燃气管网电算方法与数学模型

城建系 田贯三 刘杰

摘要 本文用图论与数学分析的方法，建立了燃气管网水力计算的电算数学模型，对各种算法进行了系统的研究与比较，作出了综合评价。

关键词 管网水力计算；管段；节点；环

1 前言

燃气管网水力计算在燃气管网的设计、改造、扩建和运行管理中起着十分重要的作用。国内燃气管网电算研究工作起步晚，由于缺乏对各种算法的系统研究，所研制的电算程序存在一些局限性。本文将系统地建立各种算法的数学模型，对各种算法进行全面的理论分析，为提高管网水力计算的电算程序质量提供理论依据。

2 燃气管网水力计算的数学模型

用电子计算机进行燃气管网水力计算，首先需要把管网的信息输入到计算机中去，这就必须用数学的语言描述管网的结构，这一任务可借助图论[1]来完成。图1为一简单的管网示意图。

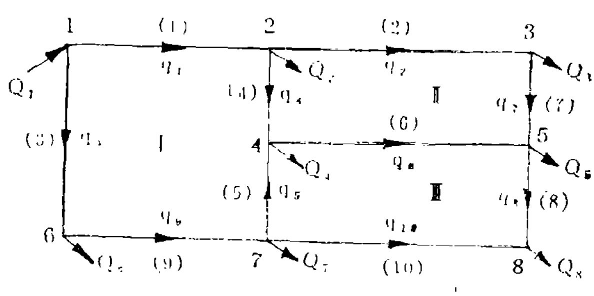

图 1

图中 1，2，…10——节点编号；

（1），（2），…（10）——管段编号；

收稿日期：1990-09-03

Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ——环编号；

Q_1，Q_2，$\cdots Q_8$——节点流量；

q_1，q_2，$\cdots q_{10}$——管段流量。

由图论可知，任何环状管网在管段数为p，节点数为m，环数为n的情况下，其管段数，节点数和环数存在下列关系：

$$p=m+n-1$$

燃气管网供气时，在任何情况下均需满足管道压降计算公式，节点流量方程和环能量方程[2]，其中后两个方程称为基本方程。

1.1 管段压力降计算公式

$$\Delta p_j=s_j q_j^{\alpha} \qquad j=1, 2, \cdots p \tag{1}$$

式中 s_j——管段j的阻力系数；

Δp_j——管段j的压力降；

q_j——管段j的流量；

α——常数。

可列出p个管段压降计算公式。

1.2 节点流量连续方程

对燃气管网任一节点i均满足流量平衡，可用下式表示：

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij}q_j+Q_i=0 \qquad i=1, 2, \cdots m \tag{2}$$

式中 a_{ij}——管段j与节点的关联元素，$a_{ij}=1$，管段j与节点i关联，且i是管段j的起点；$a_{ij}=-1$，管段j与节点i关联，且i是管段j的终点；$a_{ij}=0$，管段j与节点i不关联。

可建立$m-1$个独立的方程。

1.3 环能量方程

对于燃气管网中任一环路均应满足压降之和为零，可用下式表示：

$$\sum_{j=1}^{p} b_{ij}s_j q_j^{\alpha}=0 \qquad i=1, 2, \cdots n \tag{3}$$

式中 b_{ij}——管网环路与管段的关联元素，$b_{ij}=1$，管段j在第i个环中，且管段j的方向与环的方向一致；$b_{ij}=-1$，管段j在第i个环中，且管段j的方向与环的方向相反；$b_{ij}=0$，管段j不在第i个环中。

可建立n个独立的环能量方程。

1.4 三种计算方法

总之，对于一个管网，当管径已知时，每条管段有压降和流量两个未知数，共有$2p$个未知数，而可列出的方程数为：

$$p+(m-1)+n=2p \tag{4}$$

这样未知数与方程的个数相等，可以进行求解。方程组为非线性的，直接求解困难，一

般可通过以下三种方法求解。

（1） 解环方程法

在满足连续方程组（2）的条件下，用求解各环校正流量的方法，来间接解出各管段流量的方法叫解环方程法，也就是Hardy Cross法。

对第i环列出能量方程，最初确定的管段设计流量一般不能满足能量方程，其能量可用下式表示：

$$\sum_{j=1}^{p} b_{ij}s_j q_j^{\alpha}=\Delta p_i \qquad i=1,\ 2,\ \cdots n \tag{5}$$

式中：Δp_i——第i环的压降不闭合差。

为了使各环的压降闭合差达到允许的计算精度，保证节点流量平衡，引入环校正流量来消除各环的闭合差，对每环引入校正流量Δq_i（$i=1,\ 2,\ \cdots n$），则第i环的能量方程可以改写为：

$$\sum_{j=1}^{p} b_{ij}s_j\Big(q_j\pm\Delta q_i\mp\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} b_{kj}\Delta q_k\Big)^{\alpha}=0 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots n \tag{6}$$

式中　$\pm\Delta q_i$——第i环校正流量，其正负号与b_{ij}一致；

$\mp\Delta q_k$——第i环第j管段邻环校正流量，其正负号与b_{kj}相反。

将式（6）括号内多项式展开为麦克劳林级数，因为Δq_i、Δq_k与q_j相比甚小，故只取展开式的前两项。

$$\Big(q_j\pm\Delta q_i\mp\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} b_{kj}\Delta q_k\Big)^{\alpha}=q_j^{\alpha}\pm\alpha q_j^{\alpha-1}\Delta q_i\mp\alpha q_j^{\alpha-1}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} b_{kj}\Delta q_k \tag{7}$$

将式（7）代入式（6）得：

$$\sum_{j=1}^{p} b_{ij}s_j\left|q_j^{\alpha-1}\right|\cdot\Delta q_i-\sum_{j=1}^{p} b_{ij}s_j\left|q^{\alpha-1}\right|\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} b_{kj}\cdot\Delta q_k=-\frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{p} b_{ij}s_j\left|q_j^{\alpha}\right|$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots n \tag{8}$$

将所有的各环能量方程联立，则形成求解Δq_i（$i=1,\ 2,\ \cdots n$）的线性方程组，其方程组的矩阵表示形式为：

$$[B\cdot R\cdot B^{T}]\cdot\Delta q=\frac{1}{\alpha}B\cdot R\cdot q \tag{9}$$

式中　B——由元素b_{ij}组成的环路关联矩阵；

B^T——矩阵B的转秩矩阵；

Δq——由Δq_i（$i=1,\ 2,\ \cdots n$）组成的向量；

q——由管段流量q_j（$j=1,\ 2,\ \cdots p$）组成的向量；

R——由$s_j\left|q_j^{\alpha-1}\right|$组成的对角矩阵。

计算步骤：首先确定出各管段的初始计算流量 $q^{(0)}$，形成线性方程组（9），求解得出各环校正流量 $\Delta q^{(1)}$，对 $q^{(0)}$ 进行校正得 $q^{(1)}$，判断 $q^{(1)}$ 是否满足计算精度要求，未满足要求再重新形成线性方程组（9），求解校正流量 $\Delta q^{(2)}$，对 $q^{(1)}$ 进行校正，其管网流量校正通式为：

$$q_j^{(l+1)} = q_j^{(l)} + b_{ij}\Delta q_i \tag{10}$$

进行循环校正，直到第l次校正后的 $q_i^{(l+1)}$（$j=1，2，\cdots p$）满足精度要求为止。在计算过程中，把控制每环的压降残差来达到计算精度要求，转化为控制各管段前后两次修正后的管段流量差满足一定的计算精度要求为止。迭代结束后，根据管段压降计算式算出各管段压降，从给定压力的基准点推算出各节点压力等参数。

不考虑邻环的影响时，称为单一回路法；考虑邻环影响时，称为联立回路法。

（2）解节点方程法

以节点连续方程为基础，把方程中的管段流量通过管段压降计算公式，转化为用管段两端的节点压力表示，这样连续方程转化为满足能量方程，以节点压力为变量的方程组，通过求解方程组便可得各节点压力，此法称为节点法。

节点法按其解法分为有限元节点法和联立节点法。

（A） 有限元节点法

对燃气管网进行水力计算，要求满足以下三个方程组[3]

（a） 节点流量连续方程组：$Aq+Q=0$

（b） 管段压力降方程组： $A^{T}P=\Delta p$

（c） 管段流量方程组： $q=C\cdot\Delta p$

由上述三式可得求解节点压力的方程组。

$$[A\cdot C\cdot A^{T}]\cdot P+Q=0 \tag{11}$$

式中 A——由元素a_{ij}组成的节点关联矩阵；

C——由元素$1/s_j^{\frac{1}{\alpha}}\cdot q_j^{\alpha-1}$组成的对角矩阵；

P——节点压力向量；

Q——节点流量向量；

q——管段流量向量；

Δp——管段压降向量；

A^{T}——A矩阵的转置矩阵。

计算步骤：首先初设管段流量 $q^{(0)}$，形成方程组（11），求解节点压力 $p^{(1)}$，计算出 $q^{(1)}$；$q^{(1)}$不满足要求进行修正，再形成方程组（11）进行逐次逼近，直到第$K+1$次的 $q^{(K+1)}$与 $q^{(K)}$差的绝对值满足计算精度要求为止。

（B）　联立节点法

联立节点法也称为牛顿——拉普森法。求解节点方程的数学模型为：

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} s_j^{-\frac{1}{\alpha}} (p_i - p_l)^{\frac{1}{\alpha}} + Q_i = 0 \qquad i=1,2,\cdots m \qquad (12)$$

将上式按台劳级数展开，为了简化计算，取一次项来逼近。

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{p} a_{ij} s_j^{-\frac{1}{\alpha}} (p_i - p_l)^{\frac{1}{\alpha}-1} \delta p_i + \sum_{j=1}^{p} a_{ij} (p_i - p_l)^{\frac{1}{\alpha}} + Q_i = 0$$

$$i=1,2,\cdots m \qquad (13)$$

这就是联立节点法所求解的方程组，实际计算中应写成下述迭代形式。

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} s_j^{-\frac{1}{\alpha}} \left(p_i^{(k)} - p_l^{(k)}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \delta p_i^{(k+1)}$$

$$= -\alpha\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} \left(p_i^{(k)} - p_l^{(k)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + Q_i\right) \qquad i=1,2,\cdots m \qquad (14)$$

其方程组的矩阵表示形式为：

$$[A \cdot R^{(k)} \cdot A^T]\ \delta P^{(k+1)} = -\alpha\, [A \cdot R^{(k)} \cdot \Delta P^{(k)} + Q] \qquad (15)$$

式中　p_i，p_l—第j管段的起点压力和终点压力；

δp_i—节点i的压力修正值；

$R^{(k)}$—由 $s_i^{-\frac{1}{\alpha}} \left(p_i^{(k)} - p_l^{(k)}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}$ 形成的对角矩阵；

$\delta P^{(k+1)}$—第$k+1$次求解方程组的解向量。

求解出节点压力修正值 $\delta P^{(k+1)}$后，按下式进行修正。

$$p_i^{(k+1)} = p_i^{(k)} + \delta p_i^{(k+1)} \qquad (16)$$

按给出的迭代形式进行迭代求解，最后解得$P^{(k+1)}$满足计算精度要求即可。

（3）解管段方程法

将节点连续方程和环能量方程联立形成有p个独立方程的方程组，其个数为管网管段数，将其转化为以管段流量为变量的方程组。由于能量方程为非线性方程，难以直接求解，因此可以通过线性化进行迭代逼近，其数学过程表示如下：

$$\left.\begin{aligned} &A \cdot q^{(k+1)} = -Q \\ &B \cdot S \cdot |\overline{q}^{(k)\alpha-1}| \cdot q^{(k+1)} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

设 $C = \begin{vmatrix} A \\ B \cdot S \cdot |\overline{q}^{(k)}\ \alpha - 1| \end{vmatrix}$ $\qquad D = \begin{vmatrix} -Q \\ O \end{vmatrix}$

则（17）式可表示为：

$$C \cdot q^{(k+1)} = D \tag{18}$$

式中 C—由元素c_{ij}组成的矩阵；

当$i \leqslant m-1$时，$c_{ij} = a_{ij}$

$i > m-1$时，$c_{ij} = b_{lj} \cdot s_j \cdot |\overline{q_j}^{(k)}\ \alpha - 1|$

$l = i - m + 1$；$j = 1, 2 \cdots p$。

计算步骤：首先设各管段初始流量$\overline{q}^{(0)}$，形成线性化方程组(18)，求解$q^{(1)}$，当$q^{(1)}$不满足计算精度要求时，对管段流量按下式修正后进行迭代求解。

$$\overline{q_j}^{(k+1)} = \lambda \overline{q_j}^{(k)} + (1 - \lambda)\, q_j^{(k+1)} \tag{19}$$

式中 $\overline{q_j}^{(k+1)}$—形成线性化能量方程系数的管段计算流量；

λ—流量修正系数，λ取 0～0.5。

当迭代到 $|q_j^{(k+1)} - q_j^{(k)}|$满足精度要求，计算出管网其他参数，输出计算结果即可。

3 各种算法的比较与评价

3.1 方程组矩阵的性质

三种算法方程组的系数矩阵均为稀疏矩阵，其中解环方程法和解节点方程法的系数矩阵为正定对称矩阵，解管段方程法的系数矩阵为一般大型稀疏矩阵。三种算法的系数矩阵均可压缩一维贮存，节省计算机内存。解环方程法和解节点方程法的方程组易形成，编程简单，解管段方程法的方程组形成较复杂，编程难度大，且占内存多。

3.2 计算工作量

三种算法的方程个数分别为管网的环数、节点数减 1 和管段数，所以三种算法的工作量依次为：解环方程法最小，解节点方程法居中，解管段方程法最大。

3.3 对计算初值的要求

解环方程法需设管段流量初值，要求管段流量初值必须满足节点连续方程。有限元节点法是求解各节点压力，需初设各管段流量，对管段流量初值要求不高；联立节点法是求解各节点压力修正值，需初设各节点压力，对各节点压力初值要求较高。解管段方程法需初设各管段流量初值，对管段流量初值要求不高。

3.4 收敛速度与计算精度

解环方程法中的联立回路法收敛性好，计算精度较高，单一回路法收敛速度慢，计算精度低。有限元节点法和联立节点法的收敛性和计算精度都比较好，但在使用联立节点法时如节点压力初值选取不当，则有限元节点法在计算精度和收敛速度上优于联立节点法。节点法在平差时，如遇到大管径低摩阻的管段，收敛速度和计算精度都降低。这是因为各管段的流量是由两端的压差求得，当大管径管段压差很小，对节点压力影响的灵敏度与相邻管段不同时，所求得管段流量难以满足计算精度要求。解管段方程法收敛速度快，计算精度高，可以用它的计算结果作为标准，来衡量其他两种算法的精度。

3.5 原始数据准备工作量

三种方法均需输入节点数、管段数、每条管段的起点号、终点号、管长和管径。解环方程法和解管段方程法需要环的信息，输入环与管段的关联矩阵。因此节点法的原始数据准备工作量最少。

综上所述，在一般情况下进行燃气管网平差应优先选用节点法或解环方程法，在计算精度要求高时，应选用解管段方程法。

参　考　文　献

1　王朝瑞.图论.高等教育出版社，1981.

2　哈尔滨建工学院等.燃气输配.中国建筑工业出版社，1984.

3　吴端鸿.应用DJS—130计算机进行“节点法”平差计算.城市煤气，1980(3)

ALGORITHMS AND MATHEMATICAL MODEL FOR GAS DISTRIBUTION NETWORK ANALYSIS BY COMPUTER

Tian Guansan　　Liu Jie

(Department of Urban Construction)

Abstract In this paper the mathematical models for gas distribution network analysis by computer are built up by using graph theory and mathematical analysis methods. A systematic and comparative study is made of the algorithms for network analysis, and a comprehensive evaluation is given.

Key Words network analysis; link; node; loop