

Apollo横向控制模块梳理

1 LQR最优控制器

LQR横向控制器原理

LQR (linear quadratic regulator)即线性二次型调节器，是常用控制算法的一种。

考虑有如下离散线性系统：

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t, x_{init} = x(0)$$

在此基础上设计一个状态反馈控制器

$$u = -Kx$$

为了使上述控制器达到期望的稳定性性能,将 $u = -Kx$ 带入状态方程组中,有

$$\dot{x} = (A - BK)x = A_c x$$

LQR 的目标就是找到一组控制量 u_0, u_1, \dots 使 x_0, x_1, \dots 足够小, 即使系统达到稳定状态, u_0, u_1, \dots 足够小, 即花费较小的控制代价.

为了达到上述效果, 定义代价函数:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t=0}^{\infty} x^T Q x + u^T R u \, dt$$

其中, Q 、 R 就是需要设计的半正定矩阵和正定矩阵。一般来说, 选取 Q 、 R 矩阵的时候, 为了方便观察各个系统状态量而选取对角阵, 增加 Q 的一个值, 意味着这个值作用的系统状态量, 将以更快的速度衰减到0, 比如, Q_{11} 选取较大的值, 会让 x_1 很快的衰减到0; 另外一方面, 加大 R 的值, 会使得对应的控制量减小, 控制器执行更少的动作, 意味着系统的状态衰减将变慢。

公式推导:

1. 将 $u = -Kx$ 代入代价函数后, 有

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^T (Q + K^T R K) \, dt$$

2. 假设纯在一个常量矩阵 P 使得, 有

$$\frac{d(x^T P x)}{dt} = -x^T (Q + K^T R K) x$$

3. 将上式带入可知

$$J = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d(x^T P x)}{dt} = \frac{1}{2} x^T(0) P x(0)$$

- 4.

即, 当 t 趋近于无穷时, 系统状态向量 $x(t)$ 趋近于0, 这样就直接结算出了积分方程。

4. 将左式微分展开

$$\dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} + x^T Q x + x^T K^T R K x = 0$$

状态变量 x 的微分式带入 $\dot{x} = A_c x$

$$x^T A_c^T P x + x^T P A_c x + x^T Q x + x^T K^T R K x = 0$$

整理方程有

$$x^T (A_c^T P + P A_c + Q + K^T R K) x = 0$$

如果上述二次型方程要有解, 则括号内的部分必须为0

即

$$A_c^T P + P A_c + Q + K^T R K = 0$$

把 $A_c = A - BK$ 代入

$$A^T P + P A + Q + K^T R K - K^T B^T P - P B K = 0$$

5. 令 $K = R^{-1} B^T P$, 代入

$$A^T P + P A + Q - P B R^{-1} B^T P = 0$$

此时, A, B, Q, R 都是已知量, 可以通过化解得来的方程求解 P , 此即Riccati方程

回顾一下LQR算法的思路:

1. 选择参数矩阵 Q, R
2. 求解 *Riccati* 方程得到矩阵 P
3. 根据 P 计算 $K = R^{-1}B^T P$
4. 计算控制量 $u = -Kx$

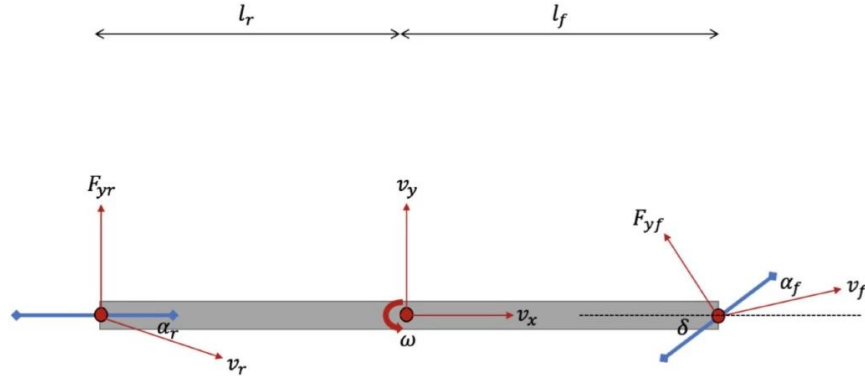
3. 前馈控制

apollo 的控制模块加入了前馈控制来消除更好的消除汽车在运动过程中产生的稳态误差, 这部分的控制量为 $\dot{\psi}$, 也就是道路曲率。

从直觉上来理解为什么会将道路曲率作为控制量的一部分, 来加入整个控制的过程, 对应到人类驾驶员在道路上行驶的过程中, 假设前方有一个弯道, 虽然此时汽车在运动过程中并没有偏离轨迹, 产生误差, 但是为了使得在行驶过程中的轨迹足够平滑, 我们通常会提前, 慢慢的先于弯道处打方向盘, 这部分的控制量对应到整个的控制过程就类似于前馈控制, 在没有接收到误差之前, 根据当前获得的状态信息给出一部分先验的控制量。

接下来从公式推导的方式说明为什么需要加入前馈控制量, 以及对应的表达式。

状态方程推导



apollo 的控制模块是将汽车模型先简化为自行车模型后再进行分析的。

根据牛顿第二定律结合车辆前后轮受力:

$$ma_y = F_{yf} + F_{yr}$$

根据力矩平衡结合车辆前后轮受力和受力点到车辆重心距离, 有:

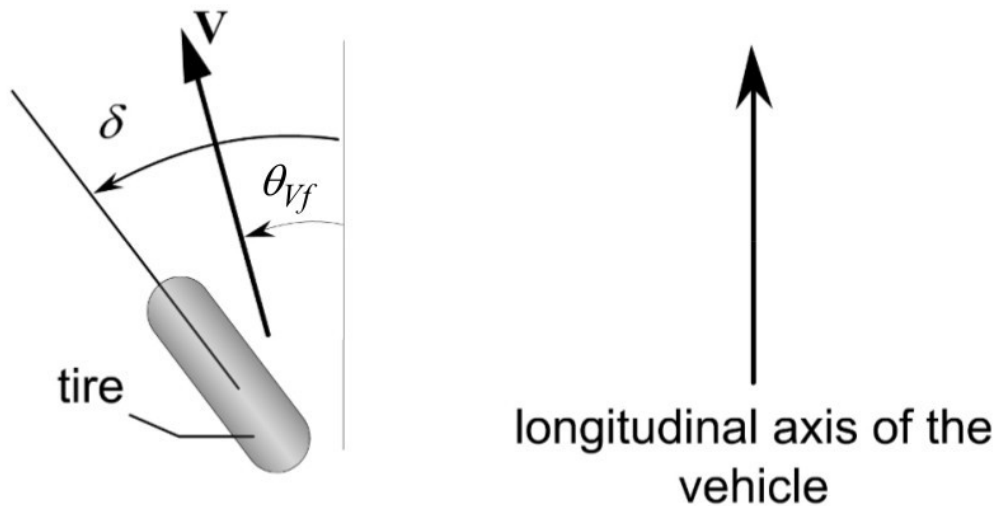
$$I_z \ddot{\psi} = l_f F_{yf} - l_r F_{yr}$$

上述两式中, 汽车质量 m 、转动惯量 I_z 、前轴到重心距离 l_f 和后轴到重心距离 l_r 都是可测量的。为了求解两等式, 需要分别求得车辆横向加速度 a_y 和前轮横向受力 F_{yf} 和后轮横向受力 F_{yr}

横向加速度可以分解为由横向位移产生的加速度和向心加速度。

$$a_y = \ddot{y} + V_x \dot{\psi}$$

y 为横向位移, ψ 航向角, V_x 为纵向速度。这样横向加速度就分解为位移和航向角的表达式



前轮横向受力:

$$F_{yf} = 2C_{af}(\delta - \theta_{vf})$$

其中 C_{af} 为前轮侧偏刚度， δ 为前轮转角， θ_{vf} 为前轮速度偏角。

后轮横向受力可以近似为:

$$F_{yr} = 2C_{ar}(-\theta_{vr})$$

其中 C_{ar} 为后轮侧偏刚度， θ_{vr} 为后轮速度偏角。

$\tan(\theta)$ 等于车辆横向速度比纵向速度，而横向速度由车辆自身横向速度和绕重心转动速度组成。

$$\tan(\theta_{vf}) = \frac{V_y + l_f \dot{\psi}}{V_x}$$

$$\tan(\theta_{vr}) = \frac{V_y - l_r \dot{\psi}}{V_x}$$

在小角度转向假设下，有

$$\theta_{vf} = \frac{V_y + l_f \dot{\psi}}{V_x}$$

$$\theta_{vr} = \frac{V_y - l_r \dot{\psi}}{V_x}$$

至此，把变化后的各变量表达式代入 $ma_y = F_{yf} + F_{yr}$ ，有如下推导过程:

$$\begin{aligned} ma_y &= F_{yf} + F_{yr} \\ m(\ddot{y} + V_x \dot{\psi}) &= 2C_{af}(\delta - \theta_{vf}) + 2C_{ar}(-\theta_{vr}) \\ m(\ddot{y} + V_x \dot{\psi}) &= 2C_{af}(\delta - \frac{\dot{y} + l_f \dot{\psi}}{V_x}) + 2C_{ar}(-\frac{V_y - l_r \dot{\psi}}{V_x}) \\ \ddot{y} &= -\frac{2C_{af} + 2C_{ar}}{mV_x} \dot{y} + (-V_x - \frac{2C_{af}l_f - 2C_{ar}l_r}{mV_x}) \dot{\psi} + \frac{2C_{af}}{m} \delta \end{aligned}$$

把变化后的各变量表达式代入 $I_z \ddot{\psi} = l_f F_{yf} - l_r F_{yr}$ ，有如下推导过程:

$$\begin{aligned} I_z \ddot{\psi} &= l_f F_{yf} - l_r F_{yr} \\ I_z \ddot{\psi} &= l_f 2C_{af}(\delta - \theta_{vf}) - l_r 2C_{ar}(-\theta_{vr}) \\ I_z \ddot{\psi} &= l_f 2C_{af}(\delta - \frac{V_y + l_f \dot{\psi}}{V_x}) - l_r 2C_{ar}(-\frac{V_y - l_r \dot{\psi}}{V_x}) \\ \ddot{\psi} &= -\frac{2l_f C_{af} - 2l_r C_{ar}}{I_z V_x} \dot{y} + (-\frac{2l_f^2 C_{af} + 2l_r^2 C_{ar}}{I_z V_x}) \dot{\psi} + \frac{2l_f C_{af}}{I_z} \delta \end{aligned}$$

最终得到关于横向位移 y 和航向角 ψ 的方程:

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -\frac{2C_{af} + 2C_{ar}}{mV_x} \dot{y} + (-V_x - \frac{2C_{af}l_f - 2C_{ar}l_r}{mV_x}) \dot{\psi} + \frac{2C_{af}}{m} \delta \\ \ddot{\psi} &= -\frac{2l_f C_{af} - 2l_r C_{ar}}{I_z V_x} \dot{y} + (-\frac{2l_f^2 C_{af} + 2l_r^2 C_{ar}}{I_z V_x}) \dot{\psi} + \frac{2l_f C_{af}}{I_z} \delta \end{aligned}$$

设 e_1 为横向偏差， e_2 为航向角偏差，可以得到如下关系。

$$\dot{e}_1 = a_y - a_{ydes} = (\ddot{y} + V_x \dot{\psi}) - V_x \dot{\psi}_{des} = \ddot{y} + V_x (\dot{\psi} - \dot{\psi}_{des}) = \ddot{y} + V_x \dot{e}_2$$

在匀速假设下，上式可进一步推导出:

$$\dot{e}_1 = \dot{y} + V_x e_2$$

因为还有,

$$\begin{aligned} e_2 &= \psi - \psi_{des} \\ \dot{e}_2 &= \dot{\psi} - \dot{\psi}_{des} \\ \ddot{e}_2 &= \ddot{\psi} - \ddot{\psi}_{des} \end{aligned}$$

转换为 y 和 ψ 的表达式,

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{e}_1 - V_x e_2 \\ \ddot{y} &= \ddot{e}_1 - V_x \dot{e}_2 \\ \dot{\psi} &= \dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des} \\ \ddot{\psi} &= \ddot{e}_2 + \ddot{\psi}_{des} \end{aligned}$$

把变化后的各变量表达式代入 \ddot{y} 等式中,有如下推导过程:

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -\frac{2C_{af} + 2C_{ar}}{mV_x} \dot{y} + (-V_x - \frac{2C_{af}l_f - 2C_{ar}l_r}{mV_x}) \dot{\psi} + \frac{2C_{af}}{m} \delta \\ \ddot{e}_1 - V_x \dot{e}_2 &= -\frac{2C_{af} + 2C_{ar}}{mV_x} (\dot{e}_1 - V_x e_2) + (-V_x - \frac{2C_{af}l_f - 2C_{ar}l_r}{mV_x}) (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des}) + \frac{2C_{af}}{m} \delta \\ \dot{e}_1 &= -\frac{2C_{af} + 2C_{ar}}{mV_x} \dot{e}_1 + \frac{2C_{af} + 2C_{ar}}{mV_x} V_x e_2 - \frac{2C_{af}l_f - 2C_{ar}l_r}{mV_x} \dot{e}_2 - \frac{2C_{af}l_f - 2C_{ar}l_r}{mV_x} \dot{\psi}_{des} - V_x \dot{\psi}_{des} + \frac{2C_{af}}{m} \delta \end{aligned}$$

把变化后的各变量表达式代入 $\ddot{\psi}$ 等式中,有如下推导过程:

$$\begin{aligned}\ddot{\psi} &= -\frac{2l_f C_{af} - 2l_r C_{ar}}{I_z V_x} \dot{y} + \left(-\frac{2l_f^2 C_{af} + 2l_r^2 C_{ar}}{I_z V_x}\right) \dot{\psi} + \frac{2l_f C_{af}}{I_z} \delta \\ \ddot{\psi}_{des} + \dot{e}_2 &= -\frac{2l_f C_{af} - 2l_r C_{ar}}{I_z V_x} (\dot{e}_1 - V_x e_2) + \left(-\frac{2l_f^2 C_{af} + 2l_r^2 C_{ar}}{I_z V_x}\right) (\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des}) + \frac{2l_f C_{af}}{I_z} \delta \\ \dot{e}_2 &= -\frac{2l_f C_{af} - 2l_r C_{ar}}{I_z V_x} \dot{e}_1 + \frac{2l_f C_{af} - 2l_r C_{ar}}{I_z V_x} V_x e_2 - \frac{2l_f^2 C_{af} + 2l_r^2 C_{ar}}{I_z V_x} \dot{e}_2 - \frac{2l_f^2 C_{af} + 2l_r^2 C_{ar}}{I_z V_x} \dot{\psi}_{des} - \ddot{\psi}_{des} + \frac{2l_f C_{af}}{I_z} \delta\end{aligned}$$

得到关于 $\mathbf{e_1}$ 和 $\mathbf{e_2}$ 的方程：

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= -\frac{2C_{af} + 2C_{ar}}{mV_x} \dot{e}_1 + \frac{2C_{af} + 2C_{ar}}{mV_x} V_x e_2 - \frac{2C_{af}l_f - 2C_{ar}l_r}{mV_x} \dot{e}_2 - \frac{2C_{af}l_f - 2C_{ar}l_r}{mV_x} \dot{\psi}_{des} - V_x \dot{\psi}_{des} + \frac{2C_{af}}{m} \delta \\ \dot{e}_2 &= -\frac{2l_f C_{af} - 2l_r C_{ar}}{I_z V_x} \dot{e}_1 + \frac{2l_f C_{af} - 2l_r C_{ar}}{I_z V_x} V_x e_2 - \frac{2l_f^2 C_{af} + 2l_r^2 C_{ar}}{I_z V_x} \dot{e}_2 - \frac{2l_f^2 C_{af} + 2l_r^2 C_{ar}}{I_z V_x} \dot{\psi}_{des} - \ddot{\psi}_{des} + \frac{2l_f C_{af}}{I_z} \delta\end{aligned}$$

转换为状态空间的表达式:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2C_{af}+2C_{ar}}{mV_x} & \frac{2C_{af}+2C_{ar}}{m} & -\frac{2C_{af}l_f+2C_{ar}l_r}{mV_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2C_{af}l_f-2C_{ar}l_r}{I_z V_x} & \frac{2C_{af}l_f-2C_{ar}l_r}{I_z} & -\frac{2C_{af}l_f^2+2C_{ar}l_r^2}{I_z V_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2C_{af}}{m} \\ 0 \\ \frac{2C_{af}l_f}{I_z} \end{bmatrix} \delta + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2C_{af}-2C_{ar}l_r}{mV_x} - V_x \\ 0 \\ -\frac{2C_{af}l_f^2+2C_{ar}l_r^2}{I_z V_x} \end{bmatrix} \dot{\psi}_{des} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ddot{\psi}_{des}$$

这样就得到了在

- 1、小角度速度偏角
- 2、匀速
- 3、不考虑环境因素

假设下，车辆的动力学模型表达式。令

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2C_{af}+2C_{ar}}{mV_x} & \frac{2C_{af}+2C_{ar}}{m} & -\frac{2C_{af}l_f+2C_{ar}l_r}{mV_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2C_{af}l_f-2C_{ar}l_r}{I_z V_x} & \frac{2C_{af}l_f-2C_{ar}l_r}{I_z} & -\frac{2C_{af}l_f^2+2C_{ar}l_r^2}{I_z V_x} \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2C_{af}}{m} \\ 0 \\ \frac{2C_{af}l_f}{I_z} \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2C_{af}-2C_{ar}l_r}{mV_x} - V_x \\ 0 \\ -\frac{2C_{af}l_f^2+2C_{ar}l_r^2}{I_z V_x} \end{bmatrix} \dot{\psi}_{des} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ddot{\psi}_{des}\end{aligned}$$

得到状态方程，

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{C}$$

式中，前轮侧偏刚度 $\mathbf{C_{af}}$ 、后轮侧偏刚度 $\mathbf{C_{ar}}$ 、车身质量m、转动惯量 $\mathbf{I_z}$ 、前轮到重心距离 $\mathbf{l_f}$ 、后轮到重心距离 $\mathbf{l_r}$ 都是常量;

每个时刻的横向偏差 $\mathbf{e_1}$ 、航向偏差 $\mathbf{e_2}$ 、纵向速度 $\mathbf{V_x}$ 、前轮转角 $\mathbf{\delta}$ 都是可测量量;

目标航向 $\mathbf{\psi}$ 是可获取量。

由推导出的状态方程可知，在系统中仍需要添加一个前馈控制量来消除稳态误差。

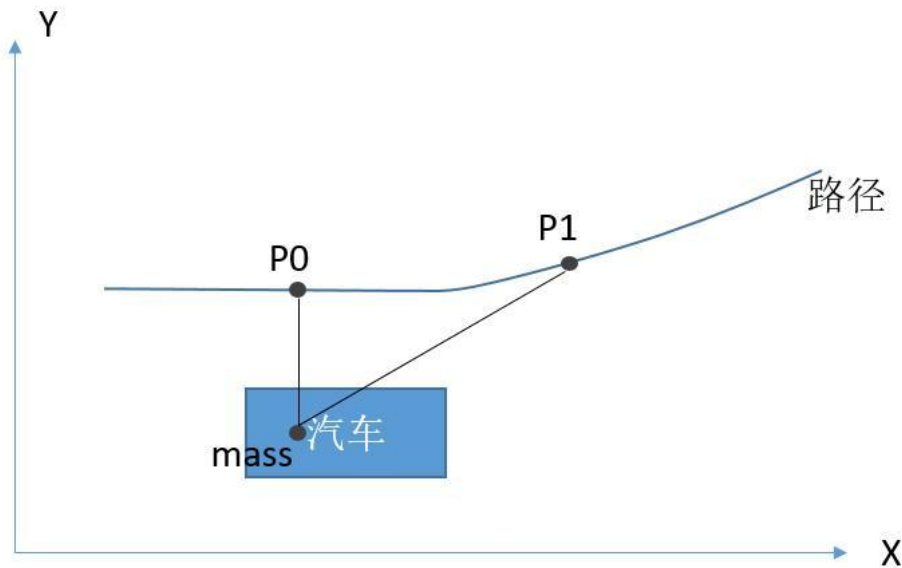
4. 预瞄控制

在apollo的横向控制参数中, 我们可以看到如下的一些预瞄参数:

```
lookahead_station: 1.4224    # 前进档时汽车控制的预瞄距离
lookback_station: 2.8448     # 倒车档时汽车控制的预瞄距离
lookahead_station_high_speed: 1.4224    # 高速前进预瞄距离, 针对非R档
lookback_station_high_speed: 2.8448    # 高速前进预瞄距离, 针对R档
```

其对应的控制原理即是接下来要介绍的预瞄控制.

在无人车运动控制中，车身侧向稳定性与控制精度至关重要，相对于纵向控制而言，侧向控制的精度要求也更高。在无人车的侧向控制中，通过“预瞄”来实现更稳定的控制，是一种简单有效的方法.如图:



“预瞄”机制很好理解，就是在行驶过程中，往前探测，以此来模仿驾驶员的真实驾驶效果。实现的方法主要是通过 LQR 算法中的状态矩阵（误差量），计算当前位置与预瞄点的误差，以此提前做出动作。

通常情况下，无预瞄时，则会计算 $mass$ 和 $P0$ 点之间的误差（包括位置误差、 yaw 误差等），构建状态矩阵。造成的直接结果是，在遇到路径航向发生变化时，汽车突然反应，造成横向误差突变，进而可能会引起车辆不稳定。

增加预瞄时间或预瞄距离后，车辆可以提前探测前方路径的变化，以此作为优化目标，提前调整转角。