平成１８年度

京都大学大学院情報学研究科修士課程

システム科学専攻

入学資格者選考試験問題

【数学】

試験日時：平成１７年８月８日（月）　午後１時００分より同３時００分まで

問題冊子頁数（表紙を除いて）：　４頁

注意：

（1）すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

（2）問題【Ⅰ】には最大２枚、問題【Ⅱ】には最大２枚、問題【Ⅲ】には1枚の解答用紙を使用して別々にすべての問題に解答すること。その際、各解答用紙に試験科目名、問題番号【Ⅰ】，【Ⅱ】，【Ⅲ】を忘れずに記入すること。

（3）解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入しても良いが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる上部を空白にしておくこと。（この上部は切り離すので、点線部分より下側を使用すること）

（4）解答用紙は記入の有無にかかわらず持ち帰ってはならない。

【数学】

【I】

問1 ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は1次独立とする．$\boldsymbol{y} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{x}_3$ とおくとき，$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_3$ が1次独立である条件を求めよ．

問2 つぎの行列の固有値を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & -2 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

問3 $m \times n$ 実行列 $\boldsymbol{A}$ に対し

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

を満足するすべての n 次元実ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{c}$ は直交することを証明せよ．ただし，“T”は転置を，$\boldsymbol{0}$ は n 次元零ベクトルを表し，$\boldsymbol{c}$ は任意の m 次元実ベクトルとする．

【II】

1 階微分可能な関数 $f_{ij}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, n)$ から構成される以下の行列式を考える.

$$F(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

この $F(x)$ の微分 $F'(x)$ は一般に,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f'_{12}(x) & \cdots & f'_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f'_{21}(x) & f'_{22}(x) & \cdots & f'_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} + \cdots \\ &\quad + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{n1}(x) & f'_{n2}(x) & \cdots & f'_{nn}(x) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

と与えられる. このことを用いて以下の問に答えよ.

(1) 関数 $g(x), h(x), r(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続であり, (a, b) で微分可能であるとする. このとき, 行列式

$$E(x) = \begin{vmatrix} g(a) & h(a) & r(a) \\ g(b) & h(b) & r(b) \\ g(x) & h(x) & r(x) \end{vmatrix}$$

を考えることによって, 区間 (a, b) 内に以下の等式を満たす ξ が存在することを示せ.

$$\begin{vmatrix} g(a) & h(a) & r(a) \\ g(b) & h(b) & r(b) \\ g'(\xi) & h'(\xi) & r'(\xi) \end{vmatrix} = 0$$

(2) 関数 $p(x), q(x), s(x)$ それぞれが x の高々 3 次の多項式であるとき，つぎの行列式を考える．

$$T(x) = \begin{vmatrix} p(x) & q(x) & s(x) \\ p'(x) & q'(x) & s'(x) \\ p''(x) & q''(x) & s''(x) \end{vmatrix}$$

この $T(x)$ の 1 階微分 $T'(x)$ と 2 階微分 $T''(x)$ を求めよ．

(3) $T(x)$ は x の高々 3 次の多項式であることを示せ．

【III】

a, b を実定数，n を自然数とする．以下の設問に答えよ．

(1) 方程式 $x^{2n+1} + ax + b = 0$ の実根は高々 3 個であることを示せ．

(2) $n = 1$ の場合について，上記方程式が互いに相異なる 3 つの実根を持つための必要十分条件を求めよ．