2.assignment_2.6.tex

空間二階精度 MINMOD 離散格式

September 22, 2025

一　二維穩態擴散對流方程的一般離散型式

若

(1)A 流場被定義為 V 不可壓縮流場

(2)A 流場被定義為 GF 穩態流動相應之流場

(3) 不考慮 A 流場的黏性應力耗散項 Φ

則：

A 流場的能量方程式被定義為：

$$\vec{u}\cdot\vec{\nabla}T = -\vec{\nabla}\cdot(\Gamma\vec{\nabla}T) \tag{一.1}$$

上式 $\vec{u}\cdot\vec{\nabla}T = -\vec{\nabla}\cdot(\Gamma\vec{\nabla}T)$ 即被稱為穩態擴散對流方程的微分形式。若對上式取體積分，並引入連續方程式，則有：

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{da}\cdot(\vec{u}T) = \oint_{\partial\Omega} \vec{da}\cdot(\Gamma\vec{\nabla}T) \tag{一.2}$$

上式即稱為穩態擴散對流方程的積分形式。若取 (W((D 二維穩態擴散對流方程) 的 (積分形式)) 的 (一般離散格式))，則有：

$$\begin{aligned} &A_e u_e T_e - A_w u_w T_w + A_n u_n T_n - A_s u_s T_s \\ =&A_e\Gamma_e \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_e - A_w\Gamma_w \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_w + A_n\Gamma_n \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_n - A_s\Gamma_s \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_s \end{aligned} \tag{一.3}$$

其中，各變量的下標 w, e, s, n 分別代表該變量在點 $(i+\frac{1}{2}, j), (i-\frac{1}{2}, j), (i, j+\frac{1}{2}), (i, j-\frac{1}{2})$ 取值。進一步的，在一般離散格式中，對各邊界中心點的溫度場的一階法向導數取二階精度中心差分：

(U(E(S 溫度場) 的 (一階法向偏導數)) 的 (二階精度中心差分))

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_e \approx \frac{T_E - T_P}{\delta x}, \quad \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_w \approx \frac{T_P - T_W}{\delta x}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_n \approx \frac{T_N - T_P}{\delta y}, \quad \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_s \approx \frac{T_P - T_S}{\delta y}$$

因此有：(W((D 二維穩態擴散對流方程) 的 (積分形式)) 的 (一般離散格式))：

$$\begin{aligned} &A_e u_e T_e - A_w u_w T_w + A_n u_n T_n - A_s u_s T_s \\ =&A_e\Gamma_e \frac{T_E - T_P}{\delta x} - A_w\Gamma_w \frac{T_P - T_W}{\delta x} + A_n\Gamma_n \frac{T_N - T_P}{\delta y} - A_s\Gamma_s \frac{T_P - T_S}{\delta y} \end{aligned} \tag{一.4}$$

在二維均勻正交網格中，$A_e = A_w = \delta y, A_n = A_s = \delta x$，且令熱擴散係數 Γ 為常數，上式亦有如下形式之簡化：

$$\begin{aligned} &\delta y \cdot u_e T_e - \delta y \cdot u_w T_w + \delta x \cdot u_n T_n - \delta x \cdot u_s T_s \\ =&\delta y \cdot \Gamma \frac{T_E - T_P}{\delta x} - \delta y \cdot \Gamma \frac{T_P - T_W}{\delta x} + \delta x \cdot \Gamma \frac{T_N - T_P}{\delta y} - \delta x \cdot \Gamma \frac{T_P - T_S}{\delta y} \\ =&\Gamma(-2\frac{\delta y}{\delta x} - 2\frac{\delta x}{\delta y})T_P + \Gamma\frac{\delta y}{\delta x}T_W + \Gamma\frac{\delta y}{\delta x}T_E + \Gamma\frac{\delta x}{\delta y}T_S + \Gamma\frac{\delta x}{\delta y}T_N \end{aligned} \tag{一.5}$$

若在二維均勻正方網格中，(ie. 對於每一個網格而言，$A_e = A_w = \delta y = \delta x = A_n = A_s$)，上式又可以做如下簡化：

$$\begin{aligned} &\delta y \cdot u_e T_e - \delta y \cdot u_w T_w + \delta x \cdot u_n T_n - \delta x \cdot u_s T_s \\ =& -4\Gamma T_P + \Gamma T_W + \Gamma T_E + \Gamma T_S + \Gamma T_N \end{aligned} \tag{一.6}$$

二　MINMOD 格式

二、1　MINMOD 近似取值

在空間二階精度 MINMOD 格式中，(E(r(p 計算點) 的 (邊界中心點)) 的 (溫度場)) 有如下取值：

$$T_f = D(r_f)T_D + U(r_f)T_U + UU(r_f)T_{UU}$$

其中，

$$D(r_f < 0) = 0 \quad , \quad D(0 \le r_f < 1) = 0 \quad , \quad D(1 \le r_f) = \frac{1}{2}$$

$$U(r_f < 0) = \frac{2}{2} \quad , \quad U(0 \le r_f < 1) = \frac{3}{2} \quad , \quad U(1 \le r_f) = \frac{1}{2}$$

$$UU(r_f < 0) = 0 \quad , \quad UU(0 \le r_f < 1) = \frac{-1}{2} \quad , \quad UU(1 \le r_f) = 0$$

其中，下標 f 代表計算點 p 的某一個邊界中心點，且 $r_f = \frac{T_U - T_{UU}}{T_D - T_U}$ 接下來，我們從式一.6出發，帶入上述 (U(E(r(p 計算點) 的 (邊界中心點)) 的 (溫度場)) 的 (空間二階精度 MINMOD 近似取值))，則有：(令 $(u_w, u_e, u_s, u_n) = (1, 1, 1, 1)$)

$$\begin{aligned} &\delta y \cdot (D(r_e)T_E + (U(r_e) - D(r_w))T_P + (UU(r_e) - U(r_w))T_W - UU(r_w)T_{WW}) \\ &+\delta x \cdot (D(r_n)T_N + (U(r_n) - D(r_s))T_P + (UU(r_n) - U(r_s))T_S - UU(r_s)T_{SS}) \\ &= -4\Gamma T_P + \Gamma T_W + \Gamma T_E + \Gamma T_S + \Gamma T_N \end{aligned} \tag{二.1}$$

編程提醒：

在編輯程式的過程中，最好將 r_f 設為矩陣形式，跟溫度場做連結，一但溫度場的更新，r_f 跟著一起更新：

```cpp
vector<vector<double >>rf_w ;
rf_w.assign(NX, vector<double>(NX, 0.0)); //用到ghost point
//.......溫度場更新完成
for(int i = 2 ; i <= NX ; i++){
    for(int j = 1 ; j <= NX ; j++){
        rf_w[i][j] = (T[i-1][j] - T[i-2][j])/(T[i][j] - T[i-1][j]) ;
    }
}
```

Figure 二.1 : r_f 更新示意圖

二、2　內點的離散方程

定義域：i = [2,NX]　,　j = [2,NY]

方程式：2D-steady advection-diffusion equation

方法：space second-order MINMOD scheme

對於每一個內點 (i, j)，二維穩態擴散對流方程的空間二階精度 MINMOD 離散格式為:

$$\begin{aligned} & T_P(4\Gamma + \delta y \cdot (U(r_e) - D(r_w)) + \delta x \cdot (U(r_n) - D(r_s))) \\ =& T_E(\Gamma - \delta y \cdot D(r_e)) \\ +& T_W(\Gamma - \delta y \cdot (UU(r_e) - U(r_w))) \\ +& T_{WW}(-\delta y \cdot (UU(r_w))) \\ +& T_N(\Gamma - \delta x \cdot D(r_n)) \\ +& T_S(\Gamma - \delta x \cdot (UU(r_n) - U(r_s))) \\ +& T_{SS}(-\delta x \cdot (UU(r_s))) \end{aligned} \tag{二.2}$$

二、3　虛擬節點的設置

對於內點而言，在一維穩態擴散對流方程的空間二階精度 MINMOD 離散格中，會用到四個點。相應的，在二維穩態擴散對流方程的間二階精度 MINMOD 離散格式中，會用到八個點。如下圖所示：

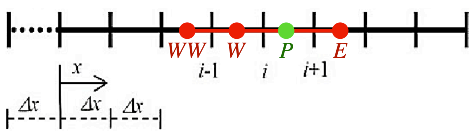

Figure 二.2 : 1D-4point stencil

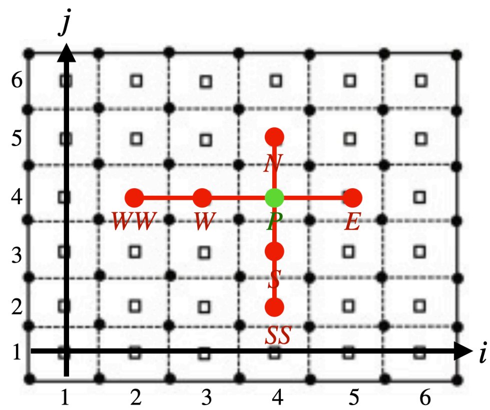

Figure 二.3 : 2D-8point stencil

有三種情況會用到 Ghost point (虛擬節點)：

二、3.1 MINMOD 格式下的第一排邊界點

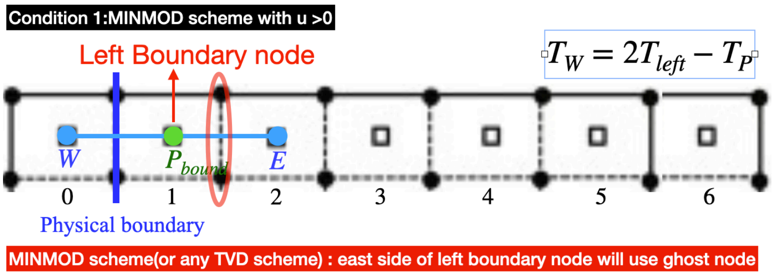

Figure 二.4 : MINMOD 格式下的第一排邊界點

在迎風條件 ($u > 0$) 下，(Q(Y(E(p 左邊界計算點) 的 (東邊界中心點)) 的 (溫度場)) 的 (空間二階精度 MINMOD 近似取值)) 會用到超出左邊界區域的計算點 $W\ point$, T_W，我們將其稱之為 Ghost point (虛擬節點)，並將其賦值為:$T_W = 2 * T_{left} - T_P$。

二、3.2 MINMOD 格式下的第二排邊界點

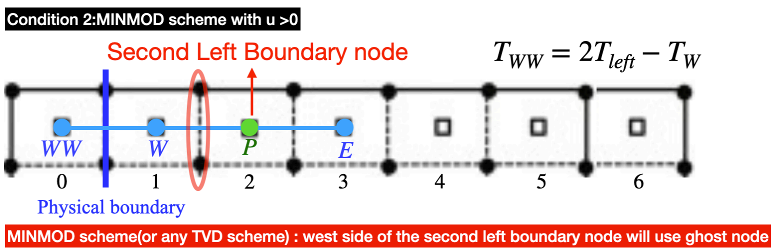

Figure 二.5 : MINMOD 格式下的第二排邊界點

在迎風條件 ($u > 0$) 下，(H(L(E(i 左邊界第二排計算點) 的 (西邊界中心點)) 的 (溫度場)) 的 (空間二階精度 MINMOD 近似取值)) 會用到超出左邊界區域的計算點 $WW\ point$, T_W，我們將其稱之為 Ghost point (虛擬節點)，並將其賦值為:$T_H = 2 * T_{left} - T_P$。

二、3.3 Neumann 條件下的邊界點

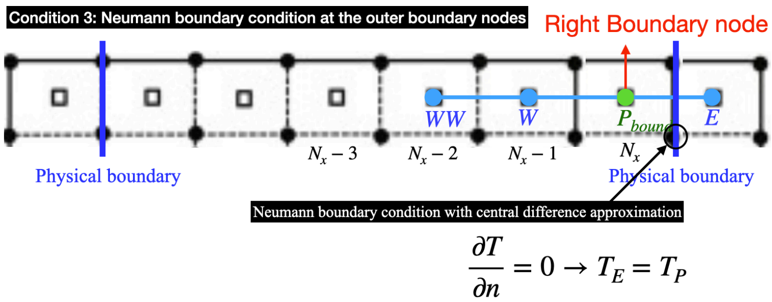

Figure 二.6 : Neumann 條件下的邊界點

Neumann 條件為給定 (E(D(T 溫度場) 的 (一階法向偏導數)) 的 (邊界函數))，呈如下函數式：

$$\left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{boundary} = g(\vec{r}) = 0$$

此題中，所用到的 Neumann 條件為絕熱邊界條件，因此，在上邊界，有 $\vec{n}\cdot\vec{\nabla}T=0$ 而，在邊界上某一點 (ex:(i,N_y))，取 (K(U(F(T 溫度場) 的 (一階法向導數)) 的 (邊界函數)) 的 (二階精度中心差分))，有：

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{i,N_y}\approx\frac{T_{i,N_y+1}-T_{i,N_y}}{\delta y}$$

因此，若 (D(G(K(T 溫度場) 的 (一階法向偏導數)) 的 (邊界函數)) 的 (二階精度中心差分)) = 0 恆成立，

$$\frac{T_{i,N_y+1}-T_{i,N_y}}{\delta y}=0$$

，則 (E(R(F(C 上邊界計算點) 的 (北側邊界中心點)) 的 (溫度場)) 的 (近似取值)) 必然使用到 Ghost point 上的溫度場，且令 Ghost point 上的溫度場為邊界計算點上未知待解的溫度場：T_P，因此，對於北邊界中心點的溫度場，可以近似取值為：

(F(R(S(D 上邊界計算點) 的 (北側邊界中心點)) 的 (溫度場)) 的 (空間二階精度 MINMOD 近似取值)):

$$\begin{aligned}&for\ up\ boundary\ node(i,N_y):\\&T_n=D(r_n)T_N+U(r_n)T_P+UU(r_n)T_S\\=&D(r_n)T_P+U(r_n)T_P+UU(r_n)T_S\end{aligned}\tag{二.3}$$

(F(R(S(D 上邊界計算點) 的 (北側邊界中心點)) 的 (溫度場)) 的 (空間二階精度 UPWIND 近似取值)):

$$\begin{aligned}&for\ up\ boundary\ node(i,N_y):\\&T_n=\frac{1}{2}T_N+\frac{3}{2}T_P\\=&\frac{1}{2}T_P+\frac{3}{2}T_P\end{aligned}\tag{二.4}$$

這些近似都可以很好的套用到邊界 Neumann 條件做使用。

二、3.4 對流項的中心差分格式

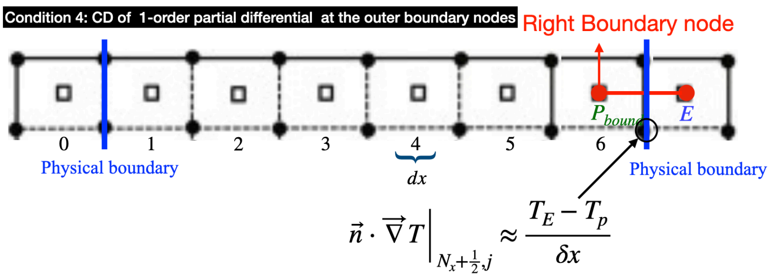

Figure 二.7 : 外側邊界上擴散項的二階精度中心差分

對於邊界計算點而言，(E(S(T(F 邊界計算點) 的 (外側邊界中心點)) 的 (法向溫度梯度)) 的 (二階精度中心差分))，會用到 Ghost point 上的溫度場，且令 Ghost point 上的溫度場為 $2T_{right}-T_P$。因此，外側邊界中心點的法向溫度梯度可以表示為:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{e}\approx\frac{2(T_{right}-T_P)}{\delta x}\tag{二.5}$$

二、3.5　二維虛擬節點的分佈

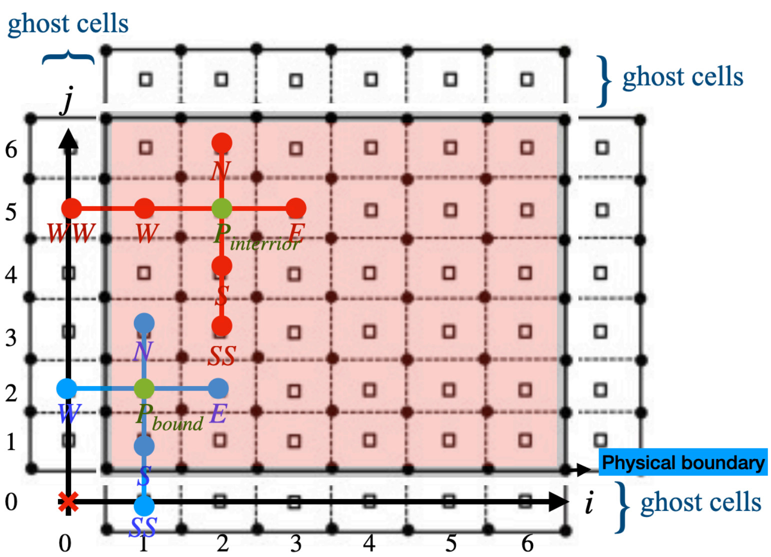

Figure 二.8 : 二維虛擬節點的分佈

在此二維問題中，
若

(1) 每一個計算點的邊界中心點的溫度場，近似取為 (R(D(k(p 計算點) 的 (邊界中心點)) 的 (溫度場)) 的 (空間二階精度 MINMOD 近似取值))

(2) 迎風條件：u>0 and v>0

(3)Neumann 條件：(D(G(K(T 溫度場) 的 (一階法向偏導數)) 的 (上邊界函數)) 的 (二階精度中心差分)) = 0 恆成立

則，對於全場計算點，((E 二維穩態擴散對流方程) 的 (空間二階精度 MINMOD 離散格式)) 中，會用到的虛擬節點分佈如圖二.8 所示。

二、4　邊界計算點的離散方程式

以下將討論各個邊界計算點上所滿足的離散方程。範圍：(包括四個邊界以及四格角點)

(1) 左邊界計算點 ($i=1$，$j\in[2,N_{y-1}]$)	(1) 左下計算點 ($i=1$，$j=1$)
(2) 右邊界計算點 ($i=N_x$，$j\in[2,N_{y-1}]$)	(2) 右下計算點 ($i=N_x$，$j=1$)
(3) 下邊界計算點 ($i\in[2,N_x-1]$，$j=1$)	(3) 左上計算點 ($i=1$，$j=N_y$)
(4) 上邊界計算點 ($i\in[2,N_x-1]$，$j=N_y$)	(4) 右上計算點 ($i=N_x$，$j=N_y$)

格式：(S(R 二維穩態擴散對流方程) 的 (空間二階精度 MINMOD 離散格式))

注意: 設置虛擬節點的範圍，以及虛擬節點上的溫度取值:

(1) 左邊界計算點之左延伸行計算點 ($i=0$，$j\in[2,N_{y-1}]$)	: $T_{0,j}=2*T_{left}-T_{1,j}$
(2) 右邊界計算點之右延伸行計算點 ($i=N_x+1$，$j\in[2,N_{y-1}]$)	: $T_{N_x+1,j}=2*T_{right}-T_{N_x,j}$
(3) 下邊界計算點之下延伸列計算點 ($i\in[2,N_x-1]$，$j=0$)	: $T_{i,0}=2*T_{bottom}-T_{i,1}$
(4) 上邊界計算點之上延伸列計算點 ($i\in[2,N_x-1]$，$j=N_y+1$)	: $T_{i,N_y+1}=T_{i,N_y}$

下圖為各個需要用到的 ghost point 分布，以及該點 ghost point 上的外差取值 (用到邊界條件)。

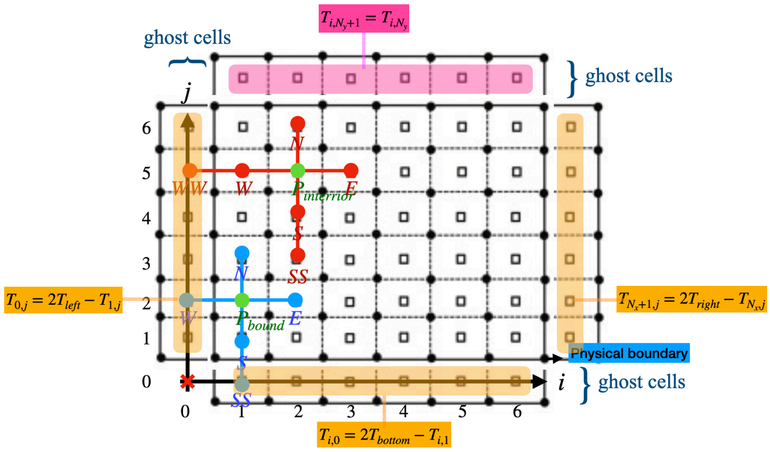

Figure 二.9 : ghost point predict value

二、4.1　左邊界計算點

範圍：$i = 1$，$j \in [2, N_y - 1]$

g 左邊界計算點的 (K(D 二維穩態擴散對流方程) 的 (空間二階精度 MINMOD 離散格式)) 為：

$$\begin{aligned}
&T_P(4\Gamma + \delta y(U(r_e)) + \delta x(U(r_n) - D(r_s))) \\
=&T_W(\Gamma - \delta y(UU(r_e))) \\
+&T_E(\Gamma - \delta y(D(r_e))) \\
+&T_S(\Gamma - \delta x(UU(r_n) - U(r_s))) \\
+&T_N(\Gamma - \delta x(D(r_n))) \\
+&T_{SS}(-\delta x(-UU(r_s))) \\
+&T_{left}(+\delta y)
\end{aligned} \tag{二.6}$$

二、4.2　右邊界計算點

範圍：$i = N_x$，$j \in [2, N_y - 1]$

j 右邊界計算點的 (K'(D' 二維穩態擴散對流方程) 的 (空間二階精度 MINMOD 離散格式)) 為：

$$\begin{aligned}
&T_P(4\Gamma + \delta y(-D(r_w)) + \delta x(U(r_n) - D(r_s))) \\
=&T_W(\Gamma - \delta y(-U(r_w))) \\
+&T_E(\Gamma) \\
+&T_S(\Gamma - \delta x(UU(r_n) - U(r_s))) \\
+&T_N(\Gamma - \delta x(D(r_n)))
\end{aligned} \tag{二.7}$$

$$
\begin{aligned}
&+T_{WW}(-\delta y(-UU(r_w))) \\
&+T_{SS}(-\delta y(-UU(r_s))) \\
&-T_{right}(\delta y)
\end{aligned} \tag{二.8}
$$

二、**4.3** 下邊界計算點

範圍：$i \in [2, N_x - 1]$, $j = 1$

p 下邊界計算點的 (K"(D" 二維穩態擴散對流方程) 的 (空間二階精度 MINMOD 離散格式)) 為：

$$
\begin{aligned}
&T_P(4\Gamma + \delta y(U(r_e) - D(r_w)) + \delta x(U(r_n))) \\
=&T_W(\Gamma - \delta y(UU(r_e) - U(r_w))) \\
&+T_E(\Gamma - \delta y(D(r_e))) \\
&+T_S(\Gamma - \delta x(UU(r_n))) \\
&+T_N(\Gamma - \delta x(D(r_n))) \\
&+T_{WW}(-\delta y(-UU(r_w))) \\
&+dx \cdot T_{bottom}
\end{aligned} \tag{二.9}
$$

二、**4.4** 上邊界計算點

範圍：$i \in [2, N_x - 1]$, $j = N_y$

b 上邊界計算點的 (K'"(D'" 二維穩態擴散對流方程) 的 (空間二精度 MINMOD 離散格式)) 為：

$$
\begin{aligned}
&T_P(3\Gamma + \delta y(U(r_e) - D(r_w)) + \delta x(U(r_n) - D(r_s))) \\
=&T_W(\Gamma - \delta y(UU(r_e) - U(r_w))) \\
&+T_E(\Gamma - \delta y(D(r_e))) \\
&+T_S(\Gamma - \delta x(UU(r_n) - U(r_s))) \\
&+T_N(-\delta x(D(r_n))) \\
&+T_{WW}(-\delta y(-UU(r_w))) \\
&+T_{SS}(-\delta x(-UU(r_s)))
\end{aligned} \tag{二.10}
$$

上式為套用 Neumann 條件下的結果，基於 Neumann 條件，並沒有用到外源項。