

TVD(總變差衰減) 格式

3.assignment2.3.tex

August 16, 2025

(一)、方程式的空間二階精度 TVD 離散格式：(一般 TVD(總變差衰減) 格式)

對於不可壓縮理想氣體的二維穩態擴散對流方程，若取如下三項近似，則離散化後的二維擴散對流方程即為二維擴散對流方程的空間二階精度 TVD 離散格式：

(1)($M(T(f(P$ 有限體積) 的 (邊界中心點)) 的 (溫度)) 的 (空間二階精度 TVD 格式))：

$$T_f \approx T_C + \psi(r_f) \cdot \frac{T_D - T_C}{2} \quad (1)$$

其中，該格式的通量限制函數 $\psi(r_f)$ 需要坐落於 TVD 單調區域中， r_f 為通量限制函數的參數，

$$r_f = \frac{T_C - T_U}{T_D - T_C}$$

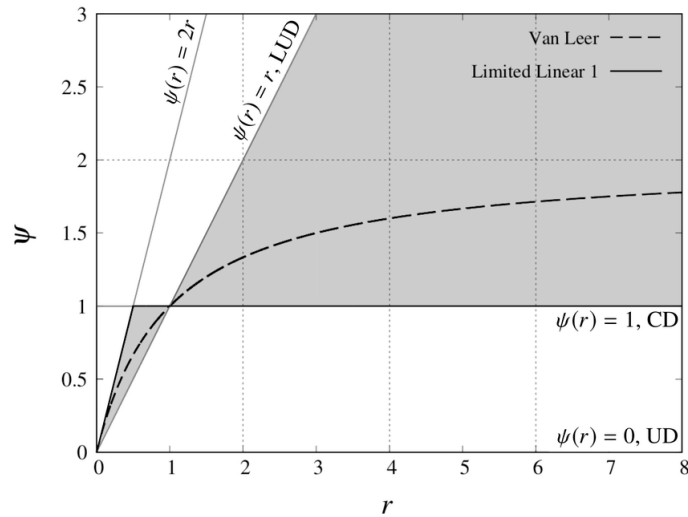


Figure 1: TVD 單調區間，若坐落於此區域，則邊界上的對流通量的近似取值保持單調

(二)、空間二階精度 MINMOD 離散格式：

空間二階精度 MINMOD 離散格式為一 TVD 格式，(1) 空間二階精度 MINMOD 離散格式的通量限制函數 $\psi(r_f)$ 坐落於 TVD(Total Variation Diminishing)(相鄰格點數值差總和遞減) 單調區域中，且 (2) 根據 Van Leer 等人的論證，空間二階精度 MINMOD 格式的通量限制函數必為空間二階精度 SOU 格式的通量限制函數與空間二階精度中心差分格式的通量限制函數的線性組合。

空間二階精度 MINMOD 離散格式的通量限制函數為：

$$\psi(r_f) = \max[0, \min(1, r_f)] \quad (2)$$

其中， r_f 為通量限制函數的參數，

$$r_f = \frac{T_C - T_U}{T_D - T_C}$$

且 (C 計算點) 為 ($C(f(P$ 有限體積) 的 (邊界點)) 的 (上游計算點))，(D 計算點) 為 ($D(f(P$ 有限體積) 的 (邊界點)) 的 (下游計算點))，(U 計算點) 為 ($U(f(P$ 有限體積) 的 (邊界點)) 的 (上游計算點))。

(1) 當 $r_f > 1$ 時，($L(A(E(f(P$ 有限體積) 的 (邊界點)) 的 (傳輸變數)) 的 (空間二階精度 MINMOD 格式)) 的 (通量限制函數)) $-\psi(r_f) = 1$ ，與 ($c(C(E(f(P$ 有限體積) 的 (邊界點)) 的 (傳輸變數)) 的 (空間二階精度 CD 格式)) 的 (通量限制函數)) 重合。

(2) 當 $1 > r_f > 0$ 時，($L'(A(E(f(P$ 有限體積) 的 (邊界點)) 的 (傳輸變數)) 的 (空間二階精度 MINMOD 格式)) 的 (通量限制函數)) $-\psi(r_f) = r_f$ ，與 ($s(S(E(f(P$ 有限體積) 的 (邊界點)) 的 (傳輸變數)) 的 (空間二階精度 SOU 格式)) 的 (通量限制函數)) 重合。

(3) 當 $r_f < 0$ 時，($L''(A(E(f(P$ 有限體積) 的 (邊界點)) 的 (傳輸變數)) 的 (空間二階精度 MINMOD 格式)) 的 (通量限制函數)) $-\psi(r_f) = 0$ ，與 ($u(U(E(f(P$ 有限體積) 的 (邊界點)) 的 (傳輸變數)) 的 (空間一階精度迎風格式)) 的 (通量限制函數)) 重合。

$$\begin{aligned} (1) \psi(r_f) &= 1, & r_f > 1 \\ (2) \psi(r_f) &= r_f, & 1 > r_f > 0 \\ (3) \psi(r_f) &= 0, & r_f < 0 \end{aligned} \quad (3)$$

由此可知，空間二階精度 MINMOD 離散格式亦有 6 個邊界，9 個角點需要討論，只是在不同範圍的 r_f 取值下，需要條件篩選。

(二、1)、對流項中邊界中心點的溫度近似取值：

($M(T(f(P$ 有限體積) 的 (邊界中心點)) 的 (傳輸變數)) 的 (空間二階精度 MINMOD 格式))：

$$T_f \approx T_C + \psi(r_f) \cdot \frac{T_D - T_C}{2} \quad (4)$$

其中，該格式的通量限制函數

$$\psi(r_f) = \max[0, \min(1, r_f)]$$

上式坐落於 TVD 單調區域中

因此，邊界中心傳輸變數近似格式有：

$$\begin{aligned} (1) T_f &= \frac{T_C + T_D}{2}, & r_f > 1, & \text{CD 格式} \\ (2) T_f &= \frac{3}{2}T_C - \frac{1}{2}T_U, & 1 > r_f > 0, & \text{SOU 格式} \\ (3) T_f &= T_C, & r_f < 0, & \text{Upwind 格式} \end{aligned} \quad (5)$$

(二-2)、MINMOD 離散格式中對方程式的三項近似：

(1) ($M(T(f(P$ 有限體積) 的 (邊界中心點)) 的 (溫度)) 的 (空間二階精度 MINMOD 格式)) 如 (5) 所示。

(2) ($dT(f(P$ 有限體積) 的 (邊界中心點)) 的 (溫度梯度)) 的近似取值採用二階精度中心差分。

(3) ($G(f(P$ 有限體積) 的 (邊界中心點)) 的 (擴散係數)) 的近似取值為該邊界點上游計算點的擴散係數 α_C 與下游計算點的擴散係數 α_D 之平均。