1)+1 \tag{58}$$

[1]根據歐拉定理，這樣的 k 存在

先前得到 $f(0)=1$ 或是 $f(0)=-1$ 的結論，我們現在就此討論。

狀況 (1) $f(0)=1$，此時由式(58)可得 $f(-1)=0$。由式(57)，我們有 $f(y+2)=f(y)+2$，我們便可以得到 $f(x)=x+1$ 對所有 $x\in\mathbb{Z}$ 成立。

狀況 (2) $f(0)=-1$，此時由式(58)可得 $f(-1)=-1$。由式(57)，我們有 $f(y+2)=f(y)$，我們便可以得到 $f(x)=-1$ 對所有 $x\in\mathbb{Z}$ 成立。

易驗證上述得到的結果都是解。

解答 (問題17). 以 $P(a,b)$ 表示將 $x=a,y=b$ 代入式(40)。由 $P(1/f(1),1)$ 可得 $f(1/f(1))=1$，因此 $P(x,1/f(1))$ 可得 $f(x^2)=f(x)^2$。將式(40)改寫可得

$$f(xf(y))^2=f(x^2f(y)^2)=f(x)^2f(y) \tag{59}$$

在此式(59)中，左右兩式開根號可得

$$f(xf(y))=f(x)\sqrt{f(y)}。$$

固定 $x,y\in\mathbb{Q}^+$，定義 $t_0=y$ 且 $t_n=xf(t_{n-1})$，根據 f 的定義，我們有 $t_n\in\mathbb{Q}^+$，現在我們證明

$$f(t_n)=f(x)^{2-2^{1-n}}f(y)^{2^{-n}} \tag{60}$$

式(60)對 $n=0$ 是對的。假設式(60)對於 $n\le k$ ($k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$) 是對的，則

$$\begin{aligned}f(t_{k+1})&=f(xf(t_k))=f(x)\sqrt{f(t_k)}=f(x)\cdot f(x)^{1-2^{-k}}f(y)^{2^{-k-1}}\\&=f(x)^{2-2^{1-(1+k)}}f(y)^{2^{-(k+1)}}\end{aligned}$$

可得式(60)對 $n=k+1$ 也是對的，根據數學歸納法知道式(60)對所有 $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 成立。假設存在 $s\in\mathbb{Q}^+$ 使得 $f(s)=p/q\neq 1$ ($\gcd(p,q)=1$)，則在式(60)中取 $x=1/f(1),y=s$，可得 $f(t_n)=f(y)^{2^{-n}}=(p/q)^{2^{-n}}$，取 n 夠大即可使 $f(t_n)$ 爲無理數，與 f 的對應域爲 $\mathbb{Q}^+$ 矛盾。

解答 (問題19). 首先，根據條件 (2) 及使用數學歸納法，我們很容易證明：

$$f\left(\prod_{i=1}^{m}p_i^{\alpha_i}\right)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f(p_i) \tag{61}$$

因此，若 $f(n)\neq 0$，則存在質數 $p\mid n$ 使得 $f(p)\neq 0$。現在令

$$S:=\{n\in\mathbb{N}:f(k)=f(n-k)\text{ 對所有 }0<k<n\text{ 成立}\}$$
$$T:=\{p\in\mathbb{P}:f(p)\neq 0\}$$

根據條件(1)，我們有 $T\neq\varnothing$，因此可以令 $p=\min T$。現在我們證明以下敘述：

宣稱 19.1. 如果 $n\in S$，則對於所有 $1\neq m\mid n$, 我們有 $f(m-1)=0$。

證明. 若 $n=m\cdot s$ ($m\neq 1$)，則 $f(s)=f((m-1)s)=f(m-1)+f(s)$，即 $f(m-1)=0$。 □

宣稱 19.2. 對於所有的 $n\in S$，如果 $n\ge p$ 則 $p\mid n$。

證明. 根據除法原理，我們可以寫 $n=ap+b$，其中 $a\in\mathbb{N}$ 及 $0\le b<p$。現在根據 S 的定義，若 $b\neq 0$，則有 $f(b)=f(ap)=f(a)+f(p)>0$，表示存在更小的質數 $p'\mid b$ 使得 $f(p')\neq 0$ 與 $p=\min T$ 的假設矛盾。因此 $b=0$ 即 $p\mid n$。 □

宣稱 19.3. T 只存在一個元素，即 $T=\{p\}$。

證明. 假設 $q \in T - \{p\}$，並且將所有的 $n \in S$ $(n \geq p)$，寫成 $n = p^\alpha q^\beta s$ 其中 $\alpha \in \mathbb{N}$，$\beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，且 $\gcd(p,s) = \gcd(q,s) = 1$。我們證明 $\alpha < q-1$；$\beta < p-1$；且 $s < p$。首先若 $\alpha \geq q-1$，則根據宣稱19.1 可知 $f(p^{q-1}-1) = 0$，然而根據費馬小定理可知 $p^{q-1} \equiv 1 \pmod q$，即 $q \mid p^{q-1}-1$，因此 $f(q) = 0$ 矛盾。類似地 $\beta < p-1$。而若 $s > p$，則由整數除法，可得 $s = ap+b$，其中 $a \in \mathbb{N}$，$0 \leq b < p$。若 $b > 0$，則

$$f(p^\alpha q^\beta \cdot b) = f(p^\alpha q^\beta \cdot ap) \implies f(b) = f(ap) = f(a) + f(p) > 0,$$

矛盾，因此 $p \mid s$，但這又與 $\gcd(p,s) = 1$ 矛盾。

綜合以上，我們可以知道，

$$S \cap \mathbb{N}_{\geq p} \subseteq \left\{p^\alpha q^\beta s : \alpha < q-1,\ \beta < p-1,\ s < p\right\},$$

即

$$|S| \leq (q-2)(p-1)(p-1) + (p-1) < \infty,$$

與條件3：$|S| = \infty$ 矛盾。因此最一開始的假設是錯的，故 $T = \{p\}$。 □

在證明完以上三個宣稱之後，根據式(61)及宣稱19.3，我們知道 $f(n) = f(p) \cdot \nu_p(n)$ 對所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立，其中 $\nu_p(n)$ 爲最大的 $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 使得 $p^k \mid n$。我們現在證明 $f(n) \equiv f(p) \cdot \nu_p(n)$ 確實爲原方程的解，顯然此函數滿足條件(1)及(2)，在條件(3)中，我們也很容易證明 $n = p^\ell$ 其中 $\ell \in \mathbb{N}$ 皆滿足條件。

解答 (問題21). 考慮

$$f(a)f(b)f(c)f(d)f(e) = f(a)f\left(b^2c^2\right)f\left(d^2e^2\right) = f(a)f\left(b^4c^4d^4e^4\right)$$

以及

$$\begin{aligned} f(a)f(b)f(c)f(d)f(e) &= f\left(a^2b^2\right)f(c)f(d)f(e) = f\left(a^4b^4c^2\right)f(d)f(e) \\ &= f\left(a^8b^8c^4d^2\right)f(e) = f\left(a^{16}b^{16}c^8d^4e^2\right). \end{aligned}$$

只要取 $a,b,c,d,e \in S$ 滿足 $a^{16}b^{16}c^8d^4e^2 = b^4c^4d^4e^4$，且在合併時不會違反題目敘述中的條件，即可產生矛盾 $f(a) = 1$。因此我們取

$$a = 2, \quad b = 2^2, \quad c = 2, \quad d = 2, \quad e = 2^{22},$$

即證明了這樣的 f 不存在。

解答 (問題22). 以 $P(a,b)$ 表示將 $x = a, y = b$ 代入式(44)。由 $P(0, 1-f(0))$ 可知

$$f(f(0)f(1-f(0)) - f(0)) = 0$$

這代表存在 $c \in \mathbb{R}$ 使得 $f(c) = 0$。$P(c,1)$ 可得 $f(0) = 0$。$P(0,y)$ 有 $f(y-1) = y-1$，這表示 $f(x) = x$ 對所有 $x \in \mathbb{R}$ 成立，易驗證這是解。

解答 (問題23). 以 $P(a,b)$ 表示將 $x = a, y = b$ 代入式(45)。首先 $P(0,0)$ 可得 $f(3f(0)) = 0$。現在我們證明 f 是單射的，假設 $f(a) = f(b)$，比較 $P(x,a)$ 與 $P(x,b)$ 可得 $a = b$，即有單射。考慮 $P(x,-2x)$ 有 $f(2f(x) + f(-2x)) = 0 = f(3f(0))$，根據單射我們有 $2f(x) + f(-2x) = 3f(0)$ 將此式代回式(45)可得

$$f\left(3f(0) - f(-2x) + f(y)\right) = 2x + y \tag{62}$$

此外，$P(3f(0),y)$ 與 $P(x,3f(0))$ 分別可得

$$
\begin{aligned}
f(f(y)) &= 6f(0)+y \\
f(2f(x)) &= 3f(0)+2x
\end{aligned}
\tag{63}
$$

在式(62)中，將 (x,y) 代入 $(-1/2f(x),f(y))$，並使用式(63)可得

$$
f(3f(0)+y-x) = f(y)-f(x) \tag{64}
$$

在此式中的 y 代入 $x+y-3f(0)$ 可得 $f(x)+f(y)=f(x+y-3f(0))$。在此式中代入 $x=2f(0)$ 及 $y=f(0)$ 並且使用式(63) 可得 $9f(0)=f(0)$ 即 $f(0)=0$。因此，$f(x)+f(y)=f(x+y)$ 爲柯西方程。根據定理3，我們知道 $f(x)=cx$ 其中 $c\in\mathbb{Q}$ 爲常數。易驗證 $c=\pm1$ 爲唯一的可能，因此所有解爲 $f(x)\equiv x$ 及 $f(x)\equiv -x$ 兩個。

解答 (問題24). 以 $P(a,b)$ 表示將 $x=a,y=b$ 代入式(46)。$P(0,0)$ 可得 $f(0)=0$，而 $P(x,0)$ 可得

$$
f(x^3) = xf(x^2) \tag{65}
$$

將此結果代回式(46)可得 $f(x^3+y^3)=f(x^3)+f(y^3)$。由於對於所有的 $u,v\in\mathbb{R}$，都存在 $x,y\in\mathbb{R}$ 使得 $u=x^3,v=y^3$，因此我們有 $f(u+v)=f(u)+f(v)$。這代表 f 滿足柯西方程，且根據性質2，我們有 $f(cx)=cf(x)$ 對於所有的 $c\in\mathbb{Q}$ 成立。

現在我們將 $x=a+p$ (固定 $a\in\mathbb{R}$，$p\in\mathbb{Q}$ 則不固定) 代入式65，並且使用性質2以及柯西方程展開，可以得到

$$
\begin{aligned}
f\left((a+p)^3\right) &= f(a^3)+3f(a^2)p+3f(a)p^2+f(1)p^3 \\
(a+p)f\left((a+p)^2\right) &= (a+p)\left(f(a^2)+2pf(a)+p^2f(1)\right) \\
&= af(a^2)+\left(f(a^2)+2af(a)\right)p+\left(af(1)+2f(a)\right)p^2+f(1)p^3
\end{aligned}
$$

由於 a 被固定，因此此兩式可以視爲 p 的三次多項式，這兩個多像是在所有有理數上有一樣的值，因此這兩個是一樣的多項式。比較 p^2 項的係數可得 $3f(a)=2f(a)+af(1)$，因此 $f(a)=af(1)$，這對所有 $a\in\mathbb{R}$ 都是對的，因此可得 $f(x)=cx$，其中 $c\in\mathbb{R}$ 爲常數。可以驗證每個 $c\in\mathbb{R}$ 都是解。

附註. 可以想想爲什麼兩個多項式只要在有理數上面的值全部一樣，則他們就是一樣的多項式。

解答 (問題25). 以 $P(a,b)$ 表示將 $x=a,y=b$ 代入式(47)。如果 f 爲常數函數，則 $f\equiv0$ 爲唯一可能，現假設 f 不爲常數函數。由 $P(x,-1)$ 可得 $f(f(-1)x-1)=0$，如果 $f(-1)\neq0$ 則 f 爲常數，與假設矛盾，因此有 $f(-1)=0$。現在我們證明 f 爲零單，也就是 $f(a)\neq0$ 對所有 $a\neq-1$ 成立。反設這樣的 $a\neq1$ 存在，則 $P(x,a)$ 給我們

$f(-a^2)=(a+1)f(x-a)$　　即　　$f(x-a)=f(-a^2)/(a+1)$ 爲常數函數，矛盾。

由此，我們知道 f 爲零單。

考慮 $P(y-1,y)$，則有

$$
f\left((y-1)f(y)-y^2\right)=0，
$$

根據零單，我們有 $(y-1)f(y)-y^2=-1$，也就是 $f(y)=y+1$ 對所有 $y\neq1$ 成立。爲了解出

$f(1)$，再考慮 $P(y+1,y)$，可得

$$(y+1)f(1) = f((y+1)f(y) - y^2) = f(2y+1) = 2y+2,$$

對所有 $y \neq 0,1$ 成立，因此 $f(1) = 2$。綜合以上，$f(x) = x+1$ 對所有 $x \in \mathbb{R}$ 與 $f \equiv 0$ 爲所有解。

解答 (問題26). *以* $P(a,b)$ 表示將 $x = a, y = b$ 代入式 (48)。$P(0,0)$ 有 $f(f(0)) = f(0)$ 且 $P(x,0)$ 有

$$f(f(x)) = f(0)x + f(x) \tag{66}$$

如果 $f(0) \neq 0$，則由式 (66) 可得 f 爲單射，然而 $f(f(0)) = f(0)$ 可得 $f(0) = 0$ 與 $f(0) \neq 0$ 矛盾。因此，$f(0) = 0$ 且式 (66) 可以寫成 $f(f(x)) = f(x)$。$P(f(x), -1)$ 可得 $f(x)\left(f(-1)+1\right) = 0$，如果 $f(-1) \neq -1$，則 $f \equiv 0$，可驗證這是一個解。

現在我們討論 $f(-1) = -1$ 的情形，考慮 $P(x,-1)$ 則有

$$f(f(x) - x) = f(x) - x \tag{67}$$

我們宣稱[2] $f(x) = x$ 對所有 $x \in \mathbb{R}$ 成立。反設存在 $t \in \mathbb{R}$ 使得 $f(t) \neq t$，則考慮

$$w = xt + f(x) \qquad f(w) = xf(t) + f(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

將 w 代入式 (67)，可得

$$f\left((f(t) - t)x\right) = (f(t) - t)x,$$

由於我們假設 $f(t) \neq t$，這可以推論 $f(x) = x$ 對於所有 $x \in \mathbb{R}$ 成立。此即產生矛盾，因此 $f(x) \equiv x$ 爲另一個解。綜合以上，總共有兩個解 $f(x) \equiv 0$ 及 $f(x) \equiv x$。

解答 (問題27). *以* $P(a,b)$ 表示將 $x = a, y = b$ 代入式(49)。比較式(49)與 $P(y,x)$ 可得

$$f(xf(y)) = f(yf(x)) \tag{68}$$

代入 $x = 0$，則有 $f(0) = f(f(0)y)$。如果 $f(0) \neq 0$，則 $f(x) \equiv c$ $(c \neq 0)$ 爲常數函數，因此我們討論完 $f(0) \neq 0$ 的情形。以下假設 $f(0) = 0$。

由 $P(x,0)$ 可得

$$f(f(x)) + f(x) = 0 \tag{69}$$

我們現證明 $f(f(x)+x) = 0$。$P(f(x),y)$ 給我們

$$f(-f(x)+y) + f(f(x)+f(y)) = 2f(f(x)f(y)) \tag{70}$$

將式(70)的 x,y 對調後與式(70)比較可得

$$f(-f(x)+y) = f(-f(y)+x),$$

此時再將 y 以 $f(x)$ 代入可得 $f(0) = f(f(x)+x)$，這證明初我們先前宣稱的結果。現在考慮 $P(1,1)$ 可得 $f(f(1)) = 0$ (注意到 $f(1+f(1)) = 0$)，與式(69)比較可得 $f(1) = 0$。在式(68)中代入 $x = 1$ 可得 $f(f(y)) = 0$，在將此結果與式(69)綜合可得 $f(y) = 0$ 對所有 $y \in \mathbb{R}$ 成立。綜合以上，可得 $f(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$ 爲所有解。

[2]在數奧競賽中，寫解時有時可以寫「宣稱」(claim) 來表示我們接下來要證明的敘述，這會讓解更易懂也更有結構性

解答 (問題28†). 假設 $P(a,b)$ 爲 $x=a, y=b$ 代入原式 (50)。首先注意到，如果 $f(x)$ 爲常數函數 c，則有 $c=0,2$。我們可得兩個解 $f(x)\equiv 0$ 以及 $f(x)\equiv 2$。

現假設 f 不爲常數函數。由 $P(x,0)$ 可得

$$f(x)+f(x)f(0)=f(0)+f(x)+f(0)，$$

可推論 $(f(x)-2)f(0)=0$，因爲 $f(x)$ 不爲常數，因此 $f(0)=0$。$P(x,1)$ 可得 $f(x+1)=(2-f(1))f(x)+f(1)$ 且 $P(x+1,1)$ 可得

$$\begin{aligned} f(x+2) &= (2-f(1))f(x+1)+f(1) \\ &= (2-f(1))^2 f(x)+f(1)(3-f(1)) \end{aligned}$$

將上式以 $x=0$ 代入可以得到 $f(2)=f(1)(3-f(1))$，並且以此代換：

$$f(x+2)=(2-f(1))^2 f(x)+f(2) \tag{71}$$

現在考慮 $P(x,2): f(x+2)=f(2x)+f(x)(1-f(2))+f(2)$，與式 (50) 比較可得

$$(2-f(1))^2 f(x)=f(2x)+f(x)(1-3f(1)+f(1)^2)，$$

我們可以推論 $f(2x)=(3-f(1))f(x)$。

因此有 $f(2x)=af(x)$ 且 $f(4x)=a^2 f(x)$，其中 $a=3-f(1)$。接下來 $P(2x,2y)$ 可得 $af(x+y)+a^2 f(x)f(y)=a^2 f(xy)+af(x)+af(y)$，與原式(50)比較可得：

$$a(a-1)f(x+y)=a(a-1)(f(x)+f(y))。$$

注意到 $a\neq 0$, 否則 $f(2x)=af(x)$ 可推論 $f(x)=0$ 爲常數函數，我們也有 $a\neq 1$，否則 $f(1)=3-a=2$ 且 $f(x+1)=(2-f(1))f(x)+f(1)=f(1)$ 爲常數函數。因此 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，並且與式(50)可得 $f(xy)=f(x)f(y)$。根據範例 6 可知 $f(x)=x$ 或是 $f(x)=0$。

解答 (問題29†). 明顯 $f\equiv 0$ 爲解，不妨假設 f 不全爲 0，假設 $f(z)\neq 0$。以 $P(a,b)$ 表示將 $x=a, y=b$ 代入式 (51)。$P(x,z-x): f(x^2+xf(z-x))=xf(z)$ 可推出 f 滿射，此外 $P(0,0)$ 可得 $f(0)=0$；$P(x,0)$ 可得 $f(x^2)=xf(x)$。接下來我們證明：$f(z)\neq 0$ 對於所有的 $z\neq 0$ 成立。定義 $S=\{s\in\mathbb{R}: f(s)=0\}$，並考慮 $P(x,s)$ $(s\in S)$ 有 $f(x^2)=xf(x+s)$，則可推論 $f(x+s)=f(x)$ 無論 x 是否爲 0，這表示 $s\in S$ 則 s 是 f 的週期。很容易可以看到，如果 t 是 f 的週期，則 $f(t)=f(0)=0$，因此 $t\in S$，這表示 S 恰好蒐集了所有 f 的週期。以上可以看出若 $s,t\in S$ 則 $s+t\in S$ 且 $-s\in S$，而 $P(s,-s) \implies s^2\in S$。

現在假設 $s\in S-\{0\}$ 存在，比較 $P(x+s,y)$ 與 $P(x,y)$ $(x,y\in\mathbb{R})$ 我們有

$$f(x^2+2sx+s^2+(x+s)f(y))=(x+s)f(x+s+y)=(x+s)f(x+y)$$

$$f(x^2+xf(y))=xf(x+y)$$

如果 $s^2+2sx+sf(y)\in S$，則 $sf(x+y)=0$，因此 $f(x+y)=0$ 且 $x+y\in S$。由於 f 是滿射的，所以對於所有的 x，存在 $y\in\mathbb{R}$ 使得 $f(y)=-2x$，此時 $s^2+2sx+sf(y)=s^2\in S$，此時 $f(x+y)=0$，故 $f(x^2+xf(y))=f(-x^2)=0 \implies -x^2\in S$ 對所有 $x\in\mathbb{R}$ 成立。我們可以推論當 $S\neq\{0\}$ 則 $S=\mathbb{R}$。

現在考慮 $P(-f(y),y)$ $(y\neq 0)$，可以得到 $0=-f(y)f(y-f(y))$，根據前面得到的「零單」條件，我們可以得到 $f(y)=y$ 對於所有的 $y\neq 0$ 成立，加上前面的 $f(0)=0$，我們得到 $f(x)=x$ 對於所有的 $x\in\mathbb{R}$ 成立，易驗證這是解。

附註. 這題用到的技巧叫做零單，也就是映射到 0 的點是單射，具體來說，只存在一個 $a\in\mathbb{R}$

使得 $f(a) = 0$，換句話說，若 $f(a) = f(b) = 0$，則 $a = b$。