·数学研究·

做市商定价信息模型与数值方法

武亚男

(吕梁学院 数学系,山西 离石 033001)

摘 要: 做市商制度是在证券市场上,由具备一定实力和信誉的证券经营法人充当做市商,不断地向投资者报出证券的买入和卖出报价,并在该价值上接受投资者的买卖要求,以其自有资金和证券与投资者进行交易.做市商通过他们的不断买卖来满足投资者的投资需求,并维持市场的流动性;也可通过买卖报价的适当差额来补偿提供做市服务发生的成本,并实现一定的利润.做市商制度是做市商同时进行显性的买卖双向报价并按其主动报出的价格进行交易.研究做市商定价理论中的信息模型,在Copeland和Galai信息模型[7]的基础上,发展期权定价的方法,对价差计算进行推广,给出买价、卖价的计算方法,并进一步采用迭代算法求出信息不对称条件下的做市商的买、卖价格.

关键词: 做市商;知情交易者;期权定价;卖价

中图分类号: O241 文献标识码: A 文章编号: 2095-185X(2017)02-0004-05

做市商(Market maker),是指金融市场上的一些独立的证券交易商,为投资者承担某一支证券的买入和卖出,买卖双方无需等待交易对手出现,而只要做市商出面承担交易对手方就可以达成交易.由于做市商通过作为交易对手不断买卖来满足投资者的投资需求,这有效地维持和增强了市场的流动性.同时,做市商主动向市场提出买、卖双向报价,投资者根据做市商报出的买价和卖价进行交易,做市商可以通过设定买、卖报价的适当差额来补偿做市过程中所发生的做市成本,并且实现一定的利润[1].做市商通过长期跟踪证券价格的变化,凭借其专业知识对市场价格作出判断,向市场提供最合理的和最有参考意义的买、卖报价.那么做市商是如何设定其买卖报价的,这些价格是如何进行计算的,价格又受到哪些因素的影响?本文将通过一些理论说明和计算来回答这些问题.

做市商为了补偿其做市成本而在买入报价和卖出报价之间设立价差,因此对于做市成本的研究就成为了做市商定价理论的起点,而买卖报价价差则是做市商定价理论的切入点.最早对于买卖价差的研究见于Demsetz[2] 1968年发表的论文《交易成本》,首次提出了买卖报价价差模型.此后,在德姆塞斯的文章中,一些学者关注于存货成本与买卖价差之间的关系,如M. Garman[3],Y. Amihud[4],T. Ho,H. Stoll[5]等人建立了用存货成本解释买卖报价价差形成过程的存货模型.在存货模型中,交易者和做市商拥有的信息都是相同的,不存在信息不对称的问题,所以在实证检验中,存货模型的解释能力是有限的.在20世纪80年代中期以后,信息不对称引入模型,做市商定价理论的发展重点随之转到了信息模型,这是其发展的第二阶段,信息模型的基本特征是用信息不对称所产生的信息成本,而不是交易成本,来解释市场中买卖报价价差.1971年W. Bagehot[6]发表的文章被认为是信息模型的第一篇文章.在这篇文章中,Bagehot第一次区分了信息模型中的重要概念——知情交易者(informed trader)和非知情交易者(uninformed trader).他的出发点是金融市场中市场收益和交易收益是不相等的,造成差异的原因是信息不对称,市场中的一部分交易者具有信息优势,知情交易者的信息优势使得他与做市商进行交易时总是获利,而做市商为了避免破产,不得不用与非知情交易

收稿日期:2017-02-06

作者简介:武亚男(1989-),女,山西中阳人,助教,研究方向为金融数学.

者交易获得的盈利来冲销损失，这些盈利的来源就在于做市商设定的买卖报价的价差. 这样，Bagehot 就用信息成本解释了市场价差. 此后 Copeland 和 Galai[7]（1983）以及 Glosten 和 Milgrom[8] 等人进一步发展了的做市商定价的信息模型. 本文是在 Copeland 和 Galai 文章的基础上，进一步发展了期权定价方法在做市商定价理论上的应用，给出了具体买、卖价差的计算，并分析了各个因素对价格变动的影响.

1 做市商定价信息模型

已知市场中的交易事件是按照下面的顺序发生的. 做市商制定买价和卖价，表明他愿意以买价买入一个单位的证券，或以卖价出售一个单位的证券. 一个投资者到达市场被获知买价和卖价，这时他可以自由地选择以卖价买入一个单位的证券，或以买价卖出一个单位，或者选择不进行交易而离开市场. 在一位投资者已经做出买卖决定与下一位投资者到达市场的时间间隔内，做市商可以改变报出的买价和卖价.

做市商设定的买卖价格是根据他对证券在市场上的真实价格地判断做出的. 设 S_t 为做市商观测到的证券在 t 时刻的真实价格，S_t 的变化过程是个外生变量，它发生改变的信息是外部决定的，并假设由知情交易者将真实信息传递到市场上，做市商和非知情交易者只有根据交易的价格行为来观察和判断 S_t 的值. 做市商根据他观测到的证券的价值制定报价，以买价 K_B 买入一个单位，或以卖价 K_A 卖出一个单位. 这个报价是非常短暂的，他会因下一次交易或者新信息的到达而改变.

设市场中只有两类交易者，为知情交易者和非知情交易者，并设 $p_I(0 < p_I < 1)$ 为知情交易者向做市商询价的概率，$p_L = 1 - p_I$ 是非知情交易者向做市商询价的概率，我们这里假定 p_I，p_L 都是外生变量.

因为知情交易者掌握着非公共私人信息，即具有信息优势，因此做市商在与知情交易者交易的过程中会蒙受损失，即付出成本，设为 C. 并且知情交易者拥有对 S 真实价值估计的信息，因此知情交易者会在价值被低估时买入（即在 $S > K_A$ 时买入），在价值被高估时卖出（在 $S < K_B$ 时卖出）. 若知情交易者到达的概率为 p_I，那么当资产真实价值位于 $S > K_A$，或 $S < K_B$ 时，做市商参加交易就会是一个必然事件，即 $p_I = 1$，而当价值落于买卖价格之间时，知情交易者会因为无利可图而不参加交易，从而交易概率等于 0. 对于非知情交易者，他到达市场后可以选择买入、卖出，或者不参加交易，我们分别设 p_{AL}，p_{BL}，p_{NL} 分别为非知情交易者买入、卖出，和不参加交易的概率，显然 $p_{AL} + p_{BL} + p_{NL} = 1$.

假设做市商在 0 时刻喊出买入报价 K_B 和卖出报价 K_A，经过一个时间段 τ 后有交易者到达并交易，若交易者是知情交易者，则他将在 $S > K_A$ 时买入或在 $S < K_B$ 时卖出，从而获得收益 $(S - K_A)$ 或 $(K_B - S)$. 因为知情交易者具有信息优势，他只有在确认可以获利的情况下进行交易，那么对于做市商，他一定会因此而蒙受损失，我们称这一损失为信息不对称造成的成本. 做市商为了弥补他与知情交易者交易时所遭受的损失，他要在与非知情交易者的交易中获利，非知情交易者之所以在没有信息优势的情况下还与做市商交易，是因为流动性的需要，非知情交易者愿意为了流动性而付出一定的费用.

以下分析中我们假设市场无摩擦（无税收、交易费等），做市商是风险中性的，且资本市场是匿名的，做市商在交易之前并不知道那笔信息占有更多的信息优势. 根据市场的交易特性，我们将采用期权定价的方法研究和求解完全竞争市场条件下做市商的买、卖报价.

已知做市商在 0 时刻对证券价值的估计为 S_0，做市商依此设立买入报价 K_B 和卖出报价 K_A，并直到 T 时刻有交易者进行交易. $K_A - K_B = K_A - S_0 + S_0 - K_B$ 为做市商所报价格的价差，其中 $S_0 - K_B$ 为买入价差，$K_A - S_0$ 为卖出价差. 做市商的这一行为相当于在 0 时刻卖给交易者一张跨式组合期权，即做市商在 0 时刻同时对同一标的物卖出了一张以卖出价 K_A 作为敲定价格的看涨期权和一张以买入价 K_B 作为敲定价格的看跌期权，两张期权的到期日相同均为 T，并且只能在到期日期权才能够执行，而价差的成本即为期权的价格.

对于知情交易者来讲，他占有非公众的私人信息因而掌握着证券的真实价值，因此会在交易中获利，当 $S > K_A$ 时他执行看涨期权并获得期权的收益为 $C(K_A) = p_I(S - K_A)^+$，当 $S < K_B$ 时他执行看跌期权而获得收益 $P(K_B) = p_I(K_B - S)^+$，这里 $k^+ = \max(k, 0)$. 因而，做市商对于知情交易者的成本表示为[7]：

$$p_I[C(K_A) + P(K_B)].$$

对于非知情交易者来讲，他愿意在 $K_A > S_0$ 时执行处于虚值的看涨期权，在 $K_B < S_0$ 时执行处于虚值的看跌期权，他执行期权所蒙受的损失 $p_L\{p_{BL}(K_A - S_0) + p_{SL}(S_0 - K_B)\}$ 是他愿意为流动性所支付的价格.

如上所述，跨式组合期权中看涨和看跌期权均为到期日为 T 的欧式期权，因而可由 Black - Scholes 期权

定价公式得到解析表达式. 因实际中买卖报价时间间隔较短,故令无风险利率 $r = 0$. 那么可进一步得到,

知情交易者在 T 时刻买入时,执行了看涨期权,做市商的成本为:

$$C(K_A) = S_0 N(d_1) - K_A N(d_2), \tag{1}$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K_A) + \theta^2/2}{\theta}, d_2 = d_1 - \theta, \theta^2 = \sigma^2 \tau;$$

知情交易者在 T 时刻卖出时,执行了看跌期权,做市商的成本为:

$$P(K_B) = -S_0 N(-d_3) + K_B N(-d_4), d_3 = \frac{\ln(S_0/K_B) + \theta^2/2}{\theta}, d_4 = d_3 - \theta, \theta^2 = \sigma^2 \tau.$$

其中 S_0 为资产初始真实价格,K_A 为做市商卖出看涨期权的敲定价格,K_B 为做市商卖出看跌期权的敲定价格,σ 为回报率的年标准差. 期权在 $t = 0$ 时刻生效,在 $T = \tau$ 时刻期权到期执行.

2 模型的发展和数值结果

在完全竞争的金融市场中,假设市场是无摩擦的,做市商长期的竞争均衡将会在期望成本等于期望收益处达到,即做市商的期望利润为 0,那么看涨和看跌期权分别满足以下等式:

$$p_L p_{BL}(K_A - S_0) = p_I C(K_A), \tag{2}$$

$$p_L p_{SL}(S_0 - K_B) = p_I P(K_B).$$

因为卖出价差与买入价差具有相似的性质,以下为了表达便利,我们只考虑卖出价差. 将(1)式中 $C(K_A)$ 的表达式代入(2)式,有

$$p_L p_{BL}(K_A - S_0) = p_I [S_0 N(d_1) - K_A N(d_2)],$$

故

$$K_A = S_0 + \frac{p_I}{p_L p_{BL}}[S_0 N(d_1) - K_A N(d_2)]. \tag{3}$$

构造映射 $T: R \to R$ 如下: 令 $T(K_A) = S_0 + \frac{p_I}{p_L p_{BL}}[S_0 N(d_1) - K_A N(d_2)]$,那么求解(3)式中的 K_A 就化成求映射 T 的不动点问题.

首先,取一个初始值 K_A^0,令 $K_A^1 = T(K_A^0)$,求解出 K_A^1. 之后,再令 $K_A^2 = T(K_A^1)$,依次类推,可得:

$$K_A^n = T(K_A^{n-1}), n = 1, 2 \cdots. \tag{4}$$

对公式(4)两边取极限,又 T 是连续的,可得:

$$\lim_{n\to\infty} K_A^n = \lim_{n\to\infty} T(K_A^{n-1}) = T(\lim_{n\to\infty} K_A^{n-1}),$$

因此迭代序列 $K_A^1, K_A^2, \cdots, K_A^n, \cdots$ 的极限就是我们要找的不动点 K_A.

表 1 θ 的估计值

年标准差	0 分钟	10 分钟	20 分钟	30 分钟	40 分钟	50 分钟	60 分钟
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.0	0.0000	0.0110	0.0156	0.0191	0.0220	0.0246	0.0270
2.0	0.0000	0.0220	0.0311	0.0381	0.0440	0.0492	0.0539
3.0	0.0000	0.0330	0.0467	0.0572	0.0661	0.0739	0.0809
4.0	0.0000	0.0440	0.0623	0.0763	0.0881	0.0985	0.1079
5.0	0.0000	0.0550	0.0778	0.0953	0.1101	0.1231	0.1348
6.0	0.0000	0.0661	0.0934	0.1144	0.1321	0.1477	0.1618
7.0	0.0000	0.0771	0.1090	0.1335	0.1541	0.1723	0.1888
8.0	0.0000	0.0881	0.1246	0.1526	0.1762	0.1969	0.2157
9.0	0.0000	0.0991	0.1401	0.1716	0.1982	0.2216	0.2427
10.0	0.0000	0.1101	0.1557	0.1907	0.2202	0.2462	0.2697

根据上述分析,以下我们用 MATLAB 编程,给出公式(3)的数值结果. 取 $p_I = 0.5$,那么 $p_L = 1 - p_I = 0.5$,同时我们设 $p_{BL} = 0.5$,并取 $S_0 = 10$. 注意到 σ 为回报率的年标准差,假设每年有 250 个交易日,每天有 5.5 个小时交易,每个小时有 60 分钟,所以当 $\sigma = 1$,$\tau = 10$ 分钟时,对 θ 的估计值为 $\theta = 1 \times \sqrt{10/82500} =$

0.0110.

由表 1 中 θ 的估计值,取初值 $K_A^0 = 10$,对公式(4)进行 100 次迭代得出基于不同 θ 的卖价 K_A 的逼近值如下:

表 2　K_A 的逼近值

年标准差	0 分钟	10 分钟	20 分钟	30 分钟	40 分钟	50 分钟	60 分钟
0.0	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000
1.0	10.0000	10.0481	10.0683	10.0837	10.0965	10.1079	10.1185
2.0	10.0000	10.0965	10.1366	10.1676	10.1938	10.2170	10.2379
3.0	10.0000	10.1450	10.2058	10.2527	10.2926	10.3267	10.3592
4.0	10.0000	10.1938	10.2755	10.3384	10.3918	10.4390	10.4818
5.0	10.0000	10.2429	10.3452	10.4162	10.4919	10.5514	10.6053
6.0	10.0000	10.2926	10.4158	10.5115	10.5929	10.6650	10.7307
7.0	10.0000	10.3420	10.4868	10.5993	10.6948	10.7798	10.8573
8.0	10.0000	10.3981	10.5583	10.6878	10.7981	10.8956	10.9849
9.0	10.0000	10.4417	10.6298	10.7765	10.9018	11.0130	11.1142
10.0	10.0000	10.4919	10.7022	10.8663	11.0063	11.1310	11.2448

注:当 $\theta = 0$ 时不能做分母,我们取 $\theta = 10^{-6}$ 近似代替计算

以下为对应于 K_A 的价差关于交易时间间隔 $t = \tau$ 和年波动率 σ 的图像:

从图 1 中可以看出,当年波动率 σ 不变时,卖出价差($K_A - S_0$)与交易时间间隔 τ 是正相关的,并且当交易时间充分小时,价差趋近于 0,卖出报价趋近于证券的价值,即 $K_A = S_0$. 当交易时间不变时,卖出价 K_A 随着 σ 的增大而增大,并且当年平均波动率趋近于 0 时,价差趋近于 0,$K_A = S_0$. 这与我们在经济意义上的理解是相一致的.

以下分析假设公式(3)中其他条件不变,改变知情交易者占总交易者的比率 p_I,并观察 p_I 的变化对卖出价 K_A 的影响.

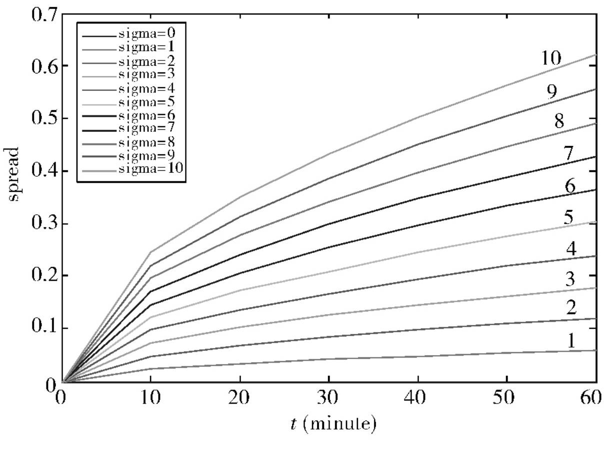

图 1　K_A 的价差关于交易时间间隔 $t = \tau$ 和年波动率 σ 的变化

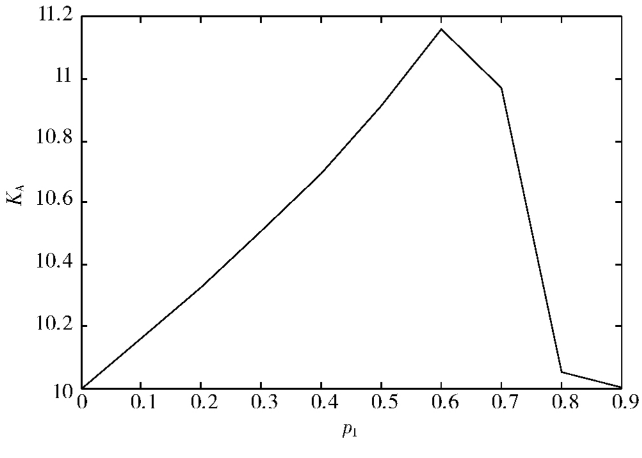

图 2　卖出价 K_A 关于 p_I 的变化

从图 2 中我们可以看到初期随着市场中知情交易者比率的增加,卖价 K_A 是递增的,但是当知情交易者比率超过 60% 的时候,卖价开始下降,并最终趋近于证券价值. 这说明,随着知情交易者数量在市场中增加,信息在不断传播,非知情交易者也变得知情,那么原有的知情交易者便失去了他的信息优势,因此也使得卖价更接近于真实值.

上述数值算例中,我们计算了在不同的年标准差和报价间隔下做市商的卖价 K_A. 通过数值结果可以看出:当其他条件不变时,标的资产的年标准差上升,卖价升高,价差变大;证券报价与交易的时间间隔越长,卖价越高,价差越大. 当其他条件不变时,知情交易者比率的增加对卖价先增后降的影响显示了信息在市场中的传播过程,这说明了及时广泛的信息传播可以降低价差,促进交易,从而有助于市场的平稳发展.

3 模型对实践的指导意义

前面部分讨论的信息模型给出了做市商定价公式和卖价的计算方法，并对金融交易中重要的交易时间和波动率对卖价的影响做了相关性分析. 这些结果对于做市商交易制度的实施具有指导意义.

首先，通过分析我们看到，交易时间间隔和价差是正相关的，而交易时间间隔越短，说明市场的交易越频繁，价差越小，买、卖价格越接近于证券真实价值. 若在较长时间间隔内无交易，价差会增大，那么可能是卖价过高，或是做市商对证券价格估计不准，此时做市商应即时调整价格，重新报价. 这既能有效促进市场的平稳运行，也在某种意义上限制了做市商暴露于知情交易者的价格风险[9].

其次，应及时进行信息披露. 我们看到卖价会随着知情交易者比率的增加而上升，但是当市场中的知情交易者占据相应比重的时候，由于信息的传播，知情交易者会失去信息优势从而使得卖价回落到接近于证券真实价值. 这从理论上说明了信息披露的重要性，及时的信息披露可以降低做市商的做市风险[10].

从整体上看，做市商定价信息模型对基于信息不对称的做市商的定价行为作了详细的分析，并给出了与经济意义相符的分析结果. 这不仅有助于我们加强对做市商定价行为的理解，而且还有助于制定正确的调控和监管措施. 从 2008 年 3 月起，国务院已经先后批复天津、武汉和重庆作为全国场外交易市场体系的试点，在这些市场中推行做市商制度，因此对于做市商定价理论的研究并将其应用于中国的金融改革，对于做市商制度在我国的顺利推行和有效监管具有重要的意义.

参考文献:

[1] 吴林祥. 做市商定价理论综述 [J]. 外国经济与管理，2000(10).

[2] Demsetz. H. The Cost of Transacting [J]. Quarterly Journal of Economics，1968(82).

[3] Mark Garman. Market Microstructure [J]. Journal of Financial Economics，1976(3).

[4] Yakov Amihud and Haim Mendelson. Dealership market: Market – making with Inventory [J]. Journal of Financial Economics，1980(3).

[5] Thomas Ho and Hans Stoll. Optimal Dealer Pricing Under Transactions and Return Uncertainty [J]. Journal of Financial Economics，1981(9).

[6] Walter Bagehot (pseud.). The Only Game in Town [J] Financial Analysis Journal，1971(27).

[7] Thomas E. Copeland and Dan Galai. Information Effect on the Bid – Ask Spread [J]. Journal of Finance，1983(38).

[8] Lawrence R. Glosten and Paul R. Milgrom. Bid，. Ask and Transaction Prices in a Specialist Market with Heterogeneously Informed Traders [J]. Journal of Financial Economics，1985(14).

[9] 莫琳·奥哈拉. 市场的微观结构理论 [M]. 北京: 中国人民大学出版社，2007.

[10] 平新乔. 微观经济学十八讲 [M]. 北京: 北京大学出版社，2001.