基礎幾何

陳信睿

2023 年，暑假

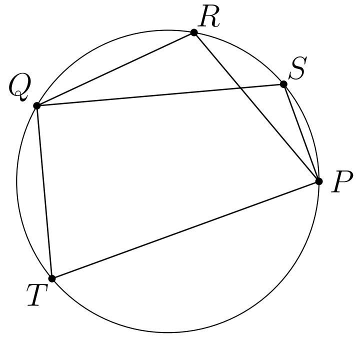
目錄

0 基礎

定義 1 (有向角). 給定兩條直線 ℓ_1, ℓ_2，我們定義 $\measuredangle(\ell_1, \ell_2)$ 爲 ℓ_1 所需逆時針轉的角度使得 ℓ_1 平行 ℓ_2。我們用 $\measuredangle YXZ$ 表示 $\measuredangle(YX, XZ)$。

爲什麼我們會用到有向角呢? 因爲它很多時候可以幫助我們處理方向的問題，舉例來說，假設現在 P、Q、R、S 四點共圓，如果 R 與 S 在直線 PQ 的同側，則會有 $\angle PRQ = \angle PSQ$。反之如果在相異側，則會有 $\angle PRQ + \angle PSQ = \pi$。有向角可以輕鬆的解決這些問題，在以上不論任何狀況，我們都會有

$$\measuredangle PRQ = \measuredangle PSQ = \measuredangle PTQ。$$



1 圓

定義 2 (圓冪). 給定一圓 $\odot(O)$ 以及平面上任何一點 P 定義 P 對圓 $\odot(O)$ 的冪爲 $\overline{OP}^2 - R^2$，其中 R 爲圓 $\odot(O)$ 的半徑。

附註. 會這樣定是因爲假設 P 在圓外，任意定一條割線交圓 $\odot(O)$ 於 A, B 兩點，則根據外冪定理，$\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ 不會因爲割線的選取而改變，假設 PC 爲 P 對圓 $\odot(O)$ 的一條切線（C 在圓 $\odot(O)$ 上），則 $\overline{PC}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{OP}^2 - R^2$，因此我們用這條式子來定義外冪很合理。類似的，我們也可以發現這樣定出來的內冪會與我們熟悉的定法是吻合的，也就是 P 在圓內，且 APB 爲一條弦，則 $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \left|\overline{OP}^2 - R^2\right|$。然而，因爲有向線段的關係，我們把 P 的冪定爲負的也是有所道理的。

定義 3 (根軸). 給定兩圓 $\odot(O_1), \odot(O_2)$，定義根軸爲一集合搜集所有 P 使得 P 對兩圓的冪相等。

定理 4. *給定兩圓 $\odot(O_1), \odot(O_2)$，根軸爲一條垂直連心線的直線。*

引理 1. 固定平面上兩點 S 跟 T，並固定兩個非負實數 $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，則所有滿足

$$\overline{PS}^2 - a^2 = \overline{PT}^2 - b^2$$

的點 P 形成一條垂直 TS 的直線。

證明. `To be completed...` □

定理 4的證明. 這是引理1的直接推論，因爲 $\overline{O_1P}^2 - R_1^2 = \overline{O_2P}^2 - R_2^2$ 的軌跡是一條垂直 O_1O_2 的直線。 □

定理 5 (根心). *給定三相異圓，則三個根軸會交於一點，此點稱爲根心。*

2 完全四線形

現在我們來介紹一些完全四線形相關性質。

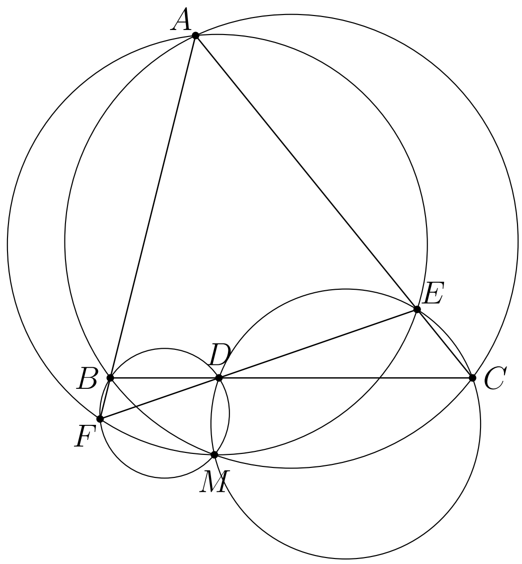
定義 6 (完全四線形). 完全四線形 $\mathcal{Q}=\{\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4\}$ 爲四條直線形成的集合，其中我們要求任三條線不共點。

定理 7 (密克點). *給定一完全四線形 $\mathcal{Q}=\{AB,BC,CA,\ell\}$，假設 ℓ 交 AB、BC、CA 分別爲 D、E、F，則 $\odot(ABC)$、$\odot(AEF)$、$\odot(BFD)$、與 $\odot(CDE)$ 交於一點。此點稱爲完全四線形 $\mathcal{Q}$ 的密克點。*

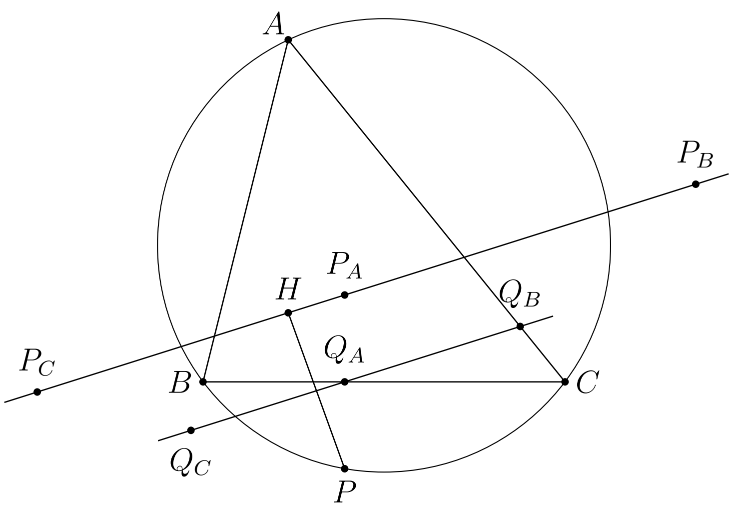
證明. 令 M 爲 $\odot(ABC)$ 與 $\odot(AEF)$ 異於 A 的交點。則我們有

$$\measuredangle MBD=\measuredangle MBC=\measuredangle MAC=\measuredangle MAE=\measuredangle MFE=\measuredangle MFD,$$

故 $M\in\odot(BFD)$。類似的，我們有 $M\in\odot(CDE)$。 □



定理 8 (斯坦納線). *給定一個三角形 ABC，假設 P 爲 $\odot(ABC)$ 上一點，令 P_A 爲 P 對 BC 的對稱點，P_B、P_C 類似定義，H 爲三角形 ABC 的垂心。則 P_A、P_B、P_C、以及 H 四點共線。*



證明. 首先，我們定義 Q_A 爲 P 對 BC 的垂足，Q_B、Q_C 類似定義。則我們宣稱 Q_A、Q_B、Q_C 三點共線。注意到 B、P、Q_C、Q_A 四點共圓，且 C、P、Q_A、Q_B 也四點共圓。故

$$\measuredangle PQ_AQ_C = \measuredangle PBQ_C = \measuredangle PCA = \measuredangle PCQ_B = \measuredangle PQ_AQ_B,$$

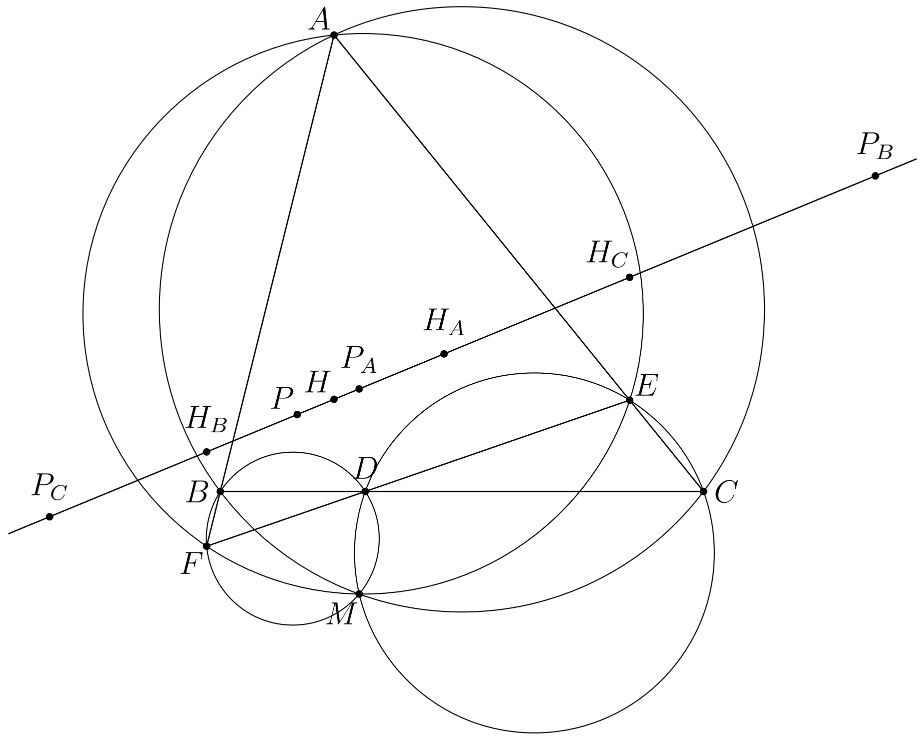
即證明了 Q_A、Q_B、Q_C 三點共線，此線即爲 P 對三角形 ABC 的西姆松線。

明顯的，P_A 爲 Q_A 對 P 往外推一倍 (位似一倍)，所以我們現在只剩下證明 H 在直線 $P_AP_BP_C$ 上。注意到，A、B、H、P_C 四點共圓 (此圓即爲 $\odot(ABC)$ 對 AB 做對稱)。類似的，我們有 A、C、H、P_B 四點共圓。現在，我們即有

$$\measuredangle AHP_C = \measuredangle ABP_C = \measuredangle PBA = \measuredangle PCA = \measuredangle ACP_B = \measuredangle AHP_B。$$

這證明了 H 在直線 P_BP_C 上，故得證。 □

定理 9 (垂心線). *給定一完全四線形 $\mathcal{Q} = \{AB, BC, CA, \ell\}$，假設 ℓ 交 AB、BC、CA 分別爲 D、E、F。令 H、H_A、H_B、H_C 分別爲三角形 ABC、AEF、BFD、CDE 的垂心。則 H、H_A、H_B、H_C 共線，此線稱爲垂心線。*



證明. 我們定義 P、P_A、P_B、P_C 爲完全四線形 $\mathcal{Q}$ 的密克點 M 分別對 ℓ、BC、CA、AB 的對稱點。我們使用四次**定理**8，即可得知：

$$\begin{cases} P_A、P_B、P_C、H\text{共線} \\ P、P_B、P_C、H_A\text{共線} \\ P、P_C、P_A、H_B\text{共線} \\ P、P_A、P_B、H_C\text{共線} \end{cases}$$

故我們可得，H、H_A、H_B、H_C、P、P_A、P_B、P_C 八點共線。 □