מבחני χ^2

מבחני חי בריבוע הם קבוצה שימושית של מבחנים המאפשרים לבצע בדיקת השערות לגבי:

1. **טיב ההתאמה של נתונים להתפלגות תיאורטית (Goodness Of Fit)**
2. **אי-תלות**

המבחנים משתמשים בסטטיסטי המתפלג בקירוב חי בריבוע, ומכאן שמם.

<u>מבחן חי בריבוע לטיב התאמה</u>

בודק האם לפי נתוני המדגם סביר שהאוכלוסיה מתפלגת בהתפלגות מסוימת.

השערת האפס: האוכלוסייה מתפלגת בהתפלגות תיאורטית כלשהי (נורמלית, פואסונית וכו׳).

השערת האלטרנטיבה: ההתפלגות האמיתית של האוכלוסייה אחרת.

שימו לב שבמקרה זה, האינפורמציה החדשה (=ההתפלגות) ״תאושר״ ע״י קבלת H_0!

הרעיון הכללי: מחלקים את הערכים האפשריים שיכולים להתקבל עפ״י ההתפלגות התיאורטית לקבוצות, ובודקים אם הפיזור לקבוצות עפ״י תוצאות המדגם מספיק קרוב לפיזור הצפוי.

<u>שלבי העבודה</u>

(1) מוודאים שהפרמטרים של ההתפלגות התיאורטית ידועים. אם לא, יש לאמוד אותם.

(2) יש לנסח בבירור את ההשערות הנבדקות.

(3) מחלקים את נתוני המדגם לקבוצות **(מס׳ הקבוצות הסופי יסומן ב-$\boldsymbol{k}$)**:

- נסמן: E_i – **תוחלת מספר הפריטים הצפויים** בקבוצה i, כלומר $\boldsymbol{E_i = n \cdot p_i}$.
- אם נתונה חלוקה לקבוצות, מוודאים שמתקיים $E_i \geq 5$ בכל קבוצה. אם יש קבוצה שלא מקיימת תנאי זה, מאחדים אותה עם קבוצה סמוכה.
- אם לא נתונה חלוקה לקבוצות, יוצרים אותה בעצמנו כך שכל הערכים האפשריים של ההתפלגות יכוסו, ובנוסף יתקיים בכל קבוצה i: $E_i \geq 5$.

(4) מס׳ הפריטים בכל קבוצה כפי שהתקבלו **בפועל במדגם** יסומן ב- $\boldsymbol{O_i}$.

(5) חישוב סטטיסטי המבחן: $\chi^2_{emp} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(E_i - O_i)^2}{E_i}$.

כאשר מתקיים התנאי $E_i \geq 5$, הסטטיסטי מתפלג בקירוב χ^2 עם $(k-p-1)$ דרגות חופש, כאשר p הוא מס׳ הפרמטרים שנאמדו (אם לא נאמדו כלל פרמטרים, $p = 0$).

(6) כלל ההכרעה בר״מ α: דחה את H_0 אם מתקיים $\chi^2_{emp} > \chi^{2\,(k-p-1)}_{1-\alpha}$

שאלה 2

להלן נתונים 50 זמנים בין מופעיים של תקלות בשרת אינטרנט (בימים):

5.2, 16.6, 9.8, 14.9, 1.3, 0.5, 16.6, 16.5, 1, 16.6, 19.3, 10.6, 26.8, 4.5, 2.5, 24.9, 3.4, 9.1, 12.5, 10.6, 27.6, 1.3, 0.4, 2.2, 7.8, 6, 17.6, 10.8, 2.7, 1.3, 1.6, 15.7,10.9, 2.1, 20.1, 1.9, 13.6, 0.4, 18.8, 11.4, 3, 0.3, 5.5, 2.7, 2.2, 9.5, 14.8, 3, 6.3, 11.2

א. בדקו את ההשערה כי הזמן בין תקלות בשרת מתפלג אקספוננציאלית ברמת מובהקות 5%.

ראשית יש לאמוד את הפרמטר λ של ההתפלגות האקס'.

מתרגול 3, אנחנו יודעים שאומד לפרמטר של התפלגות מעריכית הוא $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$.

$$\lambda = \frac{1}{\bar{x}} = \frac{1}{9.118} = 0.1096 \approx 0.11$$

כעת ניתן לנסח את ההשערות:

H_0: $t \sim \exp(0.11)$

H_1: $otherwise$

לא נתונה חלוקה ראשונית לקבוצות. אנחנו נדרשים לייצר אותה בעצמנו, כך שיתקיים $E_i \geq 5$ בכל קבוצה. **כדאי** שלא יהיו מעט קבוצות (המבחן מאבד מהמשמעות שלו).

נחלק שרירותית ל-7 קבוצות באופן הבא:

קבוצה	1	2	3	4	5	6	7
מס' תצפיות חזוי במדגם = E_i	7	7	7	7	7	7	8

כך שאכן מתקיים $E_i \geq 5$ בכל קבוצה.

אין לנו את הגבולות שמפרידים בין הקבוצות. נמצא אותם באופן הבא: הגבול a שמפריד בין קבוצה 1 ל-2 צריך להיות כזה שעד אליו יתקבלו 7 תצפיות מתוך 50 במדגם. במילים אחרות: ההסתברות לקבל ערך בין 0 ל-a צריכה להיות $\frac{7}{50}$.

וכך הלאה...

קבוצה	1	2	3	4	5	6	7
טווח תיאורטי	$0 \le x \le a$	$a \le x \le b$	$b \le x \le c$	$c \le x \le d$	$d \le x \le e$	$e \le x \le f$	$f \le x \le \infty$
מס׳ תצפיות חזוי E_i	7	7	7	7	7	7	8
הסתברות תיאורטית נדרשת	$\frac{7}{50} = 0.14$	$\frac{7}{50} = 0.14$	$\frac{7}{50} = 0.14$	$\frac{7}{50} = 0.14$	$\frac{7}{50} = 0.14$	$\frac{7}{50} = 0.14$	$\frac{8}{50} = 0.16$
התפלגות מצטברת נדרשת	0.14	0.28	0.42	0.56	0.7	0.84	1

נמצא את הגבולות שיקיימו את ההתפלגות המצטברת הנדרשת:

תזכורת – בהתפלגות מעריכית עם פרמטר λ, ההתפלגות המצטברת עד לערך x הינה $1 - e^{-\lambda x}$.

- $F(a) = 1 - e^{-0.11a} = 0.14$

$$e^{-0.11a} = 0.86$$
$$-0.11a = \ln(0.86) \rightarrow \boldsymbol{a = 1.371}$$

- $F(b) = 1 - e^{-0.11b} = 0.28$

$$e^{-0.11b} = 0.72$$
$$-0.11b = \ln(0.72) \rightarrow \boldsymbol{b = 2.986}$$

וכך הלאה. בצורה דומה מקבלים: c = 4.952, d = 7.463, e = 10.945, f = 16.66

נספור כמה תצפיות נופלות בכל קבוצה שהגדרנו :

הקבוצות שהגדרנו			חלוקת התצפיות במדגם לקבוצות		
קבוצה	טווח	E_i	תצפיות שנופלות בתחום	O_i	$\frac{(E_i - O_i)^2}{E_i}$
1	$0 \le x \le 1.371$	7	1.3, 0.5, 1, 1.3, 0.4, 1.3, 0.4, 0.3	8	0.142857
2	$1.371 \le x \le 2.896$	7	2.5, 2.2, 2.7, 1.6, 2.1, 1.9, 2.7, 2.2	8	0.142857
3	$2.896 \le x \le 4.952$	7	4.5, 3.4, 3, 3	4	1.285714
4	$4.952 \le x \le 7.463$	7	5.2, 6, 5.5, 6.3	4	1.285714
5	$7.463 \le x \le 10.945$	7	9.8, 10.6, 9.1, 10.6,7.8, 10.8, 10.9,9.5	8	0.142857
6	$10.945 \le x \le 16.66$	7	16.6, 14.9, 16.6, 16.5, 16.6, 12.5,15.7, 13.6, 11.4, 14.8, 11.2	11	2.285714
7	$16.66 \le x \le \infty$	8	19.3, 26.8, 24.9,27.6, 17.6, 20.1, 18.8,	7	0.125

סטטיסטי המבחן: $\chi^2_{emp} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(E_i - O_i)^2}{E_i} = 5.41$

הערך הטבלאי: $\chi^2_{1-0.05,(7-1-1)} = \chi^2_{0.95,5} = 11.070$

11.07 > 5.41. לכן לא דוחים את השערת האפס ברמת מובהקות 0.05. הנתונים אכן נלקחו מהתפלגות אקספוננציאלית עם $\lambda = 0.11$.

<u>שאלה 2</u>

<u>שאלה 1 - מתוך מבחן</u>

כדי לבדוק את השפעת מתן שכר עידוד בסניפי רשת האופנה H&M בישראל, נלקחו שני מדגמים מקריים: בסניף H&M בתל אביב נלקח מדגם מקרי של 10 עובדים לאחר הנהגת שכר עידוד ונבדקו נתוני המכירות השבועיים של כל עובד במונחי מספר פריטים בחנות לעומת מדגם מקרי של 10 עובדים אחרים שנלקח לפני הנהגת שכר עידוד.

בסניף H&M בירושלים גם כן נבדקה השפעת שכר העידוד באמצעות 10 עובדים שנבחרו מקרית, אלא שבסניף זה ההתייחסות הייתה לאותה קבוצת עובדים כאשר בדקו את נתוני המכירות השבועיים של כל עובד במונחי מספר פריטים בחנות לפני ואחרי הנהגת שכר עידוד.

<u>סניף H&M בתל אביב:</u>

לפני : 30, 35, 42, 40, 50, 38, 37, 35, 30, 43.

אחרי : 40, 35, 42, 40, 36, 28, 55, 34, 30, 50.

<u>סניף H&M בירושלים:</u>

עובד מס':	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
לפני :	43	40	35	38	35	52	50	25	37	40
אחרי :	45	40	24	49	52	38	36	35	42	44

א. האם שכר העידוד מעודד הגדלת נתוני המכירות לפי ניתוח ממצאי סניף תל אביב ברמת מובהקות 0.05 בהנחה שנתוני המכירות מתפלגים נורמלית? (לא)

ב. חזרו על סעיף א' כאשר כל ההשערות נבדקות באמצעות הרב"סים המתאימים (ולא באמצעות כללי הדחייה הרגילים).

ג. האם שכר העידוד מעודד הגדלת נתוני המכירות לפי ניתוח ממצאי סניף ירושלים ברמת מובהקות 0.05 בהנחה שנתוני המכירות מתפלגים נורמלית? (לא)

א.

אוכלוסייה 1 : X - המכירות השבועיות **לפני** מתן שכר העידוד

אוכלוסייה 2 : Y - המכירות השבועיות **אחרי** מתן שכר העידוד

הנחות (עפ״י נתוני השאלה): $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),\ Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, המדגמים ב״ת.

מערכת ההשערות:

$H_0: \mu_2-\mu_1=0$

$H_1: \mu_2-\mu_1>0$

רוצים לברר אם שכר העידוד גרם להגדלת המכירות. המערכת ח״צ ימנית.

נתונים נוספים: $s_X^2=37.33\ ,\ s_Y^2=71.11\ \ ,\ \ \bar{x}=38\ \ ,\ \ \bar{y}=39\ ,\ \alpha=0.05\ ,\ n_1=n_2=10$

יש לבדוק שוויון שונויות ברמת מובהקות α=0.1: $H_0:\sigma_X^2=\sigma_Y^2\ ,\ H_1:\sigma_X^2\neq\sigma_Y^2$

דחה אם $\frac{S_1^2}{S_2^2}>f_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1-1,n_2-1)}=f_{0.95}^{(9,9)}=3.18$ או $\frac{S_1^2}{S_2^2}<f_{\frac{\alpha}{2}}^{(n_1-1,n_2-1)}=f_{0.05}^{(9,9)}=\frac{1}{f_{0.95}^{(9,9)}}=\frac{1}{3.18}=0.314$

התקבל $\frac{S_1^2}{S_2^2}=\frac{37.33}{71.11}=0.525$ ולכן לא נדחה את השערת שוויון השונויות ברמת מובהקות 0.1, ולכן לא נדחה גם בר״מ 0.05. כלומר, השונויות שוות.

מבחן T להפרש תוחלות עם שונויות שוות: $s_p^2=54.22$

$$t_{\bar{y}-\bar{x}}=\frac{39-38}{\sqrt{54.22(\frac{1}{10}+\frac{1}{10})}}=0.3037<t_{0.95}^{18}=1.734$$

לא דוחים את H_0 ברמת מובהקות 0.05 - לא הוכח ששכר העידוד מעודד הגדלת מכירות.

ב. <u>בדיקת האמצעות רב״סים</u>:

על מנת לבדוק את ההשערה לגבי שיוויון השונויות נבנה רב״ס דו-צדדי ליחס השונויות.

הרב״ס הוא: $\boxed{\dfrac{S_1^2/S_2^2}{f_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n_1-1,n_2-1}} < \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \dfrac{S_1^2/S_2^2}{f_{\frac{\alpha}{2}}^{n_1-1,n_2-1}}}$

בסעיף הקודם מצאנו:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{37.33}{71.11} = 0.525 \quad , f_{0.95}^{(9,9)} = 3.18,\ f_{0.05}^{(9,9)} = 0.314$$

ולכן הרב״ס עבור הנתונים בשאלה הינו: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in [0.165, 1.672]$.

הערך 1 נכלל ברב״ס ולכן ניתן לקבל את הטענה שהשונויות שוות ברמת מובהקות 0.1, וודאי גם ברמת מובהקות 0.05.

נמשיך בבדיקת הטענה לגבי הפרש התוחלות תחת שונויות לא ידועות אך שוות, באמצעות בניית רב״ס **חד-צדדי תחתון** (בהתאם למה שכתוב בתרגול 5, עמוד 3).

$$\mu_2 - \mu_1 \in \left[\bar{y} - \bar{x} - t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \cdot s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \infty\right]$$

שוב, כל החישובים הרלוונטיים נעשו כבר בסעיף הקודם ונותר רק להציב:

$$\mu_2 - \mu_1 \in \left(39 - 38 - 1.734\sqrt{54.22\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right)}, \infty\right)$$

$$\mu_2 - \mu_1 \in [-4.71, \infty]$$

הערך 0 נכלל ברב״ס ולכן נקבל את H_0 ברמת מובהקות 0.05, כלומר לא הוכח ששכר העידוד מעודד הגדלת מכירות.

ג. X-המכירות השבועיות לפני מתן שכר העידוד, Y-המכירות השבועיות אחרי מתן שכר העידוד

המדגמים תלויים ולכן: $D = Y - X$.

הנחות (עפ״י נתוני השאלה): $D \sim N(\mu, \sigma^2)$.

מערכת ההשערות: $H_0: \mu_d = 0\ ,\ H_1: \mu_d > 0$

מבחן T להפרש תוחלות במדגמים תלויים: $\bar{d} = 1,\ s_d^2 = 4.89$. $t_{\bar{d}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{4.89}{10}}} = 1.43 < t_{0.95}^{9} = 1.833$

לא דוחים את H_0 ברמת מובהקות 0.05 - לא הוכח ששכר העידוד מעודד הגדלת מכירות.