בדיקת השערות – חלק אחרון

בדיקת השערות על הפרש תוחלות בין אוכלוסיות

ניתן לבצע רק כאשר שתי האוכלוסיות מתפלגות נורמלית.

מערכת ההשערות:
$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0$$
$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq d_0$$

קריטריונים לבחירת כלל ההכרעה המתאים:

(1) תלות בין המדגמים: מדגמים הם תלויים (=מזווגים) כאשר כל תצפית במדגם הראשון מזווגת עם תצפית אחת ויחידה במדגם השני, ולהיפך. למשל: התאמה בגיל ומין; או, בדיקה של רמות הכולסטרול של נבדק לפני טיפול תרופתי חדש ואחריו.

(2) מידע לגבי השונויות: אם המדגמים ב"ת, האם השונויות ידועות?

(3) שיוויון שונויות: אם השונויות בשתי האוכלוסיות אינן ידועות, האם ניתן להניח שהן שוות?

איך מחליטים אם השונויות שוות? (1) זה נתון בשאלה; (2) מבצעים בדיקת השערות על שיוויון שונויות – בעמוד הזה למטה;

(3) בודקים באמצעות רב"ס ליחס השונויות – עמוד 7

(4) דו"צ או ח"צ: בדף הנוסחאות מופיע כלל הדחייה עבור מבחן דו צדדי. למבחן חד צדדי נבחר את הגבול בכיוון המתאים עפ"י מערכת ההשערות שלנו ונציב α במקום $\alpha/2$.

בדיקת השערות על שיוויון שונויות

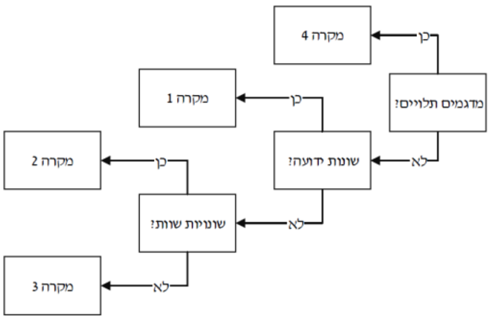
נתונות שתי אוכלוסיות שמתפלגות נורמלית, עם שונויות לא ידועות σ_1^2 ו-σ_2^2, בהתאמה.

מערכת ההשערות	$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	
אזור דחייה	$\frac{S_1^2}{S_2^2} > f_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1-1,n_2-1)}$ **או:** $\frac{S_1^2}{S_2^2} < f_{\frac{\alpha}{2}}^{(n_1-1,n_2-1)}$	בכל מדגם: $s^2 = \frac{\sum x_i^2 - n(\bar{x})^2}{n-1}$

הערות

1. התפלגות F אינה סימטרית, אז נדרשים שני ערכים קריטיים שונים!

תרשים עזר לבחירת כלל הדחייה המתאים עבור הפרש תוחלות מהטבלה בעמוד הבא



	$H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	הנחות ומידע
$\boxed{Z_{\overline{X}-\overline{Y}} = \dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-d_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}}$	**סטטיסטי המבחן:** **דחה אם:** $Z_{\overline{X}-\overline{Y}} < -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ **או** $Z_{\overline{X}-\overline{Y}} > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	מדגמים ב"ת,שונויות ידועות $E(X_i) = \mu_1, V(X_i) = \sigma_1^2$ $i = 1,\dots,n_1$ $E(Y_j) = \mu_2, V(Y_j) = \sigma_2^2$ $j = 1,\dots,n_2$ $n_1, n_2 > 30$ או נורמליות
$\boxed{T_{\overline{X}-\overline{Y}} = \dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-d_0}{s_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}}$ **כאשר:** $s_p^2 = \dfrac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$	**סטטיסטי המבחן:** **דחה אם:** $T_{\overline{x}-\overline{y}} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n_1+n_2-2}$ **או** $T_{\overline{x}-\overline{y}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n_1+n_2-2}$	מדגמים ב"ת, שונויות לא ידועות אך שוות. $X_1,\dots X_{n_1} \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ $Y_1,\dots Y_{n_2} \sim N(\mu_2, \sigma^2)$
$\boxed{T_{\overline{X}-\overline{Y}} = \dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-d_0}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1}+\dfrac{s_2^2}{n_2}}}}$ **כאשר:** $v = \dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1}+\dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\dfrac{\left(\dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$	**סטטיסטי המבחן:** **דחה אם:** $T_{\overline{x}-\overline{y}} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{v}$ **או** $T_{\overline{x}-\overline{y}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{v}$	מדגמים ב"ת, שונויות לא ידועות ולא שוות. $X_1,\dots X_{n_1} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $Y_1,\dots Y_{n_2} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
$\boxed{T_{\overline{D}} = \dfrac{\overline{D}-d_0}{\dfrac{s_D}{\sqrt{n}}}}$ **כאשר:** $\overline{d} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$ $s_d^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(d_i-\overline{d})^2}{n-1}$	**סטטיסטי המבחן:** **דחה אם:** $T_{\overline{D}} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$ **- או** $T_{\overline{D}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$	מדגמים תלויים שונויות לא ידועות $D = X - Y$ $D_1,\dots,D_n \sim N(\mu_D, \sigma_D^2)$

<u>תזכורת:</u> תחת תנאי משפט הגבול המרכזי מתקיים:

$$\underline{X} - \underline{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2\,,\ \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

תרגיל 1

בקורס במעגלים חשמליים עלה חשד כי מבחן מועד א' היה קשה יותר ממבחן מועד ב'. המרצה טען כי ההבדל לא נובע מקושי המבחן, אלא מכך שהסטודנטים במועד א' פחות מוכשרים.

ע"מ לבדוק את הטענה, הוחלט לקחת מדגם של סטודנטים מכל מועד ולבחון את ציון הבחינה של כל סטודנט מול ציון הבוחן שלו.

ידוע כי בוחן הביניים היה במועד אחד לכל הכיתה וכי אף סטודנט לא ניגש לשני מועדי המבחן. להלן הנתונים של ציון הבחינה וציון הביניים של הסטודנטים שנדגמו:

	מועד א' (10 תצפיות)		מועד ב' (11 תצפיות)	
	ציון בחינה	ציון ביניים	ציון בחינה	ציון ביניים
1	56	90	40	90
2	33	75	97	80
3	90	65	65	65
4	51	85	53	65
5	15	70	86	75
6	90	80	97	90
7	61	65	100	85
8	27	80	68	75
9	25	70	83	95
10	33	75	95	85
11			100	85

א. האם ציוני הבחינה של תלמידי מועד א' היו נמוכים בממוצע מציוני הביניים שלהם ברמת מובהקות 1%?

שני המדגמים, של ציון הבחינה של תלמיד מסוים ושל ציון הביניים שלו, הם כמובן <u>תלויים</u>. (מקרה 4).

מועד א' (10 תצפיות)		
ציון בחינה - X_i	ציון ביניים - Y_i	הפרש $d_i = X_i - Y_i$
56	90	-34
33	75	-42
90	65	25
51	85	-34
15	70	-55
90	80	10
61	65	-4
27	80	-53
25	70	-45
33	75	-42

μ_1 - תוחלת ציון <u>הבחינה</u> של תלמידי מועד א'. μ_2 - תוחלת ציון <u>הביניים</u> של תלמידי מועד א'.

מערכת ההשערות: $H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_1: \mu_1 < \mu_2$ ← $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 = d_0$, $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0 = d_0$

כלל ההחלטה: דחה אם $t_{\bar{D}} = \dfrac{\bar{D} - d_0}{s_d / \sqrt{n}} < -t_{1-\alpha}^{(n-1)}$

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = -27.4 \qquad s_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{D})^2}{10-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2) - n\bar{D}^2}{9} = 770.2666$$

$$t_{\bar{D}} = \frac{-27.4 - 0}{\sqrt{770.266} / \sqrt{10}} = -3.122$$

הערך הטבלאי: $-t_{1-0.01}^{10-1} = -t_{0.99}^{9} = -2.821$

-3.122 < -2.821 לכן נדחה את השערת האפס ברמת מובהקות 1%. ציוני הבחינה של תלמידי מועד א' נמוכים מציוני הביניים שלהם ברמת מובהקות 1%.

ב. האם ניתן להסיק כי ההפרשים בין ציוני הביניים לבין ציוני הבחינה במועד א' גדולים בממוצע מההפרשים בין ציוני הביניים לציוני הבחינה במועד ב' ברמת מובהקות 0.01?

מועד א' (10 תצפיות)			מועד ב' (11 תצפיות)		
ציון בחינה Y_i	ציון ביניים X_i	$D_i = X_i - Y_i$	ציון בחינה Y_i	ציון ביניים X_i	$D_i = X_i - Y_i$
56	90	**34**	40	90	**50**
33	75	**42**	97	80	**-17**
90	65	**-25**	65	65	**0**
51	85	**34**	53	65	**12**
15	70	**55**	86	75	**-11**
90	80	**-10**	97	90	**-7**
61	65	**4**	100	85	**-15**
27	80	**53**	68	75	**7**
25	70	**45**	83	95	**12**
33	75	**42**	95	85	**-10**
			100	85	**-15**
ממוצע הפרש $(\bar{D}_1)$		27.4	ממוצע הפרש $(\bar{D}_2)$		0.545
סטיית תקן הפרש (S_1)		27.75	סטיית תקן הפרש (S_2)		19.60

D_1 - תוחלת ההפרש בין ציון הביניים לציון הבחינה של תלמידי מועד א'.

D_2 - תוחלת ההפרש בין ציון הביניים לציון הבחינה של תלמידי מועד ב'.

מערכת ההשערות:

$$H_0: D_1 = D_2 \qquad H_1: D_1 > D_2$$

או

$$H_0: D_1 - D_2 = 0 = d_0 \qquad H_1: D_1 - D_2 > 0 = d_0$$

שימו לב: כל תצפית היא הפרש בין ציון בחינה לציון ביניים ב"אוכלוסיה" אחרת (אוכלוסית מועד א' ומועד ב'). אמנם ראינו שציון הבחינה של סטודנט מסוים תלוי בציון הביניים שלו, אבל במקרה הזה מדובר בסטודנטים שונים שנבחנו בשני המועדים, ולכן המדגמים אינם תלויים!

לכן: המדגמים בלתי תלויים והשונויות אינן ידועות. יש לבצע מבחן לשוויון שונויות:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

כלל ההחלטה: דחה אם

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} > f_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1-1,n_2-1)}$$

או

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} < f_{\frac{\alpha}{2}}^{(n_1-1,n_2-1)}$$

כלומר דחה אם:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} > f_{1-\frac{0.1}{2}}^{(10-1,11-1)} = f_{0.95}^{(9,10)} = 3.02$$

או

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} < f_{\frac{0.1}{2}}^{(10-1,11-1)} = f_{0.05}^{(9,10)} = \frac{1}{f_{0.95}^{(10,9)}} = \frac{1}{3.14} = 0.318$$

מכיון ש- $\frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{770.26}{384.27} = 2$ לא נדחה את השערת האפס בר"מ 10%, ולכן בוודאי שלא נדחה אותה ברמת מובהקות 1%. ניתן להניח כי השונויות שוות.

חוזרים למבחן השערות על הפרש תוחלות, שונויות לא ידועות אך שוות (מקרה 2 בדפים), ח"צ ימני:

כלל ההכרעה: דחה אם

$$\frac{\bar{x} - \bar{y} - d_0}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} > t_{1-\alpha}^{n_1+n_2-2}$$

$$s_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{9 \cdot 770.266 + 10 \cdot 384.27}{10+11-2} = 567.11$$

$$\frac{\bar{x}-\bar{y}-d_0}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{27.4-0.545-0}{\sqrt{567.11}\cdot\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{11}}}=2.58$$

$t_{0.99}^{19}=2.539$

$2.539<2.58$ ולכן נדחה את השערת האפס ברמת מובהקות 1%. ההפרשים בין ציוני הביניים לבין ציוני הבחינה היו גדולים יותר במועד א' מאשר במועד ב'.

<u>מבחן השערות על הפרש פרופורציות</u>

הנחות ומידע	$H_0: p_1-p_2=0$ $H_1: p_1-p_2\neq 0$	
מדגמים ב"ת $n_1\hat{p}_1, n_1\hat{q}_1, n_2\hat{p}_2, n_2\hat{q}_2 \geq 10$	**סטטיסטי המבחן:** **דחה אם:** $Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}<-z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}>z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\boxed{Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1}+\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}}}$ **כאשר:** $\hat{p}=\frac{n_1\hat{p}_1+n_2\hat{p}_2}{n_1+n_2}$

$\hat{p}_1$ - הפרופורציה המדגמית במדגם הראשון (גודלו n_1)

$\hat{p}_2$ - הפרופורציה המדגמית במדגם השני (גודלו n_2)

$\hat{p}$ – אומד משוקלל לפרופורציה הזהה בשתי האוכלוסיות (תחת H_0) על סמך נתוני שני המדגמים

<u>בהמשך לשאלה על המבחנים בקורס מעגלים חשמליים מהתרגול הקודם</u>

האם ניתן לומר ברמת מובהקות 5% כי אחוז הנכשלים בבחינה במועד א' (כלומר תלמידים שקיבלו פחות מ-60) זהה לאחוז הנכשלים בבחינה במועד ב'? הניחו כי מתקיימים התנאים ההכרחיים לשימוש במבחן.

נבדוק באמצעות מבחן השערות על שיוויון פרופורציות.

p_1 – אחוז הנכשלים במועד א', p_2 – אחוז הנכשלים במועד ב'

ע"פ ההנחות בשאלה, נניח שמתקיימים: $n_1\hat{p}_1, n_1\hat{q}_1, n_2\hat{p}_2, n_2\hat{q}_2 \geq 10$.

מערכת ההשערות:

$$H_0:\ p_1=p_2$$
$$H_1:\ p_1\neq p_2$$

חישוב האומדים:

$$\hat{p}_1=\frac{7}{10},\hat{p}_2=\frac{2}{11}\ \rightarrow\ \hat{p}=\frac{7+2}{10+11}=\frac{9}{21}$$

בדיקת כלל ההכרעה:

$$Z_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}=\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\cdot\hat{q}\cdot(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}}=\frac{\frac{7}{10}-\frac{2}{11}}{\sqrt{\frac{9}{21}\cdot\frac{12}{21}\cdot(\frac{1}{10}+\frac{1}{11})}}=2.396>Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=Z_{0.975}=1.96$$

ולכן דוחים את H_0 בר"מ 0.05, לא ניתן לקבוע כי אחוז הנכשלים בשני המועדים זהה ברמת המובהקות הנדרשת.

אמידה מרווחית לשתי אוכלוסיות

1. בניית רווח בר-סמך להפרש התוחלות $(\mu_1-\mu_2)$ ברמת סמך $1-\alpha$

	הנחות ומידע	רב"ס דו צדדי	
(1)	מדגמים ב"ת, שונויות ידועות $E(X_i)=\mu_1, V(X_i)=\sigma_1^2$ $E(Y_j)=\mu_2, V(Y_j)=\sigma_2^2$ $n_1, n_2>30$ או נורמליות	$\mu_1-\mu_2\in\left(\bar{x}-\bar{y}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\ ,\ \bar{x}-\bar{y}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$	
(2)	מדגמים ב"ת, שונויות לא ידועות אך שוות בשתי האוכלוסיות. $X_1,..X_{n_1}\sim N(\mu_1,\sigma^2)$ $Y_1,...Y_{n_2}\sim N(\mu_2,\sigma^2)$	$\mu_1-\mu_2\in\left(\bar{x}-\bar{y}-t^{n_1+n_2-2}_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\ \bar{x}-\bar{y}+t^{n_1+n_2-2}_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$	כאשר: $s_p^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$
(3)	מדגמים ב"ת, שונויות לא ידועות ולא שוות. $X_1,..X_{n_1}\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ $Y_1,...Y_{n2}\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$	$\mu_1-\mu_2\in\left(\bar{x}-\bar{y}-t^{v}_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}},\ \bar{x}-\bar{y}+t^{v}_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}\right)$	כאשר: $v=\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$

2. בניית רווח בר-סמך ליחס שונויות

σ_1^2 - שונות האוכלוסייה הראשונה. σ_2^2 - שונות האוכלוסייה השנייה. שתיהן לא ידועות.

רווח סמך דו-צדדי ליחס השונויות:

$$\boxed{\frac{s_1^2/s_2^2}{f^{\,n_1-1,n_2-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\frac{s_1^2/s_2^2}{f^{\,n_1-1,n_2-1}_{\frac{\alpha}{2}}}}$$

אם הערך 1 נמצא בתוך הרב"ס נקבע שהשונויות שוות ברמת ביטחון 1-$\boldsymbol{\alpha}$ / רמת מובהקות α **.**

3. <u>רב"ס להפרש פרופורציות</u>

תנאים: $n_1p_1 \geq 10, n_1q_1 \geq 10$ וגם $n_2p_2 \geq 10, n_2q_2 \geq 10$

$$\boxed{p_1 - p_2 \in \left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}} \quad , \quad \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}} \right)}$$

שימו לב שכל הרב"סים הללו סימטריים ולכן כל מה שלמדנו לגבי אורך רב"סים תקף גם כאן.