

數學複習進階試題第二回

一、選擇題

1. 反比例函數 $y = \frac{k}{x}$ 的圖像是軸對稱圖形，它的一條對稱軸是下列哪個正比例函數的圖像。

(A) $y = \frac{-k}{|k|}x$ (B) $y = |k|x$ (C) $y = -kx$ (D) $y = kx$

難度：★☆☆

2. n 為正整數， $3n+1$ 、 $5n+1$ 均為完全平方數，則 $7n+3$ ()。

(A) 必為質數 (B) 必為合數 (C) 必為完全平方數 (D) 以上結論均不成立

HINT: $7n+3 = 4(3n+1) - (5n+1)$

難度：★★☆

3. 已知 $\triangle ABC$ 兩邊之和為 10，第三邊上的高為 3，其外接圓半徑為 ()。

(A) 有最大值 $\frac{25}{6}$ (B) 有最小值 5 (C) 有最大值 5 (D) 無最大值也無最小值

HINT: 外接圓的算法由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

難度：★★☆

4. 若函數 $y = \frac{1}{2}(x^2 - 100x + 196 + |x^2 - 100x + 196|)$ ，則當自變量取 $1, 2, 3, \dots, 100$ ，這

100 個自然數時，函數值的總和是 ()。

(A) 540 (B) 390 (C) 194 (D) 197

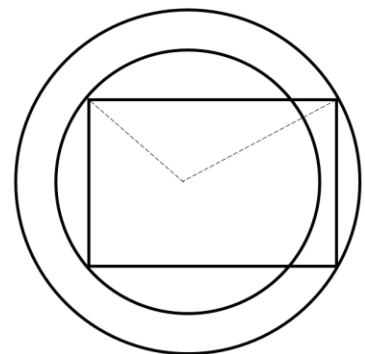
難度：★☆☆

5. 如圖，兩圓同心，半徑 $2\sqrt{6}$ 與 $4\sqrt{3}$ ，矩形 $ABCD$ 的邊 \overline{AB} ， \overline{CD} 分別為兩圓的弦。當矩形面積取最大值時，它的周長等於 ()。

(A) $22 + 6\sqrt{2}$ (B) $20 + 8\sqrt{2}$
(C) $18 + 10\sqrt{2}$ (D) $16 + 12\sqrt{2}$

HINT: 長方形面積 = $4 \times$ 虛線三角形面積。

難度：★★☆



6. 一次考試共有 5 道題，考後成績統計如下：有 81% 的同學作對第 1 題；91% 的同學作對第 2 題；85% 的同學作對第 3 題；79% 的同學作對第 4 題；74% 的同學作對第 5 題。如果作對三道以上(包括三道)題目的同學為考試合格，那麼，這次考試得合格率至少為 ()。

(A) 70% (B) 74% (C) 81% (D) 73%

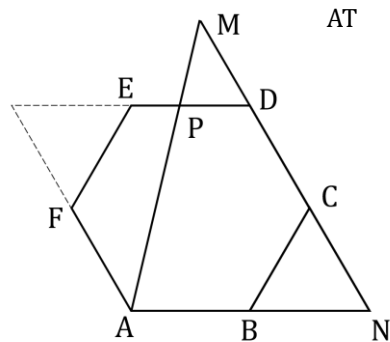
難度：★★☆

二、填充題

1. 如圖，正六邊形 $ABCDEF$ 中， P 是 ED 上一點，直線 \overleftrightarrow{DC} 與射線 \overrightarrow{AP} ， \overrightarrow{AB} 相交於 M 、 N 。當 $\triangle AMN$ 面積與正六邊形 $ABCDEF$ 面積相等時， $\overline{EP} : \overline{PD} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

難度：★★☆

HINT：可用虛線作相似形，觀察正六邊形與正三角形的面積。



2. 設 a_n 表示與 \sqrt{n} (n 為正整數) 最接近的整數，則 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2001}}$ 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

難度：★★☆

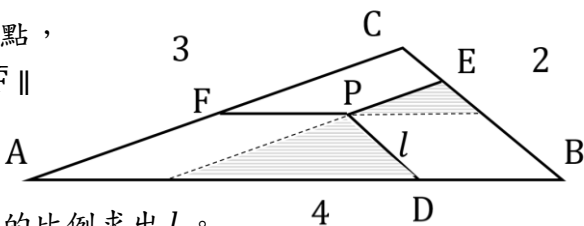
HINT： $a_n = k$ ，代表 $k - \frac{1}{2} < \sqrt{n} < k + \frac{1}{2}$ ， $k^2 - k + \frac{1}{4} < n < k^2 + k + \frac{1}{4}$

3. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC} = 2$ ， $\overline{CA} = 3$ ， $\overline{AB} = 4$ ， P 是 $\triangle ABC$ 內一點， D 、 E 、 F 分別在 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CA} 上，且 $\overline{PD} \parallel \overline{BC}$ 、 $\overline{PE} \parallel \overline{AC}$ 、 $\overline{PF} \parallel \overline{AB}$ 。若 $\overline{PD} = \overline{PE} = \overline{PF} = l$ ，則 $l = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

難度：★★★

P.S. 「 \parallel 」代表平行的符號。

HINT：參考右圖，灰色三角形與 $\triangle ABC$ 相似。請用相似形的比例求出 l 。



4. 過 $A(-1, 0)$ ， $B(8, 0)$ 兩點作一圓，就圓與直線 $y = k(x - 1)$ 交於 M 、 N 兩點，則 MN 的最小值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

難度：★★☆

三、計算題

(一) 已知二次函數 $y_1 = x^2 - 2x - 3$ 。

1. 畫出 y_1 ，確定 x 取什麼值時， $y_1 > 0$ ， $y_1 = 0$ ， $y_1 < 0$ 。難度：★☆☆

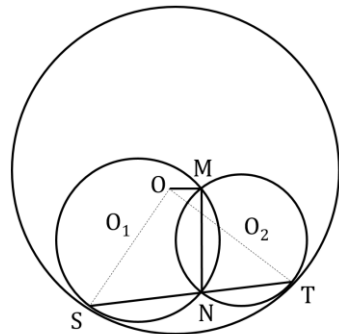
2. 根據上題，用 x 表示函數 $y_2 = \frac{1}{2}(|y_1| - y_1)$ 。難度：★☆☆

3. 若一次函數 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的圖和函數 y_2 交於三相異點，試確定實數 k 與 b 應滿足的條件。難度：★★★

(二) 如圖，已知兩個半徑不相等的圓 O_1 與 O_2 相交於 M 、 N 兩點，且圓 O_1 、 O_2 分別與圓 O 內切於 S 、 T 兩點，且 $\overline{SN} + \overline{NT} = \overline{ST}$ 。求證： $\overline{OM} \perp \overline{MN}$ 。

難度：★★★

HINT：用圖中虛線三點共線的性質。並畫出其他輔助線。



(三) 有一批長為 60 公分的材料，現要截成 24 公分和 17 公分的兩種規格備用，那麼：

- 怎麼截才可使原材料的利用率最高？並求利用率是多少？ 難度：★☆☆
- 若要截成 24 公分和 17 公分的材料各 40 根備用，試問怎樣截法可使原材料的利用率最高？ 難度：★★☆