

平成27年度4月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程

システム科学専攻

入学資格者選考試験問題

【数学】

試験日時：平成26年8月6日（水） 午前10時00分より正午まで

問題冊子頁数（表紙を除いて）： 2頁

注意：

- (1) すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
- (2) 問題番号【Ⅰ】、【Ⅱ】のそれぞれについて最大3枚ずつの解答用紙を使用して別々に解答すること。その際、各解答用紙に試験科目名、問題番号【Ⅰ】、【Ⅱ】を忘れずに記入すること。
- (3) 解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる上部を空白にしておくこと。（この上部は切り離すので、点線部分より下側を使用すること）
- (4) 解答用紙は記入の有無にかかわらず持ち帰ってはならない。

## 【数学】

### 【I】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること。

問題1 以下の設問に答えよ。

- (1) 次の行列の階数を求めよ。ただし、 $x$  は実数である。

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{bmatrix}$$

- (2) すべての要素が整数である正則行列  $A$  を考える。  $A^{-1}$  のすべての要素が整数ならば、  $A$  の行列式は  $1$  か  $-1$  のいずれかになることを証明せよ。
- (3)  $A^T = -A$  を満たす実行列  $A$  を考える。この行列の固有値  $\lambda$  とそれに関する固有ベクトル  $x$  に対して、  $A^T x = \bar{\lambda} x$  の関係が知られている。この関係を用いて、行列  $A$  の固有値は純虚数になることを証明せよ。ただし、  $A^T$  は行列  $A$  の転置、  $\bar{\lambda}$  は複素数  $\lambda$  の複素共役である。

問題2 3次元実ベクトル空間の部分空間  $V$  と  $W$  が次のように与えられている。このとき、以下の設問に答えよ。ただし、いずれの設問においても、解と共にその理由を示すこと。

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0, x + y = 0 \right\}$$
$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y + 2z = 0 \right\}$$

- (1)  $V$  の次元を求めよ。
- (2)  $V$  と  $W$  の交わり  $V \cap W$  の次元を求めよ。
- (3)  $V$  と  $W$  の和空間  $V + W$  の次元を求めよ。
- (4)  $W$  の直交補空間  $U$  の基底を求めよ。なお、基底の第一要素は  $1$  とする。
- (5)  $W$  と  $U$  の結び  $W \cup U$  が3次元実ベクトル空間の部分空間であるか否かを示せ。

(数学の問題は次ページに続く)

## 【数学】（続き）

### 【II】

問題1 領域  $D$  を

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq 4x^2, y^2 \leq x \leq 2y^2\}$$

と定義する. 変数変換  $u = \frac{y}{x^2}, v = \frac{x}{y^2}$  を考えることにより, 領域  $D$  の面積を求めよ.

問題2 以下の設問に答えよ.

(1)  $\tan \theta$  の微分を求めよ.

(2) 次の定積分

$$\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

を示せ.

(3) 関数  $f(x)$  が  $f(1) = 1$  を満たし, その1階微分が  $f'(x) = \frac{1}{x^2 + (f(x))^2}$  を満たすとする. このとき,  $x > 1$  において  $f(x) < 1 + \frac{\pi}{4}$  となることを示せ.

問題3 以下の設問に答えよ. ただし  $\alpha > 0$  とし,  $e$  を自然対数の底とする.

(1)  $x > 0$  で定義された次の関数  $g(x)$  が最小値をもつことを示せ.

$$g(x) = \frac{e^x}{x^\alpha}$$

(2)  $x > 0$  において常に  $e^x > x^\alpha$  となるためには,  $\alpha$  にどのような条件が必要か, 理由とともに述べよ.

(3)  $(8.6)^{8.7}$  と  $(8.7)^{8.6}$  ではどちらの方が大きいか, 理由とともに述べよ. なお, 必要に応じて  $e < 3$  という事実を用いよ.