

基于共振原理计算语音信号的声谱图

李念 2022/4/5

摘要

首先，推导了有阻尼系统对简谐信号的响应公式。其次，对于离散信号无法用公式计算系统响应的情况，提出‘假设相邻两点线性连续再逐点计算’的方法，并给出了计算声谱图的具体代码。然后，分析了系统参数对时域频域分辨率的影响。此外，对于响应相加能近似还原信号的情况，进行了大致的分析。

目录

1、共振原理	1
2、离散信号的处理	2
3、构建一组系统并计算声谱图	3
4、系统参数对时域频域分辨率的影响	4
5、响应累加可以近似还原信号	7
6、总结	8
附录	
1) 系统响应的推导	9
2) 对多频率信号的响应	10
3) 对离散信号响应的推导	11
4) 假设线性带来的误差	13

前言

笔者在了解傅里叶变换时，一方面惊叹于其通过构造一组正交基从而将时域分析扩展到频域的神奇效果。另一方面，也发现计算声谱图常用的短时傅里叶变换STFT，也有不完美的地方。

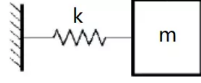
首先，它依赖于一个前提：窗口内的各个频率成分在这个窗口的时间内是不变的。这个前提和实际的语音信号会有出入。在声谱图中总是会看到各种曲线，表示着频率时时在变化。因此，用STFT总是会有误差的。

然后，由于信号包含信息的限制，会有时域分辨率和频域分辨率不可兼得的问题。而STFT通过修改窗口大小来调整二者的取舍，对各个频率的处理都是一样的。不能做到比如在高频上倾向后者，同时在低频上倾向前者。这又引出了另一种计算声谱图的方式——小波变换。

是否还有其他计算声谱图的方式？在了解傅里叶变换和小波变换时，笔者自然联想到，难道人耳也是在进行如此复杂的数学运算？于是通过查阅教科书《生理学基础》了解到人耳实际是通过耳蜗的独特构造使得传入的声音在不同部位产生的振动幅度不同。各个部位对特定频率的声音更敏感，从而产生了频域*时域的二维神经信号。这种方式显然比较灵活，对于需要的频率区间，可以通过更密集的神经细胞来获取更详细的信息。

之后笔者通过浏览与振动相关的资料，了解到了共振的概念。但通过谷歌搜索，未找到基于共振原理计算声谱图的内容，于是产生了自己动手实现的想法。相比傅里叶变换将信号分解到一组正交基的做法，通过共振计算声谱图显得低效且信息冗余，但毕竟STFT也不是完全准确的，共振的方式由于更贴近人耳，或许能捕捉到更多有用的信息，从而可能有助于语音识别和合成。因此值得做下尝试。

1、共振原理



如图，在一质量-弹簧系统上作用一简谐力 $F_{\text{信}} = A_1 \sin \omega_1 t$ 。记平衡位置为 0。t=0 时刻方块初始位置 x_0 ，初始速度 v_0 ，弹簧劲度系数为 k 。系统存在阻尼，大小为 bv 。求系统的响应 $x(t)$ 。

$$ma = F_{\text{弹}} + F_{\text{阻}} + F_{\text{信}}$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - bv + A_1 \sin \omega_1 t$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m}x + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} = \frac{A_1}{m} \sin \omega_1 t$$

$$\text{为了更直观, 令 } \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\gamma = \frac{b}{m}, \quad \text{则 } \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{A_1}{m} \sin \omega_1 t$$

具体求解过程可见附录，最后求出，当 $0 < \gamma < \omega_0$ 时（本文讨论的都是此种情况）：

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) + A'_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$\text{其中 } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad A = \sqrt{D_1^2 + D_2^2}, \quad \tan \varphi = \frac{D_1}{D_2}, \quad \text{当}$$

$$D_1 = x_0 + \frac{b\omega_1 A_1}{(k - m\omega_1^2)^2 + (b\omega_1)^2},$$

$$D_2 = \frac{1}{\omega} [(v_0 + \gamma x_0) + A_1 \frac{\gamma(b\omega_1) - \omega_1(k - m\omega_1^2)}{(k - m\omega_1^2)^2 + (b\omega_1)^2}]$$

$$A'_1 = \frac{A_1}{\sqrt{(k - m\omega_1^2)^2 + (b\omega_1)^2}}, \quad \tan \varphi'_1 = \frac{C_1}{C_2}$$

$$C_1 = \frac{-b\omega_1 A_1}{(k - m\omega_1^2)^2 + (b\omega_1)^2}, \quad C_2 = \frac{(k - m\omega_1^2) A_1}{(k - m\omega_1^2)^2 + (b\omega_1)^2}$$

$$\text{当 } \omega_1^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2 \text{ 时, } D_2 = 0, \text{ 此时 } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{当 } \omega_1^2 = \omega_0^2 \text{ 时, } C_2 = 0, \text{ 此时 } \varphi'_1 = \frac{\pi}{2}$$

第一项 $Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)$ 会随着时间迅速衰减，所以主要成分是第二项。

第二项 $A'_1 \sin(\omega_1 t + \varphi'_1)$ 中，振幅 A'_1 是关于 ω_1 的函数， $A'_1(\omega_1)$ 图像形似一条钟形曲线。

在接近 $\omega_1 = \omega_0$ 处取得峰值。这意味着只有当简谐力的频率 ω_1 接近 ω_0 时，系统响应才会较大。这种现象称为‘共振’，也正是本文计算声谱图的理论基础。

2、离散信号的处理

实际的语音信号是离散的数据，无法用前文的公式计算系统响应 $x(t)$ 。但无妨假设相邻的两点是线性连续的，然后逐个点的计算下一时刻的 x 、 v 。在处理几秒、十几秒的数据时，此假设带来的误差影响非常小（详见附录的示例）。

设语音信号的第0、1个点的值分别是 F_0 、 F_1 。则假设在这两点的时间段 $[t_0, t_1]$ 内，信号是

$$F_{\text{信}} = F_0 + ct, \quad c = \frac{F_1 - F_0}{\Delta t}。$$

$$ma = F_{\text{弹}} + F_{\text{阻}} + F_{\text{信}}$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - bv + F_0 + ct$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m}x + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m} + \frac{c}{m}t$$

$$\text{为了更直观, 令 } \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\gamma = \frac{b}{m}, \quad \text{则 } \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} + \frac{c}{m}t$$

具体求解过程可见附录，最后求出：

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) + rt + s$$

$$v(t) = Ae^{-\gamma t} [-\gamma \sin(\omega t + \varphi) + w \cos(\omega t + \varphi)] + r$$

$$\text{其中 } r = \frac{c}{k}, \quad s = \frac{F_0}{k} - \frac{bc}{k^2}, \quad A \sin \varphi = x_0 - s, \quad A \cos \varphi = \frac{v_0 - r + \gamma A \sin \varphi}{\omega}$$

初始 t_0 时刻的 x_0 和 v_0 都为0。有了 $x(t)$ 和 $v(t)$ 的公式，就可以由 x_0 、 v_0 、 F_0 、 F_1 计算出 t_1 时刻的 x_1 、 v_1 ，再由 x_1 、 v_1 、 F_1 、 F_2 计算出 t_2 时刻的 x_2 、 v_2 。以此类推，迭代计算。

```
#python3代码
#delta_t即Δt，为两个信号点之间的时间长度，等于信号采样率的倒数
#弹簧劲度系数k，方块质量m，阻尼系数b
#w0^2=k/m, y=b/2m, w^2=w0^2-y^2
import numpy as np
coswt = np.cos(w*delta_t)
sinwt = np.sin(w*delta_t)
envelope = np.exp(-y*delta_t)
def cal_ite(x0, v0, F0, F1):
    c = (F1-F0)/delta_t
    r = c/k
    s = F0/k-(b*c)/(k**2)
    Asina = x0-s
    Acosa = (v0-r+y*Asina)/w
    Asinwta = Acosa*sinwt + Asina*coswt
    Acoswta = Acosa*coswt - Asina*sinwt
    x = envelope*Asinwta + r*delta_t + s
    v = envelope*(-y*Asinwta+w*Acoswta) + r
    return x, v

x = np.zeros((signal_len,), dtype='float32')
v = np.zeros((signal_len,), dtype='float32')
for i in range(1, signal_len, 1):
    x[i], v[i] = cal_ite(x[i-1], v[i-1], signal[i-1], signal[i])
#此时x即为系统响应
```

3、构建一组系统并计算声谱图

通过设置不同的系统参数 k 、 m 、 b 可以得到一组对不同频率信号敏感的系统。

此处采取固定 m ，调整 k 、 b 的做法。至于这3个参数对时域频域分辨率的影响，会在下节讨论。此外，前面用到的 $\sin\omega t$ 是弧度形式，计算声谱图时要换为 $\sin 2\pi ft$ 。例如 $\sin 200\pi t$ 的信号，表示频率是100Hz， t 的单位是秒。

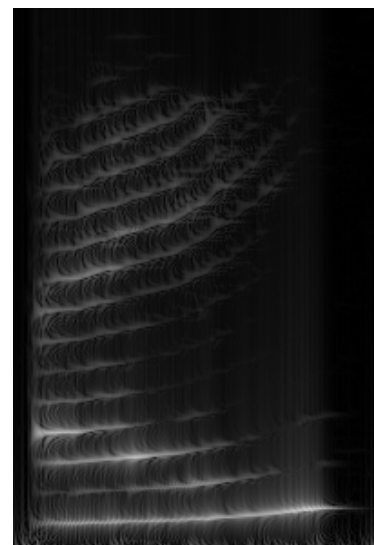
```
#系统参数设置
f0 = np.arange(20, 3020, 10, dtype='float32')#此处未使用梅尔标度
w0 = 2*np.pi*f0
m = 1/(2*np.pi)**2
b = 3
k = m*w0**2
y = b/(2*m)
w = np.sqrt(w0**2 - y**2)
f_num = f0.shape[0]#系统的个数

#准备信号
path = 'wav/女声a第二声.wav'#这是个单声道文件
signal, sr = sf.read(path, dtype='float32')#sr是采样率
signal_len = signal.shape[0]
delta_t = 1/samplerate#Δt, 点间距表示的时长
timeline= np.arange(0,signal_len/samplerate,delta_t)#时间轴
signal = signal*1e8#将信号放大, 作用下节会讨论

#计算系统响应
x = np.zeros((f_num, signal_len), dtype='float32')
v = np.zeros((f_num, signal_len), dtype='float32')
time1 = time.time()
for i in range(1, signal_len, 1):
    x[:,i], v[:,i] = cal_ite(x[:,i-1], v[:,i-1], signal[i-1], signal[i])
#此时x即为这组系统的响应

#由响应结果得到声谱图
x = x*(b*w0).reshape(f_num,1)#对各个系统的响应乘上系统的b和ω0, 作用下节会讨论
x = abs(x)
x = x/np.max(x)#处理语音信号常取对数, 此处未使用
#此时x还是一个非常宽的数组, 需要压缩响应的长度
```

右边是将 x 保存为tiff格式的图片，并将宽度压缩500倍后得到的声谱图（未标注时间轴和频率轴）。可以清晰地看到各个共振峰。



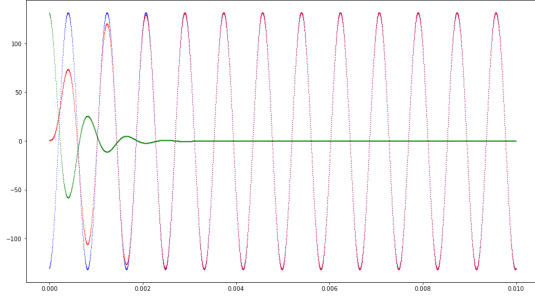
4、系统参数对时域频域分辨率的影响

1) 时域

声谱图需要的信息是响应的振幅大小，而响应 $x(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) + A'_1 \sin(\omega_1 t + \varphi'_1)$

中第一项是衰减的，第二项是稳定的。因此第二项能更好地反映响应的振幅大小。

下图是某个系统对某个信号的响应，红、绿、蓝3条曲线分别为x(t)、第一项、第二项。



显然，我们希望降低第一项的影响。这体现在两个方面：需要更大的 γ 和更小的 $\frac{A}{A'_1}$ 。

一是，更大的 γ ，可以让第一项更快衰减，从而x(t)能更快稳定。此外，当信号结束时，x(t)也能更快衰减为0。由于 $\gamma = \frac{b}{2m}$ ，因此需要的是更大的b、更小的m。

二是，尽量小的 $\frac{A}{A'_1}$ ，可以相对减小第一项对x(t)的影响。

前文第1节有A和A'1的公式，可以整理为：

$$A = \sqrt{\frac{1}{\omega^2} [(\omega_0^2 x_0^2 + v_0^2 + 2\gamma v_0 x_0) + 2A_1 \omega_1 \frac{\omega_0^2 x_0 b + v_0 \gamma b - (v_0 + \gamma x_0)(k - m\omega_1^2)}{(k - m\omega_1^2)^2 + (b\omega_1)^2} + \frac{(A_1 \omega_1)^2}{(k - m\omega_1^2)^2 + (b\omega_1)^2}]}$$

$$A'_1 = \frac{A_1}{\sqrt{(k - m\omega_1^2)^2 + (b\omega_1)^2}}$$

于是有

$$\left(\frac{A}{A'_1}\right)^2 = \frac{1}{\omega^2} [(\omega_0^2 x_0^2 + v_0^2 + 2\gamma v_0 x_0) + 2A_1 \omega_1 \frac{\omega_0^2 x_0 b + v_0 \gamma b - (v_0 + \gamma x_0)(k - m\omega_1^2)}{(k - m\omega_1^2)^2 + (b\omega_1)^2} + \frac{(A_1 \omega_1)^2}{(k - m\omega_1^2)^2 + (b\omega_1)^2}] \frac{(k - m\omega_1^2)^2 + (b\omega_1)^2}{A_1^2}$$

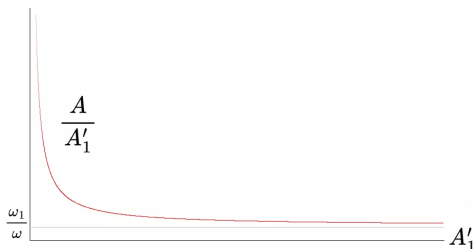
$$= \frac{1}{(A_1 \omega)^2} \{(\omega_0^2 x_0^2 + v_0^2 + 2\gamma v_0 x_0)[(k - m\omega_1^2)^2 + (b\omega_1)^2] + 2A_1 \omega_1 [\omega_0^2 x_0 b + v_0 \gamma b - (v_0 + \gamma x_0)(k - m\omega_1^2)] + (A_1 \omega_1)^2\}$$

$$= \frac{1}{\omega^2} \left\{ \frac{(\omega_0^2 x_0^2 + v_0^2 + 2\gamma v_0 x_0)[(k - m\omega_1^2)^2 + (b\omega_1)^2]}{A_1^2} + \frac{2\omega_1 [\omega_0^2 x_0 b + v_0 \gamma b - (v_0 + \gamma x_0)(k - m\omega_1^2)]}{A_1} + \omega_1^2 \right\}$$

显然对于给定的系统参数和初始条件，有 $\lim_{A_1 \rightarrow \infty} \frac{A}{A'_1} = \frac{\omega_1}{\omega}$ 。

这意味着只要把信号的振幅A1放大， $\frac{A}{A'_1}$ 就接近 $\frac{\omega_1}{\omega}$ ，其中 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ 。

两者的关系如下图所示。至于A1要放大到什么程度比较合适，要根据具体情况而定。



做个小结，为了提高时域分辨率，我们需要更大 γ ，并放大信号的振幅。

2) 频域

下面分析对于给定频率为 ω_1 的信号，输入到怎样的系统中，响应最大。

直接看 $x(t)$ 的第二项 $A'_1 = \frac{A_1}{\sqrt{(k - m\omega_1^2)^2 + (b\omega_1)^2}}$

若 b 为固定的正数，则当 $(k - m\omega_1^2)^2 = 0$ 即 $\omega_0 = \omega_1$ 时， A'_1 取得最大值 $\frac{A_1}{b\omega_1}$ 。换言之， ω_0 越远离 ω_1 、 b 越大，则 A'_1 越小。

而为了提高频域分辨率，需要 $\omega_0 \neq \omega_1$ 的系统，相对于 $\omega_0 = \omega_1$ 的系统的响应尽量小。

设 $A'_1(\omega_0^2) = \frac{A_1}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (b\omega_1)^2}}$ 为关于 ω_0^2 的函数，则问题变为：

怎样使 $\frac{A'_1(\omega_1^2 + \Delta)}{A'_1(\omega_1^2)}$ 尽量小？

$$\frac{A'_1(\omega_1^2 + \Delta)}{A'_1(\omega_1^2)} = \sqrt{\frac{(b\omega_1)^2}{m^2(\omega_1^2 + \Delta - \omega_1^2)^2 + (b\omega_1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{m\Delta}{b\omega_1})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\Delta}{2\gamma\omega_1})^2}}$$

显然答案是更小的 γ ，或者说是更大的 m 、更小的 b 。

此外，这里讨论的是给定信号频率 ω_1 的情况，但其实也可以看出， ω_1 越大，这个比值越大。即频率越高，分辨率越差。这应该很正常，同样是10的差距，30是20的1.5倍，而2010只是20的1.005倍。

3) 掩蔽效应

当信号包含多个频率的成分，即 $\sum_{i=1}^n A_i \sin \omega_i t$ ， $n \geq 2$ 。这时系统响应为：

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) + \sum_{i=1}^n A'_i \sin(\omega_i t + \varphi'_i), \text{ 其中 } A'_i \text{ 和 } A_i \text{ 正相关。推导过程可见附录。}$$

可以看出，如果信号中某个频率比如 ω_c 的振幅远大于其他频率的，则这个频率成分会对 $\omega_0 \neq \omega_c$ 的系统的响应也产生较大影响，这就降低了这些系统响应对 ω_i 等于系统固有频率的信号成分的表现力度。

举个例子，将信号 $A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t$ 输入到一个固有频率为 $\omega_0 = \omega_1$ 的系统中，则系统响应为 $x(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) + A'_1 \sin(\omega_1 t + \varphi'_1) + A'_2 \sin(\omega_2 t + \varphi'_2)$ 。

我们期望的是信号中 ω_1 的振幅 A_1 ，能在 $x(t)$ 中得到清晰地体现。但如果 A_2 远大于 A_1 ，导致响应中 A'_2 也大于 A'_1 ，那么我们就难以觉察出信号中有 ω_1 的成分。这可称作是‘掩蔽效应’。

下面分析对于给定固有频率为 ω_0 的系统，响应中 A'_i 和信号频率 ω_i 的关系。

$$A'_i = \frac{A_i}{\sqrt{(k - m\omega_i^2)^2 + (b\omega_i)^2}} = \frac{A_i}{\sqrt{[m\omega_i^2 - (k - \frac{b^2}{2m})]^2 + \frac{b^2}{m}(k - \frac{b^2}{4m})}} = \frac{A_i}{\sqrt{m^2[\omega_i^2 - (\omega_0^2 - 2\gamma^2)]^2 + b^2(\omega_0^2 - \gamma^2)}}$$

注意本文讨论的都是 $0 < \gamma < \omega_0$ 即 $0 < b < 2\sqrt{km}$ 的情况

①若 $\omega_0^2 > 2\gamma^2$ 即 $0 < b < \sqrt{2km}$

当 $\omega_i^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2$ 时，取得最大值 $A'_i = \frac{A_i}{b\omega}$

②若 $\omega_0^2 \leq 2\gamma^2$ 即 $\sqrt{2km} < b < 2\sqrt{km}$

由于 $\omega_i^2 > 0$ ，所以 ω_i^2 越接近0， A_i' 越大。

可见，对于固有频率为 ω_0 的系统，即使信号中各频率成分的振幅相同，响应中振幅最大的也不是 $\omega_i = \omega_0$ 的成分，而是 $\omega_i < \omega_0$ 。这意味着信号中低频成分对高频成分的掩蔽效应更显著。笔者通过查阅资料得知，这和人耳的掩蔽效应是吻合的。

设 $A_i'(\omega_i^2)$ 是关于 ω_i^2 的函数。由上面的分析可知，若不限制 $\omega_i^2 > 0$ ，则 $A_i'(\omega_i^2)$ 是一条对称的钟形曲线，在 $\omega_i^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2$ 处取得峰值。为了削弱掩蔽效应，一是要使 $A_i'(\omega_0^2 - 2\gamma^2)$ 更接近 $A_i'(\omega_0^2)$ ，二是要使 $A_i'(\omega_0^2 + \Delta)$ 相比 $A_i'(\omega_0^2)$ 更小，其中 $\Delta > 0$ 。

$$-, \quad \frac{A_i'(\omega_0^2 - 2\gamma^2)}{A_i'(\omega_0^2)} = \sqrt{\frac{4m^2\gamma^4 + b^2(\omega_0^2 - \gamma^2)}{b^2(\omega_0^2 - \gamma^2)}} = \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{(\frac{\omega_0}{\gamma})^2 - 1}}$$

注意本文只讨论小阻尼即 $\gamma < \omega_0$ 的情况。因此 γ 越小，这个比值越接近1。

$$\begin{aligned} =, \quad \frac{A_i'(\omega_0^2 + \Delta)}{A_i'(\omega_0^2)} &= \sqrt{\frac{4m^2\gamma^4 + b^2(\omega_0^2 - \gamma^2)}{m^2(\Delta + 2\gamma^2)^2 + b^2(\omega_0^2 - \gamma^2)}} = \sqrt{\frac{4\gamma^4 + 4\gamma^2(\omega_0^2 - \gamma^2)}{(\Delta + 2\gamma^2)^2 + 4\gamma^2(\omega_0^2 - \gamma^2)}} \\ &= \sqrt{\frac{4\gamma^2\omega_0^2}{\Delta^2 + 4\Delta\gamma^2 + 4\gamma^2\omega_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta}{\omega_0^2} + \frac{\Delta^2}{4\gamma^2\omega_0^2}}} \end{aligned}$$

可见， γ 越小，这个比值越小。

4) 小结

掩蔽效应其实也降低了频域分辨率，可见为了提高频域分辨率，我们希望的是减小 γ 。但另一方面，减小 γ 又会降低时域分辨率，因此需要权衡。实际如何取值，可能要依据经验而定，因为就计算声谱图这个目的而言，没有一个量化的标准。或许可以在语音识别或合成的深度学习的模型中作为可学习的参数，但会大幅增加计算量。

除了增大 γ ，提高时域分辨率还有一个效果有限的方式，即对信号进行放大。这不会影响频域分辨率。此外还有一点需要考虑，频率 ω_i 的信号输入到 $\omega_0 = \omega_i$ 的系统，响应中 ω_i 的成分的振幅为 $\frac{A_i}{b\omega_i}$ ，这缩小了信号的振幅。为了让声谱图更准确地体现出不同频率的振幅的对比，可以让各个系统的响应乘上 b 和 ω_0 。

5、响应累加可以近似还原信号

将语音信号输入到一组系统中，会得到一组响应数组。笔者试着将这组响应直接相加，发现可以得到清晰的语音，只是相比原信号，整体音色有些变化。下面尝试作出分析。

信号 $A_1 \sin \omega_1 t$ 输入到一组系统中，系统响应为

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) + A'_1 \sin(\omega_1 t + \varphi'_1)$$

$$\text{其中 } A'_1 = \frac{A_1}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (b\omega_1)^2}}, \quad \tan \varphi'_1 = \frac{-b\omega_1}{k - m\omega_1^2} = \frac{-2\gamma\omega_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2}$$

$$\text{当 } \omega_1^2 = \omega_0^2 \text{ 时, } k - m\omega_1^2 = 0, \text{ 此时 } \varphi'_1 = \frac{\pi}{2}$$

设 $A'_1(\omega_0^2)$ 、 $\varphi'_1(\omega_0^2)$ 都是关于 ω_0^2 的函数。

若不限制 $\omega_1^2 > 0$ ，则 $A'_1(\omega_0^2)$ 是一条关于 $\omega_0^2 = \omega_1^2$ 对称的钟形曲线，在 $\omega_0^2 = \omega_1^2$ 处取得峰值 $\frac{A_1}{b\omega_1}$ 。而 $\varphi'_1(\omega_0^2)$ 关于 $\omega_0^2 = \omega_1^2$ 中心对称， $\varphi'_1(\omega_1^2) = \frac{\pi}{2}$ 。

若给定3个系统，阻尼系数、质量都是b、m，固有频率分别为 $\sqrt{\omega_1^2 - \Delta}$ 、 ω_1 、 $\sqrt{\omega_1^2 + \Delta}$ ，

输入 $A_1 \sin \omega_1 t$ 的信号，系统响应分别为：

$$x_c(t) = A_c e^{-\gamma t} \sin(\omega_c t + \varphi_c) + A'_{1c} \sin(\omega_1 t + \varphi'_{1c})$$

$$x_d(t) = A_d e^{-\gamma t} \sin(\omega_d t + \varphi_d) + A'_{1d} \sin(\omega_1 t + \varphi'_{1d})$$

$$x_e(t) = A_e e^{-\gamma t} \sin(\omega_e t + \varphi_e) + A'_{1e} \sin(\omega_1 t + \varphi'_{1e})$$

由上面的分析知， $A_{1d} = \frac{A_1}{b\omega_1}$ ， $\varphi_{1d} = \frac{\pi}{2}$ ，

$$A_{1c} = A_{1e} = \frac{A_1}{\sqrt{(m\Delta)^2 + (b\omega_1)^2}}, \quad \varphi'_{1c} = -\varphi'_{1e}, \quad \tan \varphi'_{1c} = \frac{2\gamma\omega_1}{\Delta}$$

响应中的第一项是随时间衰减的，第二项是稳定的。这里将3个响应的第二项相加，结果是：

$$2A'_{1c} \sin \omega_1 t \cos \varphi'_{1c} + A'_{1d} \cos \omega_1 t$$

令 $C_1 = A'_{1d}$ ， $C_2 = 2A'_{1c} \cos \varphi'_{1c}$ ，结果可表示为 $A'_{1s} \sin(\omega_1 t + \varphi'_{1s})$

$$\text{其中 } A'_{1s} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = A_1 \sqrt{\frac{1}{(b\omega_1)^2} + \frac{4\cos^2 \varphi'_{1c}}{(m\Delta)^2 + (b\omega_1)^2}}, \quad \tan \varphi'_{1s} = \frac{C_1}{C_2}$$

可见相加的结果仍是频率为 ω_1 的正弦函数，只是振幅和相位发生了变化。

如果让各个系统的响应乘上b和 ω_0 ，相加结果为：

$$2b\omega_1 A'_{1c} \sin \omega_1 t \cos \varphi'_{1c} - 2b\Delta A'_{1c} \cos \omega_1 t \sin \varphi'_{1c} + b\omega_1 A'_{1d} \cos \omega_1 t$$

$$= 2b\omega_1 A'_{1c} \cos \varphi'_{1c} \sin \omega_1 t + (b\omega_1 A'_{1d} - 2b\Delta A'_{1c} \sin \varphi'_{1c}) \cos \omega_1 t$$

$$\text{令 } C_1 = b\omega_1 A'_{1d} - 2b\Delta A'_{1c} \sin \varphi'_{1c} = A_1 - \frac{2A_1 \sin \varphi'_{1c}}{\sqrt{(\frac{m}{b})^2 + (\frac{\omega_1}{\Delta})^2}},$$

$$C_2 = 2b\omega_1 A'_{1c} \cos \varphi'_{1c} = \frac{2A_1 \cos \varphi'_{1c}}{\sqrt{(\frac{m\Delta}{b\omega_1})^2 + 1}},$$

结果可表示为 $A'_{1s} \sin(\omega_1 t + \varphi'_{1s})$

$$\text{其中 } A'_{1s} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = A_1 \sqrt{\left(1 - \frac{2\sin\varphi'_{1c}}{\sqrt{\left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{\omega_1}{\Delta}\right)^2}}\right)^2 + \left(\frac{2\cos\varphi'_{1c}}{\sqrt{\left(\frac{m\Delta}{b\omega_1}\right)^2 + 1}}\right)^2},$$

$$\tan\varphi'_{1s} = \frac{C_1}{C_2}$$

结论也是一样的。

各个系统响应直接相加的结果，相比原信号，除了相位的变化，还有3个方面需要考虑到。一是响应中还有衰减项，只是影响相对较小。二是一组系统的固有频率的范围，不可能关于信号中各个频率对称。但所幸信号中 ω_i 的成分，在固有频率远离 ω_i 的系统中响应非常小，因此这点导致的差异也有限。三是相加结果中振幅是和信号频率有关的，这使得信号中各个频率成分的振幅分布发生了变化，高频成分相对被削弱。即使让各个系统的响应乘上 b 和 ω_0 ，能改善高频成分相对被削弱的情况，但振幅还是和信号频率有关，具体情况则难以分析。

6、总结

本文证明了基于共振原理计算声谱图是可行的，并分析了系统参数的影响，为优化提供了理论依据。但也需指出，由于信号中任何频率成分都会影响每个系统的响应，因此所得声谱图的信息的体现，依赖于同一时刻不同系统响应的对比。这意味着需要更密集的系统，更多的计算量。相比短时傅里叶变换，共振的方式非常低效，显然不适合非语音信号的任务。但对于语音识别或合成，由于共振的方式更贴近人耳，因此有可能会得到一些效果，这有待于后续验证。

附录

1) 系统响应的推导

解二阶常系数非齐次线性微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = \frac{A_1}{m}\sin\omega_1t$

$$\text{其中 } \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\gamma = \frac{b}{m}$$

①先求对应齐次的通解

$$\text{特征方程 } r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0, \quad r = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

所以对应齐次的通解, 分 $\gamma < \omega_0$ 、 $\gamma = \omega_0$ 、 $\gamma > \omega_0$ 这3种情况。

本文只讨论小阻尼即 $\gamma < \omega_0$ 的情况。

$$\text{特征方程的根是 } r = -\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}i, \text{ 为了更直观, 令 } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

所以对应齐次的通解 $X = e^{-\gamma t}(D_1\cos\omega t + D_2\sin\omega t)$, D_1 、 D_2 是常数。

②再求一个 $x(t)$ 的特解

这是 $f(t) = e^{\lambda t}[P_l(t)\cos\omega t + Q_n(t)\sin\omega t]$ 型的二阶常系数非齐次线性微分方程。

显然 $0 \pm \omega_1 i$ 不是特征方程的根, 所以设特解 $x^* = C_1\cos\omega_1 t + C_2\sin\omega_1 t$, C_1 、 C_2 是常数。

$$\text{则 } x' = -C_1\omega_1\sin\omega_1 t + C_2\omega_1\cos\omega_1 t, \quad x'' = -C_1\omega_1^2\cos\omega_1 t - C_2\omega_1^2\sin\omega_1 t$$

代入原微分方程得

$$-C_1\omega_1^2\cos\omega_1 t - C_2\omega_1^2\sin\omega_1 t - 2\gamma C_1\omega_1\sin\omega_1 t + 2\gamma C_2\omega_1\cos\omega_1 t + C_1\omega_0^2\cos\omega_1 t + C_2\omega_0^2\sin\omega_1 t = \frac{A_1}{m}\sin\omega_1 t$$

$$\text{即 } -C_1\omega_1^2\cos\omega_1 t + 2\gamma C_2\omega_1\cos\omega_1 t + C_1\omega_0^2\cos\omega_1 t = 0$$

$$\text{和 } -C_2\omega_1^2\sin\omega_1 t - 2\gamma C_1\omega_1\sin\omega_1 t + C_2\omega_0^2\sin\omega_1 t = \frac{A_1}{m}\sin\omega_1 t$$

$$\text{联立求解得 } C_1 = \frac{-(2\gamma\omega_1)\frac{A_1}{m}}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2\gamma\omega_1)^2}, \quad C_2 = \frac{(\omega_0^2 - \omega_1^2)\frac{A_1}{m}}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2\gamma\omega_1)^2}$$

$$\text{分子分母同时乘以 } m^2 \text{ 得 } C_1 = \frac{-b\omega_1 A_1}{(k - m\omega_1^2)^2 + (b\omega_1)^2}, \quad C_2 = \frac{(k - m\omega_1^2)A_1}{(k - m\omega_1^2)^2 + (b\omega_1)^2}$$

$$\text{所以特解 } x^* = \frac{-b\omega_1 A_1}{(k - m\omega_1^2)^2 + (b\omega_1)^2}\cos\omega_1 t + \frac{(k - m\omega_1^2)A_1}{(k - m\omega_1^2)^2 + (b\omega_1)^2}\sin\omega_1 t$$

为了更直观, 可将特解化为 $x^* = A'_1\sin(\omega_1 t + \varphi'_1)$

$$\text{只需令 } C_1 = A'_1\sin\varphi'_1, \quad C_2 = A'_1\cos\varphi'_1 \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

$$\text{则 } A'_1 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \frac{A_1}{\sqrt{(k - m\omega_1^2)^2 + (b\omega_1)^2}}, \quad \tan\varphi'_1 = \frac{C_1}{C_2} = \frac{-b\omega_1}{(k - m\omega_1^2)}$$

$$\text{当 } \omega_1^2 = \omega_0^2 \text{ 时, } C_2 = 0, \text{ 此时 } \varphi'_1 = \frac{\pi}{2}$$

③最后求通解中的常数

$$x(t) = e^{-\gamma t}(D_1\cos\omega t + D_2\sin\omega t) + \frac{-b\omega_1 A_1}{(k - m\omega_1^2)^2 + (b\omega_1)^2}\cos\omega_1 t + \frac{(k - m\omega_1^2)A_1}{(k - m\omega_1^2)^2 + (b\omega_1)^2}\sin\omega_1 t$$

$$v(t) = -\gamma e^{-\gamma t}(D_1\cos\omega t + D_2\sin\omega t) + e^{-\gamma t}(-D_1\omega\sin\omega t + D_2\omega\cos\omega t) + \frac{b\omega_1^2 A_1}{(k - m\omega_1^2)^2 + (b\omega_1)^2}\sin\omega_1 t + \frac{(k - m\omega_1^2)\omega_1 A_1}{(k - m\omega_1^2)^2 + (b\omega_1)^2}\cos\omega_1 t$$

根据初值条件, $t=0$ 时的 x 和 v , 确定常数

$$x_0 = D_1 + \frac{-b\omega_1 A_1}{(k - m\omega_1^2)^2 + (b\omega_1)^2}$$

$$v_0 = -D_1\gamma + D_2\omega + \omega_1 \frac{(k - m\omega_1^2)A_1}{(k - m\omega_1^2)^2 + (b\omega_1)^2}$$

$$\text{解得 } D_1 = x_0 + \frac{b\omega_1 A_1}{(k - m\omega_1^2)^2 + (b\omega_1)^2} ,$$

$$D_2 = \frac{1}{\omega} [(v_0 + \gamma x_0) + A_1 \frac{\gamma(b\omega_1) - \omega_1(k - m\omega_1^2)}{(k - m\omega_1^2)^2 + (b\omega_1)^2}]$$

$$\text{所以 } x = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) + A'_1 \sin(\omega_1 t + \varphi'_1)$$

$$\text{其中 } A = \sqrt{D_1^2 + D_2^2} , \quad \tan\varphi = \frac{D_1}{D_2} . \text{ 当 } \omega_1^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2 \text{ 时, } D_2 = 0 , \text{ 此时 } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

2) 对多频率信号的响应

$$\text{给定 } F_{\text{信}} = \sum_{i=1}^n A_i \sin\omega_i t$$

$$ma = F_{\text{弹}} + F_{\text{阻}} + F_{\text{信}}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{m} \sin\omega_i t$$

由上一小节知, 给定 $F_{\text{信}} = A_i \sin\omega_i t$, $x(t)$ 的一个特解是

$$x_i^* = \frac{-b\omega_i A_i}{(k - m\omega_i^2)^2 + (b\omega_i)^2} \cos\omega_i t + \frac{(k - m\omega_i^2)A_i}{(k - m\omega_i^2)^2 + (b\omega_i)^2} \sin\omega_i t$$

再根据定理: 若 y_1^* 、 y_2^* , 分别是 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$ 、 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$

的特解, 则 $y_1^* + y_2^*$ 是 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ 的特解。

可知 $x(t)$ 的一个特解是

$$x^* = \sum_{i=1}^n \left[\frac{-b\omega_i A_i}{(k - m\omega_i^2)^2 + (b\omega_i)^2} \cos\omega_i t + \frac{(k - m\omega_i^2)A_i}{(k - m\omega_i^2)^2 + (b\omega_i)^2} \sin\omega_i t \right]$$

而 $x(t)$ 的通解 = 对应齐次的通解 + $x(t)$ 的特解, 所以通解

$$x(t) = e^{-\gamma t} (D_1 \cos\omega t + D_2 \sin\omega t) + \sum_{i=1}^n \left[\frac{-b\omega_i A_i}{(k - m\omega_i^2)^2 + (b\omega_i)^2} \cos\omega_i t + \frac{(k - m\omega_i^2)A_i}{(k - m\omega_i^2)^2 + (b\omega_i)^2} \sin\omega_i t \right]$$

再由初值条件 $t=0$ 时的 x_0 和 v_0 来确定常数

$$D_1 = x_0 + \sum_{i=1}^n \frac{b\omega_i A_i}{(k - m\omega_i^2)^2 + (b\omega_i)^2} ,$$

$$D_2 = \frac{1}{\omega} [(v_0 + \gamma x_0) + \sum_{i=1}^n A_i \frac{\gamma(b\omega_i) - \omega_i(k - m\omega_i^2)}{(k - m\omega_i^2)^2 + (b\omega_i)^2}]$$

$$\text{于是可以写成 } x(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) + \sum_{i=1}^n A'_i \sin(\omega_i t + \varphi'_i)$$

$$\text{其中 } A = \sqrt{D_1^2 + D_2^2} , \quad \tan\varphi = \frac{D_1}{D_2}$$

$$A'_i = \frac{A_i}{\sqrt{(k - m\omega_i^2)^2 + (b\omega_i)^2}} , \quad \tan\varphi'_i = \frac{-b\omega_i}{(k - m\omega_i^2)}$$

3) 对离散信号响应的推导

解二阶常系数非齐次线性微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = \frac{F_0}{m} + \frac{c}{m}t$

$$\text{其中 } \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\gamma = \frac{b}{m}$$

①先求对应齐次的通解

$$\text{特征方程 } r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0, \quad r = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

所以对应齐次的通解, 分 $\gamma < \omega_0$ 、 $\gamma = \omega_0$ 、 $\gamma > \omega_0$ 这3种情况。

本文只讨论小阻尼即 $\gamma < \omega_0$ 的情况。

$$\text{特征方程的根是 } r = -\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}i, \text{ 为了更直观, 令 } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

所以对应齐次的通解 $X = e^{-\gamma t}(D_1 \cos \omega t + D_2 \sin \omega t)$, D_1 、 D_2 是常数。

②再求一个 $x(t)$ 的特解

这是 $f(t) = e^{\lambda t}P_m(t)$ 型的二阶常系数非齐次线性微分方程。

显然0不是特征方程的根, 所以设特解 $x^* = C_1 t + C_2$, C_1 、 C_2 是常数。

$$\text{则 } x' = C_1, \quad x'' = 0$$

$$\text{代入原微分方程得 } 0 + 2\gamma C_1 + \omega_0^2(C_1 t + C_2) = \frac{F_0}{m} + \frac{c}{m}t$$

$$\text{解得 } C_1 = \frac{c}{m\omega^2} = \frac{c}{k}, \quad C_2 = \frac{F_0}{m\omega^2} - \frac{2\gamma c}{m\omega^4} = \frac{F_0}{k} - \frac{bc}{k^2}$$

$$\text{所以特解 } x^* = \frac{c}{k}t + \frac{F_0}{k} - \frac{bc}{k^2}$$

③最后求通解中的常数

$$x(t) = e^{-\gamma t}(D_1 \cos \omega t + D_2 \sin \omega t) + \frac{c}{k}t + \frac{F_0}{k} - \frac{bc}{k^2}$$

$$v(t) = e^{-\gamma t}[(-\gamma D_1 + D_2 \omega) \cos \omega t + (-\gamma D_2 - D_1 \omega) \sin \omega t] + \frac{c}{k}$$

再根据初值条件, $t=0$ 时的 x 和 v , 确定常数

$$x_0 = D_1 + \frac{F_0}{k} - \frac{bc}{k^2}$$

$$v_0 = -D_1 \gamma + D_2 \omega + \frac{c}{k}$$

$$\text{解得 } D_1 = x_0 - \frac{F_0}{k} + \frac{bc}{k^2}, \quad D_2 = \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega} - \frac{\gamma}{\omega} \frac{F_0}{k} + \frac{\gamma}{\omega} \frac{bc}{k^2} - \frac{c}{\omega k}$$

另一种解法是:

$$\text{令 } D_1 = A \sin \varphi, \quad D_2 = A \cos \varphi, \quad r = \frac{c}{k}, \quad s = \frac{F_0}{k} - \frac{bc}{k^2}$$

$$\text{则 } x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) + r t + s$$

$$v(t) = A e^{-\gamma t} [-\gamma \sin(\omega t + \varphi) + \omega \cos(\omega t + \varphi)] + r$$

$$\text{其中 } A = \sqrt{D_1^2 + D_2^2}, \quad \tan \varphi = \frac{D_1}{D_2}$$

再根据初值条件, $t=0$ 时的 x 和 v , 确定 $A \sin \varphi$ 和 $A \cos \varphi$

$$x_0 = A \sin \varphi + s$$

$$v_0 = -\gamma A \sin \varphi + \omega A \cos \varphi + r$$

$$\text{解得 } A \sin \varphi = x_0 - s, \quad A \cos \varphi = \frac{v_0 - r + \gamma A \sin \varphi}{\omega}$$

再根据三角函数的和差公式

$$A \sin(\omega t + \varphi) = A \sin(\omega t) \cos \varphi + A \cos(\omega t) \sin \varphi$$

$$A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos(\omega t) \cos \varphi - A \sin(\omega t) \sin \varphi$$

就可以得到 $x(t)$ 、 $v(t)$

还可以写成更直观的方式：

设离散信号的长度为 n ，采样率为 s_r ，令 $\Delta t = 1/s_r$ ，则有，

$$x_i(t) = A_i e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi_i) + r_i t + s_i, \quad i \geq 1$$

$$v_i(t) = A_i e^{-\gamma t} [-\gamma \sin(\omega t + \varphi_i) + \omega \cos(\omega t + \varphi_i)] + r_i$$

$$\text{其中 } c_i = \frac{F_i - F_{i-1}}{\Delta t}, \quad r_i = \frac{c_i}{k}, \quad s_i = \frac{F_{i-1}}{k} - \frac{bc_i}{k^2},$$

$$A_i \sin \varphi_i = x_{i-1} - s_i, \quad A_i \cos \varphi_i = \frac{v_{i-1} - r_i + \gamma A_i \sin \varphi_i}{\omega}$$

$$\begin{aligned} x_i(t) &= e^{-\gamma t} [(x_{i-1} - s_i) \cos \omega t + \frac{v_{i-1} - r_i + \gamma(x_{i-1} - s_i)}{\omega} \sin \omega t] + r_i t + s_i \\ &= e^{-\gamma t} \left[\left(\cos \omega t + \frac{\gamma \sin \omega t}{\omega} \right) (x_{i-1} - s_i) + \frac{\sin \omega t}{\omega} (v_{i-1} - r_i) \right] + r_i t + s_i \\ &= e^{-\gamma t} \left(\cos \omega t + \frac{\gamma \sin \omega t}{\omega} \right) x_{i-1} + e^{-\gamma t} \frac{\sin \omega t}{\omega} v_{i-1} + [1 - e^{-\gamma t} \left(\cos \omega t + \frac{\gamma \sin \omega t}{\omega} \right)] s_i + (t - e^{-\gamma t} \frac{\sin \omega t}{\omega}) r_i \end{aligned}$$

$$\text{令 } g = e^{-\gamma \Delta t} \left(\cos \omega \Delta t + \frac{\gamma \sin \omega \Delta t}{\omega} \right), \quad h = e^{-\gamma \Delta t} \frac{\sin \omega \Delta t}{\omega},$$

$$\text{则 } x_i = x_i(\Delta t) = g x_{i-1} + h v_{i-1} + (1 - g) s_i + (\Delta t - h) r_i$$

$$v_i(t) = e^{-\gamma t} \left\{ -\gamma [(x_{i-1} - s_i) \cos \omega t + \frac{v_{i-1} - r_i + \gamma(x_{i-1} - s_i)}{\omega} \sin \omega t] + \omega \left[\frac{v_{i-1} - r_i + \gamma(x_{i-1} - s_i)}{\omega} \cos \omega t - (x_{i-1} - s_i) \sin \omega t \right] \right\} + r_i$$

$$= e^{-\gamma t} \left[-\left(\frac{\gamma^2}{\omega} + \omega \right) \sin \omega t (x_{i-1} - s_i) + e^{-\gamma t} \left[\frac{-\gamma \sin \omega t}{\omega} + \cos \omega t \right] (v_{i-1} - r_i) \right] + r_i$$

$$\text{令 } p = e^{-\gamma \Delta t} \left[-\left(\frac{\gamma^2}{\omega} + \omega \right) \sin \omega \Delta t \right], \quad q = e^{-\gamma \Delta t} \left[\frac{-\gamma \sin \omega \Delta t}{\omega} + \cos \omega \Delta t \right]$$

$$\text{则 } v_i = v_i(\Delta t) = p x_{i-1} + q v_{i-1} - p s_i + (1 - q) r_i$$

给定采样率，对每个系统而言， g 、 h 、 p 、 q 是确定的，于是可以提前计算出来，减小总的计算次数。

4) 假设线性带来的误差

评估假设线性带来的误差，笔者采取的方式是：给定个单频率信号，输入到一个系统中，对比直接按公式计算的响应和迭代计算的响应的差异。

```
#构建信号，采样率48000，时长15s，频率2000Hz
A1 = 1e8#振幅
sr = 48000#采样率
delta_t = 1/sr#点间距表示的时长
timeline = np.arange(0,15,delta_t, dtype='float32')#信号时长15s
f1 = 2000#信号频率/Hz
signal = A1*np.sin((2*np.pi*f1)*timeline)
signal_len = signal.shape[0]
```

```
#构建一个系统，固有频率为2000Hz
f0 = 2000
w0 = 3*np.pi*f0
m = 1/(2*np.pi)**2
b = 3
k = m*w0**2
y = b/(2*m)
w = np.sqrt(w0**2 - y**2)
```

```
#直接用公式计算响应
w1 = 2*np.pi*f1#信号频率化为弧度制
x0 = v0 = 0.

temp1 = b*w1
temp2 = k - m*(w1**2)
temp3 = temp1**2 + temp2**2
temp4 = A1*temp1/temp3
temp5 = A1*temp2/temp3
D1 = x0 + temp4
D2 = (v0+y*x0)/w + (y/w)*temp4 - (w1/w)*temp5

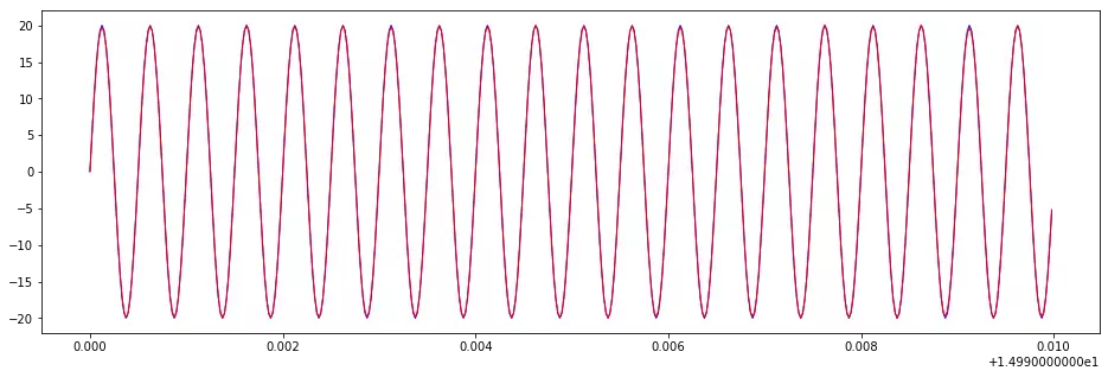
cosw1tl = np.cos(w*timeline)
sinw1tl = np.sin(w*timeline)
cosw1tl = np.cos(w1*timeline)
sinw1tl = np.sin(w1*timeline)
x1=np.exp(-y*timeline)*(D1*cosw1tl+D2*sinw1tl)-temp4*cosw1tl+temp5*sinw1tl
#x1即为直接用公式计算出的响应
```

```
#迭代计算响应
#其他部分见第2节‘离散信号的处理’
x = np.zeros((signal_len,), dtype='float32')
v = np.zeros((signal_len,), dtype='float32')
for i in range(1, signal_len, 1):
    x[i], v[i] = cal_ite(x[i-1], v[i-1], signal[i-1], signal[i])
#x即为迭代计算出的响应
```

下面从两个方面对比两个响应。

一是，用响应作出曲线，从而观察两条曲线的重合情况。下面是最后0.01s的部分，可以看到红蓝两条曲线接近完全重合，而且是较为光滑的。这说明假设线性基本不影响响应的振幅和频率。

```
plt.figure(figsize=(16,5))
plt.plot(timeline[719520:],x[719520:],color='blue',linewidth=1)
plt.plot(timeline[719520:],x1[719520:],color='red',linewidth=1)
plt.show()
```



二是，计算对应点的值的平均差异。对响应取绝对值后再缩放至最大值为1，平均差值约为0.00258，结合平均1个周期24个点的情况来看，这个差值是非常小的。

```
x1 = abs(x1)#取绝对值
x1 = x1/np.max(x1)#缩放使得最大值为1
x = abs(x)
x = x/np.max(x)
dist = np.sum(abs(x1-x))#总差值
print(dist/signal_len)#平均差值，结果约为0.00258
```

此外，经过测试发现，信号频率越高或采样率越低误差越大。但得考虑到，这里离散信号实际是用一组栅栏来拟合简谐曲线，信号本身就有误差。而直接用公式计算响应不存在这个问题，因此两者的差异不仅是假设线性带来的。