

## 數學複習進階試題第三回

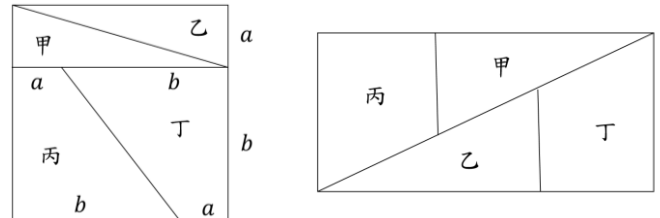
## 一、選擇題

1. 已知  $A(x_1, 2002)$ 、 $B(x_2, 2002)$  是二次函數  $y = ax^2 + bx + 5$  上的兩點，則當  $x = x_1 + x_2$  時，二次函數的值是 ( )。

(A)  $\frac{2b^2}{a} + 5$  (B)  $-\frac{b^2}{4a} + 5$  (C) 2002 (D) 5

難度：★★☆☆

2. 如圖，若將左邊正方形剪成四塊，恰能拼出右邊的矩形，設  $a = 1$ ，則這個正方形的面積為 ( )。



(A)  $\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$  (B)  $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$  (C)  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$  (D)  $(1 + \sqrt{2})^2$

難度：★★☆☆

3. 如果三條線段的長  $a, b, c$ ，滿足  $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，那麼  $(a, b, c)$  稱之為黃金線段組。黃金線段組中的三個線段 ( ) 三角形。

(A) 可構成銳角 (B) 可構成直角 (C) 可構成鈍角 (D) 不可構成

難度：★★☆☆

4. 已知實數  $a, b, c$ ，滿足  $a < b < c$ ， $ab + bc + ac = 0$ ， $abc = 1$ ，則 ( )。

(A)  $|a + b| > |c|$  (B)  $|a + b| < |c|$  (C)  $|a + b| = |c|$  (D)  $|a + b|$ 、 $|c|$  大小不能確定

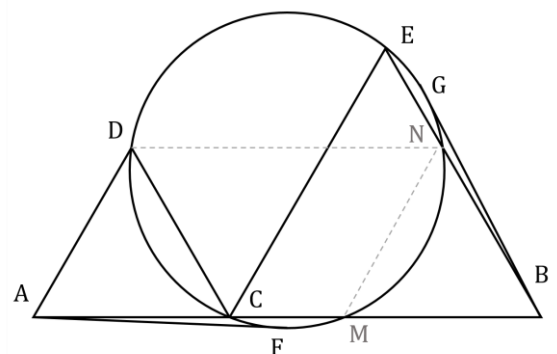
難度：★★★

5. 如圖， $C$  是線段  $\overline{AB}$  上任意一點， $\triangle ACD$ 、 $\triangle BCE$  是正三角形， $\overline{AF}$ 、 $\overline{BG}$  是過  $D$ 、 $C$ 、 $E$  三點的圓的切線， $F$ 、 $G$  為切點，則 ( )。

(A)  $\overline{AF} > \overline{BG}$  (B)  $\overline{AF} = \overline{BG}$   
(C)  $\overline{AF} < \overline{BG}$  (D)  $\overline{AF}$ 、 $\overline{BG}$  大小不能確定

難度：★★★

HINT：善用  $M$ 、 $N$  兩點與虛線，以及圓幂性質。



6. 滿足方程式  $x^2 + y^2 = 2(x + y) + xy$  的所有正整數解有 ( ) 組。

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

難度：★★☆☆

HINT：先整理成  $ax^2 + bx + c = 0$  的形式。

## 二、填充題

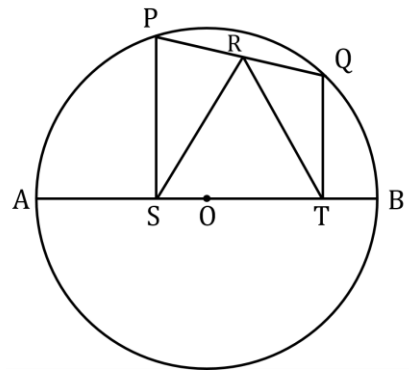
1. 已知實數  $a$  滿足  $a^2 - a - 1 = 0$ ，則  $a^8 + 7a^{-4}$  的值為\_\_\_\_\_。

難度：★★☆

2. 如圖，已知  $\overline{AB}$  是圓  $O$  的直徑， $PQ$  是圓  $O$  的弦， $\overline{PQ}$  和  $\overline{AB}$  不平行， $R$  是  $\overline{PQ}$  的中點，作  $\overline{PS} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{QT} \perp \overline{AB}$ ，垂足分別為  $S$ 、 $T$ ，並且  $\angle SRT = 60^\circ$ ，則  $\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}$  的值等於\_\_\_\_\_。

難度：★★★

HINT：觀察四邊形  $PROS$  與  $QROT$  的各個內角



3. 若小於 78 的實數  $x$  均滿足不等式  $ax > -26$ ，則實數  $a$  的取值範圍是\_\_\_\_\_。

難度：★☆☆

4. 在  $\text{Rt} \triangle ABC$  中， $\angle BCA = 90^\circ$ ， $\overline{CD}$  是高，已知  $\text{Rt} \triangle ABC$  的三邊長都是整數，且  $\overline{BD} = 11^3$ ，則  $\text{Rt} \triangle BCD$  與  $\text{Rt} \triangle ACD$  的周長之比是\_\_\_\_\_。

難度：★★☆

## 三、計算題

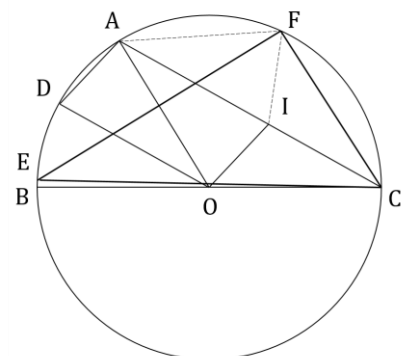
1. 已知  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為實數，函數  $y_1 = ax^2 + bx + c$ ， $y_2 = ax + b$  ( $a > 0$ )，當  $-1 \leq x \leq 1$  時，有  $-1 \leq y_1 \leq 1$ ， $y_2$  有最大值 2，試求由拋物線  $y_1 = ax^2 + bx + c$  與直線  $y_2 = ax + b$  所圍成的封閉圖形及其內部的所有格點（橫坐標、縱坐標均為整數的點）順次連接所得圖形的面積。補充：以及拋物線與直線圍成的面積（補充題需用到積分）。

難度：★★☆

2. 如圖， $\overline{BC}$  為圓  $O$  的直徑， $A$  為圓  $O$  上的一點， $D$  是  $\widehat{AB}$  的中點，過圓心  $O$  作  $\overline{OI} \parallel \overline{DA}$  交  $\overline{AC}$  於  $I$ ， $\overline{OA}$  的垂直平分線交  $O$  於  $E$ 、 $F$ 。證明： $I$  是  $\triangle CEF$  的內心。

難度：★★☆

HINT：複習內心的定義，並善用虛線的提示。



3. 設  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為三個互不相等的實數，且  $c \neq 1$ ，已知關於  $x$  的方程  $x^2 + ax + 1 = 0$  和  $x^2 + bx + c = 0$  有一個公共根，方程  $x^2 + x + a = 0$  和  $x^2 + cx + b = 0$  也有一個公共根，試求  $a + b + c$  的值。

難度：★★☆