重心座標

陳信睿

2021 年 9 月 1 日

1 從向量看重心座標

定義 1. 若 ABC 爲平面上一個非退化的三角形，則定義點 P 對 ABC 的重心座標爲

$$P=[\frac{[\triangle PBC]}{[\triangle ABC]},\frac{[\triangle PCA]}{[\triangle BCA]},\frac{[\triangle PAB]}{[\triangle CAB]}],$$

並稱 $\triangle ABC$ 爲座標三角形。

在定義1中的 $[P]$ 表示多邊形 P 的有向面積。在後面的討論，若沒有特別說明，我們都默認非退化的 $\triangle ABC$ 爲座標三角形，且 $|BC|=a,|CA|=b,|AB|=c$。

由於重心座標有三個分量描述平面上的點，所以照上面的定義方式，只要決定了兩個分量，就可以唯一決定剩下的那個分量。因此我們可以擴充定義，使其成爲齊次座標，即定義 $[x:y:z]$ 與 $[x/(x+y+z),y/(x+y+z),z/(x+y+z)]$ 爲同一個點 (當 $x+y+z\neq 0$)，也就是一個點的重心座標的三個分量和可以不必是 1。若某個座標的三個分量和爲 1，則稱此座標爲標準的，而將座標變爲標準的過程稱爲標準化。若要強調某座標已被標準化，則以 $[-,-,-]$ 表示，而未標準化的座標以 $[-:-:-]$ 表示。下面，我們將刻劃一些關於重心座標與歐氏平面上向量的關係。

定理 2. *若某點 P 的座標爲 $[x,y,z]$，則 $x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}+z\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$。*

證明. 設 A,B,C 分別對 P 位似 x,y,z 倍的像爲 A',B',C'，則可以知道 $[\triangle PB'C']:[\triangle PC'A']:[\triangle PA'B']=1:1:1$，即知 P 爲 $\triangle A'B'C'$ 的重心，因此有 $\overrightarrow{PA'}+\overrightarrow{PB'}+\overrightarrow{PC'}=\overrightarrow{0}$，即有

$$x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}+z\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0},$$

故得證。 □

以下結果爲定理2的一個立即的推論。

推論 3. *若點 P 的座標爲 $[x:y:z]$，O 爲歐氏平面上任意點，則*

$$x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=(x+y+z)\overrightarrow{OP}\text{。}$$

定理 4. *若 $O,P\notin\mathcal{L}_\infty$ 是平面上兩點，則存在唯一一組 (x,y,z)，使得*

$$x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}\text{，}$$

且滿足 $x+y+z=1$。換句話說，若點 P 滿足

$$x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}\quad\text{且}\quad x+y+z=1\text{，}$$

則 P 的座標爲 $[x,y,z]$。

證明. 由推論3可以知道，當 P 點 (標準化) 的座標爲 $[x,y,z]$ 時，

$$x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}\text{，}$$

我們現在要證明，不存在一組 $(x',y',z')\neq(x,y,z)$ 滿足敘述中的兩個條件。反設這樣的序對存在，我們可以寫下

$$\begin{aligned} x' \quad \overrightarrow{OA}+y' \quad \overrightarrow{OB}+z' \quad \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OP} \\ \Longrightarrow (x'-x)\ \overrightarrow{OA}+(y'-y)\ \overrightarrow{OB}+(z'-z)\ \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

令 $(x'-x)=u,(y'-y)=v,(z'-z)=w$，由假設知道 $u+v+w=0$ 且 u,v,w 不全爲 0。若 $w=0$，則易得 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$，不合。因此，我們可以假設 $uvw\neq0$，我們可以將上面的式子改寫成

$$\begin{aligned} u \quad \overrightarrow{OA}+v \quad \overrightarrow{OB} &= (u+v)\quad \overrightarrow{OC} \\ \Longrightarrow \frac{u}{u+v}\ \overrightarrow{OA}+\frac{v}{u+v}\ \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

由分點公式知道 $C\in AB$，不合，故知不存在一組 $(x',y',z')\neq(x,y,z)$ 滿足敘述中的兩個條件。 □

在證明完定理4後，我們可以引入直線在重心座標上的方程式。

定理 5 (直線方程式)**.** *直線 L 在重心座標上面的方程式有 $ux+vy+wz=0$ 的形式，意即存在不全爲 0 的三個數 $u,v,w\in\mathbb{R}$，使得*

$$P=[x:y:z]\in L\iff ux+vy+wz=0\text{。}$$

證明. 設 L 過平面上相異兩點 $U, V \notin \mathcal{L}_\infty$，座標分別爲 $[p_1, q_1, r_1], [p_2, q_2, r_2]$，由推論3可以知道

$$\begin{cases} p_1 \quad \overrightarrow{OA} + q_1 \quad \overrightarrow{OB} + r_1 \quad \overrightarrow{OC} = \quad \overrightarrow{OU} \\ p_2 \quad \overrightarrow{OA} + q_2 \quad \overrightarrow{OB} + r_2 \quad \overrightarrow{OC} = \quad \overrightarrow{OV} \end{cases}$$

由分點公式知道點 $P \in UV$ 若且唯若存在一個實數 λ，使得

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \lambda\overrightarrow{OU} + (1-\lambda)\overrightarrow{OV} \\ &= (\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2)\overrightarrow{OA} + (\lambda q_1 + (1-\lambda)q_2)\overrightarrow{OB} + (\lambda r_1 + (1-\lambda)r_2)\overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

此時，由一些簡單的計算及定理4，我們可以知道 P 的重心座標即爲 $[(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2) : (\lambda q_1 + (1-\lambda)q_2) : (\lambda r_1 + (1-\lambda)r_2)]$，注意到：存在 u, v, w 不全爲 0，滿足 $up_i + vq_i + wr_i = 0$，其中 $i = 1, 2$。理由是因爲我們可以將它視爲一組 u, v, w 的線性方程組，實際操作後可以發現確實存在這樣的 u, v, w。而

$$\begin{aligned} & u(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2) + v(\lambda q_1 + (1-\lambda)q_2) + w(\lambda r_1 + (1-\lambda)r_2) \\ =\ & \lambda(up_1 + vq_1 + wr_1) + (1-\lambda)(up_2 + vq_2 + wr_2) \\ =\ & 0 \end{aligned}$$

以上即說明：標準化過後的 P 滿足 $ux + vy + wz = 0$。而尚未標準化的點亦適用同一條方程式，因爲該方程式是一條齊次的方程式，縮放常數倍仍然是方程式的解。因此，我們完成了證明。 $\square$

定理 6 (無窮遠線). *$\mathcal{L}_\infty$ 的方程式爲 $x+y+z = 0$。換句話說，$P = [x : y : z]$ 爲無窮遠點若且唯若 $x + y + z = 0$。*

證明. 首先，從定義上若 $P = [x : y : z]$ 不爲無窮遠點，則 $x + y + z \neq 0$。因此不爲 $\mathcal{L}_\infty$ 的直線方程式必定不會是 $x + y + z = 0$。現在，我們需要證明：若 $L_1 : u_1x + v_1y + w_1z = 0, L_2 : u_2x + v_2y + w_2z = 0$ 爲平面上相異的平行直線，則方程組

$$\begin{cases} u_1x + v_1y + w_1z = 0 \\ u_2x + v_2y + w_2z = 0 \end{cases} \tag{1}$$

的非全 0 解 (x, y, z) 滿足 $x + y + z = 0$。

現考慮 $P \in L_1, Q \in L_2$，假設 $\overrightarrow{PQ} = p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB} + r\overrightarrow{OC}$，其中 $p + q + r = 0$。而這樣的 p, q, r 是存在的，因爲根據推論3知道

$$\overrightarrow{OP} = p_1\overrightarrow{OA} + q_1\overrightarrow{OB} + r_1\overrightarrow{OC} \qquad \overrightarrow{OQ} = p_2\overrightarrow{OA} + q_2\overrightarrow{OB} + r_2\overrightarrow{OC}，$$

其中 P, Q 的座標分別爲 $[p_1, q_1, r_1], [p_2, q_2, r_2]$，此時取 $(p, q, r) = (p_2-p_1, q_2-q_1, r_2-r_1)$ 即可。

由於兩線平行，於是我們可以知道對於每個 $X \in L_1$，都存在 $Y \in L_2$，使得 $\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{PQ}$，因此若 X 的座標爲 $[x_1, y_1, z_1]$，則知

$$\overrightarrow{OY} = (x_1+p)\overrightarrow{OA} + (y_1+q)\overrightarrow{OB} + (z_1+r)\overrightarrow{OC}，$$

發現 $(x_1+p)+(y_1+q)+(z_1+r) = 1$，因此可以使用定理4，推論 $Y = [x_1+p, y_1+q, z_1+r]$。綜合以上，我們有以下結論：當 $[x_1, y_1, z_1] \in L_1$，則有 $[x_1+p, y_1+q, z_1+r] \in L_2$，明顯這件事的反面也是對的。當我們用方程式的角度觀察這件事時，得到

$$u_1x + v_1y + w_1z = 0 \iff u_2(x+p) + v_2(y+q) + w_2(z+r) = 0,$$
$$\text{當}x+y+z=1\text{時。}$$

因爲有 $x+y+z=1$ 的條件，可以寫下

$$\begin{aligned}
& u_2(x+p)+v_2(y+q)+w_2(z+r) = 0 \\
\Longrightarrow\quad & u_2x+v_2y+w_2z = -(u_2p+v_2q+w_2r) \\
\Longrightarrow\quad & u_2x+v_2y+w_2z = -(u_2p+v_2q+w_2r)(x+y+z) \\
\Longrightarrow\quad & (u_2+t)x+(v_2+t)y+(w_2+t)z = 0\text{，其中}t = u_2p+v_2q+w_2r \\
\Longrightarrow\quad & u_1 = u_2+t \qquad v_1 = v_2+t \qquad w_1 = w_2+t
\end{aligned}$$

而 (1) 中的解有以下的形式：

$$(x,y,z) = \left(\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \cdot t, \quad \begin{vmatrix} w_1 & u_1 \\ w_2 & u_2 \end{vmatrix} \cdot t, \quad \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \cdot t \right)\text{。}$$

也就是說，我們其實要證明

$$\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} w_1 & u_1 \\ w_2 & u_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0，$$

利用前面得到的 $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2$ 關係式，可以得到左式等於

$$t(w_2-v_2)+t(u_2-w_2)+t(v_2-u_2) = 0，$$

故我們完成了證明。 □

定理 7 (三線共點). *設* $L_1, L_2, L_3 \neq \mathcal{L}_\infty$ *爲平面上三相異直線，且其方程式分別爲*

$$u_1x + v_1y + w_1z = 0 \qquad u_2x + v_2y + w_2z = 0 \qquad u_3x + v_3y + w_3z = 0,$$

則 L_1, L_2, L_3 *共點若且唯若*

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0。$$

證明. 三線共點若且唯若三個線性方程式有共同的非全 0 解，亦即

$$\begin{cases} u_1x + v_1y + w_1z = 0 \\ u_2x + v_2y + w_2z = 0 \\ u_3x + v_3y + w_3z = 0 \end{cases}$$

有非全 0 解，這又等價

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0,$$

即完成了證明。 □

現在，我們想要應用歐氏平面上向量內積的性質來幫助我們證明垂直、線段長等公式。以下，若沒特別說明，取 O 爲 $\triangle ABC$ 的外心。

定理 8 (距離公式). *若* $U = [p_1, q_1, r_1], V = [p_2, q_2, r_2]$ *爲平面上已標準化兩點，則*

$$|UV|^2 = -a^2(q_1 - q_2)(r_1 - r_2) - b^2(r_1 - r_2)(p_1 - p_2) - c^2(p_1 - p_2)(q_1 - q_2)$$

證明. 由推論3可以知道，

$$\begin{cases} \overrightarrow{OU} = p_1\overrightarrow{OA} + q_1\overrightarrow{OB} + r_1\overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OV} = p_2\overrightarrow{OA} + q_2\overrightarrow{OB} + r_2\overrightarrow{OC} \end{cases},$$

我們可以利用這兩條關係式寫下 $\overrightarrow{UV}$。

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad \overrightarrow{UV} &= (p_2 - p_1)\overrightarrow{OA} + (q_2 - q_1)\overrightarrow{OB} + (r_2 - r_1)\overrightarrow{OC} \\ \Longrightarrow \quad |UV|^2 &= \big((p_2 - p_1)\overrightarrow{OA} + (q_2 - q_1)\overrightarrow{OB} + (r_2 - r_1)\overrightarrow{OC}\big)^2 \end{aligned}$$

此時，我們先觀察一下兩個性質：

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=R^2,\qquad \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=R^2\cos 2A，$$

其中 R 爲 $\triangle ABC$ 外接圓半徑。注意到，

$$R^2\cos 2A=R^2(1-2\sin^2 A)=R^2-\frac{a^2}{2}，$$

將前面得到的公式使用上面兩個性質展開，

$$\begin{aligned}|UV|^2=R^2\big((p_2-p_1)+(q_2-q_1)+(r_2-r_1)\big)\big)-2\cdot\frac{a^2}{2}(q_2-q_1)(r_2-r_1)\\-2\cdot\frac{b^2}{2}(r_2-r_1)(p_2-p_1)-2\cdot\frac{c^2}{2}(p_2-p_1)(q_2-q_1)\end{aligned}$$

$$\implies |UV|^2=-a^2(q_2-q_1)(r_2-r_1)-b^2(r_2-r_1)(p_2-p_1)-c^2(p_2-p_1)(q_2-q_1)，$$

故得證。 □

事實上，我們可以從證明的過程中發現，當 p,q,r 爲任意實數時，

$$\big(p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC}\big)^2=(p+q+r)^2R^2-a^2qr-b^2rp-c^2pq$$

而上面情形恰好符合 $p+q+r=0$。由於 $(p_2-p_1,q_2-q_1,r_2-r_1)$ 這種形式的序對，可以大幅幫助我們減少計算量，因此我們定義兩點的位移向量。

定義 9. 若 $U=[p_1,q_1,r_1],V=[p_2,q_2,r_2]\notin\mathcal{L}_\infty$ 爲平面上兩點，則我們定義位移向量 (displacement vector)

$$\overrightarrow{UV}\coloneqq(p_2-p_1:q_2-q_1:r_2-r_1)。$$

此定義可以有令個觀點，當我們寫下 $\overrightarrow{UV}=(p_2-p_1:q_2-q_1:r_2-r_1)$ 時，其實背後的意思是 $\overrightarrow{UV}=(p_2-p_1)\overrightarrow{OA}+(q_2-q_1)\overrightarrow{OB}+(r_2-r_1)\overrightarrow{OC}$，也就是說，位移向量在本質上其實也是歐氏平面上向量的另一種表示法。雖然此定義暫時還看不到任何用處，而且可能會與歐氏平面上的向量有記號上的混淆，不過在後面，將可以看到它的好用之處。下面，我們先繼續往前看平面上圓在重心座標上的方程式，最後再來看如何使用位移向量來證明垂直以及討論相關的性質。

定理 10 (圓方程式). *設 ω 是平面上非退化的圓，則 ω 可以被表示成*

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (ux + vy + wz)(x + y + z) = 0$$

的形式，其中 u, v, w 爲待定常數。換句話説，存在 u, v, w，使得

$$P = [x : y : z] \in \omega \iff -a^2yz - b^2zx - c^2xy + (ux + vy + wz)(x + y + z) = 0\text{。}$$

證明. 假設圓 ω 的圓心 X 的座標爲 $[p, q, r]$，半徑爲 k，則根據定理8，可以寫下 $P[x, y, z] \in \omega$ 若且唯若

$$\begin{aligned}
& -a^2(y-q)(z-r) - b^2(z-r)(x-p) - c^2(x-p)(y-q) = k^2 \\
\iff & -a^2yz - b^2zx - c^2xy + (b^2r + c^2q)x + (c^2p + a^2r)y + (a^2q + b^2p)z \\
& \qquad = k^2 + a^2qr + b^2rp + c^2pq\text{，}
\end{aligned}$$

令 $t = k^2 + a^2qr + b^2rp + c^2pq$，且

$$u_0 = b^2r + c^2q, \qquad v_0 = c^2p + a^2r, \qquad w_0 = a^2q + b^2p\text{，}$$

則上面 ω 的方程式可以改寫成

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (u_0 - t)x + (v_0 - t)y + (w_0 - t)z = 0\text{，}$$

由於 $P[x, y, z]$ 已被標準化，故 $x + y + z = 1$，因此可以再改寫成

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (ux + vy + wz)(x + y + z) = 0\text{，} \tag{2}$$

其中 $u = u_0 - t, \quad v = v_0 - t, \quad w = w_0 - t$，注意到對於所有已被標準化的 $P[x, y, z]$，都會滿足 (2)，但由於該方程式是齊次的，因此對於未被標準化的 $P[kx : ky : kz]$ 也會滿足該方程式，故得證。 □

在有了這個定理後，我們可以快速地推導重心座標上面的圓冪，以及兩圓根軸的方程式。

推論 11 (圓冪). *假設 ω 是平面上非退化的圓，$P = [d, e, f] \notin \mathcal{L}_\infty$ 爲平面上一點。若 ω 方程式爲*

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (ux + vy + wz)(x + y + z) = 0\text{，}$$

則 P 對 ω 的冪爲

$$-a^2ef - b^2fd - c^2de + (ud + ve + wf)(d + e + f) = 0\text{。}$$

證明. 沿用定理10及其證明之變數及標號。注意到，

$$\begin{aligned}|PX|^2-k^2&=-a^2(e-q)(f-r)-b^2(f-r)(d-p)-c^2(d-p)(e-q)-k^2\\&=-a^2ef-b^2fd-c^2de+u_0d+v_0e+w_0f-t\\&=-a^2ef-b^2fd-c^2de+(ud+ve+wf)\\&=-a^2ef-b^2fd-c^2de+(ud+ve+wf)(d+e+f)\text{，}\end{aligned}$$

故得證。 □

接下來，我們更進一步討論兩圓的根軸如何表示。

推論 12 (根軸). *假設 ω,γ 是平面上兩個非退化的圓，其方程式分別如下：*

$$\begin{aligned}\omega&:-a^2yz-b^2zx-c^2xy+(u_1x+v_1y+w_1z)(x+y+z)=0\\\gamma&:-a^2yz-b^2zx-c^2xy+(u_2x+v_2y+w_2z)(x+y+z)=0\end{aligned}\text{，}$$

則兩圓的根軸爲 $(u_1-u_2)x+(v_1-v_2)y+(w_1-w_2)z=0$。

證明. 從推論11可以知道，若 $P=[d,e,f]\notin\mathcal{L}_\infty$，則 P 在 ω,γ 根軸上若且唯若

$$\begin{aligned}&-a^2ef-b^2fd-c^2de+(u_1d+v_1e+w_1f)(d+e+f)\\=&-a^2ef-b^2fd-c^2de+(u_2d+v_2e+w_2f)(d+e+f)\\\iff&(u_1d+v_1e+w_1f)(d+e+f)=(u_2d+v_2e+w_2f)(d+e+f)\\\iff&(u_1-u_2)d+(v_1-v_2)e+(w_1-w_2)f=0\text{，}\end{aligned}$$

故知滿足 $L:(u_1-u_2)x+(v_1-v_2)y+(w_1-w_2)z=0$ 且已被標準化的點，爲兩圓 ω,γ 根軸上的點，由於 L 的方程式爲齊次的，故滿足該方程式且未被標準化的點亦屬於兩圓的根軸。 □

到此，關於圓的討論也大致告一段落了，接下來，想要利用向量的內積討論垂直的充要條件。在進入到定理之前，先回憶一下位移向量的定義 (定義9)：若 $U=[p_1,q_1,r_1],V=[p_2,q_2,r_2]\notin\mathcal{L}_\infty$ 爲平面上兩點，則稱 $\overrightarrow{UV}=(p_2-p_1:q_2-q_1:r_2-r_1)$ 爲 UV 爲位移向量。

定理 13 (垂直公式 (EFFT)). *設 $P,Q,R,S\notin\mathcal{L}_\infty$ 爲平面上四點。位移向量 $\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{RS}$ 分別爲 $(p_1:q_1:r_1),(p_2:q_2:r_2)$，則 $PQ\perp RS$ 若且唯若*

$$a^2(q_1r_2+r_1q_2)+b^2(r_1p_2+p_1r_2)+c^2(p_1q_2+q_1p_2)=0\text{。}$$

此定理正式一點的名稱 (重心座標) 垂直公式，不過常常也會被稱爲 EFFT，是因爲這在 *Barycentric Coordinates in Olympiad Geometry*([1]) 中，將此公式稱爲 “EFFT(Evan’s Favorite Forgotten Trick)”，後來在數奧圈的各種講義皆多用 EFFT 稱此定理。事實上，關於這個定理的證明，我們其實是證明更強一點的敘述，在同一篇講義裡被稱做 “Strong EFFT” 的定理。

定理 14 (強垂直公式 (Strong EFFT)). *設 $P, Q, R, S \notin \mathcal{L}_\infty$ 爲平面上四點。位移向量 $\overrightarrow{PQ}$ 等於 $(p_1 : q_1 : r_1)$，且平面上的向量 $\overrightarrow{RS}$ 可以被表示成 $p_2\overrightarrow{OA} + q_2\overrightarrow{OB} + r_2\overrightarrow{OC}$ 則 $PQ \perp RS$ 若且唯若*

$$a^2(q_1r_2 + r_1q_2) + b^2(r_1p_2 + p_1r_2) + c^2(p_1q_2 + q_1p_2) = 0\text{。}$$

我們可以發現定理14足夠充分推論定理13，理由是因爲，當位移向量 $\overrightarrow{RS} = (p_2 : q_2 : r_2)$ 時，由位移向量的定義 (定義9) 及定理2可以知道平面向量 $\overrightarrow{RS}$ 可以被表示成

$$\overrightarrow{RS} = p_2\overrightarrow{OA} + q_2\overrightarrow{OB} + r_2\overrightarrow{OC}\text{，}$$

即滿足了定理14的敘述。因此，我們只需要證明定理14即可。接下來，定理14的證明將在下面給出。

定理 14的證明. 注意到 $PQ \perp RS$ 若且唯若 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RS} = 0$，這又等價於

$$(p_1\overrightarrow{OA} + q_1\overrightarrow{OB} + r_1\overrightarrow{OC}) \cdot (p_2\overrightarrow{OA} + q_2\overrightarrow{OB} + r_2\overrightarrow{OC}) = 0\text{，} \tag{3}$$

值得注意的是 $\overrightarrow{PQ}$ 爲位移向量，因此 $p_1 + q_1 + r_1 = 0$，這在後續的運算上可以幫助我們不少。另外一個值得注意的點是，我們回憶定理8的證明中，可以看到以下公式

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = R^2, \qquad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = R^2 - \frac{a^2}{2}\text{，}$$

這在後續的運算上，也可以有所幫助。由這些觀察，可以寫下 (3) 等價

$$\begin{aligned}
&(p_1 + q_1 + r_1)(p_2 + q_2 + r_2)R^2 \\
=&\frac{a^2}{2}(q_1r_2 + r_1q_2) + \frac{b^2}{2}(r_1p_2 + p_1r_2) + \frac{c^2}{2}(p_1q_2 + q_1p_2) \\
\iff& a^2(q_1r_2 + r_1q_2) + b^2(r_1p_2 + p_1r_2) + c^2(p_1q_2 + q_1p_2) = 0\text{，}
\end{aligned}$$

我們便完成了證明。 □

接下來，我們將利用平面向量可以計算面積的性質來討論任意三點 P,Q,R 所形成的三角形 (甚至是多邊形) 的面積。我們先回憶以下事實：

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right| = \left|[\triangle PQR]\right|,$$

其中 $[\triangle PQR]$ 的定義如同定義1中的定義，即表示 $\triangle PQR$ 的有向面積。而右式多了一個絕對值，則是因爲有向面積帶有正負號，但左式的值只會是正值，不過值得注意的是：若 $\triangle P_1Q_1R_1$ 與 $\triangle P_2Q_2R_2$ 計算出來的

$$\overrightarrow{P_1Q_1}\times\overrightarrow{P_1R_1} \qquad \overrightarrow{P_2Q_2}\times\overrightarrow{P_2R_2},$$

若爲相反方向的向量 (他們必平行，因爲他們都是同一個平面的法向量)，則代表 $[\triangle P_1Q_1R_1]$ 與 $[\triangle P_2Q_2R_2]$ 異號。有了這個觀察，我們可以直接宣稱

$$\left|[\triangle P_1Q_1R_1]+[\triangle P_2Q_2R_2]\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{P_1Q_1}\times\overrightarrow{P_1R_1}+\overrightarrow{P_2Q_2}\times\overrightarrow{P_2R_2}\right|$$

是對的，這可以幫助我們的接下來的討論以及證明。

定理 15 (面積公式)**.** *若 $P,Q,R\notin\mathcal{L}_\infty$ 爲平面上三點，座標分別爲*

$$[p_1,q_1,r_1] \qquad [p_2,q_2,r_2] \qquad [p_3,q_3,r_3]$$

則有

$$[\triangle PQR] = [\triangle ABC]\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}。$$

證明. 注意到：$[\triangle PQR]=[\triangle OPQ]+[\triangle OQR]+[\triangle ORP]$ 在有向面積下是正確的，再加上前面討論的性質，可以寫下：

$$\begin{aligned}\left|[\triangle PQR]\right| &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OQ}\times\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OR}\times\overrightarrow{OP}\right| \\ &= \frac{1}{2}\Big|\sum_{i=1}^{3}(p_i\overrightarrow{OA}+q_i\overrightarrow{OB}+r_i\overrightarrow{OC})\times(p_{i+1}\overrightarrow{OA}+q_{i+1}\overrightarrow{OB}+r_{i+1}\overrightarrow{OC})\Big|\end{aligned}$$

將此式展開可得

$$\frac{1}{2}\Big|\sum_{i=1}^{3}(p_iq_{i+1}-q_ip_{i+1})\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}+(q_ir_{i+1}-r_iq_{i+1})\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}+(r_ip_{i+1}-p_ir_{i+1})\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}\Big|,$$

觀察後，可以寫下

$$\begin{aligned}
&\left|[\triangle PQR]\right| \\
=&\left|\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & 1 \\ p_2 & q_2 & 1 \\ p_3 & q_3 & 1 \end{vmatrix}[\triangle OAB]+\begin{vmatrix} 1 & q_1 & r_1 \\ 1 & q_2 & r_2 \\ 1 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}[\triangle OBC]+\begin{vmatrix} p_1 & 1 & r_1 \\ p_2 & 1 & r_2 \\ p_3 & 1 & r_3 \end{vmatrix}[\triangle OCA]\right| \\
\overset{\spadesuit}{=}&\left|\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}[\triangle OAB]+\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}[\triangle OBC]+\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}[\triangle OCA]\right| \\
=&\left|\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}\right|\cdot\left|[\triangle OAB]+[\triangle OBC]+[\triangle OCA]\right| \\
=&\left|\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}\right|\cdot\left|[\triangle ABC]\right|\text{。}
\end{aligned}$$

$\spadesuit$ 成立，是因爲使用了行列式的性質：行、列的運算不改變行列式值。最後可以從證明的過程看出，若 $[\triangle ABC]$ 與 $[\triangle PQR]$ 同號，則

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}$$

爲正，反之亦然，因此，我們可以寫下

$$[\triangle PQR]=[\triangle ABC]\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}\text{，}$$

證明結束。 □

推論 16. *若 $P,Q,R\notin\mathcal{L}_\infty$ 爲平面上三點，其座標分別爲*

$$[p_1:q_1:r_1] \qquad [p_2:q_2:r_2] \qquad [p_3:q_3:r_3]\text{，}$$

則 P,Q,R 三點共線若且唯若

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}=0\text{。}$$

證明. P, Q, R 三點共線若且唯若 $[\triangle PQR] = 0$。使用定理15可以知道，$[\triangle PQR] = 0$ 若且唯若

$$\frac{1}{(p_1+q_1+r_1)(p_2+q_2+r_2)(p_3+q_3+r_3)}\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} = 0\text{，}$$

值得注意一下：多出 $1/(p_1+q_1+r_1)(p_2+q_2+r_2)(p_3+q_3+r_3)$ 的修正是因爲定理中15的座標已被標準化但此處的三點未被標準化。不過，也可以發現我們已完成了證明。 □

2 習題 (ISL)

問題 1. *(19 P2/G3)* 在三角形 ABC 中，點 A_1 落在 BC 上且 B_1 落在 AC 上。設 P, Q 爲線段 AA_1 與線段 BB_1 上兩點，使得 PQ 與 AB 平行。令 P_1 爲一個在直線 PB_1 上的點，同時滿足：B_1 嚴格落在 P 與 P_1 之間，且 $\angle PP_1C = \angle BAC.$。類似的，令 Q_1 爲一個在直線 QA_1 上的點，同時滿足：A_1 嚴格落在 Q 與 Q_1 之間，且 $\angle CQ_1Q = \angle CBA$。

試證：P, Q, P_1, Q_1 四點共圓。

問題 2. *(19 G4)* 設 P 爲 ABC 內一點。令 AP 交 BC 於 A_1；BP 交 CA 於 B_1；CP 交 AB 於 C_1。令 A_2 爲 P 對 A_1 的對稱點，並用類似方法定義 B_2, C_2。試證 A_2, B_2, C_2 不會都落在三角形 ABC 外接圓內 (嚴格)。

問題 3. *(18 G2)* ABC 爲等腰三角形滿足 $AB = AC$，令 M 爲 BC 中點。點 P 爲平面上一點，滿足 $PB < PC$ 且 PA 與 BC 平行。設 X, Y 分別爲落在 PB 與 PC 上的點，使得 B 若在線段 PX 上；C 落在線段 PY 上；且 $\angle PXM = \angle PYM$。試證：A, P, X, Y 四點共圓。

問題 4. *(17 P4/G2)* R, S 爲圓 Ω 上相異兩點，使得 RS 不是直徑。設 ℓ 爲 R 在 Ω 上的切線。點 T 爲 R 關於 S 的對稱點。點 J 是 Ω 上劣弧 RS 上一點，使得 JST 的外接圓 Γ 交 ℓ 於兩相異點。令 A 爲 Γ 與 ℓ 更接近 R 的交點。直線 AJ 再次交 Ω 於 K。試證：KT 與 Γ 相切。

問題 5. *(16 G2)* 設三角形 ABC 的外接圓爲 Γ 且其內心爲 I，並令 M 爲 $\overline{BC}$ 中點。點 D, E, F 分別落在 $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ 使得

$$\overline{ID} \perp \overline{BC} \qquad \overline{IE} \perp \overline{AI} \qquad \overline{IF} \perp \overline{AI}\text{。}$$

設 $\triangle AEF$ 的外接圓交 Γ 於 $X \neq A$。試證：直線 XD 與 AM 交在 Γ 上。

問題 6. *(16 G4)* 設三角形 ABC 爲一等腰三角形，滿足 $AB = AC \neq BC$，令 I 爲其內心。設 BI 與 AC 的交點爲 D，且過 D 垂直 AC 的直線交 AI 於 E。試證：I 關於 AC 的對稱點若在三角形 BDE 的外接圓上。

問題 7. *(15 G4)* 設 ABC 爲一銳角三角形，M 爲邊 AC 的中點。圓 ω 過 B 與 M 分別再交 AB, BC 於 P, Q。設 T 爲平面上一點，使得 $BPTQ$ 爲平行四邊形。假設 T 落在三角形 ABC 的外接圓上。試決定 $\frac{BT}{BM}$ 的所有可能值。

問題 8. *(15 G5)* 設 ABC 爲平面上的一個三角形滿足 $CA \neq CB$。點 D, F, G 分別爲 AB, AC, BC 的中點。圓 Γ 爲通過 C 且與 AB 相切於 D 的圓，分別交 AF, BG 於 H, I。點 H', I' 分別爲 H, I 關於 F, G 的對稱點。直線 $H'I'$ 分別交 CD, FG 於 Q, M。直線 CM 再交 Γ 於 P。試證：$CQ = QP$。

問題 9. *(14 G1)* 銳角 ABC 中，點 P, Q 爲邊 BC 上兩點，使得 $\angle PAB = \angle BCA$ 且 $\angle CAQ = \angle ABC$。設 M, N 分別爲 A 對 P, Q 的對稱點。試證：BM 與 CN 交在三角形 ABC 的外接圓上。

問題 10. *(12 G1)* ABC 爲平面上的三角形，點 J 爲 A-旁心。A—-旁切圓分別切 BC, AB, AC 於 M, K, L。直線 LM 交 BJ 於 F，直線 KM 交 CJ 於 G。令 S 爲 AF 與 BC 的交點且令 T 爲 AG 與 BC 的交點。試證：M 爲 ST 的中點。

問題 11. *(11 G2)* 設 A_1, A_2, A_3, A_4 四點不共圓。對於 $i = 1, 2, 3, 4$，定義 O_i 與 r_i 分別爲三角形 $A_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$ 的圓心與半徑，其中 $A_n = A_{n+4}$。試證：

$$\frac{1}{O_1A_1^2 - r_1^2} + \frac{1}{O_2A_2^2 - r_2^2} + \frac{1}{O_3A_3^2 - r_3^2} + \frac{1}{O_4A_4^2 - r_4^2} = 0。$$

問題 12. *(05 G1)* 設三角形 ABC 滿足 $AC + BC = 3 \cdot AB$。三角形 ABC 的內切圓圓心爲 I 且內切圓分別切 BC, CA 於 D, E。令 K, L 分別爲 D, E 關於 I 的對稱點。試證：A, B, K, L 四點共圓。

問題 13. *(98 P5/G3)* 設 I 爲三角形 ABC 的內心。點 K, L, M 分別爲 ABC 的內切圓在 AB, BC, CA 上的切點。直線 t 過 B 且與 KL 平行。直線 MK 與 ML 分別交 t 於 R, S。試證：$\angle RIS$ 爲銳角。

3 習題 (APMO)

問題 14. *(17 P2)* 設 ABC 爲滿足 $AB < AC$ 的三角形。令 D 爲 $\angle BAC$ 的內角角平分線與三角形 ABC 外接圓的交點。令 Z 爲 AC 中垂線與 $\angle BAC$ 外角角平分線的交點。試證：AB 中點落在三角形 ADZ 的外接圓上。

問題 15. *(16 P3)* 設 AB 與 AC 爲兩射線，滿足 A, B, C 不共線。令 ω 爲一圓，其圓心爲 O，且與射線 AC, AB 相切於 E, F。設 R 爲 EF 上一點。過 O 與 EF 平行的線和直線 AB 交於 P。令點 N 爲直線 PR 與 AC 的交點。過 R 與 AC 平行的線和直線 AB 交於 M。試證：MN 和 ω 相切。

問題 16. *(13 P1)* 設 ABC 爲一銳角三角形，AD, BE, CF 爲三邊上的高，令 O 爲三角形 ABC 的外心。試證：線段 OA, OF, OB, OD, OC, OE 將三角形 ABC 分割成三對等面積的區域。

問題 17. *(13 P5)* 設 $ABCD$ 爲一四邊形內接於 ω，令 P 爲 AC 延長線上一點，滿足 PB 與 PD 爲 ω 的切線。在 C 的切線交 PD 於 Q 且交 AD 於 R。令 E 爲 AQ 與 ω 的第二個交點。試證：B, E, R 三點共線。

問題 18. *(05 P5)* 三角形 ABC 中，點 M, N 分別在 AB 與 AC 上使得 $MB = BC = CN$。令 R 與 r 分別表示三角形 ABC 的外接圓半徑與內切圓半徑。試用 R 與 r 表示比例 MN/BC。

問題 19. *(04 P2)* 設 O 爲銳角三角形 ABC 的外心，H 爲其垂心。試證：三角形 AOH, BOH 與 COH 中有其中兩個的面積和等於第三個。

4 習題 (TWTST)

問題 20. *(21 2J G2)* 設 ABC 爲平面上的三角形，Γ 爲其外接圓。點 E, F 分別爲邊 CA, AB 上兩點。設三角形 AEF 的外接圓與 Γ 再交於 X。設三角形 ABE 的外接圓與三角形 ACF 的外接圓再交於 K。直線 AK 與 Γ 再交於 $M \neq A$，N 爲 M 關於 BC 的對稱點。設 XN 與 Γ 再交於 $S \neq X$。試證：SM 與 BC 平行。

問題 21. *(19 2J M2)* 給定三角形 ABC。以 ω, Ω 分別表示其內切圓與外接圓。設 ω 分別與 AB, AC 相切於 F, E。設 EF 與 Ω 交於 P, Q。令 M 爲 BC 中點。取一點 R 在 $\triangle MPQ$ 外接圓上，使得 $MR \perp EF$。試證：AR, ω, Γ 交於一點, 其中 Γ 爲 $\triangle MPQ$ 外接圓。

問題 22. *(19 2J M6)* 給定 $\triangle ABC$，其內心記爲 I，A-旁心記爲 J。A' 爲 A 關於三角形 ABC 外接圓的對徑點。定義：H_1, H_2 分別爲 $\triangle BIA'$ 與 $\triangle CJA'$ 的垂心。試證：$H_1H_2 \parallel BC$。

問題 23. *(19 3J M6)* 給定 $\triangle ABC$，Ω 爲其外接圓。記其內心與 A-旁心分別爲 I, J。令 T 爲 J 關於 BC 的對稱點，且 P 爲 BC 與 AT 的交點。若 $\triangle AIP$ 的外接圓交於 BC 於 $X \neq P$，且存在一點 $Y \neq A$ 在 Ω 上使得 $IA = IY$。試證：三角形 IXY 的外接圓與直線 AI 相切。

問題 24. *(18 3J I2)* 令點 I, G, O 分別爲三角形 ABC 的內心、重心、外心。令點 X, Y, Z 分別爲射線 BC, CA, AB 上的點，使得 $BX = CY = AZ$。令 F 爲三角形 XYZ 的重心。試證：FG 與 IO 垂直。

參考文獻

[1] Evan Chen. *Barycentric Coordinates in Olympiad Geometry*. 2012. URL: `https://web.evanchen.cc/handouts/bary/bary-full.pdf`.