

תרגיל 1 (תרגול)

מוצר הדגל בקיוסק של בני הוא אגוזי קשיו קלויים. כמות האגוזים שמבקש לרכוש כל לקוח שמגיע לקיוסק הינה משתנה מקרי שהתפלגותו אחידה (רציפה) בין 100 ל-400 גרם.

א. בני בדק את הכמויות שביקשו לרכוש 50 לקוחות שהגיעו לקיוסק ביום מסויים, וחישב את הכמות הממוצעת. מהו הסיכוי שכמות זו תהיה נמוכה מ-230 גרם?

$$X_i \sim U(100, 400) \rightarrow \mu = \frac{aca + b}{2} = 250, \quad \sigma^2 = \frac{(b - a)^2}{12} = 7500$$

$n = 50 > 30$, ולכן עפ"י משפט הגבול המרכזי:

$$\bar{X} \sim N(250, 150)$$

$$P(\bar{X} \leq 230) = \Phi\left(\frac{230 - 250}{\sqrt{150}}\right) = \Phi(-1.632) = 1 - \Phi(1.63) = 1 - 0.9484 = 0.0516$$

ב. תחת ההנחה שבכל יום מגיעים לקיוסק של בני בדיוק 100 לקוחות, מהי כמות אגוזי הקשיו שצריך בני להחזיק בתחילת יום העבודה כדי שבהסתברות של 95% לא ייכנס לחוסר?

$$\sum_{i=1}^{100} X_i \sim N(25000, 866.025^2)$$

הסבר: תוחלת הסכום היא $n\mu = (100 \cdot 250)$; שונות הסכום היא $n\sigma^2 = (100 \cdot 7500)$.

נסמן: C – מלאי הפתיחה היומי שיבטיח שבהסתברות 95% בני לא ייכנס לחוסר.

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq C\right) = \Phi\left(\frac{C - 25000}{866.025}\right) = 0.95$$

$$\frac{C - 25000}{866.025} = Z_{0.95} \rightarrow C = 25000 + 1.645 \cdot 866.025 = 26,424.61$$

כלומר, בני צריך להחזיק מלאי פתיחה של בערך 26.42 ק"ג אגוזי קשיו בכל יום.

ג. בהמשך לסעיף ב', קבעו גבולות שיחסמו את הביקוש היומי שרואה בני ב-90% מהימים.

$$P(a \leq \sum_{i=1}^{100} X_i \leq b) = 0.9$$

מבקשים מאיתנו למצוא גבולות a ו- b המקיימים: $P(a \leq \sum_{i=1}^{100} X_i \leq b) = 0.9$. כאשר מבקשים חסם תחתון ועליון, כדאי לחפש חסמים סימטריים - זה מקל על החישובים.

- אם בין החסמים יש 90%, וה-10% הנותרים מתחלקים שווה בשווה בין הזנבות, אז כל אחד מהזנבות הוא 5%. אז ההסתברות המצטברת עד b היא 95%, וזה מוביל בדיוק לחסם העליון שמצאנו בסעיף ב'.

- מסיבות של סימטריה, החסם התחתון נמצא במרחק זהה מהתוחלת (אותו מספר של סטיות תקן), אבל בכיוון השני שלה. לכן:

$$a = 25000 - 1.645 \cdot 866.025 = 23,575.39$$

כלומר, ב-90% מהימים, הביקוש היומי שרואה בני נופל בין 23.58 ל-26.42 ק"ג אגוזי קשיו.