Assignment 1

學號：114233515 陳芃仲

September 13, 2025

利用有限體積法 FVM 求解二維穩態擴散對流方程：
推導一般形式下的擴散對流方程：無外源項的純擴散方程，構成一 laplace 方程：

$$k\nabla^2 T = 0 \tag{1}$$

一般令擴散係數 k 為均勻場。寫成分量形式則有：

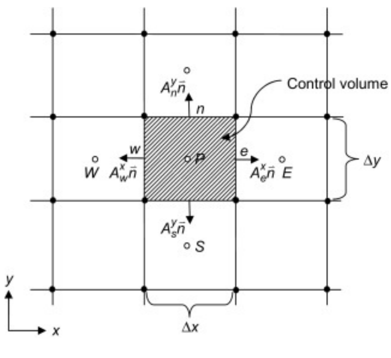
$$\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial T}{\partial y}) = 0 \tag{2}$$

本方程不考慮外源項，因此為 lapalce 方程，否則為 possion 方程。
邊界條件：

$$\begin{aligned} T(x,0) &= T_{x,0} = 0 \\ T(x,L) &= T_{x,L} = 1 \\ T(0,y) &= T_{0,y} = 0 \\ T(L,y) &= T_{L,y} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

其中 T_{1L} 為上邊界溫度，T_{0L} 為左邊界溫度，T_{0R} 為右邊界溫度 T_{1L} 為上邊界溫度，T_{0L} 為左邊界溫度。由於本方程為二維穩態擴散對流方程，因此對時間無關，且對於二維空間 (x,y)，對於每個空間點 (x,y)，其溫度 $T(x,y)$ 均為常數。
本邊界採用 link-wise 邊界，且個別邊界條件為 Dirichlet 邊界條件。需要注意的是：在對應非齊性邊界條件的邊界點上，離散方程需要將固定溫度輸入作為外源項。

（一）、第一步，如右圖所示，把整個二維空間拆成 (N_x, N_y) 個格子，且由於採用 link-wise 邊界，computatial node 分佈於格點中心，且 computatioal boundary 與 physical boundary 總是距離半格子長度。圖中，陰影區域為計算點 p 的控制體積 (control volume)，控制體積介面 w,e 之距離為 Δx，控制體積介面 n,s 之距離為 Δy。由於網格化分為均勻網格，故 $\Delta x = \Delta y$。且計算點 p 與相鄰各個計算點的距離均為 Δx 。因此，離散化邊界範圍：$i = (0 : N_x), j = (0 : N_y)$



若 p 點位置為 (i,j)，則其鄰居點分別為：

$$\begin{aligned} p_{left} &= (i - \frac{1}{2}, j) \\ p_{right} &= (i + \frac{1}{2}, j) \\ p_{up} &= (i, j + \frac{1}{2}) \\ p_{down} &= (i, j - \frac{1}{2}) \end{aligned} \tag{4}$$

（二）、構造擴散方程的離散化格式：由無外源的擴散方程積分形式可得：

$$\int_{\Delta V} dV \vec{\nabla} \cdot (k\vec{\nabla} T) = \int_{\Delta V} dV \frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial T}{\partial x}) + \int_{\Delta V} dV \frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial T}{\partial y}) = 0 \tag{5}$$

其中，$dV = dx \cdot dy$ 。積分區域為單格網格空間。被積分函數事實上為散度項之分量形式，型如 $\vec{\nabla} \cdot (k\vec{\nabla}T)$。利用高斯散度定理可化為：(面積分方向為外法線方向)

$$\oint_{\partial(\Delta V)} d\vec{a} \cdot (k\vec{\nabla}T) = 0 \tag{6}$$

$$-\int_{left} dy(k\frac{\partial T}{\partial x}) + \int_{right} dy(k\frac{\partial T}{\partial x}) + \int_{up} dx(k\frac{\partial T}{\partial y}) - \int_{down} dx(k\frac{\partial T}{\partial y}) = 0 \tag{7}$$

由於 $dx, dy \to 0$ 時，可將上式寫為：

$$-dy(\frac{\partial T}{\partial x})(x,y) + dy(k\frac{\partial T}{\partial x})(x+\Delta x, y) + dx(k\frac{\partial T}{\partial y})(x, y+\Delta y) - dx(k\frac{\partial T}{\partial y})(x,y) = 0 \tag{8}$$

$$dx \cdot dy\frac{\partial T}{\partial x}(k\frac{\partial T}{\partial x})(x,y) + +dx \cdot dy\frac{\partial T}{\partial y}(k\frac{\partial T}{\partial y})(x,y) = 0 \tag{9}$$

而由於 $\Delta x \neq dx, \Delta y \neq dy$，這裡需要做兩次一階精度近似:
對於

$$-\int_{left} dy(k\frac{\partial T}{\partial x}) + \int_{right} dy(k\frac{\partial T}{\partial x}) + \int_{up} dx(k\frac{\partial T}{\partial y}) - \int_{down} dx(k\frac{\partial T}{\partial y})$$

近似為：

$$-\Delta y(k\frac{\partial T}{\partial x})(x,y) + \Delta y(k\frac{\partial T}{\partial x})(x+\Delta x, y) + \Delta x(k\frac{\partial T}{\partial y})(x, y+\Delta y) - \Delta x(k\frac{\partial T}{\partial y})(x,y)$$

若 (x,y) 為有限體積中心點 $p \quad (i,j)$，對有限體積之邊界點：

$$n\_point = (i, j+1), s\_point = (i, j-1), e\_point = (i+1, j), w\_point = (i-1, j)$$

進行一階近似後，則有：

$$\Delta y(k\frac{\partial T}{\partial x})_{(i+\frac{1}{2},j)} - \Delta y(k\frac{\partial T}{\partial x})_{(i-\frac{1}{2},j)} + \Delta x(k\frac{\partial T}{\partial y})_{(i,j+\frac{1}{2})} - \Delta x(k\frac{\partial T}{\partial y})_{(i,j-\frac{1}{2})} = 0 \tag{10}$$

引入 (w(o(f 雙變數函數) 的 (x 變數一階偏導數)) 的 (二階精度中心差分)):

$$\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x-\Delta x, y)}{2 \cdot \Delta x} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} + (\Delta x^2) \tag{11}$$

再對左點，下點，上點，右點作二階精度中心差分 ($dif \quad instance = \frac{\Delta x}{2}$)，有：(因此，精度在空間中為二階精度)

$$\begin{aligned}&\Delta y(\cdot k\frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x}) - \Delta y(\cdot k\frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x}) \\ &+ \Delta x(\cdot k\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y}) - \Delta x(\cdot k\frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y}) = 0\end{aligned} \tag{12}$$

上式即為均勻網格下 (網格正交分佈且 $\Delta x = \Delta y$) 的二維穩態擴散方程的空間二階精度中心蘇離散格式。整理上式有：

$$\begin{aligned}&\Delta y(\frac{T_{i+1,j}}{\Delta x}) + \Delta y(\frac{T_{i-1,j}}{\Delta x}) + \Delta x(\frac{T_{i,j+1}}{\Delta y}) + \Delta x(\frac{T_{i,j-1}}{\Delta y}) \\ &= ((\frac{\Delta y}{\Delta x}) + (\frac{\Delta y}{\Delta x}) + (\frac{\Delta x}{\Delta y}) + (\frac{\Delta x}{\Delta y})) \cdot T_{i,j}\end{aligned} \tag{13}$$

更簡潔一點，可以寫為：

$$
\begin{aligned}
&(\frac{\Delta y}{\Delta x}) \cdot (T_{right} + T_{left}) + \frac{\Delta x}{\Delta y} \cdot (T_{up} + T_{bottom}) \\
&= 2((\frac{\Delta y}{\Delta x}) + (\frac{\Delta x}{\Delta y})) \cdot T_p
\end{aligned}
\tag{14}
$$

但是，上條件為簡化版，廣義來說：近似規則為 (1) 對外法線方向熱流密度 $\frac{\partial T}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{q}$ 取二階精度中心差分，(2) 對邊界擴散係數（考慮非均勻場）取平均值，則得到二維穩態純擴散方程的空間二階精度中心離散格式，以下說明

若網格在 $n\_point, s\_point, e\_point, w\_point$ 處的外法向熱流密度 ($\frac{\partial T}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{q}$)，非均勻擴散係數 ($k$)，面積 ($A$) 分別為：

$$
\frac{\partial T}{\partial n}_w = \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x_{pW}}, \frac{\partial T}{\partial n}_e = \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x_{Ep}}, \frac{\partial T}{\partial n}_s = \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y_{pS}}, \frac{\partial T}{\partial n}_n = \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y_{Np}}
$$

$$
k_w = \frac{k_{i-1,j} + k_{i,j}}{2}, k_e = \frac{k_{i,j} + k_{i+1,j}}{2}, k_s = \frac{k_{i,j} + k_{i,j-1}}{2}, k_n = \frac{k_{i,j} + k_{i,j+1}}{2}
$$

$$
A_w = A_{i-\frac{1}{2},j}, A_e = A_{i+\frac{1}{2},j}, A_s = A_{i,j-\frac{1}{2}}, A_n = A_{i,j+\frac{1}{2}}
$$

且 $(W, E, S, N)\_computational\_point$ 至中心點 $p \quad (i, j)$ 的距離分別為：

$$
\Delta x_{pW}, \Delta x_{Ep}, \Delta y_{pS}, \Delta y_{Np}
$$

則二維穩態擴散方程的空間二階精度中心離散格式：

$$
\begin{aligned}
&A_e \cdot (\frac{k_{i+1,j} + k_{i,j}}{2} \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x_{Ep}}) - A_w \cdot (\frac{k_{i,j} + k_{i-1,j}}{2} \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x_{pW}}) \\
&+ A_n \cdot (\frac{k_{i,j+1} + k_{i,j}}{2} \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y_{Np}}) - A_s \cdot (\frac{k_{i,j} + k_{i,j-1}}{2} \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y_{pS}}) = 0
\end{aligned}
\tag{15}
$$

形成：

$$
a_p T_p = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N \tag{16}
$$

其中，

$$
\begin{aligned}
&T_p = T_{i,j}, a_p = a_W + a_E + a_S + a_N \\
&T_W = T_{i-1,j}, a_W = A_w \frac{k_{i,j} + k_{i-1,j}}{2\Delta x_{pW}} \\
&T_E = T_{i+1,j}, a_E = A_e \frac{k_{i+1,j} + k_{i,j}}{2\Delta x_{Ep}} \\
&T_S = T_{i,j-1}, a_S = A_s \frac{k_{i,j} + k_{i,j-1}}{2\Delta y_{pS}} \\
&T_N = T_{i,j+1}, a_N = A_n \frac{k_{i,j+1} + k_{i,j}}{2\Delta y_{Np}}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

，上式亦為 2D steady state diffusion eqaution 的二階精度中心離散格式。

(三)、邊界處理

此邊界採用：Link-Wise 分佈，邊界計算點與物理邊界相距半個格子長。針對非齊性邊條件，處理邊界點應該滿足的離散化方程：由於 $T(x,L)=T_{i,Ny+\frac{1}{2}}=1.0$，則對於邊界上的 computational node(i,Ny)，其離散化方程由 (12) 做修改。(先寫出邊界點的離散方程，再帶入邊界條件)

處理方式：

$(w(W(L$ 左計算格點) 的 (西邊界點)) 的 (體熱流密度)) 取一階前項差分 (中心-本位)：

$((w(W(L$ 左計算格點) 的 (西邊界點)) 的 (體熱流密度)) 的 (一階精度前項差分))：

$$q_{x(-\delta_W,j)}=\frac{T_{0,j}-T_{-\delta_W,j}}{\Delta x_{pw}},q_{x(-\frac{1}{2},j)}=\frac{T_{0,j}-T_{-\frac{1}{2},j}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$(e(E(R$ 右計算格點) 的 (東邊界點)) 的 (體熱流密度)) 取一階後項差分 (本位-中心)：

$((e(E(R$ 右計算格點) 的 (東邊界點)) 的 (體熱流密度)) 的 (一階精度後項差分))：

$$q_{x(Nx+\delta_E,j)}=\frac{T_{Nx+\delta_E,j}-T_{Nx,j}}{\Delta x_{ep}},q_{x(Nx+\frac{1}{2},j)}=\frac{T_{Nx+\frac{1}{2},j}-T_{Nx,j}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$(s(S(B$ 下計算格點) 的 (南邊界點)) 的 (體熱流密度)) 取一階前項差分：(中心-本位)

$((s(S(B$ 下計算格點) 的 (南邊界點)) 的 (體熱流密度)) 的 (一階精度前項差分))：

$$q_{x(i,-\delta_S)}=\frac{T_{i,0}-T_{i,-\delta_S}}{\Delta y_{ps}},q_{x(i,-\frac{1}{2})}=\frac{T_{i,0}-T_{i,-\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta y}{2}}$$

$(n(N(U$ 上計算格點) 的 (北邊界點)) 的 (體熱流密度)) 取一階後項差分 (本位-中心)：

$((n(N(U$ 上計算格點) 的 (北邊界點)) 的 (體熱流密度)) 的 (一階精度後項差分))：

$$q_{x(i,Ny+\delta_N)}=\frac{T_{i,Ny+\delta_N}-T_{i,Ny}}{\Delta y_{np}},q_{x(i,Ny+\frac{1}{2})}=\frac{T_{i,Ny+\frac{1}{2}}-T_{i,Ny}}{\frac{\Delta y}{2}}$$

此題上邊界計算點離散化方程：(均勻正交網格、邊場條件特殊)

$$\begin{aligned}&\Delta y\cdot(k\frac{T_{i+1,Ny}-T_{i,Ny}}{\Delta x})-\Delta y\cdot(k\frac{T_{i,Ny}-T_{i-1,Ny}}{\Delta x})\\&+0-\Delta x\cdot(k\frac{T_{i,Ny}-T_{i,Ny-1}}{\Delta y})+\Delta x\cdot(k\frac{T_{i,Ny+\frac{1}{2}}-T_{i,Ny}}{\frac{\Delta y}{2}})=0\end{aligned}\tag{18}$$

壁面上的擴散係數 $k_{i,Ny+\frac{1}{2}}$ 仍取用 p 點上的擴散係數 $k_{i,Ny}$。一般來說，內點上的擴散係數 $k_{i,j+\frac{1}{2}}$ 採用迎風離散：$\frac{k_N+k_p}{2}$

上式可化為：(各項係數之分子為該面闊散係數 k 乘上該面積分空間 A，分母為差分距離)

$$\begin{aligned}&\frac{\Delta y\cdot k}{\Delta x}T_{i-1,Ny}+\frac{\Delta y\cdot k}{\Delta x}T_{i+1,Ny}+\frac{\Delta x\cdot k}{\Delta y}T_{i,Ny-1}+0+\frac{\Delta x\cdot k}{\frac{\Delta y}{2}}T_{i,Ny+\frac{1}{2}}\\=&\frac{\Delta y\cdot k}{\Delta x}T_{i,Ny}+\frac{\Delta y\cdot k}{\Delta x}T_{i,Ny}+0+\frac{\Delta x\cdot k}{\Delta y}T_{i,Ny}+\frac{\Delta x\cdot k}{\frac{\Delta y}{2}}T_{i,Ny}\end{aligned}\tag{19}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\Delta y\cdot k}{\Delta x}T_{i-1,Ny}+\frac{\Delta y\cdot k}{\Delta x}T_{i+1,Ny}+\frac{\Delta x\cdot k}{\Delta y}T_{i,Ny-1}+0+\frac{\Delta x\cdot k}{\frac{\Delta y}{2}}T_{i,Ny+\frac{1}{2}}\\=&\left[\frac{\Delta y\cdot k}{\Delta x}+\frac{\Delta y\cdot k}{\Delta x}+0+\frac{\Delta x\cdot k}{\Delta y}-(-\frac{\Delta x\cdot k}{\frac{\Delta y}{2}}Q)\right]T_{i,Ny}\end{aligned}\tag{20}$$

通用的 $up\,boundary\,computational\,node(i,Ny)$ 所滿足的離散化方程為：

$$A_e\cdot(\frac{k_{i+1,Ny}+k_{i,Ny}}{2}\frac{T_{i+1,Ny}-T_{i,Ny}}{\Delta x_{Ep}})-A_w\cdot(\frac{k_{i,Ny}+k_{i-1,Ny}}{2}\frac{T_{i,Ny}-T_{i-1,Ny}}{\Delta x_{pW}}) \\ +0-A_s\cdot(\frac{k_{i,Ny}+k_{i,Ny-1}}{2}\frac{T_{i,Ny}-T_{i,Ny-1}}{\Delta y_{pS}})+A_n(k_{i,Ny}\frac{T_{i,Ny+\frac{1}{2}}-T_{i,Ny}}{\Delta y_{np}})=0 \tag{21}$$

將非齊性邊界條件的影響放到外源項中，形成：

$$\begin{aligned}&(a_{up,W}+a_{up,E}+a_{up,S}+a_{up,N}-S_{up,p})T_{up,p}\\&=a_{up,W}T_{up,W}+a_{up,E}T_{up,E}\\&+a_{up,S}T_{up,S}+a_{up,N}T_{up,N}\\&+S_{up,u}\end{aligned} \tag{22}$$

其中，

$$\begin{aligned}T_{up,p}&=T_{i,Ny}\\S_{up,p}&=-A_n\frac{k_{i,Ny}}{\Delta y_{np}}\\T_{up,W}&=T_{i-1,Ny},a_W=A_w\frac{\frac{k_{i,Ny}+k_{i-1,Ny}}{2}}{\Delta x_{pW}}\\T_{up,E}&=T_{i+1,Ny},a_E=A_e\frac{\frac{k_{i+1,Ny}+k_{i,Ny}}{2}}{\Delta x_{Ep}}\\T_{up,S}&=T_{i,Ny-1},a_S=A_s\frac{\frac{k_{i,Ny}+k_{i,Ny-1}}{2}}{\Delta y_{pS}}\\T_{up,N}&=0,a_N=0\\S_{up,u}&=A_n\frac{k_{i,Ny}}{\Delta y_{np}}\cdot T_{i,Ny+\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{23}$$

此題左邊界計算點離散化方程：(均勻正交網格、邊場條件特殊)

$$0+\frac{\Delta y\cdot k}{\Delta x}T_{1,j}+\frac{\Delta x\cdot k}{\Delta y}T_{0,j-1}+\frac{\Delta x\cdot k}{\Delta y}T_{0,j+1}+\frac{\Delta y\cdot k}{\frac{\Delta x}{2}}T_{-\frac{1}{2},j} \\ =\left[0+\frac{\Delta y\cdot k}{\Delta x}+\frac{\Delta x\cdot k}{\Delta y}+\frac{\Delta x\cdot k}{\Delta y}-(-\frac{\Delta y\cdot k}{\frac{\Delta x}{2}})\right]T_{i,Ny} \tag{24}$$

通用的 $left\,boundary\,computational\,node(i,Ny)$ 所滿足的離散化方程為：

$$\begin{aligned}&(a_{left,W}+a_{left,E}+a_{left,S}+a_{left,N}-S_{left,p})T_{left,p}\\&=a_{left,W}T_{left,W}+a_{left,E}T_{left,E}\\&+a_{left,S}T_{left,S}+a_{left,N}T_{left,N}\\&+S_{left,u}\end{aligned} \tag{25}$$

其中，

$$
\begin{aligned}
&T_{left,p} = T_{0,j} \\
&S_{left,p} = -A_w \frac{k_{0,j}}{\Delta x_{pw}} \\
&T_{left,W} = 0, a_W = 0 \\
&T_{left,E} = T_{1,j}, a_E = A_e \frac{\frac{k_{1,j}+k_{0,j}}{2}}{\Delta x_{Ep}} \\
&T_{left,S} = T_{0,j-1}, a_S = A_s \frac{\frac{k_{0,j-1}+k_{0,j}}{2}}{\Delta y_{pS}} \\
&T_{left,N} = T_{0,j+1}, a_N = A_n \frac{\frac{k_{0,j+1}+k_{0,j}}{2}}{\Delta y_{Np}} \\
&S_{left,u} = A_w \frac{k_{0,j}}{\Delta x_{pw}} \cdot T_{-\frac{1}{2},j}
\end{aligned}
\tag{26}
$$

同理，此題右邊界計算點離散化方程：(均勻正交網格、邊場條件特殊)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\Delta y \cdot k}{\Delta x} T_{Nx-1,j} + 0 + \frac{\Delta x \cdot k}{\Delta y} T_{Nx,j-1} + \frac{\Delta x \cdot k}{\Delta y} T_{Nx,j+1} + \frac{\Delta y \cdot k}{\frac{\Delta x}{2}} T_{Nx+\frac{1}{2},j} \\
&= \left[\frac{\Delta y \cdot k}{\Delta x} + 0 + \frac{\Delta x \cdot k}{\Delta y} + \frac{\Delta x \cdot k}{\Delta y} - \left(-\frac{\Delta y \cdot k}{\frac{\Delta x}{2}}\right) \right] T_{Nx,j}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

通用的 $right\,boundary\,computational\,node(i, Ny)$ 的離散化方程為：

$$
\begin{aligned}
&(a_{right,W} + a_{right,E} + a_{right,S} + a_{right,N} - S_{right,p}) T_{right,p} \\
&= a_{right,W} T_{right,W} + a_{right,E} T_{right,E} \\
&+ a_{right,S} T_{right,S} + a_{right,N} T_{right,N} \\
&+ S_{right,u}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

其中，

$$
\begin{aligned}
&T_{right,p} = T_{Nx,j} \\
&S_{right,p} = -A_e \frac{k_{Nx,j}}{\Delta x_{ep}} \\
&T_{right,W} = T_{Nx-1,j}, a_W = A_w \frac{\frac{k_{Nx,j}+k_{Nx-1,j}}{2}}{\Delta x_{pW}} \\
&T_{right,E} = 0, a_E = 0 \\
&T_{right,S} = T_{Nx,j-1}, a_S = A_s \frac{\frac{k_{Nx,j-1}+k_{Nx,j}}{2}}{\Delta y_{pS}} \\
&T_{right,N} = T_{Nx,j+1}, a_N = A_n \frac{\frac{k_{Nx,j+1}+k_{Nx,j}}{2}}{\Delta y_{Np}} \\
&S_{right,u} = A_w \frac{k_{Nx,j}}{\Delta x_{ep}} \cdot T_{Nx+\frac{1}{2},j}
\end{aligned}
\tag{29}
$$

此題下邊界計算點離散化方程：(均勻正交網格、邊場條件特殊)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\Delta y\cdot k}{\Delta x}T_{i-1,0}+\frac{\Delta y\cdot k}{\Delta x}T_{i+1,0}+0+\frac{\Delta x\cdot k}{\Delta y}T_{i,1}+\frac{\Delta x\cdot k}{\frac{\Delta y}{2}}T_{i,-\frac{1}{2}}\\
&=\left[\frac{\Delta y\cdot k}{\Delta x}+\frac{\Delta y\cdot k}{\Delta x}+0+\frac{\Delta x\cdot k}{\Delta y}-\left(-\frac{\Delta x\cdot k}{\frac{\Delta y}{2}}\right)\right]T_{i,0}
\end{aligned}
\tag{30}
$$

通用的 $bottom\,boundary\,computational\,node(i,Ny)$ 的離散化方程為：

$$
\begin{aligned}
&(a_{bottom,W}+a_{bottom,E}+a_{bottom,S}+a_{bottom,N}-S_{bottom,p})T_{bottom,p}\\
&=a_{bottom,W}T_{bottom,W}+a_{bottom,E}T_{bottom,E}\\
&+a_{bottom,S}T_{bottom,S}+a_{bottom,N}T_{bottom,N}\\
&+S_{bottom,u}
\end{aligned}
\tag{31}
$$

其中，

$$
\begin{aligned}
&T_{bottom,p}=T_{i,0}\\
&S_{bottom,p}=-A_s\frac{k_{i,0}}{\Delta y_{ps}}\\
&T_{bottom,W}=T_{i-1,0},a_W=A_w\frac{\frac{k_{i,0}+k_{i-1,0}}{2}}{\Delta x_{pW}}\\
&T_{bottom,E}=T_{i+1,0},a_E=A_e\frac{\frac{k_{i+1,0}+k_{i,0}}{2}}{\Delta x_{Ep}}\\
&T_{bottom,S}=0,a_S=0\\
&T_{bottom,N}=T_{i,1},a_N=A_n\frac{\frac{k_{i,1}+k_{i,0}}{2}}{\Delta y_{Np}}\\
&S_{bottom,u}=A_s\frac{k_{i,0}}{\Delta y_{ps}}\cdot T_{i,-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
\tag{32}
$$

上述即為二維穩態擴散方程的二階精度中心離散格式的邊界處理。