平成２６年度４月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程

システム科学専攻　入学資格者選考試験問題

【専門科目】

試験日時：平成２５年８月５日（月）　午後１時００分より同４時００分

問題冊子頁数（表紙を除いて）：　１５頁

選択科目：下記の科目のうち、２科目を選択し解答すること。

【論理回路】（３）	【機械力学】（４）
【工業数学】（３）	【基本ソフトウェア】（２）
【電気・電子回路】（２）	【確率統計】（２）
【制御工学】（３）	【オペレーションズ・リサーチ】（２）

なお（ ）内数字は解答用紙の最大使用枚数を示す。

注意：

（１）上記科目から２科目を超えて選択してはいけない。３科目以上選択した場合は、本専門科目の答案を無効にすることがある。別紙の選択表への記入を忘れないこと。

（２）すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

（３）解答は上記最大使用枚数に注意すること。対応する解答用紙に解答中の科目名を明記すること。なお各問題に注意書きがあればそれに従うこと。

（４）解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる上部を空白にしておくこと。（この上部は切り離すので、点線部分より下側を使用すること。）

（５）解答用紙は記入の有無にかかわらず持ち帰ってはならない。

【論理回路】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

問題 1

論理変数 A, B, C, D, E, F に関する以下の等式の成否を判定し，その根拠を示せ．

(1) $\mathrm{XOR}(\mathrm{XOR}(A, B), C) = \mathrm{XOR}(A, \mathrm{XOR}(B, C))$

(2) $\mathrm{XOR}(\mathrm{XOR}(\mathrm{XOR}(A, B), \mathrm{XOR}(C, D)), \mathrm{XOR}(E, F))$
$= \mathrm{XOR}(\mathrm{XOR}(A, D), \mathrm{XOR}(\mathrm{XOR}(B, E), \mathrm{XOR}(C, F)))$

(3) $\mathrm{NAND}(A, \mathrm{NAND}(B, C)) = \mathrm{NAND}(\mathrm{NAND}(A, B), C)$

（論理回路の問題は次ページに続く）

【論理回路】（続き）

問題 2

図 1 に示す 3 入力 2 出力を持つ論理回路は JK フリップフロップ回路の一部を変更したものである．以下の設問に答えよ．

(1) 図 1 の回路に対して図 2 のタイムチャートのような入力 $clock, J, K$ が入ったときの挙動を説明せよ．ただし初期値は $Q = 1, R = 0$ とする．

(2) 図 1 の回路を変更することによって，JK フリップフロップ回路を実現し，その回路図を描け．ただし図中の NAND 素子を 3 入力のものに変更してよい．

(3) JK フリップフロップに対して図2のタイムチャートのような入力 $clock, J, K$ が入ったときのタイムチャートを描け．ただし初期値は $Q = 1, R = 0$ とする．

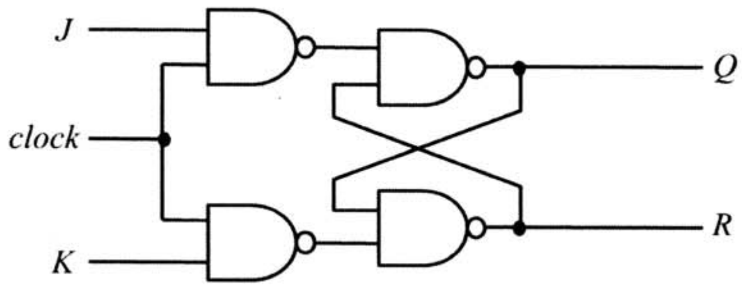


図 1: 回路図

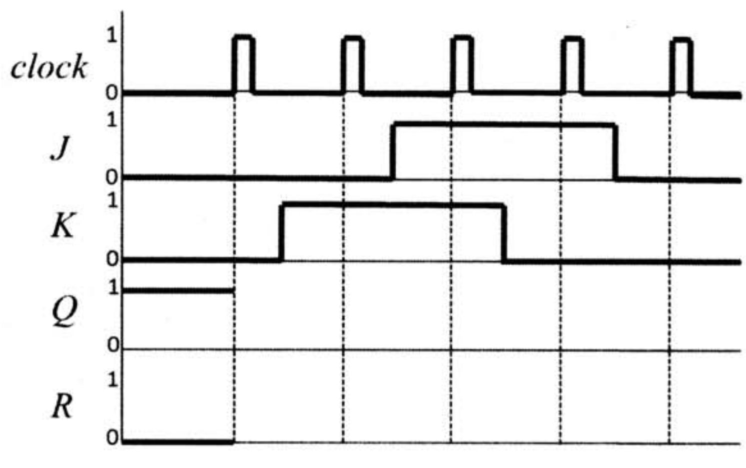


図 2: タイムチャート

（論理回路の問題は次ページに続く）

【論理回路】（続き）

問題 3

300 円のチケット 1 枚を販売する自動販売機の回路設計を考える．1 クロックごとに次の **(a)** 及び **(b)** を行う回路とするとき，以下の設問に答えよ．

(a) 100 円硬貨あるいは 500 円硬貨 最大 1 枚の入力信号を受け付ける

(b) 入金額の合計が 300 円以上のとき，チケット出力機への信号と釣り銭出力機への信号を出力する

(1) 回路の内部状態，入力，出力にそれぞれ符号を割り当てて，状態数が最小の状態遷移図を作成せよ．

(2) フリップフロップと AND, OR, NOT 素子を用いて，できるだけ構成要素が少ない論理回路を構成せよ．

（論理回路の問題はここまで）

【機械力学】

注意：問題１，問題２はそれぞれ別の解答用紙に記入すること

問題１

図１に示すように，均質な二等辺三角形が頂点で回転支持されて，鉛直面内で運動する剛体振子となっている．三角形の質量はMで，等辺の長さはa，頂角は直角とする．図のように，振れ角θは平衡点を原点$\theta=0$として，反時計回りを正方向とする．支点での摩擦は無視でき，三角形には重力と支点からの反力のみが作用すると仮定して以下の問いに答えよ．重力加速度はgとおく．

(1) 平衡点の付近でこの三角形が微小な振幅で振動する場合，その周期を求めよ．

(2) 振れ角が$\theta=\pi/4$の状態で三角形を静止させた後，静かに放す．その後，平衡点$\theta=0$に到達した瞬間について，角速度$\dot{\theta}$を求めよ．

(3) この三角形が平衡点$\theta=0$を通過する瞬間に支点から作用する反力を求めよ．角速度$\dot{\theta}$を含む数式として答えよ．

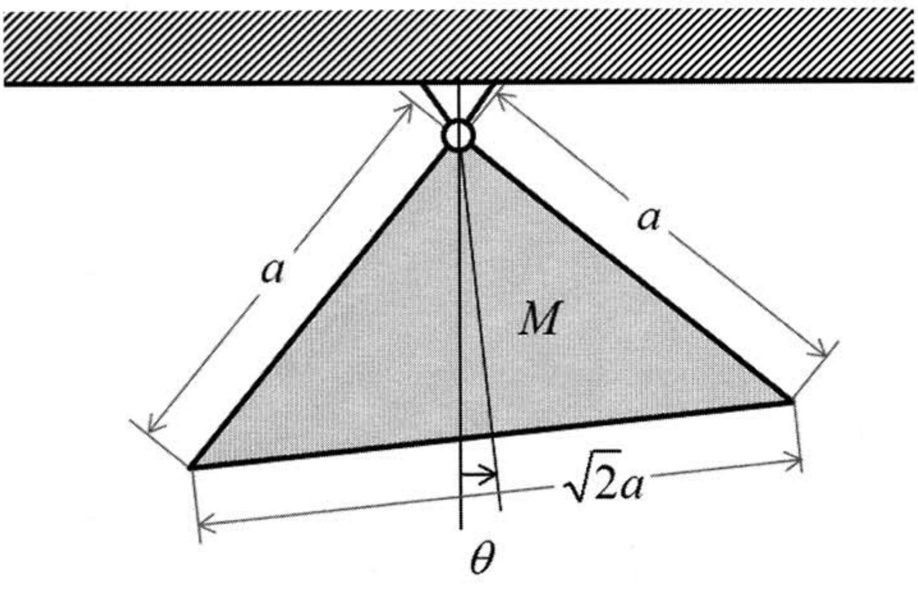


図１

（機械力学の問題は次ページに続く）

【機械力学】（続き）

問題2

図2に示すように，水平な x 軸と鉛直な y 軸からなる x-y 平面内で移動する均質な円板（質量 m，半径 r，慣性モーメント $mr^2/2$）を考える．この円板の，x-y 平面に垂直な軸まわりの反時計回りを正方向とする角速度を ω，x 軸の正方向の重心速度を v とする．

時刻 t_0 での v と ω をそれぞれ v_0, ω_0 とし，共に正であるとする．すなわち，円板は反時計回りに回転しながら図2の右方向に摩擦のある水平面上を滑っている．以下の設問に答えよ．ただし転がり抵抗は無視できるものとする．

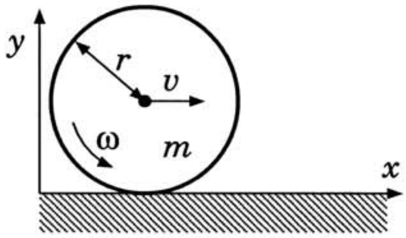


図2

(1) 時刻 t_0 と t_1 $(> t_0)$ における円板の運動量の差を P とする．時刻 t_0 と t_1 における角速度 ω の差を，P を用いて表現せよ．

(2) 時刻 $t = t_2$ $(> t_0)$ までは $r\omega + v$ が単調に減少し，t_2 以降は速度が一定値 $v = v_2$ となる．

1. $v_2 > 0$ となる条件を求め，その場合の ω の正負を述べよ．
2. 水平面の摩擦係数が一定値 μ である場合，重力加速度を g として，時間 $t_2 - t_0$ を求めよ．

(機械力学の問題はここまで)

【工業数学】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

記号 i は虚数単位を表すものとする．

問題 1　以下の設問に答えよ．

(1) 複素数 $\cosh(3+i)$ の実部，虚部，偏角をそれぞれ求めよ．

(2) $z = x + iy$ の関数として $f(z) = x^4 - y^3 + ix^3y^4$ が正則かどうか調べよ．

(3) $\left|\dfrac{1-z}{1+2z}\right| \leq 1$ を満たす複素数 z の範囲を複素平面上に図示せよ．

(4) $\sin z = 4$ を満たす複素数 z をすべて求めよ．

問題 2　複素関数 $f(z) = \dfrac{z}{z^2+z+1}$ を考える．以下の設問に答えよ．

(1) $f(z)$ の特異点および特異点における留数を，すべて求めよ．

(2) 閉曲線 $C = \{z \mid |z| = 2\}$ を正の方向に 1 周する経路に沿った線積分 $\displaystyle\int_C f(z)dz$ の値を求めよ．

(3) 実関数の定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx$ の値を求めよ．

問題 3　z を複素変数とし，つぎの 2 条件を満たす複素関数すべての集合を $\mathcal{P}$ とする．

i) 領域 $\mathrm{Re}\, z > 0$ において正則である．

ii) 領域 $\mathrm{Re}\, z > 0$ における値の実部がつねに正である．

このとき，以下の設問に答えよ．

(1) 二つの複素関数 $f(z)$ と $g(z)$ が $\mathcal{P}$ に属するならば，それらの合成関数 $f(g(z))$ も $\mathcal{P}$ に属することを示せ．

(2) 複素関数 $f(z)$ が $\mathcal{P}$ に属するならば，$1/f(z)$ も $\mathcal{P}$ に属することを示せ．

【基本ソフトウェア】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること.

問題 1

以下に示す C 言語の関数 `f(a,n)` は，n 要素 ($n > 0$) の配列 `a` をソート (sort) するものである．ただし `a` の各要素は `int` 型の要素 `key` を持つ構造体 `s` へのポインタであり，ソートは `key` の昇順 (ascending order) で行われる．この関数 `f()` と，これから呼び出される関数 `g()` と `h()`，および `f()` で用いているソートアルゴリズム（以下 A と呼ぶ）について，設問 (1)〜(5) に答えよ．

```
void h(struct s **a1, int n1, struct s **a2, int n2,            /* 1*/
       struct s **b) {                                          /* 2*/
  int i1, i2, j;                                                /* 3*/
  for (i1=0,i2=0,j=0; (a)________ ; (b)________ )               /* 4*/
    b[j] = (a1[i1]->key < a2[i2]->key) ? a1[i1++] : a2[i2++];   /* 5*/
  for (; i1<n1; i1++,j++)  b[j] = a1[i1];                       /* 6*/
  for (; i2<n2; i2++,j++)  b[j] = a2[i2];                       /* 7*/
}                                                               /* 8*/
void g(struct s **a, struct s **b, struct s **c, int n) {       /* 9*/
  int m1 = n>>1,  m2 = n - m1;  struct s **d;                   /*10*/
  if (m1==0) {                                                  /*11*/
    (c)________ = (d)________ ;                                 /*12*/
    return;                                                     /*13*/
  }                                                             /*14*/
  d = (a==c) ? (e)________ : (f)________ ;                      /*15*/
  g(a, b, d, m1);                                               /*16*/
  g(a+m1, b+m1, d+m1, m2);                                      /*17*/
  h(d, m1, d+m1, m2, c);                                        /*18*/
}                                                               /*19*/
void f(struct s **a, int n) {                                   /*20*/
  g(a, (struct s**)malloc(sizeof(struct s*)*n), a, n);          /*21*/
}                                                               /*22*/
```

(1) 下線部 (a)〜(f) を埋めて，関数 `g()` と `h()` を完成させよ．

(2) ソートアルゴリズム A の名称を答えよ．

(3) A の平均時間計算量および最悪時間計算量のオーダを，ソート対象のデータ数を N として答えよ．

(4) A は本来は安定な (stable) ソートアルゴリズムであるが，`f()` は安定ではない．`g()` または `h()` のある行を修正することにより `f()` を安定ソートとすることができる．修正すべき行番号（各行末尾のコメント中の番号）と修正結果を示せ．

(5) A と平均時間計算量および最悪時間計算量のオーダが等しいソートアルゴリズムを一つ挙げ，安定性と所要メモリ量のオーダの観点から，両者の優劣を論ぜよ．

（基本ソフトウェアの問題は次ページに続く）

【基本ソフトウェア】(続き)

問題2

プロセスのスケジューリングに関する次の設問に答えよ．なお，すべての処理は単一コアで構成される単一 CPU によって実行されるものとする．

(1) 実行可能キューにある表1のプロセスを処理する場合を考える．次の **(a)**〜**(c)** のスケジューリング方式によって得られる処理系列を示し，平均ターンアラウンド時間を求めよ（小数点以下は切り捨て）．ただし，プロセスは時刻0の時点ですでに A, B, C, D の順に到着しているものとする．タイムスライスを1とし，プロセスの切り替えに要するオーバーヘッドは無視できるものとする．

(a) 到着順サービス（first-come first-served: FCFS）

(b) 最短時間順サービス（shortest job first: SJF）

(c) ラウンドロビン（round-robin）

(2) 時刻 t における各プロセスの実行に関するパラメータ p_t と，プロセスごとの CPU の消費に関するパラメータ q_t に基づくスケジューリング方式を考える．この方式ではタイムスライスごとに p_t と q_t を更新し，p_t の値が最も小さいプロセスを実行する．ただし，p_t と q_t は $t=0$ では初期値が与えられ，$t \geq 1$ では以下の式に基づいて更新されるものとする．

$$p_t = p_0 + q_t$$

$$q_t = \begin{cases} k \times (q_{t-1} + 100) & \text{(プロセスが実行中の場合)} \\ k \times q_{t-1} & \text{(プロセスが実行中でない場合)} \end{cases}$$

次の **(a)**, **(b)** の設問に答えよ．

(a) $k = 0.5$ とし，表1の各プロセスに p_0 と q_0 を与えると，表2のように p_t と q_t が変化した．(ア)〜(エ) に入れるべき数値を答えよ．なお，小数点以下は切り捨てとする．

(b) $0 \leq k < 0.5$ の場合，$k = 0.5$ の場合と比較してスケジューリングの性質はどのように変化するか，$k > 0.5$ の場合はどうか，それぞれ説明せよ．

表 1: プロセス一覧

プロセス	処理時間
A	4
B	5
C	2
D	3

表 2: p_t と q_t の変化 (p_t/q_t)

時刻 t	0	1	2	3	4	5
A	40/0	90/50	65/25	52/12	(イ)	68/28
B	50/0	50/0	(ア)	75/25	62/12	106/56
C	60/0	60/0	60/0	110/50	(ウ)	72/12
D	65/0	65/0	65/0	65/0	65/0	(エ)

(基本ソフトウェアの問題はここまで)

【電気・電子回路】

注意：　問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

問題 1　交流回路について考える．損失をもつキャパシタやインダクタは，等価的にそれぞれ図 1，2 のように表される．ここで，$1/G,R$ は抵抗，C は理想的なキャパシタ，L は理想的なインダクタである．また，R,G は交流の角周波数 ω に依存しないものとする．以下の設問に答えよ．

(1) 損失のあるキャパシタやインダクタの Q (quality factor) は次式で定義される．

$$Q = 2\pi \cdot \frac{\text{最大蓄積エネルギー}}{\text{交流一周期分の消費エネルギー}}$$

図 1，2 に示す損失のあるキャパシタとインダクタの Q を ω,C,G,L,R を用いてそれぞれ表せ．

(2) 図 1，2 に示す損失のあるキャパシタとインダクタを直列に接続した回路（図 3）の共振角周波数と共振時のインピーダンスを求めよ．ただし，共振角周波数はインピーダンスの虚部が 0 となる角周波数としてよい．

(3) 図 1，2 に示す損失のあるキャパシタとインダクタを並列に接続した回路（図 4）の共振角周波数と共振時のアドミタンスを求めよ．ただし，共振角周波数はアドミタンスの虚部が 0 となる角周波数としてよい．

(4) 共振回路の Q は

$$Q = 2\pi \cdot \frac{\text{共振時の回路の蓄積エネルギー}}{\text{共振時の交流一周期分の消費エネルギー}}$$

で定義される．$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ とし，$\omega_0 C \gg G$ であるとき，設問 (2) で考えた図 3 の共振回路の Q は

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_{\mathrm{L}}} + \frac{1}{Q_{\mathrm{C}}}$$

で与えられることを示せ．ただし，$Q_{\mathrm{L}} = \omega_0 L/R$，$Q_{\mathrm{C}} = \omega_0 C/G$ である．

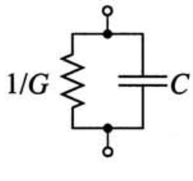


図 1

図 2

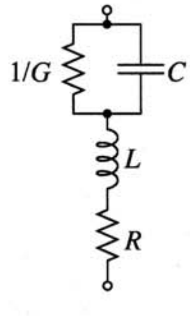


図 3

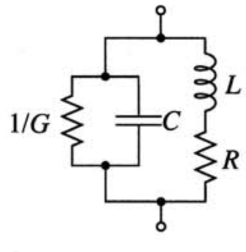


図 4

(電気・電子回路の問題は次ページに続く)

【電気・電子回路】(続き)

問題2 図5で表される2端子対回路の h-パラメータ $h_{11},h_{12},h_{21},h_{22}$ は次式のように与えられる．

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

h-パラメータに関する以下の設問に答えよ．

(1) 図6に示すトランジスタQを用いた2端子対回路の等価回路が図7のように与えられたとする．ここで，R_1,R_2 は抵抗，α 及び β は増幅率である．等価回路を用いることにより，図6の2端子対回路の h-パラメータを R_1,R_2,α,β により表せ．

(2) 設問(1)と同じトランジスタQを2個使用し，図8のような2端子対回路を構成した．図7の等価回路を用いることにより，この2端子対回路の h-パラメータのうち，h_{11} 及び h_{21} をそれぞれ，R_1,R_2,α,β により表せ．ただし，$\alpha \ll 1$ および $R_1/R_2 \ll 1$ なる近似を用いてよいものとする．

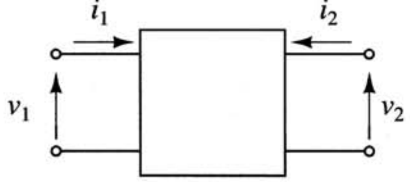


図5

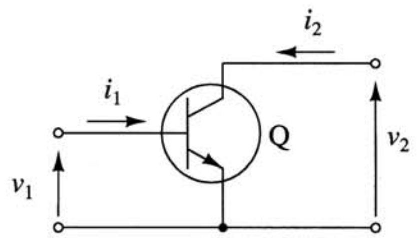


図6

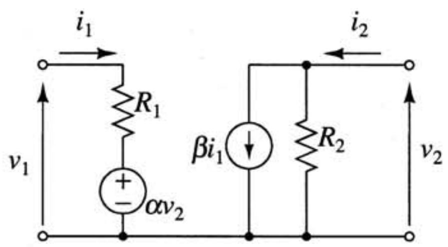


図7

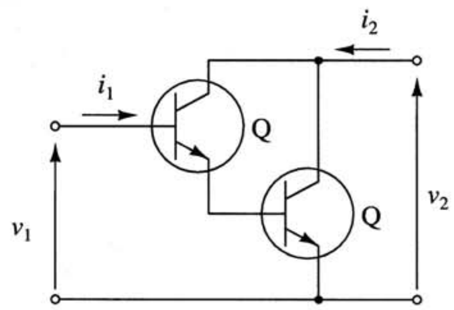


図8

(電気・電子回路の問題はここまで)

【確率統計】

注意：　問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

問題 1　既知の母平均 μ_0 と未知の母分散 v をもつ正規母集団分布 $\mathcal{N}(\mu_0, v)$ から，n 個の無作為標本 $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ が得られるとする．ただし，上記の母集団分布の密度関数は，

$$f_{\mathrm{G}}(x; v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_0)^2}{2v}\right)$$

で与えられる．このとき，以下の設問に答えよ．

(1) 上記の正規母集団分布のモーメント母関数を求めよ．ここで，モーメント母関数 $\mathrm{M}_X(t)$ は，母集団分布に従う確率変数を X としたとき，e^{tX} の母集団分布に関する期待値である．

(2) 設問 (1) の結果を用いて，上記の正規母集団分布の平均周りの 3 次と 4 次のモーメントを求めよ．ここでの平均周りの k 次（k は自然数）モーメントとは，母集団分布に従う確率変数を X としたとき，$(X-\mu_0)^k$ の母集団分布に関する期待値である．

(3) 母分散 v の最尤推定量 $\hat{v}$ を求めよ．

(4) 設問 (3) で求めた $\hat{v}$ の，母集団分布に関する期待値 $E(\hat{v})$ と分散 $V(\hat{v})$ を求めよ．

(5) 設問 (3) で求めた最尤推定量 $\hat{v}$ は，母分散 v の不偏推定量であることを示せ．

(確率統計の問題は次ページに続く)

【確率統計】（続き）

問題2 以下の設問に答えよ．ただし，以下では，$\Pr(A)$ は事象 A の確率を表す．

(1) 確率変数 X,Y,Z は互いに独立で，それぞれ区間 (0,1) 上の一様分布に従うとする．このとき，XY と Z^2 の従う同時分布の密度関数を求めよ．また，$\Pr(XY < Z^2)$ の値を求めよ．

(2) 確率変数 X,Y が次の密度関数をもつ同時分布に従うとする．

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right\}$$

ただし，$0 \leq \rho < 1$ である．このとき，X と $Z = (Y - \rho X)/\sqrt{1-\rho^2}$ は独立で，それぞれ標準正規分布 $\mathcal{N}(0,1)$ に従うことを示せ．

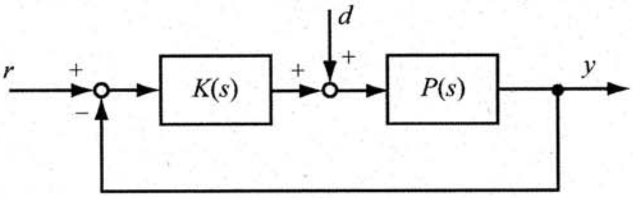
(3) 確率変数 X,Y が設問 (2) の密度関数をもつ同時分布に従うとする．設問 (2) の結果を用いて，$\Pr(X > 0, Y > 0)$ を ρ を用いて表せ．

（確率統計の問題はここまで）

【制御工学】

注意：問題 1，問題 2 はそれぞれ別の解答用紙に記入すること．

問題 1　つぎの制御系に関して，以下の設問に答えよ．



(1) $P(s)$ と $K(s)$ をつぎで与えたとき，d から y への伝達関数を計算し，その減衰係数 ζ および自然角周波数 ω_n を求めよ．また，d をステップ入力（つまり，$d(t)=1$，$r(t)=0$）としたときの出力 y の定常値を求めよ．

$$P(s)=\frac{2}{s^2+s+1},\qquad K(s)=\frac{1}{2}$$

(2) $P(s)$ と $K(s)$ をつぎで与えたとき，制御系の安定性を判別せよ．ただし，c は実数である．必要に応じて c の値によって場合分けして解答すること．

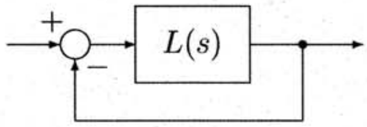
$$P(s)=\frac{s+c}{s^2+3s+2},\qquad K(s)=\frac{1}{s+c}$$

(3) $P(s)$ と $K(s)$ をつぎで与える．ただし，a，b は実数である．入力 $r(t)=1+2t$（ただし，$d(t)=0$）に対し，出力 y が定常偏差なく追従する $(a,\ b)$ を一組求めよ．そして，その系の定常偏差が零となることを証明せよ．

$$P(s)=\frac{1}{s},\qquad K(s)=\frac{bs+1}{s^2+s+a}$$

（制御工学の問題は次ページに続く）

問題 2　つぎの制御系に関して，以下の設問に答えよ．



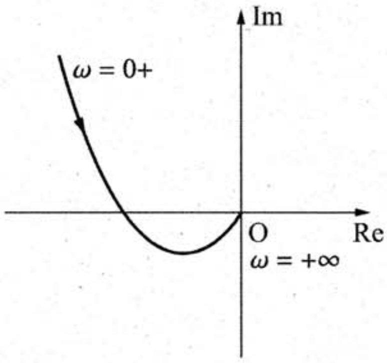
ただし，$L(s) = \frac{K_0(s+1)}{s(s-1)}$ とする．

(1) $K_0 = 1$ のとき，$L(s)$ のボード線図（ゲイン線図と位相線図）の概形を描け．このとき，位相に関しては 表 1 の概略値を参考にせよ．

表 1.　$G(s) = 1/(s+1)$ の位相

ω (rad/s)	0.01	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	100
$\angle G(j\omega)$ (°)	-1	-6	-11	-27	-45	-63	-79	-84	-89

(2) $K_0 = 0.5$ のとき，ω を 0 から ∞ まで正の範囲で変化させたときの $L(j\omega)$ のベクトル軌跡の概形は下図のようであった．このベクトル軌跡が実軸と交わる点の座標（ただし原点は除く）とそのときの角周波数 ω を求めた上で，ナイキストの安定判別法を用いて制御系が安定か否かを判定せよ．また不安定と判定される場合には不安定極の数を示せ．なお，図中の 0+ および $+\infty$ はそれぞれ 0 および ∞ に限りなく近い正の数を表すものとする．



【オペレーションズ・リサーチ】

問題

客が1人ずつ平均到着間隔 $1/\lambda$ のポアソン過程に従って到着し，1人ずつ先着順にサービスを受ける無限バッファ待ち行列モデルを考える．サーバは1人で，各客のサービスは前処理，本処理，および後処理からなっている．サーバが前処理と後処理に要する時間はそれぞれ一定値で，c_1 と c_2 である．本処理時間は独立で，平均 $1/\mu$ の指数分布に従っている．この待ち行列モデルに関して，状態をシステム内客数で表わすとき，定常状態の存在を仮定し，次の各設問に答えよ．

問1　1人のサービス時間（前処理，本処理および後処理の合計時間）分布の Laplace Stieltjes 変換（LST) を示せ．

問2　1人のサービス時間中に到着する客数の確率母関数を示せ．

問3　定常状態において、サービスの完了直後にシステム内客数 N が i である確率を π_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ で表すとき，この確率が満たす関係式を示せ．但し，サービス時間中に客が n 人到着する確率を k_n と記し，これを用いても良い．

問4　π_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ の確率母関数を求めよ．

問5　システム内客数 N の平均を求めよ．

上の待ち行列モデルは，システム内に客が1人以上いる限りサーバはサービスを行うものであった．ここからは，システムが空になると，新たな到着客が α 人になるまでサービスを停止し，α 人目の到着後直ちにサービスを再開し，システムが再び空になるまでサービスを継続する場合を考える．

問6　変更後の待ち行列モデルで，定常状態においてサービスの完了直後にシステム内客数 M が i である確率を ω_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ で表すとき，この確率が満たす関係式を示せ．但し，サービス時間中に客が n 人到着する確率を k_n と記し，これを用いても良い．

問7　ω_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ の確率母関数を求めよ．