題目詳解

陳信睿

2023 年 6 月

目錄

1 2023 暑

問題 1. 已知 a, b, c 均爲正整數，滿足

$$abc \quad \text{整除} \quad (ab+1)(bc+1)(ca+1)。$$

試求 $\max(a^2+b^2+c^2)$。

解答. 展開右式可以得到

$$a^2b^2c^2 + abc(a+b+c) + (ab+bc+ac) + 1，$$

因此我們有

$$abc \quad \text{整除} \quad ab+bc+ac+1。$$

故 $abc \le ab+bc+ca+1$，即有

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} \ge 1。 \tag{1}$$

我們現在不妨假設 $a \le b \le c$。注意到 a 必須小於 4，否則左式最大是 $49/64$ 不合。而 $a = 3$ 的情形，只有 $b = 3$ 且 $c = 3$ 滿足 (1)，但帶回原本的方程式發現不合。$a = 2$ 的情況下，滿足 (1) 的 (a, b, c) 只有 $(2, 3, c)$ $(3 \le c \le 7)$ 以及 $(2, 4, 4)$。可驗證 $(2, 3, 7)$ 是原方程的解。此時，$a^2 + b^2 + c^2 = 62$。

然而，我們仍需處理 $a = 1$ 的解。我們等價找到所有 $1 \le b \le c$ 滿足 bc 整除 $(b+1)(c+1)$。同樣的，我們有

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{bc} \ge 1 \tag{2}$$

滿足 (2) 的 (b, c) 只有 $(1, c)$ $(c \in \mathbb{N})$, $(2, 2)$, $(2, 3)$。後兩個當中只有 $(b, c) = (2, 3)$ 爲解，此時 $a^2 + b^2 + c^2 = 14$。而 $b = 1$ 的狀況，根據條件，我們可以推得 c 整除 2，這個狀況下，$a^2 + b^2 + c^2$ 最大爲 6。因此，答案爲 62。

問題 2. 實數 $x \in \mathbb{R}$ 滿足 $x^2 - 990x + 1 = (x+1)\sqrt{x}$，試求 $\sqrt{x} + 1/\sqrt{x}$ 之值。

解答. 左右同除以 x (明顯 $x \ne 0$)，我們得到

$$x - 990 + \frac{1}{x} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}，$$

令 $t := \sqrt{x} + 1/\sqrt{x}$，則我們將方程式改寫成

$$t^2 - 992 - t = 0，$$

等價 $(t-32)(t+31) = 0$，由於 t 是正的，我們得到 $t = 32$，即爲所求。

問題 3. 假設實數 x, y, z 滿足 $x^2+y^2+z^2=2$，試證明

$$x+y+z \leq xyz+2\text{。}$$

解答. 首先注意到：

$$2yz \leq y^2+z^2 = 2-x^2 \leq 2 \qquad \Longrightarrow \qquad 1-yz \geq 0\text{。} \tag{3}$$

又根據柯西不等式我們有：

$$x+y+z-xyz = x\cdot(1-yz)+(y+z)\cdot 1 \leq \sqrt{(x^2+(y+z)^2)\,((1-yz)^2+1)}\text{。}$$

現在的目標是證明 $\sqrt{(x^2+(y+z)^2)\,((1-yz)^2+1)} \leq 2$，這等價

$$\begin{aligned}
&\left(x^2+(y+z)^2\right)\left((1-yz)^2+1\right) \leq 4 \\
\Longleftrightarrow\ &(2+2yz)(2-2yz+y^2z^2) \leq 4 \\
\Longleftrightarrow\ &-2y^2z^2+2y^3z^3 \leq 0 \\
\Longleftrightarrow\ &y^2z^2(1-yz) \geq 0.
\end{aligned}$$

這是對的，故我們完成了證明。

附註. 這題或許可以使用拉格朗日乘數法 (Lagrange multiplier method)，然而這是大學的方法，在此示範一次使用拉乘的作法。我們可以把問題轉換成：在 $x^2+y^2+z^2=2$ 的限制下，求 $f(x,y,z)=xyz+2-(x+y+z)$ 的最小值。我們令

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = xyz+2-(x+y+z)-\lambda(x^2+y^2+z^2-2)\text{。}$$

現在我們可以知道最大值發生在滿足以下方程的 (x,y,z)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = (yz-1)-\lambda x = 0 \tag{4}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = (zx-1)-\lambda y = 0 \tag{5}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = (xy-1)-\lambda z = 0 \tag{6}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = (x^2+y^2+z^2-2) = 0 \tag{7}$$

我們先計算 (4) − (5)，得到

$$(z+\lambda)(y-x)=0\text{，}$$

因此我們有 $z=-\lambda$ 或是 $x=y$。同理我們會有

$$\begin{array}{ccc}
x=-\lambda & \text{或} & y=z \\
y=-\lambda & \text{或} & z=x
\end{array}$$

不管怎樣，我們可以確定 x,y,z 中一定有兩個一樣，不妨說 $x=y$。如果 $x=y=z$，則 $x=y=z=\pm\sqrt{6}/3$，此時

$$f(x,y,z)=2\pm\frac{7\sqrt{6}}{9}\geq 0。$$

而另一種狀況是 $x=y\neq z$，此時 $x=y=-\lambda$。這時又有兩個情形要討論 $\lambda=0$ 或是 $\lambda\neq 0$。第一種情況就會有 $z=\pm\sqrt{2}$，此時 $f(x,y,z)=2\pm\sqrt{2}\geq 0$。第二種狀況，根據 (6) 會有 $z=(\lambda^2-1)/\lambda$。再把所有東西代回去 (7)，可以得到

$$\lambda^2+\lambda^2+\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)^2=2\implies(3\lambda^2-1)(\lambda^2-1)=0。$$

這時只要逐一計算所有可能的 λ 以及 $f(x,y,z)$ 即可。

$$\begin{aligned}
\lambda=\frac{1}{\sqrt{3}} &\implies f(x,y,z)=2+\frac{10}{3\sqrt{3}}\geq 0\\
\lambda=\frac{-1}{\sqrt{3}} &\implies f(x,y,z)=2-\frac{10}{3\sqrt{3}}\geq 0\\
\lambda=1 &\implies f(x,y,z)=4\geq 0\\
\lambda=-1 &\implies f(x,y,z)=0\geq 0
\end{aligned}$$

綜合以上討論，我們有所有同時滿足 (4)、((5)、(6))、(7) 的 (x,y,z)，總是會有 $f(x,y,z)\geq 0$，而拉格朗日乘數法定理確保最小值只可能發生在這些點，因此我們完成了證明。

此外，這題原做法中，有用到柯西不等式，即爲

$$(ac+bd)^2\leq(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)，$$

其中 a,b,c,d 爲任意實數。

問題 4. 已知 a、b 爲正整數且 $a<b$，若 $(a+b)/2$ 和 $\sqrt{ab}$ 是兩個二位數的正整數且它們的數碼相同但順序相反，請問 a 的最小值爲多少?

解答. 我們令 $(a+b)/2=10x+y$, $\sqrt{ab}=10y+x$，其中 $x>y$，且 x,y 都是數碼 (即 $0\sim 9$ 的數字)。則

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=22(x+y)\qquad(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=18(x-y)。$$

易見 $z=x+y$ 的範圍是在 $3\leq z\leq 17$，暴力討論後，可發現只有 $z=11$ 時有解 $a=32$，$b=98$。

問題 5. 若相同的字母代表相同的數碼，不同的字母表示不同的數數碼。已知三位數 $\overline{ABB}$ 比 $\overline{CDC}$ 少 25，且六位數 $\overline{ABBCDC}$ 是一個完全平方數。求 $\overline{ABBCDC}$ 的正平

方根。

解答. 首先注意到 $\overline{ABB}+25=\overline{CDC}$，百位數不一樣，代表有進位發生，故 $A+1=C$。又注意到 $B+5\equiv C \pmod{10}$，因此有 $B-A\equiv 6 \pmod{10}$。然而我們知道 $B\geq 7$，否則百位不會進位。因此我們可能的 $\overline{ABBCDC}$ 只有

$$177202 \qquad 288313 \qquad 399424$$

三種可能。而注意到一個完全平方數的個位數只有可能是 1、4、9、6、5、0(爲什麼?)。所求等於 $\sqrt{399424}=632$。而直式開方法的做法可以在網路上找到。

問題 6. 設 a,b,c 爲正整數，已知 $b+c$、$c+a$ 和 $a+b$ 的最大公因數是 a、b 和 c 的最大公因數的 k 倍。求 k 的最大值。

解答. 首先，我們有

$$\gcd(b+c,c+a,a+b) \mid (c+a)+(a+b)-(b+c)=2a，$$

同理，

$$\gcd(b+c,c+a,a+b) \mid 2b \qquad \gcd(b+c,c+a,a+b) \mid 2c。$$

故

$$\gcd(b+c,c+a,a+b) \mid 2\gcd(a,b,c)。$$

可得最大可能值爲 2，發生在 $a=b=c$ 時。

問題 7. 已知 p 爲質數，試問滿足下列等式 (8) 的正整數 m, n 爲何？

$$n^{2p}=m^2+n^2+p+1 \tag{8}$$

解答. 首先注意到 $n\neq 1$。又注意到 $n^{2p}-n^2-p-1=m^2$ 爲一比 $(n^p)^2$ 小的完全平方數，所以我們有

$$n^{2p}-n^2-p-1\leq (n^p-1)^2=n^{2p}-2n^p+1。$$

這等價 $2n^p-n^2-p-2\leq 0$，所以我們可以排除掉不滿足這個不等式的 n,p。我們宣稱

$$n^p\geq p+2 \tag{9}$$

對於所有 $n\geq 2$ 以及質數 p，且等號只發生在 $n=2$ 且 $p=2$ 的狀況。現在證明我們宣稱的不等式，我們只要考慮 $n=2$ 的情形（若 (9) 對 $n=2$ 是對的，則對於更大的 n 也是對的），而

$$2^p=(1+1)^p=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\geq p+2。$$

上面這條不等式是對的是因爲

$$\binom{p}{k} \geq 1 \text{ 對於所有的} k$$

且至少有一個 k 使得

$$\binom{p}{k} \geq 2。$$

明顯的，等號成立只發生在 $n=2$ 且 $p=2$，故我們證明完畢我們宣稱的不等式。又顯然我們有 $n^p \geq n^2$。綜合以上，我們有

$$2n^p - n^2 - p - 2 \geq 0。$$

總結來說，可能的解只有 $n=2$ 且 $p=2$，此時 $m=3$。

附註. 這題用的技巧是常見數論不定方程的壓大小技巧，即我們知道，當正整數 x, y 滿足 $x < y^2$ 且 x 爲完全平方數，則

$$x \leq (y-1)^2。$$

雖然這個命題很顯然，但是意外的很好在數論不定方程中用到。

問題 8. 試問有若干正整數 n 滿足等式 (10)?

$$\left[\frac{10^6}{n}\right] - \left[\frac{10^6}{n+1}\right] = 1 \tag{10}$$

解答. 注意到

$$\frac{10^6}{n} - \frac{10^6}{n+1} < 2，$$

否則必不滿足取下高斯後相減爲 1，這等價 $2n(n+1) > 10^6$，即 $n \geq 707$。我們把剩下所有可能的 n 分爲兩類。對於每個 $10^6 \geq n \geq 707$，我們寫 $n \in A$，若且唯若

$$\frac{10^6}{n} - \frac{10^6}{n+1} \geq 1，$$

而 $n \in B$ 則表示

$$\frac{10^6}{n} - \frac{10^6}{n+1} < 1。$$

明顯的，我們一樣可以計算出 $A = \{707, \ldots, 999\}$，$B = \{1000, \ldots, 10^6\}$。對於每個 n，定義 x_n 爲

$$x_n := \left[\frac{10^6}{n}\right]，$$

則 x_n 爲遞減的正整數數列。對於每個 $n \in A$，$x_n - x_{n+1}$ 只能是 1 或是 2，類似

地，對於每個 $n \in B$，$x_n - x_{n+1}$ 只能是 0 或是 1。考慮

$$\sum_{n\in A}(x_n - x_{n+1}) = \left[\frac{10^6}{707}\right] - \left[\frac{10^6}{1000}\right] = 414，$$

可知有 172 個 $n \in A$ 使得 $x_n - x_{n+1}$ 爲 1。類似地，

$$\sum_{n\in B}(x_n - x_{n+1}) = \left[\frac{10^6}{1000}\right] - \left[\frac{10^6}{10^6+1}\right] = 1000，$$

可知有 1000 個 $n \in B$ 使得 $x_n - x_{n+1}$ 爲 1。綜合以上，答案爲 $172 + 1000 = 1172$ 個。

問題 9 (加難版). 假設 x, y, z 爲正實數。試證明以下不等式：

$$\left(1+\frac{x}{y+z}\right)^2 + \left(1+\frac{y}{z+x}\right)^2 + \left(1+\frac{z}{x+y}\right)^2 \geq \frac{27}{4}。$$

並證明等號成立若且唯若 $x = y = z$。

解答. 首先，根據柯西不等式，我們有

$$\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)\cdot 2(xy+yz+zx) \geq (x+y+z)^2，$$

因此，

$$\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right) \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(xy+yz+zx)} \geq \frac{3}{2}。\tag{11}$$

這個不等式是一個預備用的。接下來，我們對原本的題目使用一次柯西不等式，我們有

$$\left(\left(1+\frac{x}{y+z}\right)^2 + \left(1+\frac{y}{z+x}\right)^2 + \left(1+\frac{z}{x+y}\right)^2\right)(1^2+1^2+1^2) \geq \left(3+\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)^2 \tag{12}$$

若我們把原不等式左式記爲 S，則綜合 (12) 以及 (11)，我們有

$$S \geq \frac{1}{3}\cdot\left(3+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}。$$

而這題還有另一個解法，需要用到一個非課內的作法，即詹森不等式。首先，這是一個齊次不等式，所以我們可以假設 $x+y+z=1$，因爲如果不是的話，我們可以考慮

$$x' = \frac{x}{x+y+z} \qquad y' = \frac{y}{x+y+z} \qquad z' = \frac{z}{x+y+z}。$$

則我們的不等式可以寫成

$$\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{(1-y)^2}+\frac{1}{(1-z)^2}\geq\frac{27}{4}\text{。}$$

我們令 $f(t)=\dfrac{1}{(1-t)^2}$，明顯的我們有對於所有的 $t\in(0,1)$ 都有 $f''(t)\geq 0$，我們即可使用詹森不等式，

$$\frac{1}{3}\left(f(x)+f(y)+f(z)\right)\geq f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{4}\text{。}$$

即證明了 $f(x)+f(y)+f(z)\geq 27/4$。

附註. 這題我的作法使用了詹森不等式 (Jenson's inequality)。這是一個在數奧競賽中很常見也入門的不等式。以下定理爲 Jenson's inequality 的精確敘述。

定理 1. *假設 f 在 (a,b) 上二階可導，且 $f''(x)\geq 0$ 對於所有的 $x\in(a,b)$ 恆成立，則*

$$f\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right)\leq\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cdot f(x_k)\text{，}$$

對於所有的 $x_k\in(a,b)$，

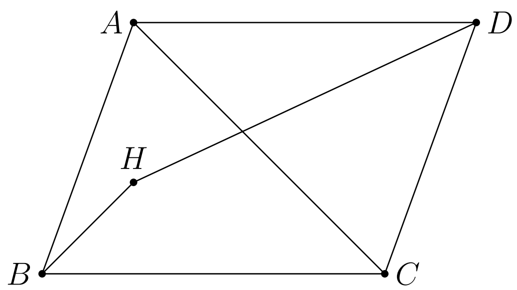
$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1\qquad\text{且}\qquad\lambda_k>0\text{。}$$

如果 $f''(t)\geq 0$ 換成 $f''(t)>0$，則以上等號成立若且唯若 $x_1=x_2=\cdots=x_n$。整個定理敘述的不等號交換還是對的，也就是所有 $\leq$ 與 $\geq$ 交換，$<$ 與 $>$ 交換後的定理也是對的。

問題 10. 給定一完全四線形，證明由任三條線構成的三角形的垂心共線。

解答. 請見我額外附的幾何講義 (點此連結)。若之後有類似的偏向數奧類型的幾何題目或定理，我也會補充在該份幾何講義裡。此線稱爲垂心線。

問題 11. 如下圖，在平行四邊形 $ABCD$ 中，$\angle BAD$ 爲鈍角，H 爲三角形 ABC 之垂心。若 $\overline{BH}=8$ 且 $\overline{DH}=17$，試求 $\overline{AC}$ 的長度。



解答. 在三角形 ABC 中，我們用 a、b、c 分別表示 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$。且用 A 表示 $\angle BAC$，其餘類推 (注意我們目前只看三角形 ABC)。則可以知道

$$\overline{BH}\cos\left(\frac{\pi}{2}-C\right)=\overline{AB}\cos B \implies \overline{BH}=\frac{c\cos B}{\sin C}=2R\cos B,$$

其中 R 爲三角形 ABC 的外接圓半徑，此外我們使用了正弦定理。現在注意到 C、H、A、D 四點共圓，我們使用托勒密定理，即可得到

$$\overline{AH}\cdot\overline{CD}+\overline{CH}\cdot\overline{AD}=\overline{DH}\cdot\overline{AC}。$$

化簡即可得到

$$2R(c\cos A+a\cos C)=\overline{DH}\cdot b,$$

使用餘弦定理把 $\cos A$、$\cos C$ 換掉，即可化簡得到 $\overline{DH}=2R$。故我們可得 $\cos B=8/17$ 以及 $2R=17$。我們可以知道 $\overline{AC}=b=2R\sin B=15$。

附註. 正弦定理是指：三角形 ABC 中，a、b、c 如上定義，則我們有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R,$$

其中 R 爲爲三角形 ABC 的外接圓半徑。而餘弦定理是指，我們會有

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

對於 $\cos B$、$\cos C$ 也有類似的敘述。

問題 12. 求正整數 $2022!+2023!+2024!+2025!$ 除以 1013^2 的餘數。

解答. 注意到 $2022!+2023!+2024!+2025!$ 爲 1013 的倍數，我們不妨先求我們求 $S=(2022!+2023!+2024!+2025!)/1013$ 除以 1013 的餘數。使用威爾森定理 (Wilson's theorem)，即可得到，所求

$$S\equiv\frac{1}{(-1)(-2)(-3)}+\frac{1}{(-1)(-2)}+\frac{1}{(-1)}+1=\frac{1}{3} \pmod{1013}。$$

故可得 $S\equiv 3^{-1}\equiv 338 \pmod{1013}$。原題所求 1013×338。

附註. 關於更多數論的知識，可以參考以下這篇講義。

問題 13. 考慮質數對 (p,q)，使得 p^3+3q^3-32 也是質數。試求滿足所有可能的 (p,q)。

解答. 首先，若 p，q 皆爲奇數，則 p^3+3q^3-32 爲偶數，且

$$p^3+3q^3-32\geq 27+81-32=76,$$

明顯不合。故我們知道 p，q 至少其中一個爲 2。注意到，不可能 $p=q=2$，因爲此時 $p^3+3q^3-32=0$。第一個狀況：如果 $p=2$，則 $3q^3-24=3(q^3-8)$ 要是質數，然而，q^3-8 不可能爲 1，故這個狀況也沒有解。第二個狀況：如果 $q=2$，則 p^3-8 要是質數。此時 p 要爲 3，否則 $p^3-8=(p-2)(p^2-2p+4)$ 必爲合數。經檢驗發現 $(p,q)=(3,2)$ 的確滿足所有條件。

附註. 處理質數相關的問題時，考慮奇偶性常常是很直覺的想法，因爲偶質數只有一個，就是 2。

問題 14. 在 n 邊形中，對角線與邊最多可以圍出 M_n 個互不重疊的區域。若 $M_n \leq 2023$，則 n 最大爲多少？

解答. 首先我們先改作以下問題。在圓內接 n 邊形中，外接圓、對角線與邊最多可以圍出 A_n 個互不重疊的區域，求 A_n。注意到原問題 M_n 與新問題的 A_n，有以下關係：$M_n=A_n-n$。現在我們來求 A_n，我們使用遞迴的想法來解決問題。每次我們加入一個新點到圓上時，會與原本的 n 個頂點連出 n 條邊或對角線。值得注意的是，每一條新增的邊或對角線與原本的邊或對角線有不在頂點上的交點即表示會多切割出一塊區域。即使在沒有交點的狀況下，加入一條邊或對角線至少也會貢獻出一個區域。因此，我們有以下遞迴式：

$$A_{n+1}=A_n+\sum_{k=1}^{n}\big((k-1)(n-k)+1\big)=A_n+\frac{n(n^2-3n+8)}{6}\text{。}$$

由此遞迴式，我們可以算出

$$A_n=4+\sum_{k=3}^{n-1}\frac{k(k^2-3k+8)}{6}\qquad(n\geq 4)\text{。}$$

化簡即可得

$$A_n=\frac{n(n-1)(n^2-5n+18)}{24}+1\qquad(n\geq 4)\text{，}$$

因此，

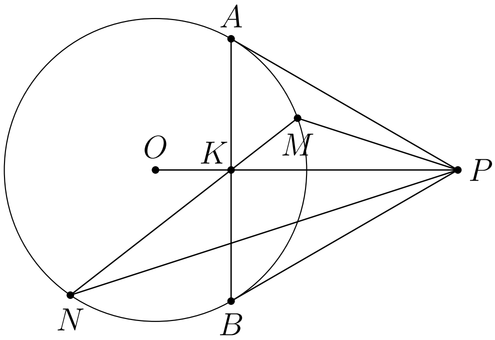
$$M_n=\frac{n(n-1)(n^2-5n+18)}{24}+1-n\qquad(n\geq 4)\text{。}$$

我們可以計算出 $M_{16}=1925$、$M_{17}=2500$，故最大的 n 爲 16。(更多關於 A_n 的資訊可見此OEIS 連結。)

附註. 此題省略的部分計算過程使用到了以下三個公式：

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\end{cases}$$

問題 15. 如下圖，通過 P 與圓 $\odot(O)$ 的切線分別切圓於 A 與 B，M 為劣弧 $\widehat{AB}$ 上一點，若通過 M 及 $\overline{AB}$ 中點的直線與圓 $\odot(O)$ 另外相交於 N，試證明：$\overline{OP}$ 平分 $\angle MPN$。

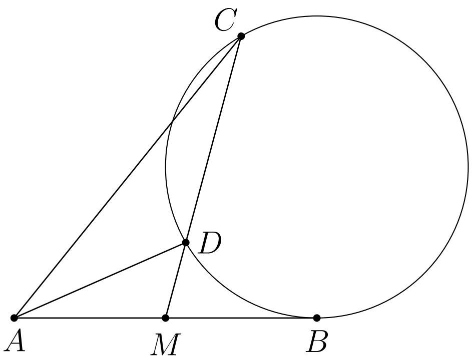


解答. 我們宣稱 O、P、M、N 四點共圓。令 K 為 $\overline{AB}$ 中點，則根據內冪定理 $\overline{KA}\cdot\overline{KB}=\overline{KM}\cdot\overline{KN}$。又根據子母相似定理，我們有 $\overline{KA}\cdot\overline{KB}=\overline{KA}^2=\overline{KO}\cdot\overline{KP}$。綜合以上，我們有

$$\overline{KM}\cdot\overline{KN}=\overline{KO}\cdot\overline{KP}，$$

根據內冪定理逆定理，我們知道 O、P、M、N 四點共圓。由於 $\overline{OM}=\overline{ON}$，故我們有 $\measuredangle MPO=\measuredangle OPN$，此即為所要求之結論。

問題 16. 如下圖，給定一圓 $\odot(O)$，A 為圓外一點、B 為圓上一點使得 AB 與圓 $\odot(O)$ 相切於 B。AC 為一條圓 $\odot(O)$ 的割線，M 為線段 AB 中點，CM 再交圓 $\odot(O)$ 於 D，求證：$\angle ACD=\angle BAD$。



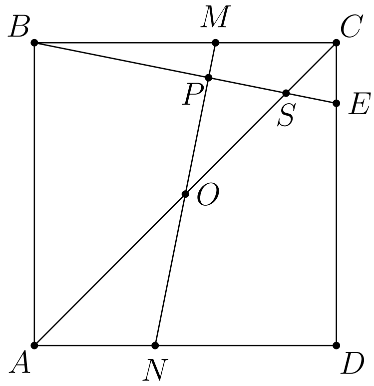
解答. 對 M 使用切割線定理，我們有 $\overline{MA}^2=\overline{MB}^2=\overline{MC}\cdot\overline{MD}$。故

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}}=\frac{\overline{MC}}{\overline{MA}},$$

因此，$\triangle MDA\sim\triangle MAC$。即得證 $\angle ACD=\angle ACM=\angle MAD=\angle BAD$。

問題 17. 見下圖，點 E、N 分別在正方形 $ABCD$ 的邊 DC、DA 上，滿足 $\overline{AN}:\overline{ND}:\overline{DE}=2:3:4$。過點 N 作 BE 的垂線與 BE 交於點 P、與 BC 交於點 M。AC 與

MN 交於點 O、與 BE 交於點 S。試求 $\triangle OPS$ 的面積與正方形 $ABCD$ 面積的比值爲何。



解答. 我們使用直角坐標計算，不妨假設正方形 $ABCD$ 的邊長爲 1、A 爲圓點 $(0,0)$ 且 AD 爲 x 軸。我們可以計算出 E 點座標爲 $(1,4/5)$，且 N 點座標爲 $(2/5,0)$。故直線 BE 的斜率爲 $-1/5$，可算出

$$BE : y = -\frac{1}{5}x + 1。$$

由於 $MN \perp BE$，因此直線 MN 斜率應爲 5，即得

$$MN : y = 5x - 2。$$

最後明顯有

$$AC : y = x。$$

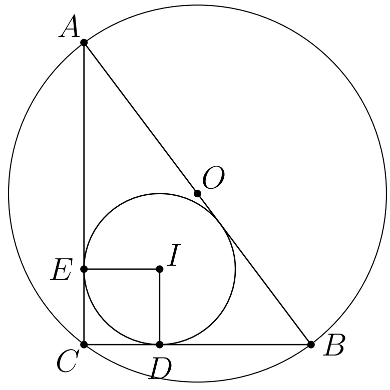
現在我們計算 O、P、S 三點座標。

易見 $P = (15/26, 23/26)$、$O = (1/2, 1/2)$、$S = (5/6, 5/6)$。由於 $\triangle OPS$ 爲直角三角形，因此其面積爲

$$\frac{1}{2}\overline{PS} \cdot \overline{PO} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{26}}{78} \cdot \frac{2\sqrt{26}}{26} = \frac{2}{39}。$$

故答案應爲 $2/39$。

問題 18. 一直角三角形 ABC 的外接圓半徑 R 與內切圓半徑 r 比值爲 $5/2$，求三角形三邊比。



解答. 首先我們把三角形三邊長記爲 a、b、c，我們不妨假設角 C 爲直角。則我們可以知道 $R = c/2$，又內切圓半徑爲

$$r = \frac{a+b-c}{2}\text{。}$$

故我們有

$$5a + 5b = 7c$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

將第一式代入第二式，則可以化簡得到

$$12a^2 - 25ab + 12b^2 = 0 \implies (3a-4b)(4a-3b) = 0\text{。}$$

簡單討論即可發現 $a : b : c = 3 : 4 : 5$ 或是 $a : b : c = 4 : 3 : 5$。無論如何，這樣的直角三角形邊長比必定爲 $3 : 4 : 5$。

問題 19. Γ_1, Γ_2 分別代表 $y = 2x^2$ 與 $y = \frac{1}{4}x^2$ 的函數圖形。正三角形 ABC 的頂點 A, B 在 Γ_1 上，C 在 Γ_2 上，且 B, C 皆落在第一象限上，直線 BC 平行 y 軸。求 B 座標。

解答. 我們假設 B, C 兩點的 x 座標爲 t $(t > 0)$，則有

$$B = (t, 2t^2) \qquad \text{且} \qquad C = \left(t, \frac{1}{4}t^2\right)\text{。}$$

由於 $\triangle ABC$ 爲正三角形，A 點的 x 座標應該爲 $t - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{7}{4}t^2$，而 A 點的 y 座標應爲 $\frac{9}{8}t^2$。又 $A \in \Gamma_1$，即可得到

$$\begin{aligned}
\left(t - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{7}{4}t^2\right)^2 &= \frac{9}{16}t^2 \\
\implies \qquad t - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{7}{4}t^2 &= \pm\frac{3}{4}t \\
\implies \qquad t &= \frac{2}{7\sqrt{3}} \quad \text{或} \quad \frac{2}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

因此可能的答案爲 $\left(\frac{2}{7\sqrt{3}}, \frac{8}{147}\right)$ 以及 $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{8}{3}\right)$。

附註. 我們關鍵的想法是，給定 B, C 的 x 座標 (假設爲 $t > 0$)，我們便可以計算出 A' 的座標 (以 t 表示) 使得 $\triangle A'BC$ 爲正三角形，此時我們再去找所有 A' 使得 $A' \in \Gamma_1$。此外，若要滿足原題的圖形，即 A 在第二象限，則答案只剩下後者。

問題 20. 正整數 n 有恰好 4 個正因數，已知 n 最大與最小的正因數之和是另兩個正因數之和的 15 倍，則滿足這樣的 n 有多少個?

解答. 我們用 $\mathbb{P}$ 表示所有質數形成的集合。則 n 只能是 pq 或是 r^3，其中 $p,q,r \in \mathbb{P}$，且 $p \neq q$。我們分別討論兩種狀況，情形一：$n = pq$，則有 $pq+1 = 15(p+q)$，強迫因式分解即可得到

$$(p-15)(q-15) = 224。$$

考慮以下表格

$p-15$	$q-15$	p	q	滿足條件
1	224	16	239	否
2	112	17	127	是
4	56	19	71	是
7	32	22	47	否
8	28	23	43	是
14	16	29	31	是

表 1: 問題20

可以看出情形依總共有 4 種可能的 n。接著考慮情形二：$n = p^3$ $(p \in \mathbb{P})$，則有 $p^3+1 = 15(p^2+p)$，可化簡爲 $p^2-16p+1=0$，此方程式無整數解。故答案爲 4 種可能的 n。

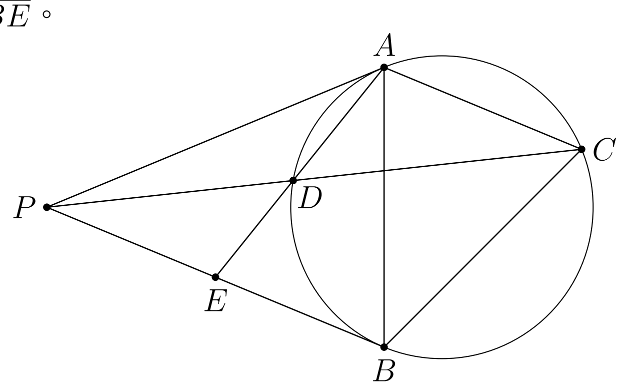
附註. 這題的關鍵應該是強迫因式分解的技巧。這個技巧很常出現在下面類型的題目：給定方程式 $xy+ax+by=c$，其中 a,b,c 爲給定的整數，求所有滿足方程的整數解 (x,y)。這類型的題目可以把原方程式轉換爲

$$(x+b)(y+a) = c+ab，$$

由於只要求整數解，所以我們可以暴力討論所有可能的因數。

問題 21. 過 $\odot(O)$ 外一點 P 作 $\odot(O)$ 的兩條切線，切點爲 A,B，過 A 作 PB 之平行線，交 $\odot(O)$ 於 C 點，連 PC 再交 $\odot(O)$ 於 D，直線 AD 交直線 PB 於 E。求證：

1. $\overline{EP}^2 = \overline{ED} \cdot \overline{EA}$。
2. $\overline{BC}^2 = 2\overline{AC} \cdot \overline{BE}$。



解答. 首先，觀察到 $\measuredangle EPD = \measuredangle ACD = \measuredangle PAD$，故有 $\triangle EPD \sim \triangle EAP$，即可得到 $\overline{EP}^2 = \overline{ED} \cdot \overline{EA}$。現在我們證明第二部分，我們宣稱 $\measuredangle ACB = \measuredangle ABP$。這是對的，因爲

$$\measuredangle ACD = \measuredangle ABD \qquad 且 \qquad \measuredangle DCB = \measuredangle DBP。$$

現在，注意到因爲 AC 平行 PB，所以 $\measuredangle BAC = \measuredangle ABP = \measuredangle PAB$。故有 $\triangle ABC \sim \triangle APB$，我們得到

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}} \implies \overline{PA} \cdot \overline{AC} = \overline{AB}^2。$$

由 $\triangle ABC \sim \triangle APB$ 可知 $\overline{BA} = \overline{BC}$，因此我們有

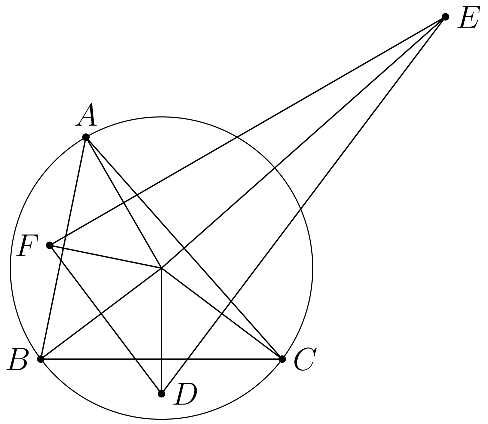
$$\overline{BC}^2 = \overline{PB} \cdot \overline{AC}。$$

我們剩下證明 $\overline{PB} = 2\overline{EB}$，等價 $\overline{PE} = \overline{EB}$。根據切割線定理，我們有

$$\overline{EB}^2 = \overline{ED} \cdot \overline{EA}，$$

綜合第一子題的結論，即可得到 $\overline{PE} = \overline{EB}$。故得證。

問題 22. 三角形 ABC 中，O 爲外心，外接圓半徑爲 6，$\overline{OA}, \overline{OB}$ 與 $\overline{OC}$ 的中垂線圍成三角形 DEF。若 $\triangle DEF$ 的面積爲 21，試求 $\triangle DEF$ 的周長。



解答. 我們用 $[S]$ 代表多邊形 S 的面積，將外接圓半徑計爲 R。則有 $[\triangle DEF] = [\triangle ODE] + [\triangle OEF] + [\triangle OFD]$。故

$$[\triangle DEF] = \frac{R}{4} \cdot (\overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FD})，$$

因此所求爲 $4[\triangle DEF]/R = 14$。

附註. 因爲 O 到 $\triangle DEF$ 三邊等距 $(R/2)$，所以 O 爲 $\triangle DEF$ 內心。

問題 23. 已知 $a, b \in \mathbb{R}^+$（正實數），且 $a+b=3$，試求 $\dfrac{a^2+4}{a}+\dfrac{b^2}{b+3}$ 的最小值。

解答. 首先，我們將算式化簡爲

$$a+\frac{4}{a}+b-3+\frac{9}{b+3}=\frac{4}{a}+\frac{9}{b+3}\text{。}$$

接著，使用柯西不等式我們可以有

$$\left(\frac{4}{a}+\frac{9}{b+3}\right)(a+b+3)\geq(2+3)^2\text{，}$$

故

$$\frac{4}{a}+\frac{9}{b+3}\geq\frac{25}{6}\text{。}$$

而等號成立若且唯若 $a=2t$ 且 $b+3=3t$（其中 $t\in\mathbb{R}^+$），可計算出此時 $a=12/5, b=3/5$。

附註. 這邊提供一個很多人會寫錯的解。首先，我們一樣先將算式化簡爲

$$a+\frac{4}{a}+b-3+\frac{9}{b+3}=a+\frac{4}{a}+(b+3)+\frac{9}{b+3}-6\text{。}$$

使用算幾不等式可得

$$a+\frac{4}{a}\geq 4 \qquad \text{以及} \qquad (b+3)+\frac{9}{b+3}\geq 6\text{，}$$

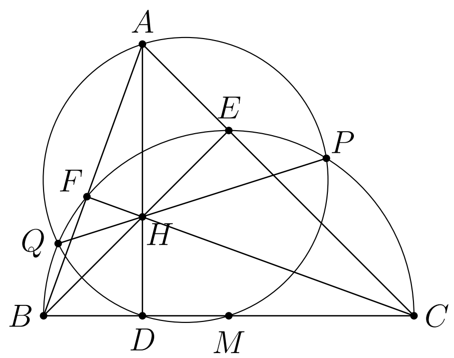
故最小值爲 4。

這個解答看似非常有說服力，只是要確保這個最小值是可以被達到的。我們進一步看等號成立條件即會有等號成立若且唯若

$$a=2 \qquad \text{以及} \qquad b+3=3\text{，}$$

明顯不符合條件。

問題 24. 已知 H 爲三角形 ABC 的垂心，自 A 向以 $\overline{BC}$ 爲直徑的圓做切線，切點爲 P 及 Q。試證明：P, Q 與 H 三點共線。

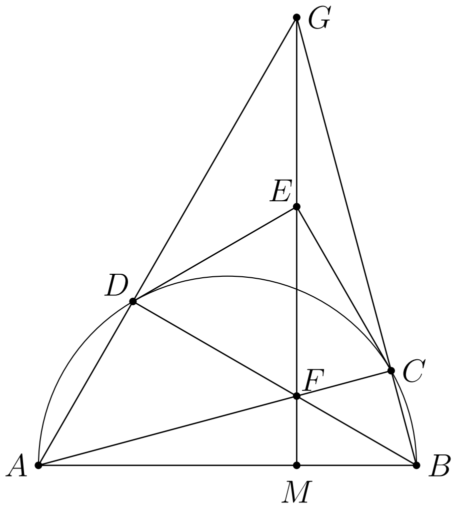


解答. 假設三角形 ABC 的三高垂足爲 D, E 與 F，且令 M 爲 $\overline{BC}$ 中點。則我們有 A, P, Q 以及 M 四點共圓，因爲 $\measuredangle APM = \measuredangle AQM = \pi/2$，此圓以 $\overline{AM}$ 爲直徑。亦注意到 B, C, P, Q 也四點共圓，且以 $\overline{BC}$ 爲直徑。故 $\overline{PQ}$ 爲 $\odot(AM)$ 與 $\odot(BC)$ 的根軸（我們用 $\odot(XY)$ 表示以 $\overline{XY}$ 爲直徑的圓），若要證明 H 在直線 PQ 上，我們只要證明 H 對 $\odot(AM)$ 與 $\odot(BC)$ 的冪是一樣的。

注意到 H 對 $\odot(AM)$ 的冪爲 $\overline{HA}\cdot\overline{HD}$，且 H 對 $\odot(BC)$ 的冪爲 $\overline{HB}\cdot\overline{HE}$ 或 $\overline{HC}\cdot\overline{HF}$。然而，注意到 A, B, D, E 四點共圓，根據內冪定理我們有 $\overline{HA}\cdot\overline{HD} = \overline{HB}\cdot\overline{HE}$，故證明了 H 對 $\odot(AM)$ 的冪等於 H 對 $\odot(BC)$ 的冪。

附註. 給定兩圓 $\odot(O_1), \odot(O_2)$，此兩圓的根軸爲對兩圓有相同冪的點。關於更多根軸的敘述，請見此連結。

問題 25 (改編). 如圖，給定一直徑圓 $\odot(AB)$，自圓外一點 E 作兩切線，切點分別爲 C 與 D。$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 相交於 F，直線 EF 與 $\overline{AB}$ 相交於 M，試證明：B, C, F, M 四點共圓且亦 A, D, F, M 四點共圓。



解答. 令直線 BC 與 AD 交於 G，E' 爲 $\overline{FG}$ 中點，M' 爲 FG 交 AB，我們宣稱直線 $E'C$ 與 $E'D$ 皆與 $\odot(AB)$ 相切。(值得注意的是 E 不一定等於 E'，M 也不一定等於 M'，雖然後面我們會看到他們都一樣。)

首先注意到因爲 $\measuredangle GCF = \measuredangle GDF = \pi/2$，所以 C, D, F, G 四點共圓，且 $\overline{FG}$ 爲直徑，因此 E' 爲 $\odot(CDFG)$ 的圓心。此外，易見 F 是三角形 ABG 的垂心。

現在我們即有

$$\measuredangle E'CA = \measuredangle E'CF = \measuredangle CFE' = \measuredangle CFG = \measuredangle GBA = \measuredangle CBA,$$

這告訴我們 $E'C$ 與 $\odot(AB)$ 相切，類似地，$E'D$ 也與 $\odot(AB)$ 相切，因此 $E' = E$，$M' = M$。

而 B, C, F, M 四點共圓現在就顯然了，因爲 $M = M'$ 爲直線 GF 交 $\overline{AB}$，故 $\measuredangle FMB = \measuredangle FCB = \pi/2$。類似地，$A, D, F, M$ 亦四點共圓。

附註. 這題的作法中，我使用了一個幾何常見的手法——同一法。這個手法是假設我們現在要證明 $P \implies Q$ 時，我們改成證明 $Q \implies P$。雖然這樣在邏輯上常常是不對的，但很多幾何題可以這樣使用，不過通常仰賴一些「唯一性」的性質。在這題當中我們其實想要證明的是

如果 E 是 C, D 關於 $\odot(AB)$ 切線的交點，則 E 是 $\overline{FG}$ 的中點。

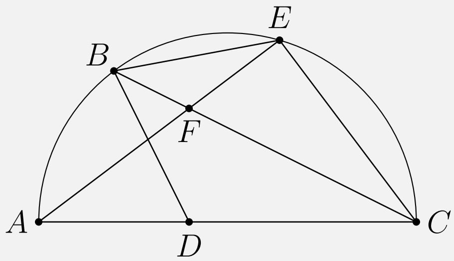
而我們實際證明的是

如果 E 是 $\overline{FG}$ 的中點，則 E 是 C, D 關於 $\odot(AB)$ 切線的交點。

這兩件事是等價的，因爲只存在一個點 E 滿足 EC, ED 皆與 $\odot(AB)$ 相切。

問題 26. 考慮一直徑圓 $\odot(AC)$，其直徑的長度爲 L，B 爲圓上相異於 A 與 C 的點，將劣弧 $\widehat{BC}$ 對直線 BC 作對稱與 $\overline{AC}$ 相交於 D。若 $\overline{AD} : \overline{DC} = 2 : 3$，試求 $\overline{BC}$ 的長度。可參考下圖（示意圖，未按照比例繪製）。

解答. 作 D 關於直線 BC 的對稱點 E，AE 交 BC 於 F。



注意到 $\triangle BEC \simeq \triangle BDC$，所以有 BC 平分 $\angle ACE$。根據角平分線長公式，我們有

$$\overline{CF}^2 = \overline{CE} \cdot \overline{CA} - \overline{EF} \cdot \overline{FA}。 \tag{13}$$

又因爲 $\triangle CBE \sim \triangle CAF$（爲什麼?）我們有

$$\overline{CB} \cdot \overline{CF} = \overline{CE} \cdot \overline{CA}。 \tag{14}$$

綜合 (13) 以及 (14)，我們有

$$\overline{CB} = \frac{\overline{CE} \cdot \overline{CA}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{CE} \cdot \overline{CA}}{\left(\overline{CE} \cdot \overline{CA} - \overline{EF} \cdot \overline{FA}\right)^{1/2}}。 \tag{15}$$

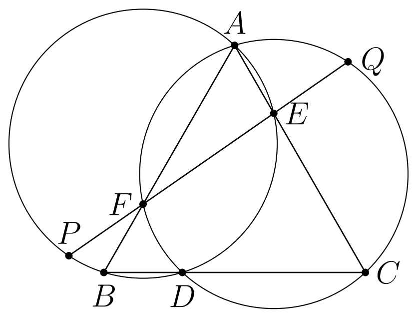
而我們有 $\overline{CE} = \overline{CD} = \frac{3}{5}L$，又 $\overline{EF} : \overline{FA} = \overline{CE} : \overline{CA} = 3 : 5$，故

$$\overline{EF} = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{5}L = \frac{3}{10}L \qquad 及 \qquad \overline{FA} = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{5}L = \frac{1}{2}L。$$

全部代入 (15)，即可得

$$\overline{CB} = \frac{(3/5 \cdot 1)L^2}{\left((3/5) \cdot (1) - (3/10) \cdot (1/2)\right)^{1/2} L} = \frac{2\sqrt{5}}{5}L。$$

問題 27. 在正三角形 ABC 中，D 在 $\overline{BC}$ 上，$\overline{BD}=a,\overline{CD}=b$ $(a\neq b)$，$\triangle ABD$ $\triangle ACD$ 的外接圓分別交 $\overline{AC}$ 及 $\overline{AB}$ 於 E 與 F。直線 EF 再交 $\odot(ABD)$ 與 $\odot(ACD)$ 於 P 與 Q。試求 $\overline{PQ}$。(答案以 a,b 表示。)



解答. 首先，由於 $\measuredangle EAB=\measuredangle ABD$，$EABD$ 爲等腰梯形，故 $\overline{EA}=\overline{DB}=a$。類似地，$\overline{FA}=b$。現在我們可以計算 $\overline{EF}$，根據餘弦定理可以知道

$$\overline{EF}=\sqrt{a^2+b^2-ab}。$$

根據内冪定理我們有

$$\overline{FB}\cdot\overline{FA}=\overline{FE}\cdot\overline{FP} \qquad 且 \qquad \overline{EA}\cdot\overline{EC}=\overline{EQ}\cdot\overline{EF}。$$

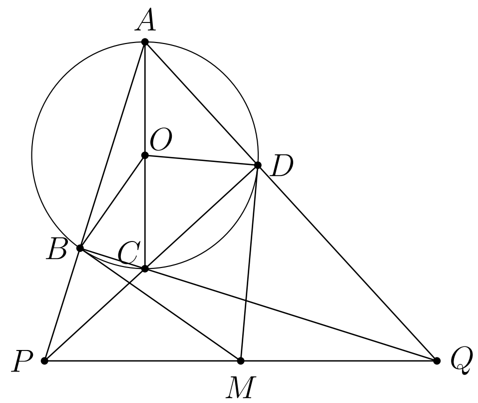
可計算出 $\overline{FP}=\overline{EQ}=ab/\sqrt{a^2+b^2-ab}$。故解爲

$$\overline{PQ}=\frac{a^2+b^2+ab}{\sqrt{a^2+b^2-ab}}。$$

附註. 這題使用的線段皆爲無向線段，即任何線段長度皆爲正。此外，正弦定理是指，三角形 ABC 中，若角 A 的對邊長記爲 a，b, c 類似定義，則有

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C。$$

問題 28. 考慮圓内接四邊形 $ABCD$，其中 $\overline{AC}$ 是直徑，$\overline{BD}$ 是不通過圓心的弦。令 P 與 Q 是直線 AB 與 CD 以及 AC 與 BD 的交點。試證明：通過 B 與 D 的切線相交於 $\overline{PQ}$ 中點。



解答. 首先，因爲 $\overline{AC}$ 爲圓的直徑，所以 $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC = \pi/2$，故 C 爲 $\triangle APQ$ 的垂心。令 O 爲 $\overline{AC}$ 中點，則我們有 $\measuredangle ODC = \measuredangle DCO = \measuredangle DCA = \measuredangle AQP$，即 OD 與 $\odot(PQ)$ 相切，類似的，OB 與 $\odot(PQ)$ 相切。因此，我們有 $\measuredangle OBM = \measuredangle ODM = \pi/2$，此也代表 MD, MB 爲 $\odot(ABCD)$ 的切線。

附註. 這題本質上與**問題25**是一樣的，都是證明以下定理 (**定理2**)。

定理 2. 三角形 ABC 中，H 爲垂心，BH, CH 分別交 CA, AB 於 E, F。令 $\overline{AH}$ 中點爲 O，$\overline{BC}$ 中點爲 M，則 $\measuredangle OEM = \measuredangle OFM = \pi/2$。

這個定理有兩個直接推論。

推論 2.1. 三角形 ABC 中，H 爲垂心，BH, CH 分別交 CA, AB 於 E, F，並令 $\overline{AH}$ 中點爲 O，$\overline{BC}$ 中點爲 M。則以下敘述正確：

1. ME, MF 皆與 $\odot(AH) = \odot(AHEF)$ 相切。
2. OE, OF 皆與 $\odot(BC) = \odot(BCEF)$ 相切。

問題 29. 已知 a, b, c 爲方程式 $x^3 - 3x^2 - 5x - 1 = 0$ 的三相異根，試求下列算式之值：

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c} - \sqrt[3]{a}}\right)^2。$$

解答. 注意到最後的值不與 a, b, c 的順序有關。現在我們因式分解原方程式，可得 $(x+1)(x^2-4x-1) = 0$，故三個解爲 -1, $2+\sqrt{5}$, $2-\sqrt{5}$。令 $p = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ 及 $q = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$，代入 $a = 2+\sqrt{5}$, $b = 2-\sqrt{5}$, $c = -1$，則所求可化爲

$$\left(\frac{1}{p-q} + \frac{1}{q+1} + \frac{-1}{1+p}\right)^2 = \left(\frac{1}{p-q} + \frac{p-q}{(p+1)(q+1)}\right)^2。$$

注意到 $pq = \sqrt[3]{-1} = -1$，故可以進一步化簡爲

$$\left(\frac{1}{p-q} + \frac{p-q}{p+q}\right)^2。$$

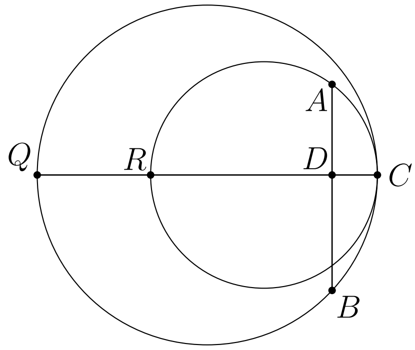
考慮

$$\begin{cases} 4 = p^3 + q^3 = (p+q)^3 - 3pq(p+q) = s^3 + 3s & (s := p+q) \\ 2\sqrt{5} = p^3 - q^3 = (p-q)^3 + 3pq(p-q) = t^3 - 3t & (t := p-q) \end{cases}$$

又注意到 $s^3 + 3s - 4 = (s-1)(s^2+s+4) = 0$ 只有一個實數解 $s = 1$，且 $t^3 - 3t - 2\sqrt{5} = (t-\sqrt{5})(t^2+\sqrt{5}t+2) = 0$ 亦只有一個實數解 $t = \sqrt{5}$。所求爲

$$\left(\frac{1}{t} + \frac{t}{s}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{5}\right)^2 = \frac{36}{5}。$$

問題 30 (微改編). 假設 R 是線段 $\overline{CQ}$ 上一點。若一直線垂直 CQ 分別交 $\odot(CR)$ 與 $\odot(CQ)$ 於 A, B，且 A, B 位於直線 CQ 的異側。若三角形 ABC 的半徑爲 r，試證 $\overline{CQ}\cdot\overline{CR} = 4r^2$。



解答. 作 $D = AB \cap CQ$。根據正弦定理，我們有 $2r = \dfrac{\overline{BC}}{\sin\angle CAB} = \dfrac{\overline{CB}}{\overline{CD}/\overline{CA}}$。又根據子母相似定理，我們有

$$\overline{CA}^2 = \overline{CD}\cdot\overline{CR} \qquad \text{且} \qquad \overline{CB}^2 = \overline{CD}\cdot\overline{CQ}。$$

帶入前面得到的式子，即可得到

$$2r = \frac{\overline{CB}\cdot\overline{CA}}{\overline{CD}} = \frac{\left(\overline{CD}\cdot\overline{CR}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{CQ}\right)^{1/2}}{\overline{CD}} = \sqrt{\overline{CR}\cdot\overline{CQ}},$$

此即爲所求。

問題 31. 已知正實數 a, b, c 滿足

$$\frac{8a^2}{a^2+9} = b \qquad 、 \qquad \frac{10b^2}{b^2+16} = c \qquad \text{且} \qquad \frac{6c^2}{c^2+25} = a。$$

試求 $a+b+c$ 之值。

解答. 考慮三式相乘，我們有

$$6\cdot 8\cdot 10\cdot abc = (a^2+9)(b^2+16)(c^2+25)。$$

根據算幾不等式，我們有

$$a^2+9 \geq 6a \qquad b^2+16 \geq 8b \qquad c^2+25 \geq 10c,$$

由此可知，

$$(a^2+9)(b^2+16)(c^2+25) \geq (6a)(8b)(10c)。$$

這代表三個算幾不等式的等號都要成立，故 $a = 3, b = 4$ 且 $c = 5$，代回原方程驗證確實是解，故所求爲 12。

問題 32. 假設拋物線 $\Gamma: y = x^2 - 2x + a$ 的頂點在直線 $L: mx - y + m = 0$ 移動，爲使拋物線 $\Gamma': y = -x^2$ 與 Γ 有交點，試求 m 的範圍。

解答. 首先注意到 Γ 與 Γ' 有交點等價以下 x 的方程式有實數解：

$$2x^2 - 2x + a = 0。$$

這等價 $4 - 8a \geq 0$ 即 $a \leq 1/2$。現在注意到 Γ 的頂點爲 $(1, a-1)$ 在 L 上，代表 $m = (a-1)/2$。因爲 $a - 1 \leq -1/2$，故 $m \leq -1/4$，此即爲所求。

問題 33. 當座標平面上的點 (x, y) 之座標 x 與 y 都是整數時，點 (x, y) 被稱爲格子點。數學家已知：座標平面上，三個頂點皆爲格子點的三角形之面積可以用公式 $I + \frac{S}{2} - 1$ 來表示，其中 S 代表三角形三邊邊上的格子點數，而 I 是落在三角形內部 (不含邊上) 的格子點數。已知 $\triangle ABC$ 的三頂點皆爲格子點且面積爲 12 平方單位，則此 $\triangle ABC$ 內部及邊上的格子點數總和最多有 m 個，最少有 n 個，試求 (m, n)。

解答. 所求即爲 $I + S$ 的最大最小值。根據題目給的公式，我們有 $2I + S = 26$，故 $I + S = 26 - I$，我們等價最大化或最小化 I 的值，這也等價最大化或最小化 S 的值。注意到由於三個頂點都是格子點，所以 $S \geq 3$，又因爲 I, S 都是非負整數，所以 $26 \geq S \geq 4$。

首先，$S = 4$，則 $I + S = 15$ 是最小值，須注意我們還須證明這樣三角形的存在性，即最小值是可以被達到的。考慮 $A(0, 12), B(-1, 0), C(1, 0)$ 即滿足 $I + S = 15$。接著我們考慮 $S = 26$ 的情形，此時 $I + S = 26$，而此最大值被 $A(0, 1), B(-12, 0), C(12, 0)$ 達到。綜合以上，所求爲 $(26, 15)$。

問題 34. 試求方程式 $y^3 = x^2 + x$ 的整數解。

解答. 注意到 $f(x) = x^2 + x$ 滿足 $f(x) = f(-x-1)$，所以若 (x, y) 爲解，則有 $(-x-1, y)$ 爲解，故我們可以僅考慮所有 $x \geq 0$ 的解。顯然 $x = 0$ 有 $y = 0$ 是解。現假設 $x > 0$，注意到 $\gcd(x, x+1) = 1$ 所以 x 與 $x + 1$ 要同時是完全立方數，然而這不可能，故所有解只有 $(0, 0)$ 以及 $(-1, 0)$。

問題 35 (2017 IMO P4)**.** 令 R 與 S 爲圓 Ω 上相異兩點使得 RS 不是直徑。令 ℓ 爲 R 關於 Ω 的切線。點 T 爲直線 RS 上一點使得 S 爲線段 RT 的中點。選擇點 J 在 Ω 上的劣弧 RS 使得三角形 JST 的外接圓 Γ 交 ℓ 於兩相異點。令 A 爲 Γ 與 ℓ 較接近 R 的交點。直線 AJ 再交 Ω 於 K。試證：直線 KT 與 Γ 相切。以下是英文的題敘：

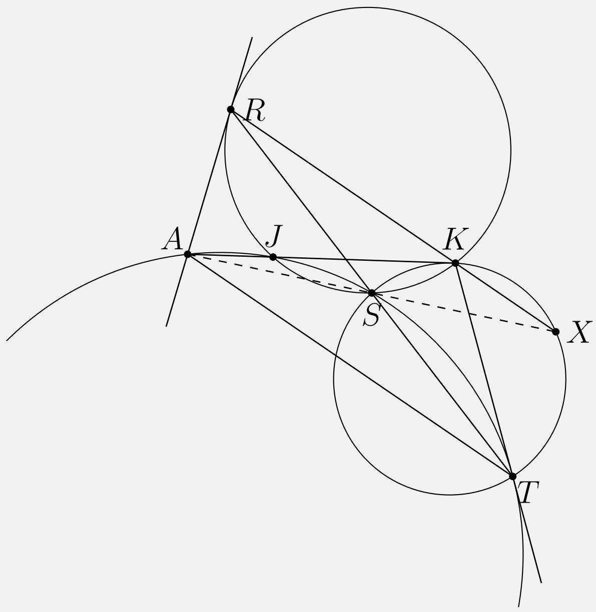
Let R and S be different points on a circle Ω such that RS is not a diameter. Let ℓ be the tangent line to Ω at R. Point T is such that S is the midpoint of the line segment RT. Point J is chosen on the shorter arc RS of Ω so that the circumcircle Γ of triangle

JST intersects ℓ at two distinct points. Let A be the common point of Γ and ℓ that is closer to R. Line AJ meets Ω again at K. Prove that the line KT is tangent to Γ.

解答. 參考下頁的圖，首先我們證明以下兩個小引理。

宣稱 1. 直線 RK 平行直線 AT。

證明. 根據 $\measuredangle RKJ = \measuredangle RSJ = \measuredangle TAJ$，因爲内錯角相等所以平行。 □



宣稱 2. 假設直線 RK 再交 $\odot(KST)$ 於 X，則 $RXTA$ 爲平行四邊形。因此 A, S, X 三點共線。

證明. 根據 $\measuredangle ARS = \measuredangle RKS = \measuredangle XTS$，因爲内錯角相等，所以直線 AR 平行直線 XT。 □

現在我們證明直線 KT 與 $\Gamma = \odot(JST)$ 相切。這等價證明 $\measuredangle KTS = \measuredangle TAS$ (弦切角)，然而這是對的，因爲

$$\measuredangle KTS = \measuredangle KXS = \measuredangle TAS，$$

第一個等號成立因爲 K, X, T, S 四點共圓，第二個等號成立則是根據我們的宣稱2。

附註. 原本您傳給我的題目只要把 B 換成 J 且把 C 換成 K 就是 2017 年 IMO 的第四題了! 此外，這一題其實很多算角度的部分是重疊的，像是兩個宣稱都可以用雷姆定理詮釋：

定理 3 (雷姆定理/Reim's Theorem). *假設兩圓 $\odot(O_1), \odot(O_2)$ 相交於相異兩點 M, N，假設 ℓ_M, ℓ_N 分別爲過 M, N 的直線，且令 ℓ_M 交 $\odot(O_1), \odot(O_2)$ 於 A_1, A_2；令 ℓ_N 交 $\odot(O_1), \odot(O_2)$ 於 B_1, B_2。則 A_1B_1 平行 A_2B_2。若 $A_1 = B_1$，則 A_1B_1 表示 A_1 在 $\odot(O_1)$ 上的切線。*

這個定理的證明就是直接算角就可以了。

問題 36. 試求聯立方程式

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz \\ x^2 = 2(y+z) \end{cases}$$

的正整數解。

解答. 第一式等價 $\frac{1}{2}(x-y-z)\left((x+y)^2+(-y+z)^2+(-z-x)^2\right)=0$(參考備註中的乘法公式)，故可知第一式等價

$$x = y+z \qquad \text{或} \qquad -x = y = z。$$

第一種情況 $x=y+z$，我們代入第二條方程式可以得到 $x^2=2x$，故 $x=0,2$，由於我們只要正整數解，所以 $x=2$，此時 $y+z=2$ 的正整數解只有 $y=z=1$。第二種情況 $-x=y=z$，我們代入第二條方程式可以得到 $x^2=-2x$，沒有正整數解。故唯一的正整數解為 $(2,1,1)$。

附註. 我們使用了因式分解公式

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)。$$

2 2023 秋

問題 37. 已知 a,b,c 滿足

$$\begin{cases} (a+b)(b+c)(c+a)=abc \\ (a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3)=a^3b^3c^3 \end{cases}。$$

試求所有 abc 的可能值。

解答. 首先我們考慮 a,b,c 當中有 0 的情形，不妨假設 $a=0$，只要 $b=0$、$c=0$ 或是 $b+c=0$ 其一即可滿足方程式，故 0 為其中一個可能的 abc 值。現假設 a,b,c 皆不為 0，則我們將第二式除以第一式，可以得到

$$(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)=a^2b^2c^2。$$

我們聲稱 $a^2-ab+b^2 \geq |ab|$。這是對的，因為

$$a^2-ab+b^2 \geq ab \qquad \text{且} \qquad a^2-ab+b^2 \geq -ab。$$

因此，我們有

$$(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2) \geq a^2b^2c^2。$$

由於此不等式的等號成立，我們可以推論出 $a=b$ 或是 $a=b=0$，而這敘述的輪

換都對。然而我們已經假設 a, b, c 皆不爲 0，所以我們可以得到 $a = b = c$，帶回原式又得到 $a = b = c = 0$，不合。因此，可能的 abc 值只有 0。

問題 38. 已知正整數 x, y 滿足 xy 整除 $x^2 + y^2 + 1$，即

$$xy \mid x^2 + y^2 + 1,$$

試求 $(x^2 + y^2 + 1)/(xy)$ 之值。

解答. 令 $k = \dfrac{x^2 + y^2 + 1}{xy}$，根據算幾不等式，我們有 $x^2 + y^2 \geq 2xy$，所以 $k \geq 3$。現在我們假設某個 k 有解，意思即爲存在正整數 x, y 使得 $x^2 + y^2 + 1 = kxy$。固定這個 k，並考慮其解 (x, y) 中 $x + y$ 值最小的，稱爲 (x_0, y_0)，此外，我們不妨假設 $x_0 \leq y_0$。則我們聲稱 $(x_0, kx_0 - y_0)$ 也是一組正整數解。注意到，t 的方程式 $t^2 - kx_0 t + x_0^2 + 1 = 0$ 有整數解 y_0，所以 $kx_0 - y_0$ 爲此方程式的第二個整數解，且根據根與係數關係

$$kx_0 - y_0 = \frac{x_0^2 + 1}{y_0} > 0,$$

故 $kx_0 - y_0$ 爲正整數。

根據我們的假設 (x_0, y_0) 是所有滿足 $x^2 + y^2 + 1 = kxy$ 的 (x, y) 當中，$x + y$ 值最小的解。因此 $kx_0 - y_0 \geq y_0$，也就是說 y_0 爲方程式 $t^2 - kx_0 t + x_0^2 + 1 = 0$ 的較小根。再根據我們的假設 $y_0 \geq x_0$，我們有

$$\begin{aligned}
\frac{kx_0 - \sqrt{k^2x_0^2 - 4(x_0^2 + 1)}}{2} \geq x_0 &\iff (k-2)x_0 \geq \sqrt{k^2x_0^2 - 4(x_0^2 + 1)} \\
&\iff (k-2)^2 x_0^2 \geq k^2 x_0^2 - 4(x_0^2 + 1) \\
&\iff 4 \geq (4k - 8)x_0^2
\end{aligned}$$

這說明了 $k < 4$，否則 $(4k - 8)x_0^2 \geq 8 > 4$ 不合。綜合以上，$k = 3$ 且 $x_0 = 1$ 爲唯一滿足此不等式的正整數解。易驗證 $(1, 1)$ 確實爲解，此時 $k = 3$。

附註. 這題我所使用的手法叫做韋達跳 (Vieta jumping)，這個技巧被廣泛在競賽圈討論與使用是在 1988 年 IMO 的 P6 之後。該題的題敘如下：

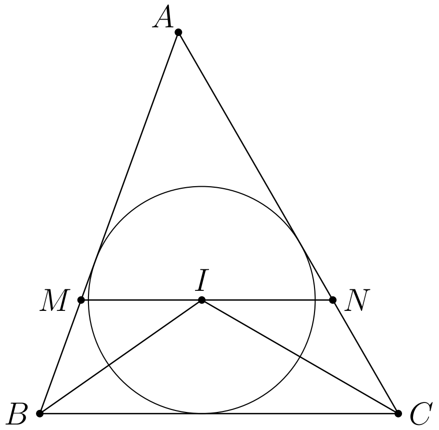
問題 39. 設 a, b 爲兩正整數使得 $ab + 1$ 整除 $a^2 + b^2$。試證明：$\dfrac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ 爲完全平方數。

除此之外，用韋達跳可以找出所有解如下，假設 t_n 爲滿足以下遞迴式的正整數數列：

$$t_{n+2} = 3t_n - t_{n+1} \qquad t_1 = 1 \qquad t_2 = 1,$$

則所有 (t_n, t_{n+1}) $(n \in \mathbb{N})$ 爲解。

問題 40 (微改編). 已知 $\triangle ABC$ 的內切圓圓心爲 I，過 I 作平行 BC 的直線分別交 $\overline{AB},\overline{AC}$ 於 M,N。試證明：$\overline{MN}=\overline{BM}+\overline{CN}$，且試以 $\overline{BM},\overline{CN}$ 及內切圓半徑 r 表示梯形 $BMNC$ 的面積。



解答. 注意到 $\measuredangle MBI=\measuredangle IBC=\measuredangle BIM$，故 $\triangle MBI$ 爲等腰三角形，即有 $\overline{MB}=\overline{MI}$。類似地，我們也有 $\overline{NC}=\overline{NI}$，兩式相加即得 $\overline{MN}=\overline{BM}+\overline{CN}$。令 $x=\overline{BM},y=\overline{CN}$，則有梯形 $BMNC$ 的面積爲

$$\frac{1}{2}\cdot r\cdot\left(\sqrt{x^2-r^2}+\sqrt{y^2-r^2}+2(x+y)\right)\text{。}$$

附註. 我把原題的標點作了以下對應 $A\mapsto B$ 以及 $B\mapsto A$，主要是自己有某種強迫症。根據以上結果，原題答案爲 $2\sqrt{3}+\sqrt{5}+14$。

問題 41. $\triangle ABC$ 中的內心爲 I，且三邊長爲 a,b,c。試以 a,b,c 表示

$$a\overline{IA}^2+b\overline{IB}^2+c\overline{IC}^2\text{。}$$

解答. 假設 $\odot(I)$ 分別切 BC,CA 與 AB 於 D,E,F，並假設 r 爲內切圓半徑，$s=(a+b+c)/2$。則注意到 $\overline{IA}^2=\overline{AE}^2+r^2=\left(\frac{b+c-a}{2}\right)^2+r^2=(s-a)^2+r^2$。故所求爲

$$\begin{aligned}&a(s-a)^2+b(s-b)^2+c(s-c)^2+(a+b+c)r^2\\=&2s^3-2(a^2+b^2+c^2)s+(a^3+b^3+c^3)+2sr^2\end{aligned}$$

又熟知

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(a+b+c)r=[\triangle ABC]=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\\iff&s^2r^2=s(s-a)(s-b)(s-c)\\\iff&2sr^2=2(s-a)(s-b)(s-c)=-2s^3+2(ab+bc+ca)s-2abc\end{aligned}$$

代回前式即得所求爲

$$-(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)(a+b+c)+(a^3+b^3+c^3-2abc)=abc\text{。}$$

問題 42. 試化簡

$$\frac{x^3}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^3}{(y-z)(y-x)}+\frac{z^3}{(z-x)(z-y)}\text{。}$$

解答. 令該式爲 t，則有

$$\begin{aligned}(x-y)(y-z)(z-x)t &= x^3(z-y)+y^3(x-z)+z^3(y-x)\\ &= (x^3z-x^3y+y^3x-y^3z)+z^3(y-x)\\ &= (x-y)\left(x^2z+xyz+y^2z-x^2y-xy^2-z^3\right)\\ &= (x-y)\left(-x^2(y-z)-xy(y-z)+(yz+z^2)(y-z)\right)\\ &= (x-y)(y-z)(-x^2-xy+yz+z^2)\\ &= (x-y)(y-z)\left((z-x)(z+x)+y(z-x)\right)\\ &= (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)\end{aligned}$$

故可化簡爲 $t=x+y+z$。

附註. 將 $x=2018^2, y=2019^2, z=2020^2$ 代入即得求，而我們可以令 $u=2019$，則原式等於 $3u^2+2$。

問題 43. 已知正七邊形 $ABCDEFG$ 的邊長爲 2，試求 $\dfrac{1}{AC}+\dfrac{1}{AE}$。

解答. 首先注意到，在半徑爲 R 的圓中，圓周角 θ 對應到的弦爲 $2R\sin(\theta/2)$。假設該正七邊形的外接圓半徑爲 R，則我們有

$$\overline{AB}=2R\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)=2,\qquad \overline{AC}=2R\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right),\qquad \overline{AE}=2R\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)\text{。}$$

將 $2R$ 全部代換掉，可以得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{AC}+\frac{1}{AE} &= \frac{\sin(\pi/7)}{2}\left(\frac{1}{\sin(2\pi/7)}+\frac{1}{\sin(4\pi/7)}\right)\\ &= \frac{\sin(\pi/7)(\sin(2\pi/7)+\sin(4\pi/7))}{2\sin(2\pi/7)\sin(4\pi/7)}\\ &= \frac{\sin(\pi/7)\left(2\sin(3\pi/7)\cos(-\pi/7)\right)}{2\sin(2\pi/7)\sin(4\pi/7)} && \text{(和差化積)}\\ &= \frac{\sin(\pi/7)\cos(-\pi/7)}{\sin(2\pi/7)} && (\because \sin(3\pi/7)=\sin(4\pi/7))\\ &= \frac{1}{2} && \text{(二倍角公式)}\end{aligned}$$

故所求應爲 $1/2$。

問題 44. 已知正整數 x 與 y 滿足以下方程式 (16)，試求 $x+y$ 的最小值。

$$\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}=\frac{1}{2019} \tag{16}$$

解答. 左右兩邊同乘以 $2\cdot 2019\cdot xy$，則我們有

$$2019y+1346x=2xy \iff (2x-2019)(y-673)=3\cdot 673^2$$

爲方便起見，我們令 $u=673$。首先注意到 $2x>2019$ 且 $y>673$，所以我們可以建立以下表格：

$2x-3u$	$y-u$	x	y	$x+y$	是否爲解
1	$3u^2$	$(3u+1)/2$	$3u^2+u$	$3u^2+5u/2+1/2$	成立
3	u^2	$(3u+3)/2$	u^2+u	$u^2+5u/2+3/2$	成立
u	$3u$	$2u$	$4u$	$6u$	成立
$3u$	u	$3u$	$2u$	$5u$	成立
u^2	3	$(u^2+3u)/2$	$u+3$	$u^2/2+5u/2+3$	成立
$3u^2$	1	$(3u^2+3u)/2$	$u+1$	$3u^2/2+5u/2+1$	成立

表 2: 強迫因式分解因數分析

可見 $5u=3365$ 是 $x+y$ 最小值。

附註. 這題與之前出現過得強迫因式分解技巧非常類似!

問題 45. 在三角形 ABC 的外接圓上有一點 D，滿足 $\angle BAD=60^\circ$。若 $\overline{AB}=12,\overline{BC}=16,\overline{CA}=20$，試求 $\triangle ACD$ 的周長。

解答. 注意到 $\overline{AC}$ 爲 $\odot(ABC)$ 的直徑，令 $\theta=\angle BAC$，故 $\cos\theta=3/5,\sin\theta=4/5$。所求爲

$$\overline{AC}\cdot(1+\cos(\pi/3-\theta)+\sin(\pi/3-\theta))。$$

根據和差角公式，我們有

$$\begin{cases}\cos(\pi/3-\theta)=\dfrac{1}{2}\cos\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta=\dfrac{3+4\sqrt{3}}{10}\\[2ex] \sin(\pi/3-\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\dfrac{1}{2}\sin\theta=\dfrac{3\sqrt{3}-4}{10}\end{cases}。$$

因此，$\triangle ACD$ 的周長爲 $14\sqrt{3}+18$。

問題 46. 若非負整數 x,y 使 $2^6+2^x+2^{3y}$ 爲小於 10000 的完全平方數。試求 $x+y$ 的最大值。

解答. 首先，根據和的平方公式我們有 $72^2=2^6(1+2^3)^2=2^6+2^{10}+2^{12}=2^6+2^x+2^{3y}$ 是一組解，此時 $(x,y)=(10,4)$。現令 M 爲所有可能的 $x+y$ 中的最大值，根據以上條件 $M\geq 14$。如果 $M>14$，則因爲 $2^x<10000$ 且 $2^{3y}<10$，

我們有 $x \le 13$ 且 $y \le 4$。此時，我們有

$$x = M - y \ge 15 - 4 \qquad \text{且} \qquad y = M - x \ge 15 - 13，$$

故有 $x \ge 11$ 及 $y \ge 2$。我們可以推論 2^x 以及 2^{3y} 都被 2^6 整除。現在有 $1 + 2^{x-6} + 2^{3(y-2)}$ 是完全平方數。不妨令 $w^2 = 1 + 2^{x-6} + 2^{3(y-2)}$。

如果 $y = 2$，則可以得到 $w^2 \equiv 2 \pmod 4$，矛盾。故我們可以知道 $y \ne 2$ 且 w 是奇數。這告訴我們 $w \le 11$(否則 $11 \cdot 11 \cdot 64 > 10000$。)，此外注意到

$$w^2 = 1 + 2^{x-6} + 8^{y-2} \equiv 2 + 2^{x-6} \equiv 3, 4, 6 \pmod 7，$$

而唯一可能的解爲 $x = 13$，但這會導致矛盾，因爲 $2^{13-6} = 2^7 > 11^2$。故我們推論 $x + y$ 最大爲 14。

問題 47. 假設 $f(x) \ne g(x)$ 爲兩個領導係數爲 1 的二次多項式，且滿足

$$f(1) + f(2017) + f(2017^2) = g(1) + g(2017) + g(2017^2)，$$

試求滿足 $f(x) = g(x)$ 的 x 的值。

解答. 考慮 $h(x)$ 爲一個一次多項式 (f, g 領導係數皆爲 1)，且有

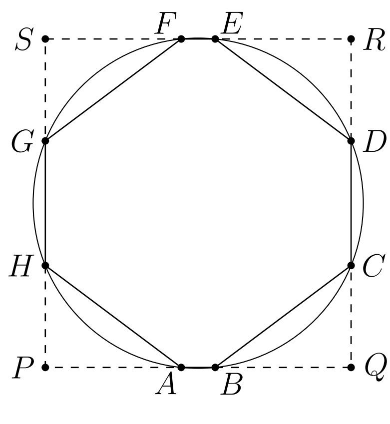
$$h(1) + h(2017) + h(2017^2) = 0。$$

由於 h 是線性函數，所以有

$$h\left(\frac{1 + 2017 + 2017^2}{3}\right) = 0 \implies h(1{,}356{,}769) = 0。$$

故所求爲 1,356,769。

問題 48. 假設一圓內接八邊形邊長分別爲 $3, 3, 11, 11, 15, 15, 15, 15$，試求其面積爲何？



解答. 首先，我們可以改變其邊長順序，只要還維持八邊形還是共圓的，即可確保面積不會改變。如圖，八邊形 $ABCDEFGH$ 的邊長依序爲 $3, 15, 11, 15, 3, 15, 11, 15$(從 AB 開始)。延長 AB, CD, EF, GH 形成一四邊形 $PQRS$，如圖。我們宣稱 $PQRS$ 爲一長方形，這是因爲 $AB \perp AF$ (BF 爲直徑)，且 $AF \parallel GH$，故 $AB \perp GH$，其餘類似。

易見

$$\triangle APH \simeq \triangle BQC \simeq \triangle ERD \simeq \triangle FSG。$$

我們不妨假設 $AP = a$ 及 $HP = b$。則我們可以列出以下關係式：

$$\begin{cases} a(a+3) = b(b+11) & (\text{外冪定理}) \\ a^2 + b^2 = 15^2 & (\text{畢氏定理}) \end{cases}$$

因爲 a, b 都是正數，且 $a(a+3)$ 以及 $b(b+11)$ 皆爲 $\mathbb{R}^+$ 上的遞增函數，故正實數解 (a, b) 只會有一組解。易驗證 $(a, b) = (12, 9)$ 是這樣的解。其面積爲長方形 $PQRS$ 減去外面四個小三角形的面積，故爲 $27 \cdot 29 - 2 \cdot 9 \cdot 12 = 567$。

問題 49. 找出滿足以下條件的正整數對 (a, b) 個數：

$$1 \le a, b \le 2015， \qquad b + 1 \mid a， \quad \text{且} \qquad b \mid 2016 - a。$$

解答. 我們將計算，對於所有的 b 有幾個滿足條件的 a。首先固定 b，根據第二個條件，a 必須是 $k(b+1)$，其中 k 是正整數。代入最後一個條件，我們可以得到

$$b \mid 2016 - k(b+1) \implies b \mid 2016 - k.$$

因此 k 的可能值爲 $2016 - tb$，也就是所有的 (a, b) 必須形如 $((2016 - tb)(b+1), b)$，現在我們剩下決定 t 的範圍。我們不妨先考慮 $0 \le a \le 2016$ 的狀況，此時

$$0 \le (2016 - tb)(b+1) \le 2016 \iff \frac{2016}{b+1} \le t \le \frac{2016}{b}。$$

由此可見，所有可能的整數 t 有 $2016 + 34$ 種 (2016 有 34 個不是 1 以及 2016 的因數)，只是我們要再調整一下，扣掉所有 $a = 0$ 以及 $a = 2016$ 的解，我們可以發現這兩種解的個數各有 35 個，故答案爲 1980。

問題 50. 考慮滿足以下定義的無窮數列 $\{a_i\}_{i=1}^{n}$，$a_1 = 1$，且 $a_{n+1}a_n = 4(a_{n+1} - 1)$ 對於所有的正整數 n 成立。試求 $a_1 a_2 \cdots a_{2019}$ 之值。

解答. 方便起見，我們將遞迴式改寫成

$$a_{n+1} = \frac{4}{4 - a_n}。$$

經觀察前幾項後，我們宣稱以下的結果：

$$a_{2k-1} = \frac{2k-1}{k} \qquad \text{以及} \qquad a_{2k} = \frac{4k}{2k+1} \text{ 對所有的} k \in \mathbb{N} \text{成立。}$$

我們可以使用數學歸納法證明此結果。易計算出 $a_1 = 1$ 及 $a_2 = 4/3$，故以上敘述在 $k = 1$ 是對的。假設上述敘述在 $k = m$ 是對的，則

$$\begin{aligned} a_{2m+1} &= \frac{4}{4 - (4m)/(2m+1)} = \frac{2m+1}{m+1} \\ a_{2m+2} &= \frac{4}{4 - (2m+1)/(m+1)} = \frac{4(m+1)}{2m+3} \end{aligned}$$

即表示原敘述在 $k = m + 1$ 也是對的。根據數學歸納法，前述宣稱是正確的。現在我們可以計算 $a_1 a_2 \cdots a_{2019}$ 之值。注意到 $a_{2k} \cdot a_{2k+1} = (4k)/(k+1)$。故所求等於

$$a_1(a_2a_3)(a_4a_5)\cdots(a_{2k}a_{2k+1})\cdots(a_{2018}a_{2019}) = \prod_{k=1}^{1009} \frac{4k}{k+1} = \frac{4^{1009}}{1010}\text{。}$$

問題 51. 已知 a, b, c 爲三正實數，且 $a \le b \le c \le 2a$，試求 $\dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{a}{c}$ 之最大值。

解答. 令 $b/a = x$，$c/b = y$，則我們有 $x \ge 1$，$y \ge 1$，以及 $xy \le 2$。而所求可改寫爲 $x + y + 1/xy$ 在滿足前述條件下的最大值。此題可以使用「調整法」，即對於每個我們猜測不可能爲解的 x, y，我們都去證明有個 x', y' 的結果比他們大。這樣就可以限縮最大值的範圍。首先我們證明：若 x, y 滿足上面三個條件，則 $x' = xy, y' = 1$ 亦滿足上述三個條件，且有更大的 $x + y + 1/xy$。明顯的 $xy \ge 1$，$1 \ge 1$ 以及 $xy \le 2$。而我們也有

$$x + y + \frac{1}{xy} \le xy + 1 + \frac{1}{xy} \iff 0 \le (x-1)(y-1)\text{，}$$

這是對的。因此我們知道最大值如果存在，則必發生在 $x = 1$ 或 $y = 1$。我們不妨假設 $x = 1$，所求則爲 $1 + y + 1/y$ 在 $1 \le y \le 2$ 上的最大值。假設 $y + 1/y = k \ge 2$，則 $y^2 - ky + 1 = 0$ 的解必須在 1 到 2 之間，故我們有

$$\begin{aligned} 1 \le \frac{k + \sqrt{k^2-4}}{2} \le 2 &\iff 2 \le k + \sqrt{k^2-4} \le 4 \\ &\iff k^2 - 4 \le 16 - 8k + k^2 \\ &\iff k \le 5/2 \end{aligned}$$

等號成立若且唯若 $y = 2$，此時達到最大值 $7/2$。

問題 52. 已知 a, b 與 c 爲方程式 $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$ 的三相異根，試求

$$\frac{1}{a(b^2+c^2-a^2)} + \frac{1}{b(c^2+a^2-b^2)} + \frac{1}{c(a^2+b^2-c^2)}\text{。}$$

解答. 首先我們令所求爲 S。根據根與係數關係，我們有

$$a+b+c=2, \qquad ab+bc+ca=3, \qquad abc=4。$$

故我們可以計算出 $a^2+b^2+c^2=2^2-2\cdot 3=-2$。因此，我們可以將原式改成

$$\begin{aligned}-2S&=\frac{1}{a(a^2+1)}+\frac{1}{b(b^2+1)}+\frac{1}{c(c^2+1)}\\&=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sum_{\text{cyc}}a^3b^3+\sum_{\text{sym}}a^3b+\sum_{\text{cyc}}ab}{a^2b^2c^2+\sum_{\text{cyc}}a^2b^2+\sum_{\text{cyc}}a^2+1}\end{aligned}$$

現在我們計算我們需要的值。

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{\text{cyc}}a^3b^3=3(abc)^2+(ab+bc+ca)((ab+bc+ca)^2-3abc(a+b+c))=3\\ \displaystyle\sum_{\text{sym}}a^3b=(ab+bc+ca)(a+b+c)-abc(a+b+c)=-14\\ \displaystyle\sum_{\text{cyc}}ab=3\\ \displaystyle\sum_{\text{cyc}}a^2b^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)=-7\end{cases}$$

故我們有

$$-8S=\frac{-8}{8}\implies S=\frac{1}{8}。$$

所求爲即爲 $1/8$。

2.1 10/27

問題 53. 試找出所有正數 $x>0$，使得 x 與其小數部分之平方和爲 108。

解答. 假設 $x=n+t$，其中 $n\geq 0$ 爲 x 的整數部分，$0\leq t<1$ 爲其小數部分。則 x 與其小數部分之平方和爲 108 等價

$$(n+t)^2+t^2=108\implies 108\geq n^2 \text{ 且 } (n+1)^2+1>108。$$

這告訴我們 $n=10$。故現在我們等價要解

$$2t^2+20t-8=0\iff t^2+10t-4=0\iff t=\frac{-10\pm\sqrt{116}}{2}=-5\pm 3\sqrt{3}.$$

而負的答案不合，因此 x 只能是 $5+3\sqrt{3}$。

問題 54. 試求 $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}(-3)^k\binom{2m}{2k}$。(原題爲特例 $m=1010$。)

解答. 令所求爲 S。考慮二項式定理，我們有

$$\begin{cases}(1+i\sqrt{3})^{2m}=\displaystyle\sum_{k=0}^{2m}\binom{2m}{k}(\sqrt{3}i)^k\\(1-i\sqrt{3})^{2m}=\displaystyle\sum_{k=0}^{2m}\binom{2m}{k}(-\sqrt{3}i)^k\end{cases}$$

這告訴我們

$$(1+i\sqrt{3})^{2m}+(1-i\sqrt{3})^{2m}=2\sum_{k=0}^{m}\binom{2m}{2k}(\sqrt{3}i)^{2k}=2\sum_{k=0}^{m}\binom{2m}{2k}(-3)^k=2S\text{。}$$

現在我們有

$$\begin{aligned}2S&=2^{2m}\Big(\big(\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)\big)^{2m}+\big(\cos(-\pi/3)+i\sin(-\pi/3)\big)^{2m}\Big)\\&=\begin{cases}2^{2m}\cdot(-1) & \text{若 } 3\nmid m\\2^{2m}\cdot 2 & \text{若 } 3\mid m\end{cases}\end{aligned}$$

附註. 因爲 2020 不被 3 整除，所以原題解答爲 -2^{2019}。

問題 55. 現考慮一拋物線 $\Gamma: y=f(x)=\dfrac{7}{2}x(1-x)$ 以及一直線 $L: y=x$。在 Γ 以及 L 上分別取兩點（共四點），形成一與座標軸平行的正方形，試求 Γ 上取的兩點座標爲何。

解答. 假設 Γ 上的兩點爲 $(a,f(a))$ 以及 $(b,f(b))$。則我們有 $f(f(a))=a$ 以及 $f(f(b))=b$，也就是我們要求 $f(f(x))=x$ 的解，但是我們要排除掉 $f(x)=x$ 的解。首先注意到 $f(x)-x=x\left(-\dfrac{7}{2}x+\dfrac{5}{2}\right)$。所以

$$\begin{aligned}f(f(x))-x&=f(f(x))-f(x)+f(x)-x\\&=f(x)\left(-\frac{7}{2}f(x)+\frac{5}{2}\right)+x\left(-\frac{7}{2}x+\frac{5}{2}\right)\\&=\frac{7}{2}x(1-x)\left(\frac{-7}{2}x+\frac{5}{2}\right)\left(\frac{-7}{2}x+1\right)+x\left(-\frac{7}{2}x+\frac{5}{2}\right)\\&=x\left(\frac{-7}{2}x+\frac{5}{2}\right)\cdot\left(\frac{7}{2}(1-x)\left(\frac{-7}{2}x+1\right)+1\right)\\&=x\left(\frac{-7}{2}x+\frac{5}{2}\right)\left(\frac{7}{2}x-3\right)\left(\frac{7}{2}x-\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

由於前兩個根爲 $f(x)=x$ 的根，所以所求的 a,b 應爲 $\dfrac{6}{7}$ 以及 $\dfrac{3}{7}$。而所求座標爲

$$\left(\frac{6}{7},\frac{3}{7}\right)\qquad\text{及}\qquad\left(\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right)\text{。}$$

問題 56. 考慮一聯賽，總共至少有三個人參加。任兩選手恰比賽一場，有以下三種可能結果：贏的人得 1 積分；輸的人得 0 積分；平手各得 0.5 積分。假設其中兩名選手 A, B 總共獲得 8 分，且除了 A, B 以外的其他人得分皆相同，試求除了 A, B 以外還有幾人且他們得分爲何？

解答. 假設總共有 n 人（$n \geq 3$），且設除了 A, B 以外的每個人都得了 x 分。則我們有

$$\frac{n(n-1)}{2} = 8 + (n-2)x \iff (n-2)(n+1) + 2 = n(n-1) = 16 + (n-2) \cdot 2x。$$

由此可知

$$n + 1 = \frac{14}{n-2} + 2x，$$

這代表 $n-2$ 整除 14，故 $n = 3, 4, 9, 16$。然而，$n \leq 4$ 不滿足 $\frac{n(n-1)}{2} \geq 8$ 的條件。而注意到

- $n = 9$ 是可能的。此時將 9 個爲選手編號爲 $X_1, \ldots, X_9$（包含 A, B），考慮 X_i 恰好贏過 $X_{i+1}, X_{i+2}, X_{i+3}, X_{i+4}$。（假設 $X_k = X_{k+9}$。）則任意一位選手皆恰好贏過四個人，特別地，A, B 總共得了 8 分。
- $n = 16$ 也是可能的。假設 16 個人編號爲 $X_1, X_2, \ldots, X_{16}$，且 $X_{15} = A, X_{16} = B$。考慮 $\{X_1, \ldots, X_{15}\}$ 中每位選手 X_i 都恰好贏過 $X_{(i+k) \pmod{15}+1}$（$k = 1, \ldots, 7$）以及 X_{16}。這樣 $\{X_1, \ldots, X_{15}\}$ 中每位選手都恰好得 8 分，而 X_16 得 0 分，A, B 也滿足題目條件。

問題 57. 假設 A 在一 350 公尺高的大樓上，若將地球視爲一半徑 6400 公里的光滑球體，則試問 A 可以看到最遠的地方離他多遠。

解答. 使用切割線定理，則我們有所求爲

$$\sqrt{0.35 \times 12800.35} \approx 67\text{公里}。$$