

## 數學複習進階試題第四回

### 一、選擇題

1. 下面給出 4 個命題:

(1) 已知  $45^\circ < a < 90^\circ$ ,  $\sin a \cos a = \frac{1}{4}$ , 則  $\cos a - \sin a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

(2) 已知四邊形 ABCD 的對角線  $\overline{AC}$  平分  $\angle A$ 、 $\angle C$ , 且  $\angle A$ 、 $\angle C$ , 則此四邊形是菱形;

(3) 在圓內接四邊形 ABCD 中,  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ , P 為圓上異於 A, B, C, D 的一點, 則  $\angle APD = \angle BPC$ ;

(4) 若  $a^2 - 5a + 5 = 0$ , 則  $\sqrt{(1-a)^2} = 1-a$ 。

其中, 不正確的命題有 ( ) 個。

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

難度: ★☆☆

2. 某旅館底層客房比二層客房少 5 間, 某旅遊團有 48 人, 若全部安排住底層, 每間住 4 人, 房間不夠; 而每間住 5 人, 有的房間未住滿。又若全部安排住二層, 每間住 3 人, 房間不夠; 每間住 4 人, 有的房間沒有住滿, 這家旅館的底層共有房間 ( )。

(A) 9 個 (B) 10 個 (C) 11 個 (D) 12 個

難度: ★☆☆

3. 已知  $a, b, c, d$  是四個不同的實數, 且  $(b+d)(b+a) = 1$ ,  $(c+d)(c+a) = 1$ , 則  $(b+d)(c+d)$  值為 ( )。

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) 0

難度: ★★☆☆

4. 已知點 A(2,1), 在坐標軸上確定點 P, 使得  $\triangle AOP$  為等腰三角形, 則滿足這樣條件的點有 ( )。

(A) 4 個 (B) 6 個 (C) 8 個 (D) 多於 8 個

難度: ★☆☆

5. 已知  $a$  為非負整數, 若關於  $x$  的方程  $2x - a\sqrt{1-x} - a + 4 = 0$  至少有一個整數根, 則  $a$  可取值的個數為 ( )。

(A) 1 個 (B) 2 個 (C) 3 個 (D) 4 個

難度: ★★☆☆

6. 三角形中長為  $a, b, c$  的邊上的高分別為  $h_a, h_b, h_c$ , 若  $a \leq h_a$ ,  $b \leq h_b$ , 則此三角形為 ( ) 三角形。

(A) 等腰非直角 (B) 直角非等腰 (C) 等腰直角 (D) 以上結論都不對

難度: ★★☆☆

## 二、填空題

1.  $\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50}\right) \div \left(\frac{1}{26} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{50}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

難度：★☆☆

2. 已知  $p, q > 0$ ，且滿足  $2p + \sqrt{pq} - q + \sqrt{p} + \sqrt{q} = 0$ ，則  $(2\sqrt{p} - \sqrt{q} + 2)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

難度：★★★

3. 已知二次函數  $f(x)$  當  $x = m (m > 0)$  時有最大值 5，二次函數  $g(x)$  的最小值是 -2，且  $g(m) = 25$ 。又  $f(x) + g(x) = x^2 + 16x + 13$ ，則  $f(x)$  的表達式為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

難度：★★★

4. 在凸四邊形 ABCD 中， $\overline{AB} = \overline{CD}$ ， $\overline{AC}$  為對角線， $\angle DAC > \angle BCA$ ，且  $\angle DAC$  與  $\angle BCA$  互補， $\angle BAC > \angle ACD$ ， $\angle BAC$  與  $\angle ACD$  互餘。 $\angle B = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

難度：★★★

## 三、計算題

(一) 對於每個正整數  $n$ ，令  $f(n)$  表示  $1 + 2 + \cdots + n$  的末位數字，例如： $f(1) = 1$ 、 $f(2) = 3$ 、 $f(5) = 5$ ，求  $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2004)$  的和。

難度：★★★

(二) 如圖所示，PA、PB 是圓 O 的兩條切線，PEC 是一條割線，D 是 AB 與 PC 的交點。

1. 當 PEC 通過圓心時，求證  $\overline{PE} \cdot \overline{CD} = \overline{PC} \cdot \overline{DE}$ 。

HINT：複習圓幂性質。

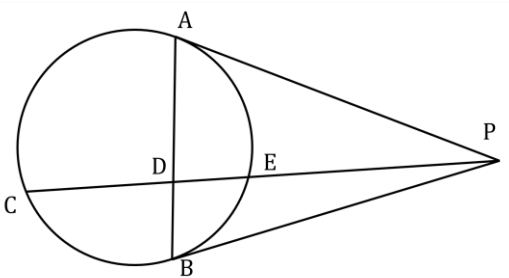
難度：★★★

2. 當 PEC 不通過圓心時， $\overline{PE} \cdot \overline{CD} = \overline{PC} \cdot \overline{DE}$  是否成立？說明理由。

難度：★★★

3. 當  $\overline{PE} = 2$ ， $\overline{CD} = 1$  時，能否求出 DE 的長度？若能，求出來；若不能，說明理由。

難度：★★★



(三) 某化工廠從今年一月起，若不改變生產環境，按現狀生產，每月收入為 70 萬元，同時接受到環保部門的處罰，第一個月罰 3 萬元，以後逐月遞增 2 萬元。如果從今年一月起投資 500 萬元增加回收淨化設備(改造設備時間不計)，一方面可以改善環境，另一方面也可大大降低原料成本，據測算投產後的前 5 個月中的累計淨收入是生產時間  $n$  (以月為單位) 的二次函數，生產前一、前二、前三個月的累計收入分別可達 101 萬元、204 萬元和 309 萬元，以後穩定在第五個月的水平，同時該廠不但不受處罰，而且還將得到環保部門一次性 100 萬元的獎勵，問經過多少個月，投資開始見效，即投資改造後的純收入多於不改造時的純收入？

難度：★★★