

數學練習題：W2

一、單選題

- 設 n 為正整數，若滿足 $\frac{1}{n+1} < \sqrt{100} - \sqrt{99} < \frac{1}{n}$ ，則 n 值為下列何者？
 (A) 9 (B) 10 (C) 18
 (D) 19 (E) 20
- 設函數 $f(x) = a|x-1| + b|x+1| + c$ 可以表示為 $f(x) = \begin{cases} x & , x \geq 1 \\ -3x+4 & , -1 < x < 1 \\ -x+6 & , x \leq -1 \end{cases}$ ，
 則 $a+2b+c$ 之值為下列哪一個選項？
 (A) 0 (B) 1 (C) 2
 (D) 3 (E) 4
- 設 $a > 0$ ， $a \neq 1$ ，若 $y = a^x$ 關於 $x-y=0$ 的對稱圖形經過點 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{8}\right)$ ，則 a 的值為下列哪一個選項？
 (A) 16 (B) 8 (C) $4\sqrt{2}$
 (D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
- 設 $a = \log_3 6$ ， $b = \log_5 10$ ， $c = \log_7 14$ ，則下列哪一個選項是正確的？
 (A) $c > b > a$ (B) $b > c > a$ (C) $a > c > b$
 (D) $a > b > c$ (E) $a = b = c$

二、多選題

- 設 $i = \sqrt{-1}$ ，已知 $f(x)$ 為實係數三次多項式，滿足 $f(1-i) = 0$ 且 $f(0) = f(1) = 2$ ，則下列敘述何者正確？
 (A) $f(1+i) = 0$
 (B) $f(i-1) = 0$
 (C) $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸恰有一個交點
 (D) $f\left(\frac{1}{2}\right) > f(0)$
 (E) $f(-3) > f(-4)$
- 有一隻青蛙在 A, B, C, D 四個荷葉上跳來跳去，牠每一次跳躍落下的荷葉必定不是原來跳起的荷葉，且牠選擇任意一個荷葉落下的機會均等，觀察這隻青蛙發現牠停在 A 荷葉上，試問下列哪些敘述是正確的？
 (A) 牠跳躍 4 次後落在 A 荷葉的機率大於牠跳躍 4 次後落在 B 荷葉的機率
 (B) 牠跳躍 4 次後落在 A 荷葉的機率等於牠跳躍 4 次後落在 B 荷葉的機率
 (C) 牠跳躍 4 次後落在 A 荷葉的機率小於牠跳躍 4 次後落在 B 荷葉的機率
 (D) 已知牠第 2 次跳躍後落在 B 荷葉，則牠第 4 次跳躍後落在 B 荷葉的機率為 $\frac{1}{3}$
 (E) 已知牠第 2 次跳躍後落在 A 荷葉，則牠第 4 次跳躍後落在 B 荷葉的機率為 $\frac{1}{3}$

7. 下列哪些選項是正確的？

(A) 若 a, b 為實數，且 $a+b\sqrt{2}=0$ ，則 $a=b=0$

(B) 若 a 為非零實數，且 a^3, a^5 均為有理數，則 a 為有理數

(C) $\sqrt{3}+\sqrt{6}>2+\sqrt{5}$

(D) 設 $\sqrt{17+12\sqrt{2}}=n+b$ ，其中 n 為正整數， $0<b<1$ ，則 $b=\sqrt{2}-1$

(E) 若 a, b 為實數，且 $a<b$ ，則 $a<\frac{2a+b}{3}<\frac{3a+b}{4}<b$

8. 已知算幾不等式「若 $a>0, b>0$ ，則 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ ；若 $a=b$ ，則 $\frac{a+b}{2}$ ：

立，則下列哪些選項是正確的？

(A) 當 $x>0$ 時， $x+\frac{1}{x}\geq 2$

(B) 當 $x>0$ 且 $x\neq 1$ 時， $\log x+\frac{1}{\log x}\geq 2$

(C) 若 x 為實數，則 2^x+2^{-x} 的最小值為 2

(D) 若 $x>0, y>0$ 且 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$ ，則 xy 的最大值為 16

(E) 若 x, y 為實數且滿足 $2x+y=2$ ，則 9^x+3^y 的最小值為 8

9. 若 a, b, c 均為整數， $i=\sqrt{-1}$ ，則下列哪些選項是正確的？

(A) $x^2-x+1=0$ 有兩個共軛虛根 $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(B) $1+i+i^2+\cdots+i^{51}=0$

(C) 方程式 $(x^2-x+1)^3+8=0$ 有實根

(D) 若方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 有有理根，則此有理根必為整數根

(E) 方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 可能沒有實根

10. 下列哪些選項中的大小關係是正確的？

(A) $3^{20}>2^{30}$

(B) $3^{\sqrt{2}}>(\sqrt{2})^3$

(C) $2^{\sqrt{2}}>2\sqrt{2}$

(D) $\log_{20}30>\log_23$

(E) $x<0$ 時， $\left(\frac{1}{3}\right)^x>x^2$ 恆成立

11. 下列哪些選項中的圖形，其圖形上過相異任兩點的直線斜率恆為正數？

(A) $y=2^{-x}$

(B) $y=2^x$

(C) $y=\log_2x$

(D) $y=x^3$

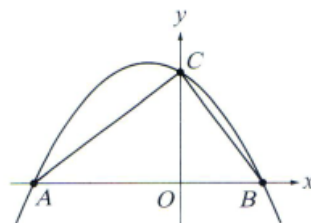
(E) $y=|\log_{\frac{1}{2}}x|$

三、填充題

12. 若方程式 $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2+6x+9}=6$ ，則滿足此方程式之所有實數 x 值的總和為_____。

13. 若 a 為實數， $i=\sqrt{-1}$ ，且複數 $\frac{a+3i}{1+2i}$ 為純虛數，則實數 a 的值為_____。

14. 如右圖，設實係數二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形與 x 軸交於 A, B 兩點，與 y 軸交於 C 點。若 $\overline{AC}=20$ ， $\overline{BC}=15$ ， $\angle ACB=90^\circ$ ，則 $f(12)=$ _____。



15. 已知實係數二次函數 $f(x)$ 的二次項係數為 a ，且不等式 $f(x)>-2x$ 的解為 $1<x<3$ 。若方程式 $f(x)+6a=0$ 有兩相等實根，則 $a=$ _____。

16. 設 n 為正整數，已知點 $A_n(n, \log_2 n)$ 在函數 $f(x)=\log_2 x$ 圖形上，若直線 $A_n A_{n+1}$ 的斜率為 m_n ，且 $\sum_{k=1}^n m_k=5$ ，則 $n=$ _____。

17. 一個職業籃球隊有 12 位正式球員，每次上場 5 位球員。現在有一支職業球隊當中有 5 個後衛、4 個前鋒與 3 個中鋒，其中某一位前鋒啟民亦可當中鋒上場打球，如果此球隊要派 2 位後衛、2 位前鋒與 1 位中鋒上場比賽，則此隊的總教練共有_____種指派球員的方法。

18. 小明做細菌培養，已知 A 菌每日會增加一倍的數量， B 菌每日會增加兩倍的數量。如果今日小明在甲培養皿中放入一隻 A 菌，10 天後小明在乙培養皿中放入一隻 B 菌，試問至少再經過_____天後，乙培養皿中的細菌數量會超過甲培養皿中的細菌數量。

19. 某一個音樂社團有 5 位男生與 4 位女生，今有 2 件相同的小提琴與 1 件直笛要分配給這社團當中的 2 位男生與 1 位女生且每人一件，則共有_____種分配方法。

20. 已知點 P 停在數線原點上，今將一枚均勻硬幣擲出，若出現正面，點 P 就在數線上向右移動 1 單位；若出現反面就向左移動 1 單位，若投擲此硬幣 10 次，最終點 P 仍然停在數線上原點的機率最接近 $\frac{1}{n}$ ，則正整數 n 值為_____。