<u>תרגיל 1</u>

ציון הבחינה הפסיכומטרית של אוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 וסטיית תקן 100.
בכיתה מסוימת שובצו 100 נבחנים מכל קצוות הארץ.
אנו מעוניינים להגיע לשיבוץ אשר מייצג את האוכלוסייה ככל הניתן ולכן הוחלט לבדוק את ממוצע הציון של הכיתה. במידה וממוצע הציון חורג מתוחלת האוכלוסייה ביותר מ-15 נקודות (לחיוב או לשלילה), השיבוץ הוא שגוי.

א. חשב את ההסתברות ששיבוץ מסוים ייקבע כשגוי.

נסמן : X_i - ציון הנבחן ה-i.

מכיוון שההתפלגות של X_i עצמו נורמלית, משפט הגבול המרכזי מתקיים ללא תלות בתנאי הגודל.

$$X_i \sim N(500,100^2),\ \ n=100 \ \ \rightarrow \ \ \bar{X} \sim N(500,\frac{100^2}{100})$$

$$P(|\bar{X}-\mu|>15)=P(|\bar{X}-500|>15)=P(\bar{X}<485)+P(\bar{X}>515)=$$
$$=\Phi\left(\frac{485-500}{\sqrt{100}}\right)+1-\Phi\left(\frac{515-500}{\sqrt{100}}\right)=$$
$$\Phi(-1.5)+1-\Phi(1.5)=2-2\cdot\Phi(1.5)=2-2\cdot 0.9332=0.1336$$

ב. חשב גבול תחתון K לציון הממוצע, כך שב-95% מהמקרים ממוצע הכיתה יהיה גדול מ-K.

$$P(\bar{X}>K)=0.95$$
$$1-\Phi\left(\frac{K-500}{10}\right)=0.95$$
$$\Phi\left(\frac{500-K}{10}\right)=0.95$$
$$\frac{500-K}{10}=Z_{0.95}=1.645 \ \rightarrow \ K=483.55$$

ג. מצא חסם תחתון a וחסם עליון b כך ש-98% מהממוצעים בכיתות יימצאו ביניהם.

כאשר מבקשים חסם תחתון ועליון, כדאי לחפש חסמים סימטריים - זה מקל על החישובים.

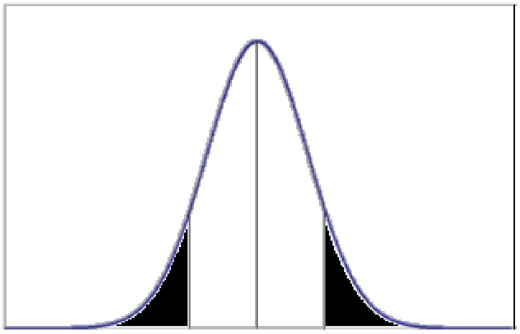
- אם **בין** החסמים יש 98%, וה-2% הנותרים מתחלקים שווה בשווה בין הזנבות, אז כל אחד מהזנבות הוא 1%. אם כך, ההסתברות המצטברת עד b היא 99%, ולכן :

$$P(\bar{X} \le b) = 0.99 \ \rightarrow \ \Phi\left(\frac{b-500}{\sqrt{100}}\right) = 0.99$$

$$\frac{b-500}{\sqrt{100}} = z_{0.99} = 2.326 \ \rightarrow \ b = 500 + 10 \cdot 2.326 = 523.26$$

מסיבות של סימטריה, a נמצא בדיוק אותו מספר של סטיות תקן, אבל משמאל לתוחלת. לכן:

$$a = 500 - 10 \cdot 2.326 = 476.74$$



<u>תרגיל 2</u>

מוצר הדגל בקיוסק של בני הוא אגוזי קשיו קלויים. כמות האגוזים שמבקש לרכוש כל לקוח שמגיע לקיוסק הינה משתנה מקרי שהתפלגותו אחידה (רציפה) בין 100 ל-400 גרם.

א. בני בדק את הכמויות שביקשו לרכוש 50 לקוחות שהגיעו לקיוסק ביום מסויים, וחישב את הכמות הממוצעת. מהו הסיכוי שכמות זו תהיה נמוכה מ-230 גרם?

$$X_i \sim U(100,400) \ \rightarrow \ \mu = \frac{a+b}{2} = 250\,, \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = 7500$$

$n = 50 > 30$, ולכן עפ"י משפט הגבול המרכזי:

$$\bar{X} \sim N(250,150)$$

$$P(\bar{X} \le 230) = \Phi\left(\frac{230-250}{\sqrt{150}}\right) = \Phi(-1.632) = 1 - \Phi(1.63) = 1 - 0.9484 = 0.0516$$

ב. תחת ההנחה שבכל יום מגיעים לקיוסק של בני בדיוק 100 לקוחות, מהי כמות אגוזי הקשיו שצריך בני להחזיק בתחילת יום העבודה כדי שבהסתברות של 95% לא ייכנס לחוסר?

$$\sum_{i=1}^{100} X_i \sim N(25000, 866.025^2)$$

הסבר: תוחלת הסכום היא $n\mu$ ($100 \cdot 250$); שונות הסכום היא $n\sigma^2$ ($100 \cdot 7500$).

נסמן: C – מלאי הפתיחה היומי שיבטיח שבהסתברות 95% בני לא ייכנס לחוסר.

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \le C\right) = \Phi\left(\frac{C-25000}{866.025}\right) = 0.95$$

$$\frac{C-25000}{866.025}=Z_{0.95} \quad \rightarrow \quad C=25000+1.645\cdot 866.025=26{,}424.61$$

כלומר, בני צריך להחזיק מלאי פתיחה של בערך 26.42 ק״ג אגוזי קשיו בכל יום.

ג. **בהמשך לסעיף ב', קבעו גבולות שיחסמו את הביקוש היומי שרואה בני ב-90% מהימים.**

מבקשים מאיתנו למצוא גבולות a ו-b המקיימים: $\boldsymbol{P\left(a\le\sum_{i=1}^{100}X_i\le b\right)=0.9}$.

כאשר מבקשים חסם תחתון ועליון, כדאי לחפש חסמים סימטריים - זה מקל על החישובים.

- אם בין החסמים יש 90%, וה-10% הנותרים מתחלקים שווה בשווה בין הזנבות, אז כל אחד מהזנבות הוא 5%. אז ההסתברות המצטברת עד b היא 95%, וזה מוביל בדיוק לחסם העליון שמצאנו בסעיף ב'.
- מסיבות של סימטריה, החסם התחתון נמצא במרחק זהה מהתוחלת (אותו מספר של סטיות תקן), אבל בכיוון השני שלה. לכן:

$$a=25000-1.645\cdot 866.025=23{,}575.39$$

כלומר, ב-90% מהימים, הביקוש היומי שרואה בני נופל בין 23.58 ל-26.42 ק״ג אגוזי קשיו.