惯性导航算法
INS Algorithm

牛小骥 陈起金

武汉大学卫星导航定位技术研究中心
(GNSS Center of Wuhan University)

2021年11月

2 目 录

2.1 惯导机械编排算法

INS Mechanization

2.1 目 录

预备知识

- 惯性导航中的常用坐标系
  - 地心惯性坐标系，地心地固坐标系，导航坐标系，载体坐标系
- 地球表面导航的主要状态量
  - 位置：地心→载体
  - 速度：地速，
  - 姿态：b系相对于n系（或e系）
- 导航状态量的表示
  - 位置、速度、加速度和角速度等状态量用向量来表示，准确的表达涉及三种坐标系
    - b，载体坐标系
    - R，参考坐标系
    - p，投影坐标系

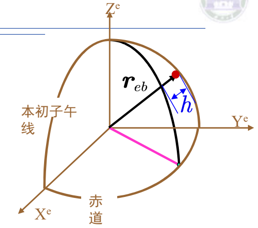
$$\boldsymbol{v}_{Rb}^{p}$$

  - 注意区分向量与向量的坐标
  - 姿态不能用向量表示，需要用特殊的姿态表达式

预备知识

- 位置向量
  - 由地心指向载体中心的三维向量 $\boldsymbol{r}_{eb}$
    - 大地坐标/球面坐标 vs. 笛卡尔坐标

$$\boldsymbol{r}_{eb}=\begin{bmatrix}\varphi\\ \lambda\\ h\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{r}_{eb}^{e}=\begin{bmatrix}\mathrm{X}^{e}\\ \mathrm{Y}^{e}\\ \mathrm{Z}^{e}\end{bmatrix}$$



- 速度向量
  - 载体相对于地球的速度，用三维向量表示 $\boldsymbol{v}_{eb}=\left.\dfrac{d\boldsymbol{r}_{eb}}{dt}\right|_{e}$
- 姿态
  - 欧拉角
  - 方向余弦矩阵
  - 四元数
  - 旋转矢量（描述姿态变化）

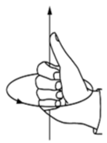
预备知识：角速度向量

- 角速度向量
  - 任意坐标系 b 相对于参考坐标系 R 的转动角速度向量，在坐标系 p 下的投影，可写成如下向量符号

$$\boldsymbol{\omega}_{Rb}^{p}$$

  - 角速度向量反号

$$\boldsymbol{\omega}_{Rb}^{p}=-\boldsymbol{\omega}_{bR}^{p}$$



  - 角速度向量相加，例如

$$\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}=\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}+\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}$$

- 向量的坐标变换

笛卡尔坐标

$$\boldsymbol{v}^{R}=\mathbf{C}_{b}^{R}\boldsymbol{v}^{b}$$

预备知识：反对称矩阵

- 向量积，反对称矩阵

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ v_x & v_y & v_z\\ v_{1x} & v_{1y} & v_{1z}\end{vmatrix}=(\boldsymbol{v}\times)\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}0 & -v_z & v_y\\ v_z & 0 & -v_x\\ -v_y & v_x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{1x}\\ v_{1y}\\ v_{1z}\end{bmatrix}$$

- 反对称矩阵的幂方

$$(\boldsymbol{v}\times)^{n}=\begin{cases}(-1)^{(n-1)/2}|\boldsymbol{v}|^{n-1}(\boldsymbol{v}\times), & n=1,3,5,\cdots\\ (-1)^{(n-2)/2}|\boldsymbol{v}|^{n-2}(\boldsymbol{v}\times)^{2}, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

$$\boldsymbol{v}=[v_x\ \ v_y\ \ v_z]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{v}_1=[v_{1x}\ \ v_{1y}\ \ v_{1z}]^{\mathrm{T}}$$
$$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

- 反对称矩阵的矩阵指数函数

$$e^{(\boldsymbol{v}\times)}=\mathbf{I}_{3\times3}+\frac{\sin|\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}(\boldsymbol{v}\times)+\frac{1-\cos|\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|^{2}}(\boldsymbol{v}\times)^{2}$$

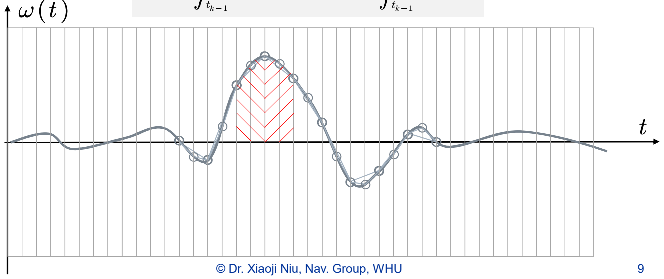
- 投影变换

$$(\boldsymbol{v}^{R}\times)=\mathbf{C}_{b}^{R}(\boldsymbol{v}^{b}\times)(\mathbf{C}_{b}^{R})^{\mathrm{T}}$$

预备知识：IMU 的增量输出

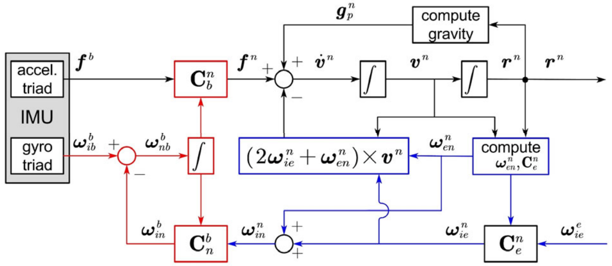
- 速度增量和角度增量输出
- 采样定理: 带宽 vs. 数据率
- 连续时间 vs. 离散时间
- 圆锥效应， 划桨效应，涡卷效应

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_k=\int_{t_{k-1}}^{t_k}\boldsymbol{\omega}_{ib}(t)^b dt,\quad \Delta\boldsymbol{v}_k=\int_{t_{k-1}}^{t_k}\boldsymbol{f}^b(t)\,dt$$



惯导机械编排原理

- 捷联惯导利用陀螺的原始测量值计算载体姿态矩阵，通过姿态矩阵把加速度计测量的载体的沿载体坐标系轴向的比力信息转换到特定的坐标系中（如导航坐标系），然后进行导航解算。



姿态及其作用

- 姿态（attitude）描述的是一个坐标系的轴系相对于另一个坐标系的轴系之间的角度关系（方向）

- 坐标系可以看成刚体，而姿态是描述刚体的六参数（三个坐标和三个轴向角度）中的三个。描述姿态需要三个独立参数

- 在惯性导航中，姿态主要用于比力、角速度及其它向量的投影变换（例如从载体坐标系变换到导航坐标系）

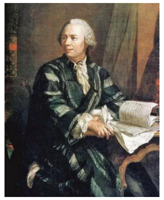
姿态表达式

- 欧拉角法（Euler Angles）
- 方向余弦矩阵法（Direction Cosine Matrix）
- 四元数法（Quaternion）
- 等效旋转矢量法（Rotation Vector）

欧拉角

- 欧拉角

欧拉证明任意两个正交坐标系之间的相对朝向关系可以通过一组不少于3的角度来描述。这三次旋转的转角称为一组欧拉角，因最早由欧拉（Leonhard Euler ）提出而得名。



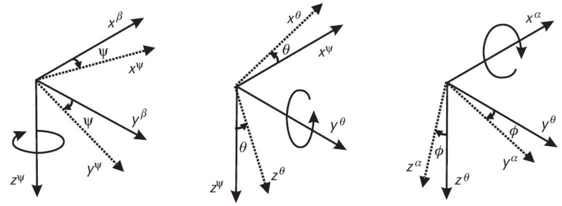
Leonhard Paul Euler
莱昂哈德·欧拉
1707-1783

- 欧拉旋转定理

在运动学里，欧拉旋转定理表明，在三维空间里，假设一个刚体在做一个旋转的时候，刚体内部至少有一点固定不动，则此位移等价于一个绕着包含那固定点的固定轴的旋转。

欧拉角组

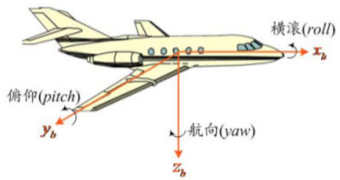
- 在三维欧氏空间里，任何两个正交坐标系都可以用坐标变换把它们联系起来，而坐标变换又可以用坐标旋转来得到。
- 一个动坐标系相对参考坐标系的方位，可以完全由动坐标系依次绕三个不同的转轴的转角来确定。



- 在给定一组欧拉角表示两个坐标系间的姿态关系时，一定要同时指定对应的转轴顺序才有意义。

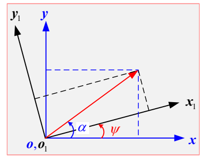
常用姿态角的定义

- 航向角 ψ：载体纵轴正方向在当地水平面上的投影与当地地理北向的夹角，取北偏东为正；取值范围 $-180^\circ \sim 180^\circ$ 或 $0 \sim 360^\circ$
- 俯仰角 θ：载体纵轴正方向与其水平投影线之间的夹角，当载体“抬头”时定义为正，取值范围 $-90^\circ \sim 90^\circ$
- 横滚角 ϕ：载体立轴正方向与载体纵轴所在铅垂面之间的夹角，当载体向右倾斜（如飞机右机翼下压）时为正，取值范围 $-180^\circ \sim 180^\circ$



二维平面坐标变换

- 二维平面中任意向量 $\boldsymbol{r}$ 在坐标系 $b(oxy)$ 和 $b_1(o_1x_1y_1)$ 下的投影（即坐标值）表示为



$$\boldsymbol{r}^b = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}^{b_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\alpha-\psi) \\ r\sin(\alpha-\psi) \end{bmatrix}$$

- 易得

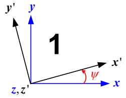
$$\boldsymbol{r}^{b_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\alpha\cos\psi + r\sin\alpha\sin\psi \\ r\sin\alpha\cos\psi - r\cos\alpha\sin\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\psi + y\sin\psi \\ -x\sin\psi + y\cos\psi \end{bmatrix}$$

- 整理得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

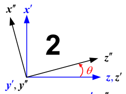
用欧拉角表示坐标转换矩阵

Rotation 1



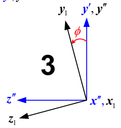
$$\begin{bmatrix} x^{b'} \\ y^{b'} \\ z^{b'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{n} \\ y^{n} \\ z^{n} \end{bmatrix}$$

Rotation 2



$$\begin{bmatrix} x^{b''} \\ y^{b''} \\ z^{b''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{b'} \\ y^{b'} \\ z^{b'} \end{bmatrix}$$

Rotation 3



$$\begin{bmatrix} x^{b} \\ y^{b} \\ z^{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{b''} \\ y^{b''} \\ z^{b''} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r}^b = \mathbf{C}_\phi \mathbf{C}_\theta \mathbf{C}_\psi \boldsymbol{r}^n$$

$$\mathrm{C}_n^b = \mathbf{C}_\phi \mathbf{C}_\theta \mathbf{C}_\psi = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & s\phi c\theta \\ s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi & -s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi & c\phi c\theta \end{bmatrix}$$

$s = sin;\ c = cos$

欧拉角法

- 微分方程

$$\begin{bmatrix} \dot\phi \\ \dot\theta \\ \dot\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi\tan\theta & \cos\phi\tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \dfrac{\sin\phi}{\cos\theta} & \dfrac{\cos\phi}{\cos\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{nb,x}^b \\ \omega_{nb,y}^b \\ \omega_{nb,z}^b \end{bmatrix}$$

- 欧拉角法的特点
  - 优点：形象直观；由欧拉角得到的姿态矩阵永远是正交阵。
  - 缺点：当俯仰角为±90度时，方程式出现“奇点”，不能用于全姿态导航。
  - 欧拉角组不能直接相加来表示转动的叠加，欧拉角不能内插。

武漢大學

NSS CENTER

方向余弦矩阵

方向余弦矩阵

$\boldsymbol{i}^b=[1\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}}$ $\boldsymbol{j}^b=[0\ \ 1\ \ 0]^{\mathrm{T}}$ $\boldsymbol{k}^b=[0\ \ 0\ \ 1]^{\mathrm{T}}$
$\boldsymbol{I}^R=[1\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}}$ $\boldsymbol{J}^R=[0\ \ 1\ \ 0]^{\mathrm{T}}$ $\boldsymbol{K}^R=[0\ \ 0\ \ 1]^{\mathrm{T}}$

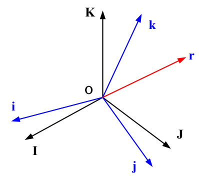
- 两个向量的方向余弦值

$$\cos(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \frac{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1| \cdot |\boldsymbol{v}_2|} = \frac{\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1| \cdot |\boldsymbol{v}_2|}$$

- 已知：$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 为 b 系 x, y, z 轴的单位向量，$\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}$ 为 R 系 x, y, z 轴上的单位向量。任意向量 $\boldsymbol{v}$ 在 b 系和 R 系下的坐标记为（$x\ \ y\ \ z$）和（$x'\ \ y'\ \ z'$），则有

$$\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = [\boldsymbol{i},\ \ \boldsymbol{j},\ \ \boldsymbol{k}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v} = x'\boldsymbol{I} + y'\boldsymbol{J} + z'\boldsymbol{K} = [\boldsymbol{I},\ \ \boldsymbol{J},\ \ \boldsymbol{K}] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$



方向余弦矩阵（续）

- 上面两式等号右边左乘矩阵$[\mathbf{I}\ \ \mathbf{J}\ \ \mathbf{K}]^{\mathrm{T}}$，得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J} & \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J} & \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J} & \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{j} & \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{j} & \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{j} & \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- 等式右边矩阵每个元素都是两个单位向量的方向余弦值

$$\boldsymbol{v}^R = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{j} & \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{j} & \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{j} & \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{C}_b^R \boldsymbol{v}^b$$

- 理解方向余弦矩阵中“方向余弦”的含义（坐标轴夹角的余弦）
- 方向余弦矩阵（Direction Cosine Matrix，DCM）又被称为“坐标转换矩阵”，常用于将矢量的投影从一个坐标系变换到另一坐标系中。

方向余弦矩阵的特性

- 方向余弦矩阵为正交矩阵（方块矩阵的行与列皆为相互正交的单位向量）

$$(\mathbf{C}_\alpha^\beta)^{-1} = (\mathbf{C}_\alpha^\beta)^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{C}_\alpha^\beta (\mathbf{C}_\alpha^\beta)^{\mathrm{T}} = (\mathbf{C}_\alpha^\beta)^{\mathrm{T}} \mathbf{C}_\alpha^\beta = \mathbf{I}$$

$$\det(\mathbf{C}_\alpha^\beta) = 1$$

$$\mathbf{C}_\beta^\alpha = (\mathbf{C}_\alpha^\beta)^{\mathrm{T}}$$

- 向量投影变换

$$\boldsymbol{v}^b = \mathbf{C}_a^b \boldsymbol{v}^a$$

- 连乘运算

$$\mathbf{C}_a^d = \mathbf{C}_b^d \mathbf{C}_a^b$$

欧拉角为小角度时的DCM

- 当三个欧拉角均为小角度时（小角度近似），对应的方向余弦矩阵可简化为：

$$\mathbf{C}_b^R \approx \begin{bmatrix} 1 & -\psi & \theta \\ \psi & 1 & -\phi \\ -\theta & \phi & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} + (\boldsymbol{\alpha}_{Rb}\times), \quad \boldsymbol{\alpha}_{Rb} = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}$$

- 思考

$$\mathbf{C}_{b(t_{k-1})}^{b(t_k)} \approx \mathbf{I} - (\Delta\boldsymbol{\theta}_{b(t_{k-1})b(t_k)}\times)$$

$$\mathbf{C}_{b(t_k)}^{b(t_{k-1})} \approx \mathbf{I} + (\Delta\boldsymbol{\theta}_{b(t_{k-1})b(t_k)}\times)$$

注意：从哪个坐标系转动到哪个坐标系；vs 相对于

Tips: $\Delta\boldsymbol{\theta}_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{\omega}_{ib}(t)^b dt, \quad \mathbf{C}_b^R = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi \\ c\theta s\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & -s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix}$

方向余弦矩阵的微分方程

- 已知参考坐标系 R 和载体坐标系 b，求 $\dot{\mathbf{C}}_b^R(t)$
  - 根据定义，有 $\dot{\mathbf{C}}_b^R(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\mathbf{C}_b^R(t+\Delta t) - \mathbf{C}_b^R(t)}{\Delta t}$
  - 根据DCM连乘法则

$$\mathbf{C}_b^R(t+\Delta t) = \mathbf{C}_{b(t+\Delta t)}^R = \mathbf{C}_{b(t)}^R \mathbf{C}_{b(t+\Delta t)}^{b(t)}$$

  - 当转角为小角度 $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \mathbf{C}_{b(t+\Delta t)}^{b(t)} = \mathbf{I} + (\Delta\boldsymbol{\theta}\times)$
  - 带入，可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{C}}_b^R(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{C}_b^R(t)[\mathbf{I} + (\Delta\boldsymbol{\theta}\times)] - \mathbf{C}_b^R(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{C}_b^R(t)(\Delta\boldsymbol{\theta}\times)}{\Delta t} \\ &= \mathbf{C}_{b(t)}^R(\boldsymbol{\omega}_{Rb}^b(t)\times) \end{aligned}$$

DCM微分方程求解

- 时变系数齐次微分方程；毕卡（Peano-Baker）逼近法求解

$$\mathbf{C}_b^R(t)=\mathbf{C}_b^R(0)+\int_0^t \mathbf{C}_b^R(\tau)\boldsymbol{\Omega}(\tau)d\tau \qquad \boldsymbol{\Omega}(t)=[\boldsymbol{\omega}_{Rb}^b(t)\times]$$

$$\mathbf{C}_b^R(t)=\mathbf{C}_b^R(0)\Big[\mathbf{I}+\int_0^t \boldsymbol{\Omega}(\tau)d\tau+\int_0^t\int_0^\tau \boldsymbol{\Omega}(\tau_1)d\tau_1\boldsymbol{\Omega}(\tau)d\tau$$
$$+\int_0^t\int_0^\tau\int_0^{\tau_1} \boldsymbol{\Omega}(\tau_2)d\tau_2\boldsymbol{\Omega}(\tau_1)d\tau_1\boldsymbol{\Omega}(\tau)d\tau+\cdots\Big]$$

- 级数收敛，若积分时段内$\boldsymbol{\omega}_{Rb}^b$ 的方向保持不变可得闭合解

$$\mathbf{C}_b^R(t)=\mathbf{C}_b^R(0)\exp\left(\int_0^t \boldsymbol{\Omega}(\tau)d\tau\right)$$

- 或写作

$$\mathbf{C}_b^R(t)=\mathbf{C}_{b(0)}^R\mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)}$$

$$\mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)}=\exp\left(\int_0^t \boldsymbol{\Omega}(\tau)d\tau\right)$$

DCM微分方程求解

$$\Delta\theta=\sqrt{\Delta\theta_x^2+\Delta\theta_y^2+\Delta\theta_z^2}$$

$$e^{[\Delta\boldsymbol{\theta}\times]}=\mathbf{I}+[\Delta\boldsymbol{\theta}\times]+\frac{[\Delta\boldsymbol{\theta}\times]^2}{2!}+\frac{[\Delta\boldsymbol{\theta}\times]^3}{3!}+\cdots$$
$$=\mathbf{I}+\left[1-\frac{\Delta\theta^2}{3!}+\frac{\Delta\theta^4}{5!}-\cdots\right][\Delta\boldsymbol{\theta}\times]+\left[\frac{1}{2}-\frac{\Delta\theta^2}{4!}+\frac{\Delta\theta^4}{6!}-\cdots\right][\Delta\boldsymbol{\theta}\times]^2$$
$$=\mathbf{I}+\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}[\Delta\boldsymbol{\theta}\times]+\frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta^2}[\Delta\boldsymbol{\theta}\times]^2$$

- 若选择惯性系为参考系，则姿态算法为：

思考：若该前提不满足，如何处理？

$$\mathbf{C}_{b(k)}^i=\mathbf{C}_{b(k-1)}^i\mathbf{C}_{b(k)}^{b(k-1)}$$

$$\mathbf{C}_{b(k)}^{b(k-1)}=\mathbf{I}+\frac{\sin\Delta\theta_k}{\Delta\theta_k}[\Delta\boldsymbol{\theta}_k\times]+\frac{1-\cos\Delta\theta_k}{\Delta\theta_k^2}[\Delta\boldsymbol{\theta}_k\times]^2$$

- 前提：b 系在$[t_{k-1}\quad t_k]$时段内做定轴旋转，即旋转方向不变

*Tips

$$[\Delta\boldsymbol{\theta}\times]=\int_0^t \boldsymbol{\Omega}(\tau)d\tau=\begin{bmatrix}0 & -\Delta\theta_z & \Delta\theta_y\\ \Delta\theta_z & 0 & -\Delta\theta_x\\ -\Delta\theta_y & \Delta\theta_x & 0\end{bmatrix},\quad \Delta\boldsymbol{\theta}_k=\int_{t_{k-1}}^{t_k}\boldsymbol{\omega}_{ib}(t)^b dt,$$

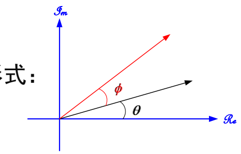
武漢大學

四元数

四元数的引出

*Tips $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

- 复平面内的向量旋转



  - 复数 $z=\rho\cos\theta+i\rho\sin\theta$ 可写成等价形式：

$$z=\rho e^{i\theta}$$

  - 复数 $e^{i\phi}$ 乘以复数 $z=\rho e^{i\theta}$（复平面内的二维向量）:

$$w=e^{i\phi}z=e^{i\phi}\rho e^{i\theta}=\rho e^{i(\theta+\phi)}$$

  - 上述运算相当于将 z 表示的平面向量旋转了一个角度ϕ 。类似地，特定形式的复数（四元数）也可用来表示三维空间中向量的旋转。

四元数

- 在将三维矢量代数推广至乘法和除法运算的研究中，爱尔兰数学家、物理学家哈密顿于1843年创建了四元数（quaternion）和四元数代数。

$$\boldsymbol{q}=q_0 1+q_1\boldsymbol{i}+q_2\boldsymbol{j}+q_3\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=\boldsymbol{ijk}=-1$$

Broom Bridge plaque in Dublin

William Rowan Hamilton (1805–1865)

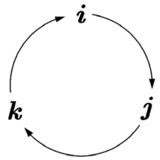
四元数的定义

- 四元数是指由一个实数单位 1 和三个虚数单位 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 组成并具有下列形式实元的数。

$$\boldsymbol{q}=q_0 1+q_1\boldsymbol{i}+q_2\boldsymbol{j}+q_3\boldsymbol{k}$$

- 单位 1，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 的运算法则

$$\begin{cases} 1\circ\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}, & 1\circ\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}, & 1\circ\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{i}\circ\boldsymbol{i}=-1, & \boldsymbol{j}\circ\boldsymbol{j}=-1, & \boldsymbol{k}\circ\boldsymbol{k}=-1 \\ \boldsymbol{i}\circ\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}, & \boldsymbol{j}\circ\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i} & \boldsymbol{k}\circ\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{j}\circ\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}, & \boldsymbol{k}\circ\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i} & \boldsymbol{i}\circ\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j} \end{cases}$$



- 在这样的运算法则下，两个四元数之积仍为四元数

四元数的表示方式

- 单位 1，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 可以看作四维空间（用符号 $\mathbf{H}$ 来表示）中的一组单位矢量。任何四元数都可看作该空间中的一个点或向量。

$$\boldsymbol{q}=(q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3)$$

$$\boldsymbol{q}=[q_0\quad q_1\quad q_2\quad q_3]^{\mathrm{T}}$$

- 单位$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 也可看作三维空间中的单位向量，q_1,q_2,q_3 看作向量的分量，则四元数可写作如下标量部分和矢量部分之和

$$\boldsymbol{q}=q_s+\boldsymbol{q}_v,\quad q_s=q_0\in\mathbb{R},\quad \boldsymbol{q}_v=[q_1,q_2,q_3]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^3$$

  - 实部为0的四元数称作纯四元数。

- 空间 $\mathbf{H}$ 对乘法和除法运算是封闭的。

四元数的运算法则

*Tips $\boldsymbol{p}=p_0+p_1\boldsymbol{i}+p_2\boldsymbol{j}+p_3\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{q}=q_0+q_1\boldsymbol{i}+q_2\boldsymbol{j}+q_3\boldsymbol{k}$

- 相等：两个四元数诸元对应相等

$$q_0=p_0,\quad q_1=p_1,\quad q_2=p_2,\quad q_3=p_3$$

- 加法：两个四元数诸元对应相加

$$\boldsymbol{q}\pm\boldsymbol{p}=(q_0\pm p_0)+(q_1\pm p_1)\boldsymbol{i}+(q_2\pm p_2)\boldsymbol{j}+(q_3\pm p_3)\boldsymbol{k}$$

- 数乘：四元数乘以标量 a 等于诸元均乘该数

$$a\boldsymbol{q}=aq_0 1+aq_1\boldsymbol{i}+aq_2\boldsymbol{j}+aq_3\boldsymbol{k}$$

  - 四元数加法及同标量的乘法都服从于一般代数规则

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{q}+\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}, & (\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p})+\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{q}+(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{\Lambda}) \\ a\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}a, & (ab)\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}(ba) \\ (a+b)\boldsymbol{q}=a\boldsymbol{q}+b\boldsymbol{q}, & a(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p})=a\boldsymbol{q}+a\boldsymbol{p} \end{array}$$

四元数的运算法则

- 乘法

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p}\circ\boldsymbol{q} &= (p_0+p_1\boldsymbol{i}+p_2\boldsymbol{j}+p_3\boldsymbol{k})\circ(q_0+q_1\boldsymbol{i}+q_2\boldsymbol{j}+q_3\boldsymbol{k})\\
&= p_0q_0-p_1q_1-p_2q_2-p_3q_3\\
&\quad+(p_0q_1+p_1q_0+p_2q_3-p_3q_2)\boldsymbol{i}\\
&\quad+(p_0q_2+p_2q_0+p_3q_1-p_1q_3)\boldsymbol{j}\\
&\quad+(p_0q_3+p_3q_0+p_1q_2-p_2q_1)\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

  - 写作矩阵形式

$$
\boldsymbol{p}\circ\boldsymbol{q}=\begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3\\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2\\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1\\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_0\\ q_1\\ q_2\\ q_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3\\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2\\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1\\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_0\\ p_1\\ p_2\\ p_3\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{p}\circ\boldsymbol{q}=\mathbf{M}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{q}=\mathbf{M}^*(\boldsymbol{q})\boldsymbol{p}
$$

四元数的运算法则

- 乘法：用向量符号表示

$$
\boldsymbol{p}_v\times\boldsymbol{q}_v=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ p_1 & p_2 & p_3\\ q_1 & q_2 & q_3\end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p}\circ\boldsymbol{q} &= (p_s+\boldsymbol{p}_v)\circ(q_s+\boldsymbol{q}_v)\\
&= p_sq_s+p_s\boldsymbol{q}_v+q_s\boldsymbol{p}_v+\boldsymbol{p}_v\circ\boldsymbol{q}_v\\
&= (p_sq_s-\boldsymbol{p}_v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_v)+(p_s\boldsymbol{q}_v+q_s\boldsymbol{p}_v+\boldsymbol{p}_v\times\boldsymbol{q}_v)
\end{aligned}
$$

  - 四元数乘法不满足交换律

$$
\boldsymbol{p}\circ\boldsymbol{q}\neq\boldsymbol{q}\circ\boldsymbol{p}
$$

思考：什么情况下满足乘法的交换律

  - 四元数乘法满足结合律和对加法的分配律

$$
(\boldsymbol{p}\circ\boldsymbol{q})\circ\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{p}\circ(\boldsymbol{q}\circ\boldsymbol{\Lambda})
$$

$$
\boldsymbol{p}\circ(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{\Lambda})=\boldsymbol{p}\circ\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p}\circ\boldsymbol{\Lambda}
$$

四元数的运算法则

- 共轭

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{q}^* &= q_0-q_1\boldsymbol{i}-q_2\boldsymbol{j}-q_3\boldsymbol{k}\\
&= q_s-\boldsymbol{q}_v
\end{aligned}
$$

  - 共轭四元数的性质

$$
\begin{gathered}
(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})^*=\boldsymbol{p}^*+\boldsymbol{q}^*\\
\boldsymbol{q}\circ\boldsymbol{q}^*=\boldsymbol{q}^*\circ\boldsymbol{q}\\
(\boldsymbol{p}\circ\boldsymbol{q})^*=\boldsymbol{q}^*\circ\boldsymbol{p}^*\\
(\boldsymbol{q}_1\circ\boldsymbol{q}_2\circ\cdots\circ\boldsymbol{q}_n)^*=\boldsymbol{q}_n^*\circ\boldsymbol{q}_{n-1}^*\circ\cdots\circ\boldsymbol{q}_2^*\circ\boldsymbol{q}_1^*
\end{gathered}
$$

- 模长

$$
\|\boldsymbol{q}\|=\sqrt{q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2}
$$

$$
\|\boldsymbol{q}_1\circ\boldsymbol{q}_2\circ\cdots\circ\boldsymbol{q}_n\|=\|\boldsymbol{q}_1\|\,\|\boldsymbol{q}_2\|\cdots\|\boldsymbol{q}_n\|
$$

四元数的运算法则

- 四元数的逆：记作 $\boldsymbol{q}^{-1}$，满足

$$
\boldsymbol{q}\circ\boldsymbol{q}^{-1}=\boldsymbol{q}^{-1}\circ\boldsymbol{q}=[1\quad 0\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}
$$

$$
\boldsymbol{q}^{-1}=\frac{\boldsymbol{q}^*}{\|\boldsymbol{q}\|^2}
$$

  - 四元数逆的性质

$$
(\boldsymbol{q}_1\circ\boldsymbol{q}_2\circ\cdots\circ\boldsymbol{q}_n)^{-1}=\boldsymbol{q}_n^{-1}\circ\boldsymbol{q}_{n-1}^{-1}\circ\cdots\circ\boldsymbol{q}_2^{-1}\circ\boldsymbol{q}_1^{-1}
$$

- 归一化/规范化

$$
\boldsymbol{q}=\frac{\hat{\boldsymbol{q}}}{\|\hat{\boldsymbol{q}}\|},\quad \|\hat{\boldsymbol{q}}\|\neq 0
$$

四元数的三角函数表示法

- 对于模不等于0的任意四元数都可以写成以下形式

$$\boldsymbol{q}=\|\boldsymbol{q}\|\left(\frac{q_0}{\|\boldsymbol{q}\|}+\frac{q_1\boldsymbol{i}+q_2\boldsymbol{j}+q_3\boldsymbol{k}}{\|\boldsymbol{q}\|}\right)=\|\boldsymbol{q}\|\left(\frac{q_0}{\|\boldsymbol{q}\|}+\frac{\boldsymbol{q}_v}{\|\boldsymbol{q}\|}\right)$$

  - 引入一个沿 $\boldsymbol{q}_v$ 方向的单位向量 $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{q}_v}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}}=\frac{q_1\boldsymbol{i}+q_2\boldsymbol{j}+q_3\boldsymbol{k}}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}}$$

  - 则四元数可写为

$$\boldsymbol{q}=\|\boldsymbol{q}\|\left(\frac{q_0}{\|\boldsymbol{q}\|}+\boldsymbol{u}\frac{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}}{\|\boldsymbol{q}\|}\right)$$

  - 引入如下变量

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{q_0}{\|\boldsymbol{q}\|},\quad \sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}}{\|\boldsymbol{q}\|}$$

$$\boldsymbol{q}=\|\boldsymbol{q}\|\left(\cos\frac{\theta}{2}+\boldsymbol{u}\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

  - 当 $\|\boldsymbol{q}\|=1$

$$\boldsymbol{q}=\cos\frac{\theta}{2}+\boldsymbol{u}\sin\frac{\theta}{2}$$

四元数的旋转变换/算子

定理：对于任意规范化四元数（模长为1）

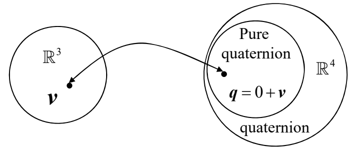
$$\boldsymbol{q}=q_0+\boldsymbol{q}_v=\cos(\theta/2)+\boldsymbol{u}\sin(\theta/2)$$

对于任意三维向量 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$，算子

$$L_q(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{q}\circ\boldsymbol{v}\circ\boldsymbol{q}^*$$

注意不是θ/2 !!

的作用等效于使向量$\boldsymbol{v}$绕向量$\boldsymbol{u}$的正方向旋转角度θ。



四元数的旋转变换/算子 *

$\boldsymbol{q}=q_0+\boldsymbol{q}_v=\cos(\theta/2)+\boldsymbol{u}\sin(\theta/2)$

证明：将矢量$\boldsymbol{v}$分解为$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{n}$，其中$\boldsymbol{a}$是与$\boldsymbol{u}$共线的部分$\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{q}_v$，$\boldsymbol{n}$是与$\boldsymbol{u}$垂直的部分。

① 证明$L_q(\cdot)$算子不会改变$\boldsymbol{a}$的方向和长度

$$L_q(\boldsymbol{a})=\left(q_0^2-|\boldsymbol{q}_v|^2\right)k\boldsymbol{q}_v+2(k\boldsymbol{q}_v\cdot\boldsymbol{q}_v)\boldsymbol{q}_v+2q_0(\boldsymbol{q}_v\times k\boldsymbol{q}_v)$$

$$=k\left(q_0^2-|\boldsymbol{q}_v|^2\right)\boldsymbol{q}_v+2k|\boldsymbol{q}_v|^2\boldsymbol{q}_v=\left(q_0^2+\boldsymbol{q}_v^2\right)k\boldsymbol{q}_v=\boldsymbol{a}$$

② 计算$L_q(\cdot)$算子对$\boldsymbol{n}$的作用

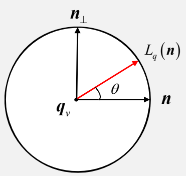
$$L_q(\boldsymbol{n})=\left(q_0^2-|\boldsymbol{q}_v|^2\right)\boldsymbol{n}+2(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{q}_v)\boldsymbol{q}_v+2q_0(\boldsymbol{q}_v\times\boldsymbol{n})$$

$$=\left(q_0^2-|\boldsymbol{q}_v|^2\right)\boldsymbol{n}+2q_0|\boldsymbol{q}_v|(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n})$$

$$L_q(\boldsymbol{n})=\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{n}+2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n})$$

$$=\cos\theta\boldsymbol{n}+\sin\theta(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n})$$

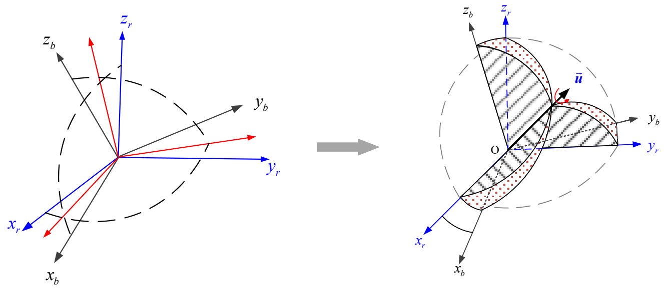
$$=\cos\theta\boldsymbol{n}+\sin\theta\boldsymbol{n}_\perp$$



结论：算子$L_q(\cdot)$对向量$\boldsymbol{n}$的作用等效于在$\boldsymbol{n}$和$\boldsymbol{n}_\perp$定义的平面内旋转θ角，转轴为$\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{n}/|\boldsymbol{n}|)\times\boldsymbol{n}_\perp$，即$\boldsymbol{q}_v$方向。

欧拉旋转定理 – 坐标系的等效转动

- 动坐标系相对于参考坐标系的方位，等效于动坐标系绕某一个固定轴（$\boldsymbol{u}$）转动一个角度θ。



三次连续转动

一次转动

姿态四元数

- b 系相对于 R 系的姿态完全可由 $\boldsymbol{u}$ 和转动角度 θ 两个参数来确定。用 $\boldsymbol{u}$ 和 θ两个参数可以构造一个姿态四元数

$$\boldsymbol{q}_b^R=\cos\frac{\theta}{2}+\boldsymbol{u}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\boldsymbol{q}_b^R=\begin{bmatrix}q_1\\q_2\\q_3\\q_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\theta/2)\\u_x\sin(\theta/2)\\u_y\sin(\theta/2)\\u_z\sin(\theta/2)\end{bmatrix},\quad \|\boldsymbol{q}_b^R\|=1$$

- 姿态四元数的物理意义：参考坐标系 R 绕 $\boldsymbol{u}$ 转动一个角度θ（注意不是$\theta/2$）后与动坐标系 b 重合。
- 坐标变换

$$\boldsymbol{v}^R=\boldsymbol{q}_b^R\circ\boldsymbol{v}^b\circ\boldsymbol{q}_b^{R^*}$$

$$\boldsymbol{q}_D^A=\boldsymbol{q}_B^A\circ\boldsymbol{q}_D^B$$

理解角标的物理意义

姿态四元数的微分方程

- 根据导数的定义求解姿态四元数的微分方程（与方向余弦矩阵微分方程的推导类似）

$$\dot{\boldsymbol{q}}_b^R(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{q}_b^R(t+\Delta t)-\boldsymbol{q}_b^R(t)}{\Delta t}$$

$$\dot{\boldsymbol{q}}_b^R(t)=\frac{1}{2}\boldsymbol{q}_b^R(t)\circ\begin{bmatrix}0\\\boldsymbol{\omega}_{Rb}^b(t)\end{bmatrix}$$

看作纯四元数

- 写成矩阵形式

$$\dot{\boldsymbol{q}}_b^R=\frac{1}{2}\mathbf{W}\boldsymbol{q}_b^R=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -\omega_{Rb,x}^b & -\omega_{Rb,y}^b & -\omega_{Rb,z}^b\\ \omega_{Rb,x}^b & 0 & \omega_{Rb,z}^b & -\omega_{Rb,y}^b\\ \omega_{Rb,y}^b & -\omega_{Rb,z}^b & 0 & \omega_{Rb,x}^b\\ \omega_{Rb,z}^b & \omega_{Rb,y}^b & -\omega_{Rb,x}^b & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_0\\q_1\\q_2\\q_3\end{bmatrix}$$

姿态四元数微分方程的求解

- 与DCM微分方程的求解类似，可用毕卡逼近法求解姿态四元数微分方程。如果角速度向量的方向在更新周期内保持不变（定轴转动），可得四元数微分方程的闭合解

$$\boldsymbol{q}_b^R(t)=\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t\mathbf{W}(\tau)\,d\tau\right)\right]\boldsymbol{q}_b^R(0)$$

定轴转动时的特解

  - 定义矩阵$\boldsymbol{\Theta}$

$$\boldsymbol{\Theta}(t)\equiv\int_0^t\mathbf{W}(\tau)\,d\tau=\int_0^t\begin{bmatrix}0 & -\omega_{Rb,x}^b & -\omega_{Rb,y}^b & -\omega_{Rb,z}^b\\ \omega_{Rb,x}^b & 0 & \omega_{Rb,z}^b & -\omega_{Rb,y}^b\\ \omega_{Rb,y}^b & -\omega_{Rb,z}^b & 0 & \omega_{Rb,x}^b\\ \omega_{Rb,z}^b & \omega_{Rb,y}^b & -\omega_{Rb,x}^b & 0\end{bmatrix}d\tau=\begin{bmatrix}0 & -\Delta\theta_x & -\Delta\theta_y & -\Delta\theta_z\\ \Delta\theta_x & 0 & \Delta\theta_z & -\Delta\theta_y\\ \Delta\theta_y & -\Delta\theta_z & 0 & \Delta\theta_x\\ \Delta\theta_z & \Delta\theta_y & -\Delta\theta_x & 0\end{bmatrix}$$

$$e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\Theta}}=\underset{4\times 4}{\mathbf{I}}\cos\frac{\Delta\theta}{2}+\frac{\boldsymbol{\Theta}}{\Delta\theta}\sin\frac{\Delta\theta}{2}$$

  - 其中

$$\Delta\theta\equiv\sqrt{\Delta\theta_x^2+\Delta\theta_y^2+\Delta\theta_z^2}$$

姿态四元数微分方程的求解（续）

- 带入可得

$$\boldsymbol{q}_b^R(t)=\left[\mathbf{I}\cos\frac{\Delta\theta}{2}+\frac{\boldsymbol{\Theta}}{\Delta\theta}\sin\frac{\Delta\theta}{2}\right]\boldsymbol{q}_b^R(0)$$

  - 可写为如下形式：

$$\boldsymbol{q}_b^R(t)=\boldsymbol{q}_b^R(0)\circ\begin{bmatrix}\cos\frac{\Delta\theta}{2}\\ \frac{\boldsymbol{\Delta\theta}}{\Delta\theta}\sin\frac{\Delta\theta}{2}\end{bmatrix}$$

- 若选择惯性系为参考系，则姿态算法为

$$\boldsymbol{q}_{b(k)}^i=\boldsymbol{q}_{b(k-1)}^i\circ\boldsymbol{q}_{b(k)}^{b(k-1)}$$

$$\boldsymbol{q}_{b(k)}^{b(k-1)}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\Delta\theta_k}{2}\\ \frac{\boldsymbol{\Delta\theta}_k}{\Delta\theta_k}\sin\frac{\Delta\theta_k}{2}\end{bmatrix}$$

- 前提：b 系在$[t_{k-1}\quad t_k]$时段内做定轴旋转，即旋转方向不变

四元数和DCM姿态更新的问题

- 问题：求解其微分方程时都要对角速度向量进行积分，若要得到闭合解，则要求“角速度向量方向不变”或“b系做定轴旋转”。实际应用中难以满足这条件，会带来额外的“不可交换性误差”。

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_b^R(t) &= \mathbf{C}_b^R(0)\exp\left(\int_0^t (\boldsymbol{\omega}_{Rb}^b\times)d\tau\right)\\ &= \mathbf{C}_b^R(0)\left(\mathbf{I}+\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}[\Delta\boldsymbol{\theta}\times]+\frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta^2}[\Delta\boldsymbol{\theta}\times]^2\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}_b^R(t) &= \left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{M}^*(\boldsymbol{\omega}_{Rb}^b)d\tau\right)\right]\boldsymbol{q}_b^R(0)\\ &= \left[\mathbf{I}\cos\frac{\Delta\theta}{2}+\frac{\boldsymbol{\Theta}}{\Delta\theta}\sin\frac{\Delta\theta}{2}\right]\boldsymbol{q}_b^R(0)\end{aligned}$$

解决该问题的方案

- 方案 1：直接忽略不可交换性误差
  - 忽略不可交换性带来的误差应小于传感器误差的影响
- 方案 2：提高采样率
  - 减小采样间隔，让角速度向量更接近“方向不变”
- 思路 3：
  - 根据角速度或角增量测量值构造出一个“方向不变”的等效的角速度或角增量向量，再带入姿态更新方程式中。

$$\boldsymbol{\phi} \triangleq \boldsymbol{u}\theta = f(\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1},\Delta\boldsymbol{\theta}_k,\cdots)$$

$$\mathbf{C}_b^R(t) = \mathbf{C}_b^R(0)\left(\mathbf{I}+\frac{\sin\phi}{\phi}[\boldsymbol{\phi}\times]+\frac{1-\cos\phi}{\phi^2}[\boldsymbol{\phi}\times]^2\right)$$

  - → 等效旋转矢量；如何构造等效旋转矢量：Bortz方程

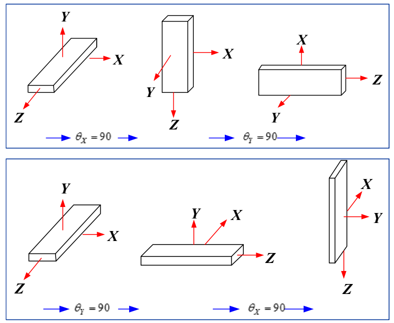
等效旋转矢量

转动的不可交换性

- 力学中刚体的有限次转动是不可交换的。转动的不可交换性决定了转动不是矢量，即两次以上的不同轴转动不能相加。对一个空间方向随时间变化的角速度矢量进行积分是没有物理意义的。

Case1

Case2

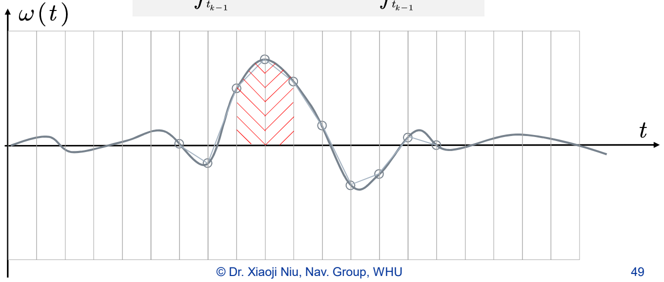


Ref: Goldstein. Classical Mechanics

转动的不可交换性（续）

- 转动的不可交换性与惯性导航有何关系？
  - 陀螺在输出角增量时只对各轴的角度变化量做了数值累加，并未考虑角速度向量 $\boldsymbol{\omega}_{ib}$ 在采样间隔内的方向变化，因此陀螺角增量输出没有明确的物理含义。

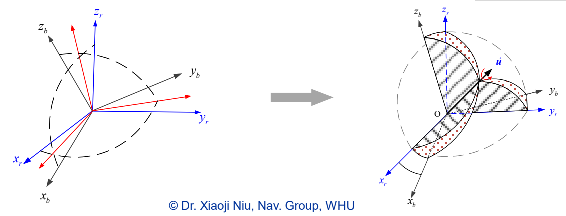
$$\Delta\boldsymbol{\theta}_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{\omega}_{ib}(t)^b dt, \quad \Delta\boldsymbol{v}_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{f}^b(t)\,dt$$



等效旋转矢量

- 理论基础：一个坐标系到另一个坐标系的变换可以通过多次转动来完成，也可以通过绕一个定义在参考坐标系中的矢量的单次转动来实现。
- 该矢量称作等效旋转矢量（rotation vector）是一个三元素的向量，旋转矢量的方向给出了转动轴的方向，它的模长为转动角度的大小。又称为轴角（axis-angle）
- 等效旋转矢量记作：$\boldsymbol{\phi}_{Rb} = \theta\boldsymbol{u}$，$\phi = \|\boldsymbol{\phi}_{Rb}\| = \theta$

明确角标的物理意义



等效旋转矢量

- 等效旋转矢量表示两个坐标系间的转动关系，可转换为对应的方向余弦矩阵和姿态四元数，完成姿态更新
  - Rodrigues 旋转公式

$$\mathbf{C}_b^R = \mathbf{I} + \frac{\sin\|\boldsymbol{\phi}\|}{\|\boldsymbol{\phi}\|}(\boldsymbol{\phi}\times) + \frac{1-\cos\|\boldsymbol{\phi}\|}{\|\boldsymbol{\phi}\|^2}(\boldsymbol{\phi}\times)(\boldsymbol{\phi}\times)$$

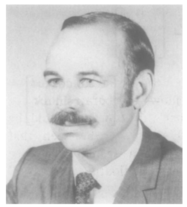
  - 姿态四元数的三角函数式

$$\boldsymbol{q}_b^R = \begin{bmatrix} \cos\|0.5\boldsymbol{\phi}\| \\ \dfrac{\sin\|0.5\boldsymbol{\phi}\|}{\|0.5\boldsymbol{\phi}\|}0.5\boldsymbol{\phi} \end{bmatrix}$$

  - 满足DCM和四元数微分方程求解所要求的“定轴旋转”条件，理论上可完美补偿不可交换性误差。
- 问题的关键在于如何利用陀螺输出构造等效旋转矢量。

John E. Bortz

- 1969年，John E. Bortz在其博士论文中详细推导了等效旋转矢量微分方程（Bortz方程），该方程是利用陀螺输出求解等效旋转矢量的基本公式，奠定了等效旋转矢量多子样算法的理论基础。



John E. Bortz
(1935-2013)

- “Before his work in the early 1970s, strapdown was widely considered as something with possible promise “maybe, if only it could ever come out of the lab-&-theory realm” and into operation. Technological capabilities we take for granted today were far less advanced then; among the many state-of-the-art limitations of that time, processing speed is a glaringly obvious example. To make a long story short, John Bortz made it all happen anyway.” — ***James Farrell***

Bortz, John E. "A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation." *IEEE transactions on aerospace and electronic systems* 1 (1971): 61-66.

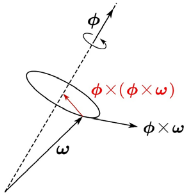
等效旋转矢量微分方程

- 可用几何的方法或根据四元数的微分方程来推导等效旋转矢量的微分方程式，即 Bortz 方程

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{\phi^2}\left[1 - \frac{\phi\sin\phi}{2(1-\cos\phi)}\right]\boldsymbol{\phi}\times(\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega})$$

$$\boldsymbol{\phi} \triangleq \boldsymbol{\phi}_{Rb},\quad \boldsymbol{\omega} \triangleq \boldsymbol{\omega}_{Rb},\quad \boldsymbol{\phi}(0) = \mathbf{0}$$

  - 等效旋转矢量常用于表示姿态的变化量。
  - Bortz方程等式右边两项补偿了角速度向量的方向变化。



等效旋转矢量微分方程的工程近似

- 通过三角函数变换，得

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \cdots$$

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{\phi^2}\left(1 - \frac{\phi}{2}\cot\frac{\phi}{2}\right)\boldsymbol{\phi}\times(\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega})$$

$$= \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{\phi^2}\left[1 - \frac{\phi}{2}\left(\frac{2}{\phi} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\phi}{2} - \cdots\right)\right]\boldsymbol{\phi}\times(\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega})$$

- 近似处理1：当旋转矢量为小量时，取至级数第二项

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{12}\boldsymbol{\phi}\times(\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega})$$

- 近似处理2：忽略旋转矢量的二阶小

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} \approx \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega})$$

不可交换性误差修正项

- 近似处理3：

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t) \approx \boldsymbol{\omega}(t) + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\theta}(t)\times\boldsymbol{\omega}(t)$$

$$\Delta\boldsymbol{\theta}(t) = \int_{t_{k-1}}^{t}\boldsymbol{\omega}(\tau)d\tau,\quad t\in[t_{k-1},\ t_k]$$

等效旋转矢量的双子样算法

- 对简化后的等效旋转矢量微分方程两边积分，可得

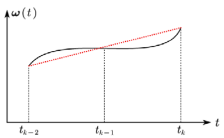
$$\boldsymbol{\phi}_k \equiv \boldsymbol{\phi}(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k-1}}\left(\boldsymbol{\omega}(t) + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\theta}(t)\times\boldsymbol{\omega}(t)\right)dt$$

$$= \Delta\boldsymbol{\theta}_k + \frac{1}{2}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\Delta\boldsymbol{\theta}(t)\times\boldsymbol{\omega}(t)dt$$

- 对角速度向量做不同的假设：为时间的常值函数（单子样）、线性函数（双子样）和二次函数（三子样）

- 双子样算法
  - 假设角速度向量在时段 $[t_{k-2},\ t_k]$ 随时间线性变化

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}(t - t_{k-1})$$



  - 根据两个角增量 $\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1}$，$\Delta\boldsymbol{\theta}_k$ 输出，求解上述两个线性参数

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\boldsymbol{\omega}(\tau)d\tau = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}(\tau - t_{k-1})d\tau = \boldsymbol{a}\Delta t + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}\Delta t^2$$

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1} = \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}}\boldsymbol{\omega}(\tau)d\tau = \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}(\tau - t_{k-1})d\tau = \boldsymbol{a}\Delta t - \frac{1}{2}\boldsymbol{b}\Delta t^2$$

等效旋转矢量的双子样算法（续）

$$\Delta\boldsymbol{\theta}(t) = \int_{t_{k-1}}^{t}\boldsymbol{\omega}(\tau)d\tau = \int_{t_{k-1}}^{t}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}(\tau - t_{k-1})d\tau$$

- 将求得的系数 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 带入上式，再整体带入前面的积分式，可得

$$\boldsymbol{\phi}_k = \Delta\boldsymbol{\theta}_k + \frac{1}{12}\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1}\times\Delta\boldsymbol{\theta}_k$$

二阶圆锥误差补偿项

- 最后将求得的等效旋转矢量ϕ_k 转换为对应的DCM或四元数，带入姿态更新公式，实现姿态的更新。
  - 选惯性系为参考系 R

$$\boldsymbol{q}_{b(k)}^{i} = \boldsymbol{q}_{b(k-1)}^{i} \circ \boldsymbol{q}_{b(k)}^{b(k-1)}$$

$$\boldsymbol{q}_{b(k)}^{b(k-1)} = \begin{bmatrix} \cos\dfrac{\phi_k}{2} \\ \dfrac{\boldsymbol{\phi}_k}{\phi_k}\sin\dfrac{\phi_k}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{b(k)}^{i} = \mathbf{C}_{b(k-1)}^{i}\mathbf{C}_{b(k)}^{b(k-1)}$$

$$\mathbf{C}_{b(k)}^{b(k-1)} = \mathbf{I} + \frac{\sin\phi_k}{\phi_k}(\boldsymbol{\phi}_k\times) + \frac{1-\cos\phi_k}{\phi_k^2}(\boldsymbol{\phi}_k\times)^2$$

姿态更新算法示例

姿态更新算法示例（以四元数为例）

- 选择 n 系为参考系，关心的姿态表达式可表示为

$$\boldsymbol{q}_b^n$$

- 已知量
  - $\boldsymbol{q}_b^n(t_{k-1})$ 前一时刻的姿态
  - $\Delta\boldsymbol{\theta}_k$，$\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1}$ 当前及前一时刻的陀螺角增量输出
- 待求量
  - $\boldsymbol{q}_b^n(t_k)$ 当前时刻的姿态

- 以四元数为例，姿态的递推计算可用姿态四元数的如下连乘运算来实现：

$$\boldsymbol{q}_{b(k)}^{n(k)} = \boldsymbol{q}_{n(k-1)}^{n(k)} \circ \boldsymbol{q}_{b(k-1)}^{n(k-1)} \circ \boldsymbol{q}_{b(k)}^{b(k-1)}$$

姿态更新算法示例

- STEP 1：等效旋转矢量法更新 $\boldsymbol{b}$ 系

$$\boldsymbol{\phi}_k = \int_{t_k}^{t_{k-1}} \boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t) + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\theta}(t) \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t)\,dt = \Delta\boldsymbol{\theta}_k + \frac{1}{12}\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1} \times \Delta\boldsymbol{\theta}_k$$

$$\boldsymbol{q}_{b(k)}^{b(k-1)} = \begin{bmatrix} \cos\|0.5\boldsymbol{\phi}_k\| \\ \dfrac{\sin\|0.5\boldsymbol{\phi}_k\|}{\|0.5\boldsymbol{\phi}_k\|} 0.5\boldsymbol{\phi}_k \end{bmatrix}$$

- STEP 2：等效旋转矢量法更新 $\boldsymbol{n}$ 系

$$\boldsymbol{\zeta}_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} [\boldsymbol{\omega}_{ie}^n(t) + \boldsymbol{\omega}_{en}^n(t)]dt \approx [\boldsymbol{\omega}_{ie}^n(t_{k-1}) + \boldsymbol{\omega}_{en}^n(t_{k-1})]\Delta t$$

$$\boldsymbol{q}_{n(k-1)}^{n(k)} = \begin{bmatrix} \cos\|0.5\boldsymbol{\zeta}_k\| \\ -\dfrac{\sin\|0.5\boldsymbol{\zeta}_k\|}{\|0.5\boldsymbol{\zeta}_k\|} 0.5\boldsymbol{\zeta}_k \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = [\omega_e \cos\varphi \quad 0 \quad -\omega_e \sin\varphi]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{bmatrix} v_E/(R_N+h) \\ -v_N/(R_M+h) \\ -v_E \tan\varphi/(R_N+h) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} R_M = \dfrac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} \\ R_N = \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \end{cases}$$

- STEP3：计算当前姿态四元数

$$\boldsymbol{q}_{b(k)}^{n(k)} = \boldsymbol{q}_{n(k-1)}^{n(k)} \circ \boldsymbol{q}_{b(k-1)}^{n(k-1)} \circ \boldsymbol{q}_{b(k)}^{b(k-1)}$$

- STEP4：对更新后的姿态四元数进行归一化处理

$$q_i = \frac{\hat{q}_i}{\sqrt{\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2}}, \quad i = 0,1,2,3$$

惯导姿态算法小结

- 欧拉角：简单明了，概念直观，容易理解，当俯仰角接近90度时方程出现退化现象，所以这种方法只适用于水平姿态变化不大的情况，而不适用于全姿态运载体的姿态确定。
- 方向余弦矩阵：避免了方程退化的问题，可全姿态工作。但包含了九个未知量的线性微分方程组，计算量大。
- 四元数：只需求解四个未知量的线性方程组，计算量比方向余弦法小，且算法简单，易于操作。
- 等效旋转矢量：采用多子样算法，对不可交换误差做有效补偿，算法关系简单，易于操作，并且通过对系数的优化处理使算法漂移在相同子样算法中达到最小，因此特别适用于角机动频繁激烈或存在严重角振动的运载体的姿态更新。

武汉大学 NSS CENTER

速度及位置更新算法

惯导速度算法

- 地速微分方程
  - 惯性坐标系下地速微分方程
  - 地球坐标系下地速微分方程
  - 导航坐标系下地速微分方程
- 速度更新
  - 以导航坐标系地速更新为例

符号定义

- 准确地描述位置、速度、角速度和加速度这些三维向量及其导数往往涉及多个坐标系

$$\boldsymbol{p}_{AB}^{C},\quad {}^{D}\dot{\boldsymbol{p}}_{AB}^{C}$$

- 举例说明

$\boldsymbol{r}_{eb}$ = 从 e 系原点指向 b 系原点的位置向量

$\boldsymbol{v}_{eb} \equiv \left.\dfrac{d\boldsymbol{r}_{eb}}{dt}\right|_{e}$ = b 系原点(载体)相对于 e 系的速度向量

$\boldsymbol{v}_{eb}^{n}$ = 速度向量 $\boldsymbol{v}_{eb}$ 在 n 系下的投影，即坐标值

${}^{i}\dot{\boldsymbol{r}}_{eb} \equiv \left.\dfrac{d\boldsymbol{r}_{eb}}{dt}\right|_{i}$ = 在 i 系下对位置向量 $\boldsymbol{r}_{eb}$ 求导

${}^{i}\dot{\boldsymbol{r}}_{eb}^{n} \equiv \left.\dfrac{d\boldsymbol{r}_{eb}}{dt}\right|_{i}^{n}$ = 向量 ${}^{i}\dot{\boldsymbol{r}}_{eb}$ 在 n 系下的投影，即坐标值

速度微分方程

上下标定义规定

**从哪个坐标系观察*

** 投影到某坐标系*

- 关心的是地速 $\boldsymbol{v}_{eb} \equiv \left.\dfrac{d\boldsymbol{r}_{eb}}{dt}\right|_{e}$
- 哥氏方程 $\left.\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_{a} = \left.\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_{b} + \boldsymbol{\omega}_{ab} \times \boldsymbol{r}$
- 导航方程 $\boldsymbol{a} \equiv \left.\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|_{i} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$

- 地速在不同系下变化(时间导数)不同；可以在不同的坐标系下建立地速微分方程，i 系，e系，n系。

惯性坐标系速度微分方程 $\left.\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|_i$

1. 由哥氏方程和地速定义

$$\left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_i=\left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_e+\boldsymbol{\omega}_{ie}\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}_{ie}\times\boldsymbol{r}$$

2. 在i系下求导

$$\left.\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|_i=\left.\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|_i+\left.\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}_{ie}\times\boldsymbol{r})\right|_i$$

3. 整理得：（*重力定义！）

$$\left.\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|_i=\boldsymbol{f}-\boldsymbol{\omega}_{ie}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{g}-\boldsymbol{\omega}_{ie}\times(\boldsymbol{\omega}_{ie}\times\boldsymbol{r})$$
$$=\boldsymbol{f}-\boldsymbol{\omega}_{ie}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{g}_p$$

4. 投影到i系

$$\left.\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|_i^i=\boldsymbol{f}^i-\boldsymbol{\omega}_{ie}^i\times\boldsymbol{v}^i+\boldsymbol{g}_p^i$$
$$=\mathbf{C}_b^i\boldsymbol{f}^b-\boldsymbol{\omega}_{ie}^i\times\boldsymbol{v}^i+\boldsymbol{g}_p^i$$

*Tips

$\left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_e=\boldsymbol{v}_e$

$\left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_a=\left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_b+\boldsymbol{\omega}_{ab}\times\boldsymbol{r}$

$\left.\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|_i=\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$

$\left.\frac{d\boldsymbol{\omega}_{ie}}{dt}\right|_i=\boldsymbol{0}$

已知量？未知量？

地球坐标系速度微分方程 $\left.\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|_e$

1. 由哥氏方程和可得

$$\left.\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|_e=\left.\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|_i-\boldsymbol{\omega}_{ie}\times\boldsymbol{v}$$

2. 对比i系下的微分方程

$$\left.\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|_i=\boldsymbol{f}-\boldsymbol{\omega}_{ie}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{g}_p$$

3. 整理得

$$\left.\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|_e=\boldsymbol{f}-2\boldsymbol{\omega}_{ie}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{g}_p$$

4. 投影到e系

$$\left.\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|_e^e=\boldsymbol{f}^e-2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e\times\boldsymbol{v}^e+\boldsymbol{g}_p^e$$
$$=\mathbf{C}_b^e\boldsymbol{f}^b-2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e\times\boldsymbol{v}^e+\boldsymbol{g}_p^e$$

*Tips

$\left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_e=\boldsymbol{v}_e$

$\left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_a=\left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_b+\boldsymbol{\omega}_{ab}\times\boldsymbol{r}$

$\left.\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|_i=\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$

导航坐标系速度微分方程 $\left.\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|_n$

1. 由哥氏方程和可得

$$\left.\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|_i=\left.\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|_n+\boldsymbol{\omega}_{in}\times\boldsymbol{v}$$

2. 对比i系下的微分方程

$$\left.\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|_i=\boldsymbol{f}-\boldsymbol{\omega}_{ie}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{g}_p$$

3. 整理得

$$\left.\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|_n=\boldsymbol{f}-(2\boldsymbol{\omega}_{ie}+\boldsymbol{\omega}_{en})\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{g}_p$$

4. 投影到n系

$$\left.\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|_n^n=\boldsymbol{f}^n-2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n\times\boldsymbol{v}^n+\boldsymbol{g}_p^n$$
$$=\mathbf{C}_b^n\boldsymbol{f}^b-(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n+\boldsymbol{\omega}_{en}^n)\times\boldsymbol{v}^n+\boldsymbol{g}_p^n$$

*Tips

$\left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_e=\boldsymbol{v}_e$

$\left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_a=\left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_b+\boldsymbol{\omega}_{ab}\times\boldsymbol{r}$

$\left.\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|_i=\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$

速度微分方程的统一表示方式

- 惯性导航从根本上说就是已知来自于加速度计的比力（非引力加速度）测量值在特定的坐标系内（比力测量值投影在该坐标系内，且这个坐标系相对于惯性坐标系的指向通过陀螺确定）求解牛顿力学方程。对于地球附近的导航应用，有

$$\left.\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|_F=\boldsymbol{f}-(\boldsymbol{\omega}_{ie}+\boldsymbol{\omega}_{iF})\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{g}_p,\quad F=i,e,n$$

F = 任意笛卡尔坐标系

$\boldsymbol{v}$ = 速度向量

$\boldsymbol{\omega}_{ie}$ = 地球自转角速度向量

$\boldsymbol{\omega}_{iF}$ = F系相对于惯性坐标系的旋转角速度向量

$\boldsymbol{g}_p$ = 地球重力加速度向量

$\boldsymbol{f}$ = 比力向量

速度更新

- 目标：求解速度微分方程，得到差分方程（即速度递推公式）

$$\left.\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|_n^n = \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{f}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \boldsymbol{v}^n + \boldsymbol{g}_p^n$$

  - 注意：离散化不能损失系统精度！
  - 从 t_{k-1} 到 t_k，姿态和速度都变了；
  - 从 t_{k-1} 到 t_k 的过程中，角速度和加速度也在变
- 待求量：
  - 当前时刻的速度向量 $\boldsymbol{v}_{eb}(t_k)$
- 已知：
  - 前一时刻的导航状态 $\boldsymbol{r}_{eb}(t_{k-1})$，$\boldsymbol{v}_{eb}(t_{k-1})$，$\boldsymbol{q}_b^n(t_{k-1})$
  - 陀螺和加速度计的测量值（增量输出）

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{\omega}_{ib}(t)^b dt, \quad \Delta\boldsymbol{v}_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{f}^b(t) dt$$

速度微分方程的求解——直观猜想

$$\left.\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|_n^n = \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{f}^b + \boldsymbol{g}_p^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \boldsymbol{v}^n$$

- 直接积分，对快速变化项做更精细处理

$$\boldsymbol{v}^n(t_k) \approx \boldsymbol{v}^n(t_{k-1}) + \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{f}^b \Delta t + [\boldsymbol{g}_p^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \boldsymbol{v}^n] \Delta t$$

积分初值　快速变化　缓慢变化

$$\mathbf{C}_b^n \boldsymbol{f}^b \Delta t \approx \frac{\mathbf{C}_b^n(t_k) + \mathbf{C}_b^n(t_{k-1})}{2} \Delta\boldsymbol{v}(t_k)$$

$$= \mathbf{C}_b^n(t_{k-1}) \Delta\boldsymbol{v}(t_k) + \frac{\mathbf{C}_b^n(t_k) - \mathbf{C}_b^n(t_{k-1})}{2} \Delta\boldsymbol{v}(t_k)$$

$$= \mathbf{C}_b^n(t_{k-1}) \Delta\boldsymbol{v}(t_k) + \frac{\mathbf{C}_b^n(t_{k-1})[\Delta\boldsymbol{\theta}(t_k) \times]}{2} \Delta\boldsymbol{v}(t_k)$$

$$= \mathbf{C}_b^n(t_{k-1}) \Delta\boldsymbol{v}(t_k) + \frac{1}{2} \mathbf{C}_b^n(t_{k-1}) \Delta\boldsymbol{\theta}(t_k) \times \Delta\boldsymbol{v}(t_k) \ \boldsymbol{+?}$$

导航系下的速度更新算法

- 速度更新是指根据速度微分方程，推导当前时刻速度与前一时刻速度之间的递推关系。
  - 推导的起点：导航系下的地速微分方程

$$\left.\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|_n^n = \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{f}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \boldsymbol{v}^n + \boldsymbol{g}_p^n$$

- 对上式进行时间积分可得：

$$\boldsymbol{v}_k^n = \boldsymbol{v}_{k-1}^n + \Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n + \Delta\boldsymbol{v}_{g/cor,k}^n$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_{k-1}^n & \text{积分初值} \\ \Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n \triangleq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{f}^b dt & \text{比力积分项} \\ \Delta\boldsymbol{v}_{g/cor,k}^n \triangleq \int_{t_{k-1}}^{t_k} [\boldsymbol{g}_p^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \boldsymbol{v}^n] dt & \text{重力/哥氏积分项} \end{cases}$$

导航系下的速度更新算法（续）

- 重力/哥氏积分项

overview $\boldsymbol{v}_k^n = \boldsymbol{v}_{k-1}^n + \Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n + \Delta\boldsymbol{v}_{g/cor,k}^n$

$$\Delta\boldsymbol{v}_{g/cor,k}^n \triangleq \int_{t_{k-1}}^{t_k} [\boldsymbol{g}_p^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \boldsymbol{v}^n] dt$$

  - 简化处理1：积分周期内，被积函数数值随时间变化缓慢；计算所需的位置和速度均采用初始时刻或中间时刻的位置和速度。
  - 定义符号： $\boldsymbol{a}_{gc} \triangleq \boldsymbol{g}_p^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \boldsymbol{v}^n$
  - 简化处理：

$$\Delta\boldsymbol{v}_{g/cor,k}^n \approx \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_{gc,k-1} + \boldsymbol{a}_{gc,k}) \Delta t$$

$$\approx \boldsymbol{a}_{gc,k-1/2} \Delta t \qquad \Delta t = t_k - t_{k-1}$$

  - 中间时刻： $\boldsymbol{a}_{gc,k-1/2} \triangleq \boldsymbol{g}_p^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \boldsymbol{v}^n \big|_{t_{k-1/2}}$

*Tips: $\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = [\omega_e \cos\varphi \quad 0 \quad -\omega_e \sin\varphi]^{\mathrm{T}}$ $\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \left[\frac{v_E}{R_N + h} \quad \frac{-v_N}{R_M + h} \quad -\frac{v_E \tan\varphi}{R_N + h}\right]^{\mathrm{T}}$

R_M = 子午圈曲率半径， R_N = 卯酉圈曲率半径

导航系下的速度更新算法（续）

❑ 比力积分项

overview $\boldsymbol{v}_k^n = \boldsymbol{v}_{k-1}^n + \Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n + \Delta\boldsymbol{v}_{g/cor,k}^n$

❑ STEP 1：姿态矩阵的拆分

$$\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{C}_b^n(t)\boldsymbol{f}^b(t)\,dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \underbrace{\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(t)}\mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)}}_{\text{缓变项}}\underbrace{\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)}\boldsymbol{f}^b(t)}_{\text{快速变化项}}\,dt$$

❑ STEP 2：n 系变换矩阵的处理（简化处理2）

$$\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(t)} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} + \mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k-1)}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} + \mathbf{I}\right)$$

❑ 带入比力积分项中，将常值矩阵移至积分号外，可得

$$\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n = \frac{1}{2}\left(\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} + \mathbf{I}\right)\mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)}\boldsymbol{f}^b(t)\,dt$$

导航系下的速度更新算法（续）

❑ 比力积分项（续）

overview
$$\boldsymbol{v}_k^n = \boldsymbol{v}_{k-1}^n + \Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n + \Delta\boldsymbol{v}_{g/cor,k}^n$$
$$\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n = \frac{1}{2}\left(\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} + \mathbf{I}\right)\mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)}\boldsymbol{f}^b(t)\,dt$$

❑ 相邻两历元的 n 系之间相对姿态矩阵在小角度假设情况下取至一阶近似（详见姿态更新）：

$$\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} \approx \mathbf{I} - \left(\boldsymbol{\zeta}_{n(k-1)n(k)}\times\right)$$

❑ 等效旋转矢量 $\boldsymbol{\zeta}_{n(k-1)n(k)}$

$$\boldsymbol{\zeta}_{n(k-1)n(k)} \approx \int_{t_{k-1}}^{t_k}\boldsymbol{\omega}_{n(k-1)n(t)}^n\,dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\boldsymbol{\omega}_{in}^n(t)\,dt$$
$$\approx \left(\boldsymbol{\omega}_{ie,k-1/2}^n + \boldsymbol{\omega}_{en,k-1/2}^n\right)\Delta t$$

❑ 带入，可得

$$\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n = \left[\mathbf{I} - \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\zeta}_{n(k-1)n(k)}\times\right)\right]\mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)}\boldsymbol{f}^b(t)\,dt$$

难点：b系比力积分项

导航系下的速度更新算法（续）

❑ 比力积分项（续）

overview
$$\boldsymbol{v}_k^n = \boldsymbol{v}_{k-1}^n + \Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n + \Delta\boldsymbol{v}_{g/cor,k}^n$$
$$\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n = \frac{1}{2}\left(\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} + \mathbf{I}\right)\mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)}\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^{b(k-1)}$$

$$\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^{b(k-1)} \triangleq \int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)}\boldsymbol{f}^b(t)\,dt$$

$$\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)} = \mathbf{I} + \frac{\sin\phi(t)}{\phi(t)}\left[\boldsymbol{\phi}(t)\times\right] + \frac{1-\cos\phi(t)}{\phi(t)^2}\left[\boldsymbol{\phi}(t)\times\right]^2$$

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \boldsymbol{\phi}_{b(k-1)b(t)}$$

❑ 近似处理3：对等效旋转矢量做小角度假设，同时忽略上式中等效旋转矢量的二阶小量，可得

$$\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)} = \mathbf{I} + \left[\boldsymbol{\phi}(t)\times\right],\quad t\in[t_{k-1}\quad t_k]$$

❑ 近似处理4：将等效旋转矢量近似为陀螺的角增量输出

$$\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)} = \mathbf{I} + \left[\Delta\boldsymbol{\theta}(t)\times\right],\quad t\in[t_{k-1}\quad t_k]$$

导航系下的速度更新算法（续）

❑ 比力积分项（续）

overview
$$\boldsymbol{v}_k^n = \boldsymbol{v}_{k-1}^n + \Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n + \Delta\boldsymbol{v}_{g/cor,k}^n$$
$$\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n = \frac{1}{2}\left(\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} + \mathbf{I}\right)\mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)}\boldsymbol{f}^b(t)\,dt$$

$$\Delta\boldsymbol{\theta}(t) = \int_{t_{k-1}}^{t}\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(\tau)\,d\tau$$

❑ 将上述表达式带入b系比力积分项，得：

$$\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^{b(k-1)} \triangleq \int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)}\boldsymbol{f}^b(t)\,dt$$

$$\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^{b(k-1)} = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\mathbf{I} + \left(\Delta\boldsymbol{\theta}(t)\times\right)\right]\boldsymbol{f}^b(t)\,dt$$
$$= \int_{t_{k-1}}^{t_k}\boldsymbol{f}^b(t)\,dt + \int_{t_{k-1}}^{t_k}\Delta\boldsymbol{\theta}(t)\times\boldsymbol{f}^b(t)\,dt$$
$$= \Delta\boldsymbol{v}_k + \int_{t_{k-1}}^{t_k}\Delta\boldsymbol{\theta}(t)\times\boldsymbol{f}^b(t)\,dt$$

Sculling & Velocity Rotation Term

❑ 被积函数难以进一步化简，只能作不同的假设处理：假设积分周期内加速度计所测比力和陀螺所测角速度向量为时间的常值函数（单子样算法）、线性函数（双子样算法）和二次函数（三子样算法）

速度更新的双子样算法

overview
$$\boldsymbol{v}_k^n = \boldsymbol{v}_{k-1}^n + \Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n + \Delta\boldsymbol{v}_{g/cor,k}^n$$
$$\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} + \mathbf{I})\mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)}\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^{b(k-1)}$$

- 双子样假设
  - 假设角速度向量和比力向量在时段 $[t_{k-2}, t_k]$ 随时间线性变化

$$\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}(t - t_{k-1}), \quad \boldsymbol{f}^b(t) = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}(t - t_{k-1})$$

  - 与姿态更新的双子样算法类似，根据两个历元的角增量和速度增量输出求解上述参数 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$

已知量 $\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1}, \ \Delta\boldsymbol{\theta}_k, \ \Delta\boldsymbol{v}_{k-1}, \ \Delta\boldsymbol{v}_k$

$$\Delta\boldsymbol{\theta}(t) = \int_{t_{k-1}}^{t} \boldsymbol{\omega}_{ib}^b(\tau)d\tau, \quad \Delta\boldsymbol{v}(t) = \int_{t_{k-1}}^{t} \boldsymbol{f}^b(\tau)d\tau$$

  - 将角速度和比力的线性方程带入积分式 $\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^{b(k-1)} = \Delta\boldsymbol{v}_k + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Delta\boldsymbol{\theta}(t) \times \boldsymbol{f}^b(t)dt$

$$\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^{b(k-1)} = \Delta\boldsymbol{v}_k + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\theta}_k \times \Delta\boldsymbol{v}_k + \frac{1}{12}(\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1} \times \Delta\boldsymbol{v}_k + \Delta\boldsymbol{v}_{k-1} \times \Delta\boldsymbol{\theta}_k)$$

Rotation Compensation Term　　Sculling Compensation Term

  - 思考：什么情况下Sculling补偿项为零？

速度更新算法总结

$$\left.\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|_n^n = \mathbf{C}_b^n\boldsymbol{f}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \boldsymbol{v}^n + \boldsymbol{g}_p^n$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_k^n = \boldsymbol{v}_{k-1}^n + \Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n + \Delta\boldsymbol{v}_{g/cor,k}^n \\ \quad \Delta\boldsymbol{v}_{g/cor,k}^n = [\boldsymbol{g}_p^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \boldsymbol{v}^n]_{t_{k-1/2}}(t_k - t_{k-1}) \\ \quad \Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n = \left[\mathbf{I} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\zeta}_{n(k-1),n(k)} \times)\right]\mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)}\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^{b(k-1)} \\ \qquad \boldsymbol{\zeta}_{n(k-1),n(k)} = (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n)_{t_{k-1/2}}(t_k - t_{k-1}) \\ \qquad \Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^{b(k-1)} = \Delta\boldsymbol{v}_k + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\theta}_k \times \Delta\boldsymbol{v}_k + \frac{1}{12}(\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1} \times \Delta\boldsymbol{v}_k + \Delta\boldsymbol{v}_{k-1} \times \Delta\boldsymbol{\theta}_k) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = [\omega_e\cos\varphi \quad 0 \quad -\omega_e\sin\varphi]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{bmatrix} v_E/(R_N + h) \\ -v_N/(R_M + h) \\ -v_E\tan\varphi/(R_N + h) \end{bmatrix}$$
$$\begin{cases} R_M = \dfrac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} \\ R_N = \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \end{cases}$$

位置更新算法

- 载体的位置常用大地坐标（纬度 φ、经度 λ 和椭球高 h）来表示。位置随时间的变化可用一组微分方程来描述：

$$\dot{\varphi} = \frac{v_N}{R_M + h}$$
$$\dot{\lambda} = \frac{v_E}{(R_N + h)\cos\varphi}$$
$$\dot{h} = -v_D$$

- 位置更新就是求解上述微分方程组
  - STEP1 高程更新：假设积分周期内 v_D 随时间线性变化

$$h_k = h_{k-1} - \int_{t_{k-1}}^{t_k} v_D(t)dt$$
$$\approx h_{k-1} - \frac{1}{2}(v_{D,k-1} + v_{D,k})(t_k - t_{k-1})$$

位置更新算法（续）

*Tips: $\dot{\varphi} = \frac{v_N}{R_M + h}$, $\dot{\lambda} = \frac{v_E}{(R_N + h)\cos\varphi}$

- 纬度更新
  - 积分周期内忽略R_M 随纬度（和时间）的变化，简化为常值。高程 h 在积分周期内简化为常值（积分周期内的平均高程）

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + \frac{v_{N,k} + v_{N,k-1}}{2(R_{M,k-1} + \bar{h})}(t_k - t_{k-1})$$

- 经度更新

$$\lambda_k = \lambda_{k-1} + \frac{v_{E,k} + v_{E,k-1}}{2(R_{N,k-1/2} + \bar{h})\cos\bar{\varphi}}(t_k - t_{k-1})$$

$$\bar{h} = \frac{1}{2}(h_k + h_{k-1}), \quad \bar{\varphi} = \frac{1}{2}(\varphi_k + \varphi_{k-1})$$

惯性导航算法总结

- 导航状态的时间传递
  - 主要研究姿态、速度、位置的微分方程（连续时间）。
  - 注意区分是从哪个坐标系中观察的，这与投影到哪个坐标系不同
- 惯导更新算法
  - 主要研究的是姿态、速度、位置的微分方程做离散化时的问题
  - 更新算法应保证算法误差远小于惯性传感器带来的误差。系统设计时要针对被测载体的动态水平，平衡好数据更新率和更新算法的精度

INS程序实现注意事项

- 整理INS算法文档
  - 加深理解；方便程序调试及查错；明确程序结构
- 椭球模型及常用的常数
- 验证独立小函数的正确性
  - 验证DCM，四元数，欧拉角，旋转矢量之间转换函数的正确性（参考附录）
  - 向量的各类运算；地球椭球模型；正常重力；w_ie等
- 计算过程中统一使用国际单位
  - 如经纬度（rad），姿态（rad）
- 速度、位置和姿态的更新顺序，以及状态的外推
- 如何判断结果的正确性？

武汉大学

2.2 惯性导航误差传播分析

INS Error Propagation Modeling

2.2 目 录

为什么要做惯导误差传播分析

- 惯导知识链：惯性器件→惯性导航基本原理（位置、速度、姿态微分方程及离散化→惯导误差传播（Dynamic Error model→Aided INS算法（Kalman 滤波）
- 研究惯导的基本原理时将INS看成是一个没有误差的理想系统。实际的惯性传感器的输出、所用重力值及编排算法均存在误差，导致INS解算的导航参数（如位置、速度和姿态）均含有误差。
- 分析INS中不同误差源对导航结果的影响，评估惯性导航精度；惯导误差随时间而变，用微分方程来描述其随时间的传递关系；构建组合导航卡尔曼滤波的系统状态方程。

惯导误差微分方程的推导

- 误差来源
  - 传感器误差（陀螺和加表的零偏，比例因子等）
  - 初始（上一步）导航状态误差
  - 重力误差、算法和计算误差
- 目标
  - 惯性导航的误差微分方程
- 方法：扰动分析（Perturbation Analysis）
  - 实际变量表示成真值与扰动误差（小量）之和。对惯导微分方程中的变量进行误差扰动，展开取至一阶小量（忽略二阶小量）
  - 误差扰动分析方法等效于方程围绕变量真值进行泰勒展开，取至一阶项，实现非线性方程的线性化

扰动分析

- 预备知识
  - 在扰动分析中，运算符δ 与时间微分操作符$d(.)/dt$ 可交换顺序

$$\delta\left(\dot{\boldsymbol{\phi}}\right)=\frac{d\left(\delta\boldsymbol{\phi}\right)}{dt},\quad \dot{\boldsymbol{\phi}}=\frac{d\boldsymbol{\phi}}{dt}$$

  - δ 运算满足：

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}=\delta\left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}+\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}\right)=\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}+\delta\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}$$

  - 惯导误差方程目标形式：

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{n}=L\left(\delta\boldsymbol{r}^{n},\quad \delta\boldsymbol{v}^{n},\quad \boldsymbol{\phi},\quad \delta\boldsymbol{f}^{b},\quad \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}\right)$$

$$\boldsymbol{x}^{n}=\delta\boldsymbol{r}^{n},\quad \delta\boldsymbol{v}^{n},\quad \boldsymbol{\phi}$$

误差方程基础

- 变量的计算值表示为真值与扰动误差之和

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{r}}^{n}&=\boldsymbol{r}^{n}+\delta\boldsymbol{r}^{n}, & \hat{\boldsymbol{f}}^{b}&=\boldsymbol{f}^{b}+\delta\boldsymbol{f}^{b}\\
\hat{\boldsymbol{v}}^{n}&=\boldsymbol{v}^{n}+\delta\boldsymbol{v}^{n}, & \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^{b}&=\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}+\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}\\
\hat{\mathbf{C}}_{b}^{n}&=[\mathbf{I}-(\boldsymbol{\phi}\times)]\mathbf{C}_{b}^{n}, & \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^{n}&=\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}+\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}\\
\hat{\boldsymbol{g}}_{p}^{n}&=\boldsymbol{g}_{p}^{n}+\delta\boldsymbol{g}_{p}^{n}, & \hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^{n}&=\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}+\delta\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}
\end{aligned}$$

思考：惯导方程中哪些量应该加误差扰动?

$$\begin{bmatrix}\delta r_N\\ \delta r_E\\ \delta r_D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\delta\varphi(R_M+h)\\ \delta\lambda(R_N+h)\cos\varphi\\ -\delta h\end{bmatrix}$$

- 位置误差向量
  - 大地坐标形式： $\delta\boldsymbol{r}=[\delta\varphi\quad \delta\lambda\quad \delta h]^{\mathrm{T}}$
  - N 系下笛卡尔坐标形式： $\delta\boldsymbol{r}^{n}=[\delta r_N\quad \delta r_E\quad \delta r_D]^{\mathrm{T}}$
- 速度误差向量 $\delta\boldsymbol{v}^{n}=[\delta v_N\quad \delta v_E\quad \delta v_D]^{\mathrm{T}}$
- 姿态误差 $\boldsymbol{\phi}=[\phi_N\quad \phi_E\quad \phi_D]^{\mathrm{T}}$

常用变量的误差扰动式

- 推导 $\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$ *Tips* $\boldsymbol{\omega}_{ie}^n=[\omega_e\cos\varphi \quad 0 \quad -\omega_e\sin\varphi]^{\mathrm{T}}$

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n=[\omega_e\cos(\varphi+\delta\varphi) \quad 0 \quad -\omega_e\sin(\varphi+\delta\varphi)]^{\mathrm{T}}$$

小角度扰动，忽略高阶项

$$=\begin{bmatrix}\omega_e(\cos\varphi\cos\delta\varphi-\sin\varphi\sin\delta\varphi)\\0\\-\omega_e(\sin\varphi\cos\delta\varphi+\cos\varphi\sin\delta\varphi)\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}\omega_e\cos\varphi-\omega_e\sin\varphi\cdot\delta\varphi\\0\\-\omega_e\sin\varphi-\omega_e\cos\varphi\cdot\delta\varphi\end{bmatrix}$$

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n=\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n-\boldsymbol{\omega}_{ie}^n=[-\omega_e\sin\varphi\cdot\delta\varphi \quad 0 \quad -\omega_e\cos\varphi\cdot\delta\varphi]^{\mathrm{T}}$$

$$=\begin{bmatrix}-\dfrac{\omega_e\sin\varphi}{R_M+h}\delta r_N\\0\\-\dfrac{\omega_e\cos\varphi}{R_M+h}\delta r_N\end{bmatrix}=L(\delta\boldsymbol{r})$$

位置误差的线性函数

*对 $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n$ 进行泰勒展开，取至一阶项可得到同样的结果

常用变量的误差扰动式

- 推导 $\delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n$ *Tips* $\boldsymbol{\omega}_{en}^n=\left[\dfrac{v_E}{R_N+h} \quad \dfrac{-v_N}{R_M+h} \quad -\dfrac{v_E\tan\varphi}{R_N+h}\right]^{\mathrm{T}}$
  - 忽略 R_M 和 R_N 的扰动误差

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n=\left[\frac{v_E+\delta v_E}{R_N+(h+\delta h)} \quad -\frac{v_N+\delta v_N}{R_M+(h+\delta h)} \quad -\frac{(v_E+\delta v_E)\tan(\varphi+\delta\varphi)}{R_N+(h+\delta h)}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n=\begin{bmatrix}\dfrac{v_E}{(R_N+h)^2}\delta r_D+\dfrac{1}{R_N+h}\delta v_E\\-\dfrac{v_N}{(R_M+h)^2}\delta r_D-\dfrac{1}{R_M+h}\delta v_N\\-\dfrac{v_E}{(R_M+h)(R_N+h)\cos^2\varphi}\delta r_N-\dfrac{v_E\tan\varphi}{(R_N+h)^2}\delta r_D-\dfrac{\tan\varphi}{(R_N+h)}\delta v_E\end{bmatrix}$$

$$=L(\delta\boldsymbol{r}^n,\delta\boldsymbol{v}^n)$$

- 推导 $\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n$

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n=\delta(\boldsymbol{\omega}_{ie}^n+\boldsymbol{\omega}_{en}^n)=\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n+\delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n$$

常用变量的误差扰动式

- 推导 $\delta\boldsymbol{g}_p^n$ *Tips* $\boldsymbol{g}_p^n=[0 \quad 0 \quad g]^{\mathrm{T}}$
  - 当地重力向量有如下关系式

$$\boldsymbol{g}_p^n=\boldsymbol{g}_0^n\frac{R_MR_N}{(\sqrt{R_MR_N}+h)^2}$$

  - $\boldsymbol{g}_0^n$ 是当地参考椭球表面的重力值。只考虑重力随高程的变化，忽略 R_M 和 R_N 的扰动误差

$$\boldsymbol{g}_p^n+\delta\boldsymbol{g}_p^n=\boldsymbol{g}_p^n+\left.\frac{\partial(\boldsymbol{g}_p^n)}{\partial h}\right|_h\delta h$$

$$\delta\boldsymbol{g}_p^n=\left.\frac{\partial(\boldsymbol{g}_p^n)}{\partial h}\right|_h\delta h=\boldsymbol{g}_0^n\frac{-2R_MR_N}{(\sqrt{R_MR_N}+h)^3}\delta h$$

  - 带入，整理可得

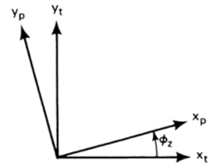
$$\delta\boldsymbol{g}_p^n=\frac{-2\boldsymbol{g}_p^n}{\sqrt{R_MR_N}+h}\delta h=\left[0 \quad 0 \quad \frac{2g}{\sqrt{R_MR_N}+h}\delta r_D\right]^{\mathrm{T}}=L(\delta\boldsymbol{r}^n)$$

姿态误差方程

- 姿态误差的定义
  - 姿态指示了两个坐标系之间的相对角度关系，当姿态存在偏差时，可将其全部归算到某一个坐标系。例如

$$\hat{\mathbf{C}}_b^n=\mathbf{C}_b^{\hat{n}}\triangleq\mathbf{C}_b^p$$

  - 计算得到的导航系（p系）相对于真 n 系的失准角定义为姿态误差角，或者描述为：由真 n 系转动到与 p 系对齐所对应的三个欧拉角——$\boldsymbol{\phi}$ 角模型



$$\mathbf{C}_n^{\hat{n}}=\mathbf{C}_n^p\approx\mathbf{I}-(\boldsymbol{\phi}_{np}\times)$$

小角度误差可不考虑转轴顺序

姿态误差方程的推导

- 目标式

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}_{np} = L(\delta \boldsymbol{r}^n,\ \delta \boldsymbol{v}^n,\ \boldsymbol{\phi},\ \delta \boldsymbol{f}^b,\ \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b)$$

- 推导的起点

$$\hat{\mathbf{C}}_b^n = [\mathbf{I} - (\boldsymbol{\phi}\times)]\mathbf{C}_b^n \qquad (1)$$

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\times) - (\boldsymbol{\omega}_{in}^n\times)\mathbf{C}_b^n \qquad (2)$$

- 推导思路
  - 对误差定义式（1）求导，对式（2）做误差扰动；令二者得到的 $\dot{\hat{\mathbf{C}}}_b^n$ 表达式相等；
  - 整理，忽略误差的二阶小量

姿态误差方程的推导（续）

- Step 1：对姿态误差定义式直接求导，得

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\mathbf{C}}}_b^n &= \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{C}}_b^n = \frac{d}{dt}([\mathbf{I} - (\boldsymbol{\phi}\times)]\mathbf{C}_b^n) \\
&= -(\dot{\boldsymbol{\phi}}\times)\mathbf{C}_b^n + [\mathbf{I} - (\boldsymbol{\phi}\times)]\dot{\mathbf{C}}_b^n \\
&= -(\dot{\boldsymbol{\phi}}\times)\mathbf{C}_b^n + [\mathbf{I} - (\boldsymbol{\phi}\times)][\mathbf{C}_b^n(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\times) - (\boldsymbol{\omega}_{in}^n\times)\mathbf{C}_b^n] \\
&= -(\dot{\boldsymbol{\phi}}\times)\mathbf{C}_b^n + \mathbf{C}_b^n(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\times) - (\boldsymbol{\omega}_{in}^n\times)\mathbf{C}_b^n - (\boldsymbol{\phi}\times)\mathbf{C}_b^n(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\times) \\
&\quad + (\boldsymbol{\phi}\times)(\boldsymbol{\omega}_{in}^n\times)\mathbf{C}_b^n
\end{aligned}$$

求导与反对称运算的可互换性

*Tips: $\hat{\mathbf{C}}_b^n = [\mathbf{I} - (\boldsymbol{\phi}\times)]\mathbf{C}_b^n$, $\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\times) - (\boldsymbol{\omega}_{in}^n\times)\mathbf{C}_b^n$

姿态误差方程的推导（续）

- Step 2：对 $\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\times) - (\boldsymbol{\omega}_{in}^n\times)\mathbf{C}_b^n$ 进行误差扰动
  - 忽略误差的二阶小量，得

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\mathbf{C}}}_b^n &= \hat{\mathbf{C}}_b^n(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\times) - (\hat{\boldsymbol{\omega}}_{in}^n\times)\hat{\mathbf{C}}_b^n \\
&= [\mathbf{I} - (\boldsymbol{\phi}\times)]\mathbf{C}_b^n[(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b)\times] - [(\boldsymbol{\omega}_{in}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n)\times][\mathbf{I} - (\boldsymbol{\phi}\times)]\mathbf{C}_b^n \\
&= \mathbf{C}_b^n(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\times) + \mathbf{C}_b^n(\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\times) - (\boldsymbol{\phi}\times)\mathbf{C}_b^n(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\times) - (\boldsymbol{\phi}\times)\mathbf{C}_b^n(\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\times) \\
&\quad - (\boldsymbol{\omega}_{in}^n\times)\mathbf{C}_b^n + (\boldsymbol{\omega}_{in}^n\times)(\boldsymbol{\phi}\times)\mathbf{C}_b^n - (\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n\times)\mathbf{C}_b^n + (\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n\times)(\boldsymbol{\phi}\times)\mathbf{C}_b^n \\
&\approx \mathbf{C}_b^n(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\times) - (\boldsymbol{\omega}_{in}^n\times)\mathbf{C}_b^n - (\boldsymbol{\phi}\times)\mathbf{C}_b^n(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\times) \\
&\quad + \mathbf{C}_b^n(\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\times) + (\boldsymbol{\omega}_{in}^n\times)(\boldsymbol{\phi}\times)\mathbf{C}_b^n - (\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n\times)\mathbf{C}_b^n
\end{aligned}$$

姿态误差方程的推导（续）

- Step 3：令 $\dot{\hat{\mathbf{C}}}_b^n$ 的两个表达式相等

*Tips: $(\boldsymbol{v}^R\times) = \mathbf{C}_b^R(\boldsymbol{v}^b\times)(\mathbf{C}_b^R)^{\mathrm{T}}$

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\mathbf{C}}}_b^n &= -(\dot{\boldsymbol{\phi}}\times)\mathbf{C}_b^n + \mathbf{C}_b^n(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\times) - (\boldsymbol{\omega}_{in}^n\times)\mathbf{C}_b^n - (\boldsymbol{\phi}\times)\mathbf{C}_b^n(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\times) \\
&\quad + (\boldsymbol{\phi}\times)(\boldsymbol{\omega}_{in}^n\times)\mathbf{C}_b^n \\
&= \mathbf{C}_b^n(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\times) - (\boldsymbol{\omega}_{in}^n\times)\mathbf{C}_b^n - (\boldsymbol{\phi}\times)\mathbf{C}_b^n(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\times) \\
&\quad + \mathbf{C}_b^n(\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\times) + (\boldsymbol{\omega}_{in}^n\times)(\boldsymbol{\phi}\times)\mathbf{C}_b^n - (\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n\times)\mathbf{C}_b^n
\end{aligned}$$

  - 两边右乘矩阵 $(\mathbf{C}_b^n)^{\mathrm{T}}$，整理得

$$-(\dot{\boldsymbol{\phi}}\times) + (\boldsymbol{\phi}\times)(\boldsymbol{\omega}_{in}^n\times) = \mathbf{C}_b^n(\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\times)\mathbf{C}_n^b + (\boldsymbol{\omega}_{in}^n\times)(\boldsymbol{\phi}\times) - (\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n\times)$$

  - 整理得

$$(\dot{\boldsymbol{\phi}}\times) = (\boldsymbol{\phi}\times)(\boldsymbol{\omega}_{in}^n\times) - (\boldsymbol{\omega}_{in}^n\times)(\boldsymbol{\phi}\times) - (\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^n\times) + (\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n\times)$$

姿态误差方程的推导（续）

$[(\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2)\times] = (\boldsymbol{v}_1 \times)(\boldsymbol{v}_2 \times) - (\boldsymbol{v}_2 \times)(\boldsymbol{v}_1 \times)$

- 根据向量反对称矩阵特性有

$$\begin{aligned}(\dot{\boldsymbol{\phi}}\times) &= (\boldsymbol{\phi}\times)(\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}\times) - (\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}\times)(\boldsymbol{\phi}\times) - (\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{n}\times) + (\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}\times) \\ &= [(\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega}_{in}^{n})\times] - (\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{n}\times) + (\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}\times)\end{aligned}$$

  - 将上述矩阵等式写成向量形式，为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\phi}} &= -\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}\times\boldsymbol{\phi} + \delta\boldsymbol{\omega}_{in}^{n} - \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{n} \\ &= -\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}\times\boldsymbol{\phi} + \delta\boldsymbol{\omega}_{in}^{n} - \mathbf{C}_b^n\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}\end{aligned}$$

  - 因为 $\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^{n} = \delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}$ ，且 $\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}, \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^{n} = L(\delta\boldsymbol{r}^{n}, \delta\boldsymbol{v}^{n})$ ，因此姿态误差角的时间导数可写成基本误差量的线性函数

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}_{np} = L(\delta\boldsymbol{r}^{n},\ \delta\boldsymbol{v}^{n},\ \boldsymbol{\phi},\ \delta\boldsymbol{f}^{b},\ \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b})$$

* 其它姿态误差形式，如四元数

速度误差方程的推导

- 目标式

$$\delta\dot{\boldsymbol{v}}^{n}(t) = L(\delta\boldsymbol{r}^{n},\ \delta\boldsymbol{v}^{n},\ \boldsymbol{\phi},\ \delta\boldsymbol{f}^{b},\ \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b})$$

- 推导的起点
  - 速度微分方程

$$\dot{\boldsymbol{v}}^{n} = \mathrm{C}_b^n\boldsymbol{f}^{b} - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n})\times\boldsymbol{v}^{n} + \boldsymbol{g}_p^{n}$$

- 推导思路
  - 扰动分析，逐项展开，取至一阶项

速度误差方程的推导（续）

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{v}}^{n} &= \mathbf{C}_b^n\boldsymbol{f}^{b} - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n})\times\boldsymbol{v}^{n} + \boldsymbol{g}_p^{n} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{v}}}^{n} &= \hat{\mathbf{C}}_b^n\hat{\boldsymbol{f}}^{b} - (2\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^{n} + \hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^{n})\times\hat{\boldsymbol{v}}^{n} + \hat{\boldsymbol{g}}_p^{n}\end{aligned}$$

- 展开

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{v}}}^{n} &= \dot{\boldsymbol{v}}^{n} + \delta\dot{\boldsymbol{v}}^{n} \\ &= \hat{\mathbf{C}}_b^n\hat{\boldsymbol{f}}^{b} - (2\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^{n} + \hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^{n})\times\hat{\boldsymbol{v}}^{n} + \hat{\boldsymbol{g}}_p^{n} \\ &= [\mathbf{I} - (\boldsymbol{\phi}\times)]\mathbf{C}_b^n(\boldsymbol{f}^{b} + \delta\boldsymbol{f}^{b}) - \\ &\quad (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n} + 2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^{n})\times(\boldsymbol{v}^{n} + \delta\boldsymbol{v}^{n}) + \boldsymbol{g}_p^{n} + \delta\boldsymbol{g}_p^{n} \\ &\approx \mathbf{C}_b^n\boldsymbol{f}^{b} + \mathbf{C}_b^n\delta\boldsymbol{f}^{b} - (\boldsymbol{\phi}\times)\mathbf{C}_b^n\boldsymbol{f}^{b} - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n})\times\boldsymbol{v}^{n} + \boldsymbol{g}_p^{n} \\ &\quad - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n})\times\delta\boldsymbol{v}^{n} - (2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^{n})\times\boldsymbol{v}^{n} + \delta\boldsymbol{g}_p^{n}\end{aligned}$$

- 整理，可得

$$\begin{aligned}\delta\dot{\boldsymbol{v}}^{n} &= \mathbf{C}_b^n\delta\boldsymbol{f}^{b} + \boldsymbol{f}^{n}\times\boldsymbol{\phi} - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n})\times\delta\boldsymbol{v}^{n} \\ &\quad + \boldsymbol{v}^{n}\times(2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}) + \delta\boldsymbol{g}_p^{n}\end{aligned}$$

理解每项的物理含义

位置误差方程的推导

- 经纬高误差微分方程形式

$$\begin{bmatrix}\dot{\varphi} & \dot{\lambda} & \dot{h}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}\dfrac{v_N}{R_M+h} & \dfrac{v_E}{(R_N+h)\cos\varphi} & -v_D\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

  - 对纬度导数扰动分析

$$\delta\dot{\varphi} = -\frac{v_N}{(R_M+h)^2}\delta h + \frac{1}{R_M+h}\delta v_N$$

  - 对经度导数扰动分析

$$\delta\dot{\lambda} = \frac{v_E\tan\varphi}{(R_N+h)\cos\varphi}\delta\varphi - \frac{v_E}{(R_N+h)^2\cos\varphi}\delta h + \frac{1}{(R_N+h)\cos\varphi}\delta v_E$$

  - 对高程导数扰动分析

$$\delta\dot{h} = -\delta v_D$$

位置误差方程的推导*

- n系下位置误差的微分方程形式
  - 详细推导参考讲义

$$\delta\dot{r}_N = -\frac{v_D}{R_M+h}\delta r_N + \frac{v_N}{R_M+h}\delta r_D + \delta v_N$$

$$\delta\dot{r}_E = \frac{v_E\tan\varphi}{R_N+h}\delta r_N - \frac{v_D+v_N\tan\varphi}{R_N+h}\delta r_E + \frac{v_E}{R_N+h}\delta r_D + \delta v_E$$

$$\delta\dot{r}_D = \delta v_D$$

传感器误差建模

- 陀螺误差模型

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b = (\mathbf{I}+\mathbf{s}_g)\boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \boldsymbol{b}_g + \boldsymbol{w}_g$$

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b - \boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \mathbf{s}_g\boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \boldsymbol{b}_g + \boldsymbol{w}_g$$

- 加速度计误差模型

$$\tilde{\boldsymbol{f}}^b = (\mathbf{I}+\mathbf{s}_a)\boldsymbol{f}^b + \boldsymbol{b}_a + \boldsymbol{w}_a$$

$$\delta\boldsymbol{f}^b = \tilde{\boldsymbol{f}}^b - \boldsymbol{f}^b = \mathbf{s}_a\boldsymbol{f}^b + \boldsymbol{b}_a + \boldsymbol{w}_a$$

- 对传感器误差进行建模
  - 随机常数、随机游走、一阶高斯马尔科夫过程

传感器误差建模（续）

- 传感器误差建模　一般认为IMU的三轴传感器精度一致
  - 陀螺和加速度计的零偏及比例因子误差常建模为一阶高斯马尔可夫过程

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{b}}_g(t) = -\dfrac{1}{\tau_{gb}}\boldsymbol{b}_g(t) + \boldsymbol{w}_{gb}(t)\\ \dot{\boldsymbol{b}}_a(t) = -\dfrac{1}{\tau_{ab}}\boldsymbol{b}_a(t) + \boldsymbol{w}_{ab}(t)\\ \dot{\boldsymbol{s}}_g(t) = -\dfrac{1}{\tau_{gs}}\boldsymbol{s}_g(t) + \boldsymbol{w}_{gs}(t)\\ \dot{\boldsymbol{s}}_a(t) = -\dfrac{1}{\tau_{as}}\boldsymbol{s}_a(t) + \boldsymbol{w}_{as}(t)\end{cases}$$

  - 传感器噪声建模为高斯白噪声

增广的惯导误差方程

- 将传感器误差模型带入惯导误差微分方程，得

$$\begin{bmatrix}\delta\dot{\boldsymbol{r}}^n\\ \delta\dot{\boldsymbol{v}}^n\\ \dot{\boldsymbol{\phi}}\\ \dot{\boldsymbol{b}}_g\\ \dot{\boldsymbol{b}}_a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{F}_{rr} & \mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{F}_{vr} & \mathbf{F}_{vv} & [(\mathbf{C}_b^n\boldsymbol{f}^b)\times] & \mathbf{0} & \mathbf{C}_b^n\\ \mathbf{F}_{\phi r} & \mathbf{F}_{\phi v} & -(\boldsymbol{\omega}_{in}^n\times) & -\mathbf{C}_b^n & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dfrac{-1}{\tau_{gb}}\mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dfrac{-1}{\tau_{ab}}\mathbf{I}_{3\times3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta\boldsymbol{r}^n\\ \delta\boldsymbol{v}^n\\ \boldsymbol{\phi}\\ \boldsymbol{b}_g\\ \boldsymbol{b}_a\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_b^n & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ -\mathbf{C}_b^n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{3\times3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}_a\\ \boldsymbol{w}_g\\ \boldsymbol{w}_{gb}\\ \boldsymbol{w}_{ab}\end{bmatrix}$$

增广的惯导误差方程（续）

$$\mathbf{F}_{rr}=\begin{bmatrix} -\frac{v_D}{R_M+h} & 0 & \frac{v_N}{R_M+h} \\ \frac{v_E\tan\varphi}{R_N+h} & -\frac{v_D+v_N\tan\varphi}{R_N+h} & \frac{v_E}{R_N+h} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{vr}=\begin{bmatrix} \frac{-2v_E\omega_e\cos\varphi}{R_M+h}-\frac{v_E^2\sec^2\varphi}{(R_M+h)(R_N+h)} & 0 & \frac{v_Nv_D}{(R_M+h)^2}-\frac{v_E^2\tan\varphi}{(R_N+h)^2} \\ \frac{2\omega_e(v_N\cos\varphi-v_D\sin\varphi)}{R_M+h}+\frac{v_Nv_E\sec^2\varphi}{(R_M+h)(R_N+h)} & 0 & \frac{v_Ev_D+v_Nv_E\tan\varphi}{(R_N+h)^2} \\ \frac{2\omega_ev_E\sin\varphi}{R_M+h} & 0 & -\frac{v_E^2}{(R_N+h)^2}-\frac{v_N^2}{(R_M+h)^2}+\frac{2g_p}{\sqrt{R_MR_N}+h} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{vv}=\begin{bmatrix} \frac{v_D}{R_M+h} & -2\left(\omega_e\sin\varphi+\frac{v_E\tan\varphi}{R_N+h}\right) & \frac{v_N}{R_M+h} \\ 2\omega_e\sin\varphi+\frac{v_E\tan\varphi}{R_N+h} & \frac{v_D+v_N\tan\varphi}{R_N+h} & 2\omega_e\cos\varphi+\frac{v_E}{R_N+h} \\ -\frac{2v_N}{R_M+h} & -2\left(\omega_e\cos\varphi+\frac{v_E}{R_N+h}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{\phi r}=\begin{bmatrix} -\frac{\omega_e\sin\varphi}{R_M+h} & 0 & \frac{v_E}{(R_N+h)^2} \\ 0 & 0 & -\frac{v_N}{(R_M+h)^2} \\ -\frac{\omega_e\cos\varphi}{R_M+h}-\frac{v_E\sec^2\varphi}{(R_M+h)(R_N+h)} & 0 & -\frac{v_E\tan\varphi}{(R_N+h)^2} \end{bmatrix},\quad \mathbf{F}_{\phi v}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_N+h} & 0 \\ -\frac{1}{R_M+h} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\tan\varphi}{R_N+h} & 0 \end{bmatrix}$$

惯导误差方程的作用

- 定量的惯导误差传播分析
  - 惯导误差还与载体的动态强相关，对误差做定量分析时需给定载体的轨迹、动态等运动信息。
- 用作组合导航的系统状态方程
  - 连续时间误差状态方程

$$\delta\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\mathbf{F}(t)\delta\boldsymbol{x}(t)+\mathbf{G}(t)\boldsymbol{w}(t)$$

  - 在做组合导航时需进行离散化处理，求得状态一步转移矩阵和白噪声的等效离散化处理

武汉大学 NSS CENTER

静基座惯导误差特性分析

静基座惯导误差特性分析

- 速度误差微分方程简化

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n=[\omega_N\ \ \omega_E\ \ \omega_D]=[\omega_e\cos\varphi\ \ 0\ \ -\omega_e\sin\varphi]^{\mathrm{T}}$$

- 位置精确已知
- 静止：$\boldsymbol{v}^n=\mathbf{0}\quad \boldsymbol{f}^n=-\boldsymbol{g}^n$
- 曲率半径Rm，Rn = R

$$\delta\dot{\boldsymbol{v}}^n=\mathbf{C}_b^n\delta\boldsymbol{f}^b+\boldsymbol{f}^n\times\boldsymbol{\phi}-(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n+\boldsymbol{\omega}_{en}^n)\times\delta\boldsymbol{v}^n+\boldsymbol{v}^n\times(2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n+\delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n)+\delta\boldsymbol{g}_p^n$$

例：北向速度误差方程简化

$$\delta\dot{v}_N=-\left[\frac{2v_E\omega_e\cos\varphi}{R_M+h}+\frac{v_E^2\sec^2\varphi}{(R_M+h)(R_N+h)}\right]\delta r_N+\left[\frac{v_Nv_D}{(R_M+h)^2}-\frac{v_E^2\tan\varphi}{(R_N+h)^2}\right]\delta r_D$$
$$+\frac{v_D}{R_M+h}\delta v_N-2\left(\omega_e\sin\varphi+\frac{v_E\tan\varphi}{R_N+h}\right)\delta v_E+\frac{v_N}{R_M+h}\delta v_D-f_D\phi_E+f_E\phi_D+\delta f_N$$

简化结果

$$\delta\dot{v}_N=2\omega_D\delta v_E+g\phi_E+\delta f_N$$
$$\delta\dot{v}_E=-2\omega_D\delta v_N+2\omega_N\delta v_D-g\phi_N+\delta f_E$$
$$\delta\dot{v}_D=2g\delta r_D/R-2\omega_N\delta v_E+\delta f_D$$

静基座惯导误差特性分析

□ 位置误差微分方程简化 $\delta\dot{\boldsymbol{r}}^n = -\boldsymbol{\omega}_{en}^n \times \delta\boldsymbol{r}^n + \delta\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{v}^n + \delta\boldsymbol{v}^n$

- 位置精确已知
- 静止：$\boldsymbol{v}^n = \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{f}^n = -\boldsymbol{g}^n$
- 曲率半径Rm，Rn = R

$$\delta\dot{r}_N = -\frac{v_D}{R_M+h}\delta r_N + \frac{v_N}{R_M+h}\delta r_D + \delta v_N$$

$$\delta\dot{r}_E = \frac{v_E\tan\varphi}{R_N+h}\delta r_N - \frac{v_D + v_N\tan\varphi}{R_N+h}\delta r_E + \frac{v_E}{R_N+h}\delta r_D + \delta v_E$$

$$\delta\dot{r}_D = \delta v_D$$

简化结果

$$\delta\dot{r}_N = \delta v_N$$
$$\delta\dot{r}_E = \delta v_E$$
$$\delta\dot{r}_D = \delta v_D$$

静基座惯导误差特性分析

□ 姿态误差微分方程简化

- 位置精确已知
- 静止：$\boldsymbol{v}^n = \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{f}^n = -\boldsymbol{g}^n$
- 曲率半径Rm，Rn = R

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = -\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times \boldsymbol{\phi} + \delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n - \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^n$$

例：横滚角误差化简

$$\dot{\phi}_N = -\frac{\omega_e\sin\varphi}{R_M+h}\delta r_N + \frac{v_E}{(R_N+h)^2}\delta r_D + \frac{1}{R_N+h}\delta v_E - \left(\omega_e\sin\varphi + \frac{v_E\tan\varphi}{R_N+h}\right)\phi_E + \frac{v_N}{R_M+h}\phi_D - \delta\omega_{ib,N}^n$$

简化结果

$$\dot{\phi}_N = \omega_D\delta r_N/R + \delta v_E/R + \omega_D\phi_E - \delta\omega_{ib,N}^n$$
$$\dot{\phi}_E = -\delta v_N/R - \omega_D\phi_N + \omega_N\phi_D - \delta\omega_{ib,E}^n$$
$$\dot{\phi}_D = -\omega_N\delta r_N/R - \tan\varphi\,\delta v_E/R - \omega_N\phi_E - \delta\omega_{ib,D}^n$$

静基座惯导误差特性分析

□ 简化的北向通道误差模型

$$\delta\boldsymbol{x}_N = [\delta r_N \quad \delta v_N \quad \phi_E \quad \delta f_N \quad \delta\omega_{ib,E}^n]^{\mathrm{T}}$$

$$\delta\dot{r}_N = \delta v_N$$
$$\delta\dot{v}_N = 2\omega_D\delta v_E + g\phi_E + \delta f_N$$
$$\dot{\phi}_E = -\delta v_N/R - \omega_D\phi_N + \omega_N\phi_D - \delta\omega_{ib,E}^n$$

假设为常值零偏 $\delta\dot{f}_N = 0 \quad \delta\dot{\omega}_{ib,E}^n = 0$

$$\delta v_E = 0$$
$$\phi_N = 0, \quad \phi_D = 0$$

$$\delta\dot{r}_N = \delta v_N$$
$$\delta\dot{v}_N = g\phi_E + \delta f_N$$
$$\dot{\phi}_E = -\delta v_N/R - \delta\omega_{ib,E}^n$$

表示为矩阵形式 $\delta\dot{\boldsymbol{x}}_N(t) = \mathbf{F}(t)\delta\boldsymbol{x}_N(t)$

其中

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

静基座惯导误差特性分析

□ 简化的北向通道误差模型

未考虑白噪声等随机误差的影响

- 求解微分方程 $\delta\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\delta\boldsymbol{x}(t)$

Laplace方法 $\delta\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{F})^{-1}\delta\boldsymbol{x}(0)\right\}$

初始位置误差项　北向常值速度误差项　初始姿态（俯仰）误差项　加表零偏误差项

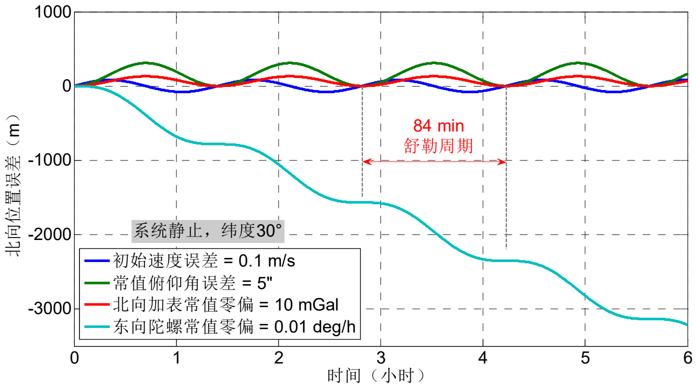
$$\delta r_N(t) = \delta r_{N,0} + \frac{\sin\omega_s t}{\omega_s}\delta v_{N,0} + R\left(1-\cos\omega_s t\right)\phi_{pitch} + \frac{1-\cos\omega_s t}{\omega_s^2}\delta f_N + R\left(\frac{\sin\omega_s t}{\omega_s} - t\right)\delta\omega_{ib,E}^n$$

东向陀螺零偏误差项

$$\omega_s = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

静基座惯导误差特性分析

- 北向位置误差仿真 舒勒周期



静基座惯导误差特性分析

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$

$\omega_s = \sqrt{g/R}$

- 短时间北向位置误差分析

$$\delta r_N(t) = \delta r_{N,0} + \frac{\sin\omega_s t}{\omega_s}\delta v_{N,0} + R(1-\cos\omega_s t)\phi_E + \frac{1-\cos\omega_s t}{\omega_s^2}\delta f_N + R\left(\frac{\sin\omega_s t}{\omega_s} - t\right)\delta\omega_{ib,E}^n$$

初始北向速度误差 $\frac{\sin\omega_s t}{\omega_s}\delta v_{N,0} \approx \delta v_{N,0} t$

俯仰角误差 $R(1-\cos\omega_s t)\phi_E \approx \frac{1}{2} g\phi_E t^2$

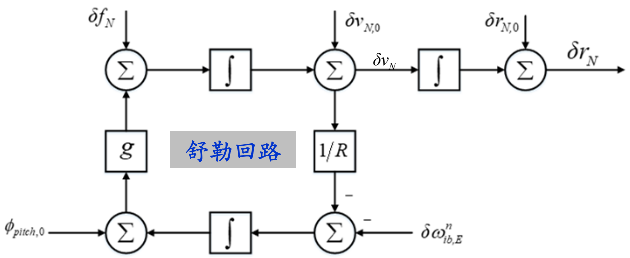
北向加速度计误差 $\frac{1-\cos\omega_s t}{\omega_s^2}\delta f_N \approx \frac{1}{2}\delta f_N t^2$

俯仰/东向陀螺误差 $R\left(\frac{\sin\omega_s t}{\omega_s} - t\right)\delta\omega_{ib,E}^n \approx \frac{1}{6} g\delta\omega_{ib,E}^n t^3$

静基座惯导误差特性分析

- 舒勒效应
  - 北向误差模型

$$\delta\dot{r}_N = \delta v_N$$
$$\delta\dot{v}_N = g\phi_E + \delta f_N$$
$$\dot{\phi}_E = -\delta v_N/R - \delta\omega_{ib,E}^n$$



静基座惯导误差特性分析

- 舒勒效应（Schuler effect）

$$\delta v_N(t) = \delta v_N(0)\cos\left(\sqrt{g/R}t\right) - \sqrt{gR}\delta\omega_{ib,E}^n \sin\left(\sqrt{g/R}t\right)$$

  - 北向误差模型：求北向速度误差的二阶导，并假设北向加速度计测量误差为常值，可得

$$\delta\ddot{v}_N + \frac{g}{R}\delta v_N = -g\delta\omega_{ib,E}^n$$

  - 北向速度误差与俯仰角误差耦合在一起形成一个无阻尼二阶振荡系统，由上述非齐次线性二阶微分方程描述，解上述微分方程可得系统振荡周期约为84 min，即舒勒周期。

单摆简谐振动微分方程

$$x'' + \frac{g}{l}x = 0$$

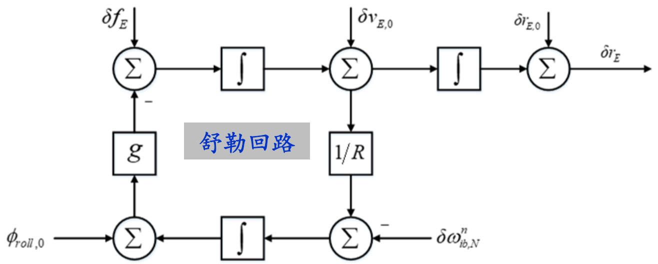
$$2\pi f_s = \sqrt{\frac{g}{R+h}} \approx \sqrt{\frac{g}{R}}$$

舒勒频率，Schuler Frequency

静基座惯导误差特性分析

- 舒勒效应（Schuler effect）
  - 东向误差模型

$$\delta\dot{r}_E = \delta v_E, \quad \delta\dot{v}_E = -g\phi_{roll} + \delta f_E, \quad \dot{\phi}_{roll} = \frac{1}{R}\delta v_E - \delta\omega^n_{ib,N}$$



静基座惯导误差特性分析

- 舒勒效应（Schuler effect）
  - 东向速度误差模型：对东向速度误差求导，并假设东向加速度计测量误差为常值，可得

$$\delta\ddot{v}_E + \frac{g}{R}\delta v_E = g\delta\omega^n_{ib,N}$$

  - 东向速度误差与横滚角误差耦合在一起形成一个无阻尼二阶振荡系统，由上述非齐次线性二阶微分方程描述，解上述微分方程可得系统振荡周期约为84 min，即舒勒周期。

$$2\pi f_s = \sqrt{\frac{g}{R+h}} \approx \sqrt{\frac{g}{R}}$$

舒勒频率，Schuler Frequency

静基座惯导误差特性分析

- 高程通道

$$\delta\dot{v}_D = -2g\delta h/R - 2\omega_N\delta v_E + \delta f_D$$
$$\delta\dot{h} = -\delta v_D$$

求高程误差的二阶导

$$\delta\ddot{h} = -\delta\dot{v}_D = 2g\delta h/R + 2\omega_N\delta v_E - \delta f_D$$

求解高程误差微分方程，得

$$\delta h(t) = \delta h_0 \cosh(\sqrt{2}\omega_s t) + \frac{\delta v_{D0}}{\sqrt{2}\omega_s}\sinh(\sqrt{2}\omega_s t) + \frac{2\omega_N\delta v_E - \delta f_D}{2\omega_s^2}[\cosh(\sqrt{2}\omega_s t) - 1]$$

短时间内（不大于1/4舒勒周期）

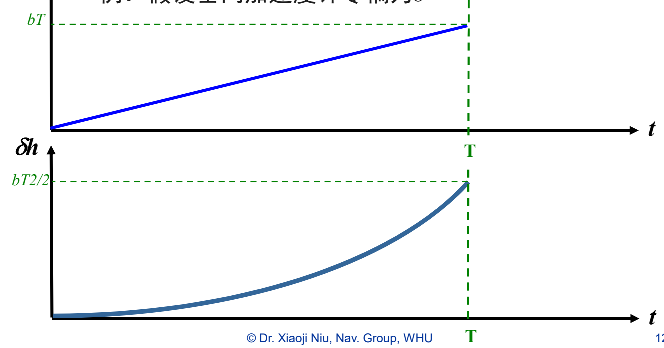
$\cosh(\sqrt{2}\omega_s t) \approx 1$
$\sinh(\sqrt{2}\omega_s t) \approx \sqrt{2}\omega_s t$
$\cosh(\sqrt{2}\omega_s t) - 1 \approx \omega_s^2 t^2$

$$\delta h(t) = \delta h_0 + \delta v_{D0}t + \omega_N\delta v_E t^2 - \frac{1}{2}\delta f_D t^2$$

静基座惯导误差特性分析（例）

- 纯惯导高程通道，速度和位置误差均具有系统性，且不受约束

■ 例：假设垂向加速度计零偏为b



惯导误差分析总结

- 如何减小惯导误差
  - 为减小惯导系统性误差，需定期引入外部测量
  - 系统性误差主要为加速度计零偏和陀螺零偏引起的误差项
  - 可用作惯导更新的测量值包括
    - 位置测量值（如位置更新，CUPT）
    - 速度测量值或零速（ZUPT）
    - 姿态测量值
  - 用于估计INS系统性误差的方法
    - 卡尔曼滤波（Kalman Filtering）
    - 曲线拟合（Curve fitting）
    - 其他滤波方法（如神经网络等）

→第三部分：组合导航KF

附录1：姿态表达式的相互转换

- DCM in terms of Euler Angles
  - 欧拉角序列

$$\text{EulerAngles}=\begin{bmatrix}\phi_{nb}\\ \theta_{nb}\\ \psi_{nb}\end{bmatrix}$$

  - 转换式

$$\mathbf{C}_b^n=\begin{pmatrix} c\theta c\psi & -c\phi s\psi+s\phi s\theta c\psi & s\phi s\psi+c\phi s\theta c\psi \\ c\theta s\psi & c\phi c\psi+s\phi s\theta s\psi & -s\phi c\psi+c\phi s\theta s\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{pmatrix}$$

$s=\sin;\ c=\cos$

附录1：姿态表达式的相互转换

- DCM in terms of quaternion
  - 四元数

$$\boldsymbol{q}_b^n=\begin{bmatrix}q_0\\ q_1\\ q_2\\ q_3\end{bmatrix}$$

  - 转换式

$$\mathbf{C}_b^n=\begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2(q_1q_2-q_0q_3) & 2(q_1q_3+q_0q_2) \\ 2(q_1q_2+q_0q_3) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2(q_2q_3-q_0q_1) \\ 2(q_1q_3-q_0q_2) & 2(q_2q_3+q_0q_1) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{bmatrix}$$

附录1：姿态表达式的相互转换

- DCM in terms of rotation vector
  - 旋转矢量

$$\boldsymbol{\phi}_{nb}=\begin{bmatrix}\phi_{nb,x}\\ \phi_{nb,y}\\ \phi_{nb,z}\end{bmatrix}$$

  - 转换式

$$\mathbf{C}_b^n=\left[\mathbf{I}+\frac{\sin\|\boldsymbol{\phi}_{nb}\|}{\|\boldsymbol{\phi}_{nb}\|}(\boldsymbol{\phi}_{nb}\times)+\frac{(1-\cos\|\boldsymbol{\phi}_{nb}\|)}{\|\boldsymbol{\phi}_{nb}\|^2}(\boldsymbol{\phi}_{nb}\times)(\boldsymbol{\phi}_{nb}\times)\right]$$

附录1：姿态表达式的相互转换

- Quaternion in terms of Euler Angles
  - 欧拉角序列

$$\text{EulerAngles} = \begin{bmatrix} \phi_{nb} \\ \theta_{nb} \\ \psi_{nb} \end{bmatrix}$$

  - 转换式

$$\boldsymbol{q}_b^n = \begin{bmatrix} \cos\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ \sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} - \cos\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ \cos\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ \cos\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} - \sin\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} \end{bmatrix}$$

附录1：姿态表达式的相互转换

- Quaternion in terms of Rotation vector
  - 旋转矢量

$$\boldsymbol{\phi}_{nb} = \begin{bmatrix} \phi_{nb,x} \\ \phi_{nb,y} \\ \phi_{nb,z} \end{bmatrix}$$

  - 转换式

$$\boldsymbol{q}_b^n = \begin{bmatrix} \cos\left\|0.5\boldsymbol{\phi}_{nb}\right\| \\ \dfrac{\sin\left\|0.5\boldsymbol{\phi}_{nb}\right\|}{\left\|0.5\boldsymbol{\phi}_{nb}\right\|} 0.5\boldsymbol{\phi}_{nb} \end{bmatrix}$$

附录1：姿态表达式的相互转换

- Euler Angles in terms of DCM
  - DCM

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{pmatrix} c\theta c\psi & -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi \\ c\theta s\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & -s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{pmatrix}$$

  - 转换式

$$\phi_{nb} = \tan^{-1}\frac{C_{32}}{C_{33}} \quad (-\pi < \phi \le \pi)$$

$$\theta_{nb} = \tan^{-1}\frac{-C_{31}}{\sqrt{C_{32}^2 + C_{33}^2}} \quad (-\pi/2 \le \theta \le \pi/2)$$

$$\psi_{nb} = \tan^{-1}\frac{C_{21}}{C_{11}} \quad (-\pi < \alpha \le \pi)$$

附录2：大地测量基础知识

- 地球椭球基本参数

地球椭球是选择的旋转椭球,旋转椭球的形状和大小常用子午椭圆的五个基本几何参数(或称元素)，通常用长半轴和扁率两个参数来定义即可。

  - 长半轴 a
  - 短半轴 b
  - 椭球扁率 f
  - 椭球第一偏心率 e
  - 椭球第二偏心率 e'

$$f = \frac{a-b}{a}$$

$$e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

$$e' = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

附录2：大地测量基础知识

- WGS84椭球参数
  - 长半轴 a = 6378137.0 m；
  - 短半轴b = 6356752.3142m；
  - 扁率f = 1/298.257223563；
  - 地球自转角速度 ω = 7.292115×10^{-5} rad/s；
  - 第一偏心率平方(e^2) = 0.00669437999013；
  - 第二偏心率平方(e'^2) = 0.006739496742227；
  - 地球引力常数（含大气层）
    GM = 3.986004418×10^{14} m^3/s^2；
  - 椭球正常重力位$U0$ = 62636860.8497 m^2/s^2；
  - 赤道正常重力 = 9.7803267714m/s^2；
  - 引力位二阶谐系数 = -484.16685×10^{-6}；

附录2：大地测量基础知识

- 2000国家大地坐标系椭球参数(CGCS2000)
  - 长半轴a = 6378137m；
  - 扁率f = 1/298.257222101 ；
  - 地球自转角速度ω = 7.292115×10^{-5}rad/s；
  - 地球引力常数GM = 3.986004418×$10^{14}$$m^3/s^2$
- GRS80椭球参数
  - 长半轴 a = 6378137m
  - 短半轴 b = 6356752.3141m
  - 地球自转角速度ω = 7.292115×10^{-5}rad/s
  - 地球引力常数GM = 3.986005×$10^{14}$$m^3/s^2$

附录2：大地测量基础知识

- 地球椭球面上的几种曲率半径
  - 子午圈曲率半径（主曲率半径）

$$R_M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}}$$

  - 卯酉圈曲率半径

$$R_N = \frac{a}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)}}$$

附录2：大地测量基础知识

- 地球附近一点的正常重力按下式计算

$$\gamma(h,\varphi) = \gamma(\varphi)\left(1-\frac{2}{a}\left(1+f+m-2f\sin^2\varphi\right)h+\frac{3}{a^2}h^2\right)$$

$$\gamma(\varphi) = \frac{a\gamma_a\cos^2\varphi + b\gamma_b\sin^2\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}, \quad m = \frac{\omega_e^2 a^2 b}{GM}$$

φ 为纬度；h为大地高；a为地球椭球长半轴长度；b为短半轴长度；f为地球扁率；w_e为地球自转角速度；GM为地球引力常数；γ_a, γ_b 分别为赤道和极点处的重力值。对于GRS80椭球有

$$a = 6378137.0\ m \qquad GM = 3.986005\times10^{14} m^3/s^2$$
$$b = 6356752.3141\ m \qquad \gamma_a = 9.7803267715 m/s^2$$
$$\omega_e = 7.292115\times10^{-5}\ rad/s \qquad \gamma_b = 9.8321863685 m/s^2$$
$$f = 1/298.257222101$$

Ref: Jekeli C. Inertial navigation systems with geodetic applications[M]. Walter de Gruyter, 2001.186-189.