תרגול 6

שאלה 1

בפקולטה לתזונה מעוניינים לבדוק את משך הזמן הממוצע הדרוש להכנת עוגת גבינה. ידוע כי זמן ההכנה מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 4 דקות. הועלו שתי השערות לגבי הזמן הממוצע הדרוש:

$\mathrm{H}_0: \mu = 50 \quad ; \quad H_1: \mu = 48$

[הערה לעצמנו: מסווגים - השערות לגבי התוחלת, מודל נורמלי, שונות ידועה, מבחן ח״צ שמאלי].

א. חוקר בפקולטה תיכנן ניסוי מתאים שיכלול אפיית 16 עוגות. ההסתברות לטעות מסוג שני בניסוי זה היא 0.02. מצא את רמת המובהקות שבה השתמש החוקר.

נמצא מהנתונים את הערך הקריטי k, ומשם נחשב את רמת המובהקות:

$$\beta = P(\bar{C} \mid H_1) = P_{H_1}(\bar{X} \geq k) = 0.02$$

$$H_1: \mu = 48 \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(48, \frac{4^2}{16}\right)$$

$$\rightarrow 1 - \phi\left(\frac{k-48}{4/\sqrt{16}}\right) = 0.02 \rightarrow \phi\left(\frac{k-48}{1}\right) = 0.98 \rightarrow k - 48 = Z_{0.98} = 2.054 \rightarrow k = 50.054$$

$$\alpha = P(C \mid H_0) = P_{H_0}(\bar{X} \leq 50.054) = \phi\left(\frac{50.054-50}{4/\sqrt{16}}\right) = \phi(0.054) = 0.52$$

ב. אם הממוצע שהתקבל בפועל בניסוי הוא 48.5, מהי מובהקות התוצאה (P-value)?

$$Pv = P_{H_0}(\bar{X} \leq 48.5) = \phi\left(\frac{48.5-50}{4/\sqrt{16}}\right) = \phi(-1.5) = 1 - \phi(1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

ג. בהמשך לסעיף ב׳:

i. **מה תהיה מסקנת המחקר אם רמת המובהקות הנדרשת היא 0.1?**

$0.1 > 0.0668$ כלומר $\alpha > PV$ ולכן נדחה את השערת האפס ברמת מובהקות 0.1.

ii. **מה תהיה המסקנה אם רמת המובהקות הנדרשת היא 0.05?**

$0.05 < 0.0668$ כלומר $\alpha < PV$ ולכן לא נדחה את השערת האפס ברמת מובהקות 0.05.

ד. מהו גודל המדגם הנדרש כדי שרמת המובהקות של המבחן תהיה 0.01 לכל היותר ועוצמת המבחן תהיה 0.98 לפחות?

$$n \geq \left[\frac{(z_{1-\alpha} + z_{1-\beta})\cdot\sigma}{\mu_0 - \mu_1}\right]^2 = \left[\frac{(z_{1-0.01} + z_{0.98})\cdot 4}{50-48}\right]^2 = \left[\frac{(2.326 + 2.054)\cdot 4}{50-48}\right]^2 = 76.77 \rightarrow n \geq 77$$

ה. מה יקרה לעוצמת המבחן מסעיף א' אם בפועל מתקיים $\mu = 47$? ענה איכותית (ללא חישוב).

בפועל, התוחלת יותר נמוכה ממה שחשבנו (לפי H_1), ולכן ממוצע המדגם נוטה לקבל ערכים נמוכים יותר. לכן "קל" יותר ליפול באזור הדחייה, והמשמעות היא שעוצמת המבחן גדלה.

בדיקת השערות על פרופורציה

תרגיל לחימום

נתונה מערכת ההשערות הדו-צדדית הבאה:

$H_0: p = p_0$

$H_0: p \neq p_0$

הגדירו את המבחן הסטטיסטי לבחינת מערכת ההשערות, על סמך מדגם של n תצפיות.

רמת המובהקות הנדרשת הינה α.

פתרון

נסמן ב-X את מספר תשובות "כן" במדגם. סטטיסטי המבחן הינו $\hat{p} = \frac{X}{n}$.

תחת H_0, תנאי משפט הגבול המרכזי הינם $np_0, nq_0 \geq 10$, ואז מקבלים: $\hat{p} \sim N(p_0, \frac{p_0 q_0}{n})$

במבחן דו-צדדי נקבל את H_0 אם סטטיסטי המבחן "מספיק קרוב" ל-p_0 (כלפי מעלה או כלפי מטה).

כלומר נקבע גבול תחתון a וגבול עליון b שביניהם מקבלים את H_0 ומחוץ להם דוחים את H_0.

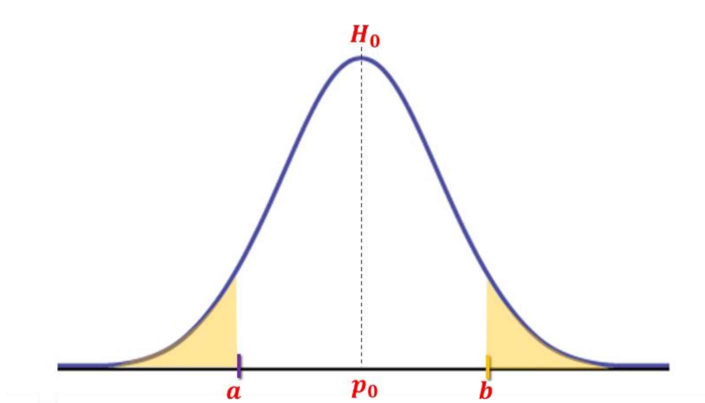
ההסתברות לדחייה מוטעית צריכה להיות α, והיא מתחלקת באופן שווה בין שני הזנבות.

לכן, ההסתברות המצטברת עד ל-b היא $1 - \frac{\alpha}{2}$.

$$P(\hat{p} \leq b) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\Phi\left(\frac{b - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{b - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$



$$b = p_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}$$

ו-a סימטרי בכיוון ההפוך, כלומר:

$$a = p_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}$$

לכן כלל ההכרעה הוא: **דחה את H_0** אם $\hat{p} > p_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}$ או $\hat{p} < p_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}$.

<u>בדיקת השערות על הפרופורציה - נוסחאות רלוונטיות</u>

	מבחן חד צדדי		מבחן דו צדדי
מערכת ההשערות	$H_0: p = p_0$ $H_1: p > p_o$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p < p_o$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p \neq p_0$
אזור דחייה	$\hat{p} > p_0 + z_{1-\alpha}\cdot\sqrt{\frac{p_0q_0}{n}}$	$\hat{p} < p_0 - z_{1-\alpha}\cdot\sqrt{\frac{p_0q_0}{n}}$	$\hat{p} > p_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p_0q_0}{n}}$ **או:** $\hat{p} < p_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p_0q_0}{n}}$
$Z_{\hat{P}} = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0q_0}{n}}}$	$Z_{\hat{P}} \geq Z_{1-\alpha}$	$Z_{\hat{P}} < -Z_{1-\alpha}$	$Z_{\hat{P}} \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ **או** $Z_{\hat{P}} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
גודל מדגם מינ' המבטיח α ו- $1-\beta$ רצויים	$n \geq \left[\frac{Z_{1-\alpha}\sqrt{p_0q_0}+Z_{1-\beta}\sqrt{p_1q_1}}{p_0-p_1}\right]^2$		$n \geq \left[\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{p_0q_0}+Z_{1-\beta}\sqrt{p_1q_1}}{p_0-p_1}\right]^2$
לאחר שבוצע מדגם והתקבלה תוצאה מדגמית $\hat{p} = C$ אזי עבור תוצאה זו:			
P-value (מובהקות התוצאה)	$1-\phi\left(\frac{C-p_0}{\sqrt{p_0q_0/n}}\right)$	$\phi\left(\frac{C-p_0}{\sqrt{p_0q_0/n}}\right)$	$2\cdot\left(1-\phi\left(\frac{\lvert C-p_0\rvert}{\sqrt{p_0q_0/n}}\right)\right)$

<u>תרגיל 1</u>

בעקבות סקר שנערך לקראת הבחירות בצרפת פורסם בעיתון הנוסח הבא:

"הציפיות המוקדמות של עורכי הסקר היו שרוב האוכלוסיה תתמוך בנשיא המכהן.

אך מסתבר ש-52% מן הנשאלים תומכים במועמד החדש".

א. רשום את מערכת ההשערות כפי שמוצגת בכתבה.

p - פרופורציית האנשים באוכלוסיה שתומכים בנשיא **החדש**.

$H_0 : p \le 0.5$
$H_1 : p > 0.5$

ב. עבור מדגם של 500 איש, האם אמנם ניתן לומר ברמת מובהקות 0.05 שרוב האוכלוסיה תומך במועמד החדש?

ראשית, רואים ש: $np_0 = nq_0 = 500 \cdot 0.5 = 250 \ge 10$. כלומר, תנאי מג״מ מתקיימים.

<u>דרך א׳: ע״י שימוש בכלל הדחייה מדף הנוסחאות</u>

מדובר במבחן חד צדדי ימני על הפרופורציה. נדחה אם: $\boldsymbol{Z_{\hat{p}} > Z_{1-\alpha}}$

$$Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}}} = \frac{0.52 - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{500}}} = 0.894 < 1.645 = Z_{0.95} = Z_{1-\alpha}$$

ולכן לא נדחה את H_0 ברמת מובהקות 0.05, כלומר לא ניתן לקבוע שרוב האוכלוסיה תומך במועמד החדש.

<u>דרך ב׳: ע״י חישוב הערך הקריטי</u>

כלל ההכרעה עבור מבחן חד-צדדי ימני על הפרופורציה הינו:

דחה את $\boldsymbol{H_0}$ אם $\boldsymbol{\hat{p} > p_0 + Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$

במקרה שלנו, הערך הקריטי הינו $\boldsymbol{p_0 + Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} = 0.5 + 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{500}} = 0.5367$

אזור הדחייה הינו: $C = \{\hat{p} \mid \hat{p} \ge 0.5367\}$.

התוצאה המדגמית מקיימת $\hat{p} = 0.52 < 0.5367$ ולכן לא ניתן לדחות את H_0.

<u>דרך ג׳: ע״י שימוש במובהקות התוצאה</u>

$$P - value = P(\hat{p} \ge 0.52 \mid H_0) =$$

$$1 - P(\hat{p} < 0.52 \mid H_0) = 1 - \phi\left(\frac{0.52 - 0.5}{0.5/\sqrt{500}}\right) = 1 - \phi(0.894) = 1 - 0.8133 = 0.1867$$

$0.1867 > 0.05 \rightarrow \boxed{\text{P-Value} > \alpha}$

ולכן לא נדחה את H_0.

ג. מהו גודל המדגם הדרוש כדי שאם אכן 52% מהפרטים באוכלוסייה תומכים במועמד החדש, נצליח לגלות זאת בהסתברות של 90%? הנח מובהקות נדרשת של 5%.

הדרישות: $\alpha = 0.05 \quad , \quad 1-\beta = 0.9$

$$n \geq \left[\frac{Z_{1-\alpha}\sqrt{p_0 q_0} + Z_{1-\beta}\sqrt{p_1 q_1}}{p_0 - p_1}\right]^2 = \left[\frac{Z_{0.95}\sqrt{0.5 \cdot 0.5} + Z_{0.9}\sqrt{0.52 \cdot 0.48}}{0.5 - 0.52}\right]^2 = 5350.8$$

$$\rightarrow n = 5351$$

<u>תזכורת לגבי מבחני טיב התאמה</u>

מבחני חי בריבוע הם קבוצה שימושית של מבחנים המאפשרים לבצע בדיקת השערות לגבי:

1. **טיב ההתאמה של נתונים להתפלגות תיאורטית (Goodness Of Fit)**
2. **אי-תלות**

המבחנים משתמשים בסטטיסטי המתפלג בקירוב חי בריבוע, ומכאן שמם.

<u>מבחן חי בריבוע לטיב התאמה</u>

בודק האם לפי נתוני המדגם סביר שהאוכלוסיה מתפלגת בהתפלגות מסוימת.

השערת האפס: האוכלוסייה מתפלגת בהתפלגות תיאורטית כלשהי (נורמלית, פואסונית וכו׳).

השערת האלטרנטיבה: ההתפלגות האמיתית של האוכלוסייה אחרת.

שימו לב שבמקרה זה, האינפורמציה החדשה (=ההתפלגות) "תאושר" ע"י קבלת H_0!

הרעיון הכללי: מחלקים את הערכיים האפשריים שיכולים להתקבל עפ"י ההתפלגות התיאורטית לקבוצות, ובודקים אם הפיזור לקבוצות עפ"י תוצאות המדגם מספיק קרוב לפיזור הצפוי.

<u>שלבי העבודה</u>

(1) מוודאים שהפרמטרים של ההתפלגות התיאורטית ידועים. אם לא, יש לאמוד אותם.

(2) יש לנסח בבירור את ההשערות הנבדקות.

(3) מחלקים את נתוני המדגם לקבוצות **(מס׳ הקבוצות הסופי יסומן ב-k)**:

- נסמן: E_i – **תוחלת מספר הפריטים הצפויים** בקבוצה i, כלומר $\boldsymbol{E_i = n \cdot p_i}$.
- אם נתונה חלוקה לקבוצות, מוודאים שמתקיים $E_i \geq 5$ בכל קבוצה. אם יש קבוצה שלא מקיימת תנאי זה, מאחדים אותה עם קבוצה סמוכה.

- אם לא נתונה חלוקה לקבוצות, יוצרים אותה בעצמנו כך שכל הערכים האפשריים של ההתפלגות יכוסו, ובנוסף יתקיים בכל קבוצה i : $E_i \geq 5$.

(4) מס׳ הפריטים בכל קבוצה כפי שהתקבלו **בפועל במדגם** יסומן ב- $\boldsymbol{O_i}$.

(5) חישוב סטטיסטי המבחן: $\chi^2_{emp} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(E_i - O_i)^2}{E_i}$.

כאשר מתקיים התנאי $E_i \geq 5$, הסטטיסטי מתפלג בקירוב χ^2 עם $(k-p-1)$ דרגות חופש, כאשר p הוא מס׳ הפרמטרים שנאמדו (אם לא נאמדו כלל פרמטרים, $p=0$).

(6) כלל ההכרעה בר״מ α : דחה את H_0 אם מתקיים $\chi^2_{emp} > {\chi^2}_{1-\alpha}^{(k-p-1)}$

<u>שאלה 2</u>

חוקר מעוניין לבדוק את ההשערה כי המשקל באוכלוסייה מתפלג נורמלית עם ממוצע 60 ק״ג וסטיית תקן 10 ק״ג. לבדיקת ההשערה נלקח מדגם מקרי של 500 פרטים והתקבלו התוצאות הבאות :

משקל בק״ג	מתחת ל-40	55-40	70-55	85-70	85 ומעלה
מספר נבדקים	10	50	340	70	30

א. בדוק את ההשערה בעזרת מבחן חי בריבוע ברמת מובהקות 0.025

נסמן את המשקל באוכלוסיה ב-X. הפרמטרים של ההתפלגות התיאורטית ידועים.

$H_0 : X \sim N(60,10^2)$
$H_1 : else$

הנתונים **מחולקים כבר** ל-5 קבוצות. יש לחשב את תוחלת מספר הפריטים **הצפוי** בכל קבוצה E_i.

i	קבוצה	p_i	$E_i = 500 \cdot p_i$
1	מתחת ל-40	$P(a \le X \le b) = P(X \le 40)$ $= \varphi\left(\frac{40-60}{10}\right) = \varphi(-2) = 1-\varphi(2) =$ $1-0.9772 = 0.0228$	11.4
2	55-40	$P(a \le X \le b) = P(40 \le X \le 55) = P(X \le 55) - P(X \le 40) =$ $\varphi\left(\frac{55-60}{10}\right) - \varphi\left(\frac{40-60}{10}\right) = \varphi(-0.5) - 0.0228$ $= 1-\varphi(0.5) - 0.0228 = 1-0.6915-0.0228 = 0.2857$	142.85
3	70-55	$P(a \le X \le b) = P(55 \le X \le 70) = P(X \le 70) - P(X \le 55) =$ $\varphi\left(\frac{70-60}{10}\right) - \varphi\left(\frac{55-60}{10}\right) = \varphi(1) - (1-0.6915)$ $= 0.8413 - 0.3085 = 0.5328$	266.4

4	85-70	$P(a \le X \le b) = P(70 \le X \le 85) = P(X \le 85) - P(X \le 70) = \varphi\left(\frac{85-60}{10}\right) - \varphi\left(\frac{70-60}{10}\right) = \varphi(2.5) - 0.8413 = 0.9938 - 0.8413 = 0.1525$	76.25
5	85 ומעלה	$P(a \le X \le b) = P(X \ge 85) = 1-\phi\left(\frac{85-60}{10}\right) = 1-\phi(2.5) = 1-\phi(2.5) =$ 0.0062	**3.1**

בקבוצה האחרונה, E_i קטן מ-5. נאחד את הקבוצה האחרונה עם הקבוצה לפניה. שתי הקבוצות האחרונות יוחלפו בקבוצה המאוחדת ("מעל 70") עם מספר צפוי של $76.25 + 3.1 = 79.35$ תצפיות. שלוש הקבוצות הראשונות ללא שינוי. **מספר הקבוצות הסופי הינו $k = 4$.**

חישוב סטטיסטי המבחן:

משקל בק"ג	מתחת ל-40	55-40	70-55	מעל 70
O_i	10	50	340	100=70+30
E_i	11.4	142.85	266.4	79.35
$\frac{(E_i-O_i)^2}{E_i}$	0.17193	60.351	20.334	5.374

ערך הסטטיסטי: $\chi^2_{emp} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(E_i - O_i)^2}{E_i} = 86.2308$

הערך הטבלאי: $\chi^2_{1-0.025,(4-1)} = \chi^2_{0.975,3} = 9.348$

סטטיסטי המבחן גדול (בהרבה) מהערך הטבלאי ולכן נדחה את השערת האפס – התפלגות המשקל באוכלוסייה אינה נורמלית בפרמטרים הנתונים, ברמת מובהקות של 2.5%.

דחיית השערת האפס משמעה שהאוכלוסייה אינה מתפלגת כפי ששיערנו!
למעשה, אנחנו לא יודעים כיצד היא מתפלגת..

ב. מה תהיה המסקנה ברמות מובהקות 0.01 ו-0.05? האם ניתן להגיע למסקנה ללא מציאת ערך טבלאי חדש?

אם דחינו את השערת האפס ברמת מובהקות 0.025, בוודאות נדחה את השערת האפס ברמת מובהקות 0.05 (גבוהה יותר).

עבור רמת מובהקות של 0.01 צריך למצוא ערך טבלאי חדש: $\chi^2_{1-0.01,(4-1)} = \chi^2_{0.99,3} = 11.345$

הערך הטבלאי עדיין קטן (בהרבה) מסטטיסטי המבחן (86.23). לכן, עדיין נקבע כי התפלגות המשקל באוכלוסייה אינה נורמלית בפרמטרים אלו, ברמת מובהקות של 1%.

שאלה 3

כחלק מאסטרטגיית המכירות ברשת המזללות "בורגר קווין", מעוניינים להקפיד כי גודל הקציצות המוגשות בתוך ההמבורגרים הינו אחיד ככל הניתן. באחרונה הועלה חשד כי העובדים אינם מקפידים על הנחייה זו, והוחלט לבדוק את שונות קוטר הקציצות באמצעות מערכת ההשערות הבאה:

$H_0 : \sigma^2 \le 2$

$H_1 : \sigma^2 > 2$

במדגם אקראי של 6 המבורגרים נמצאו הקטרים הבאים (בס"מ): 93,92,95,97,94,96.

א. בהנחה כי התפלגות הקטרים היא נורמלית, מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

מערכת ההשערות הינה ח"צ ימנית.

כלל הדחייה: דחה אם $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{1-\alpha}{}^{(n-1)}$

חישוב האומדים לתוחלת ולשונות:

$$\bar{X} = \frac{93+92+95+97+94+96}{6} = 94.5$$

$$s^2 = \frac{(93^2+92^2+95^2+97^2+94^2+96^2) - 6\cdot(94.5)^2}{6-1} = 3.5$$

הערך הטבלאי: ${\chi^2}^{(5)}_{0.95} = 11.07$

הערך האמפירי: $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{5\cdot 3.5}{3} = 8.75$

הערך האמפירי קטן מהטבלאי ולכן כלל הדחייה אינו מתקיים. לא נדחה את השערת האפס ברמת מובהקות 5%, כלומר שונות הקטרים אכן אינה גדולה מ-2.