# LES_LBM

Chen Peng Chung

February 10, 2026

## Contents

# 一　前言

由速度空間離散化波茲曼方程：

$$\frac{\partial f_i}{\partial t}(\vec{r},t)+\vec{e}_i\cdot\frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}}(\vec{r},t)=\Omega(f_i,f_i^{eq}) \tag{一.1}$$

定義濾波變換：

$$\mathcal{L}(f)=\int_\Omega f(\vec{r})G(\vec{r}-\vec{r}')dr^3 \tag{一.2}$$

對(一.1)上式兩側左右同取濾波變換，則有：

$$\frac{\partial \mathcal{L}(f_i)}{\partial t}(\vec{r},t)+\vec{e}_i\cdot\frac{\partial \mathcal{L}(f_i)}{\partial \vec{r}}(\vec{r},t)=\mathcal{L}\left(\Omega(f_i,f_i^{eq})\right) \tag{一.3}$$

上式(一.3)即稱為濾波型速度空間離散化波茲曼方程，對上式(一.3)進行時空離散化，則有：

$$\mathcal{L}(f_i)(\vec{r}+\vec{e}_i\delta t,t+\delta t)=\mathcal{L}(f_i)(\vec{r},t)+\mathcal{L}(\Omega(f_i-f_i^{eq}))\delta t \tag{一.4}$$

上式即稱為濾波型晶格波茲曼方程。

# 二　亞格子模型與濾波

何謂亞格子應力張量模型？在紊流裡面，最需要關心的雷諾應力張量場 (Raynolds Stress Tensor)，在 LES 模擬中，為亞格子應力張量場 (subgrid stress tensor)，其表達式為：

$$\begin{aligned}\tau_{ij}&=R_{ij}+C_{ij}+L_{ij}\\&=\left(\overline{u'u'}\right)+\left(\overline{\overline{u}u'}+\overline{u'\overline{u}}\right)+\left(\overline{\overline{u}\overline{u}}-\overline{u}\cdot\overline{u}\right)+\overline{u}\cdot\overline{u}\end{aligned} \tag{二.1}$$

其中，$R_{ij}$ 為亞格子雷諾應力張量場，由此延伸，亞格子應力張量場的一種近似：(S(R(D 亞格子應力張量場) 的 (各向異性部分)) 的 (Smagorinsky 模型))。如下給出該應力模型的定義：

$$\tau_{ij}=-2\nu_t\overline{S_{ij}}=-2\left(C_s\Delta^2\sqrt{2\overline{S_{ij}}\overline{S_{ij}}}\right)\overline{S_{ij}} \tag{二.2}$$

其中，$\overline{S_{ij}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i}+\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j}\right)$，$\nu_t$ 稱為“渦黏度場”(Eddy viscosity)。在 Subgrid turbulance model 中，真正的意義為對於“亞格子應力張量場”取 (R(D 亞格子應力張量場) 的 (Smagorinsky 模型))；同時，對“運動黏度係數場”取為 (U(R 運動黏滯係數場) 的 (Smagorinsky 模型))：

$$\nu_s=\nu_o+C_s\Delta^2\sqrt{2\overline{S_{ij}}\cdot\overline{S_{ij}}} \tag{二.3}$$

如上所示，該模型為空間座標的函數，為原來運動粘滯係數場在 LES 當中的修正。在 Large Eddy Simulation 中，濾波型動量方程組為

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_i}=0\\&\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial t}+\frac{\partial\overline{u_i}\cdot\overline{u_j}}{\partial x_i}=-\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i}-\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nu\left(\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i}+\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j}\right)\right)\end{aligned} \tag{二.4}$$

那我們在 LBM 當中，應該關心的問題是要如何修正 Lattice Boltzmann Equation，才能恢復對應到濾波型 Navier-Stokes 方程組，如下給出一般碰撞算符下的 LBE 與單鬆弛時間下的 LBE:

$$\begin{aligned}
f_i(\vec{r}+\vec{e}_i\delta t, t+\delta t) &= f_i(\vec{r},t)+\Omega_i \\
f_i(\vec{r}+\vec{e}_i\delta t, t+\delta t) &= f_i(\vec{r},t)+\frac{1}{\tau}\left(f_i(\vec{r},t)-f_i^{eq}(\rho,\vec{u})\right)
\end{aligned} \tag{二.5}$$

同時對上式左右兩側取濾波卷積，則有 (E 濾波型晶格波茲曼方程) 與 (R 濾波型單鬆弛時間晶格波茲曼方程)：

$$\begin{aligned}
\overline{f_i(\vec{r}+\vec{e}_i\delta t, t+\delta t)} &= \overline{f_i(\vec{r},t)}+\overline{\Omega_i} \\
\overline{f_i(\vec{r}+\vec{e}_i\delta t, t+\delta t)} &= \overline{f_i(\vec{r},t)}+\frac{1}{\tau}\left(\overline{f_i(\vec{r},t)}-\overline{f_i^{eq}(\rho,\vec{u})}\right)
\end{aligned} \tag{二.6}$$

在這邊．文獻所採取的方法為

1. (G(T(E 一般態分佈函數) 且 (F 平衡態分佈函數) 的 (碰撞修正項)) 的 (濾波卷積)) 改為 (A(e(E 一般態分佈函數) 的 (濾波卷積)) 且 (f(F 平衡態分佈函數) 的 (濾波卷積)) 的 (碰撞修正項))：

$$\begin{gathered}
\text{先娶碰撞再取濾波} \Rightarrow \text{先取濾波再次取碰撞} \\
\overline{\Omega_i(f(\vec{r},t), f_i^{eq}(\rho,\vec{u}))} \Rightarrow \Omega_i(\overline{f(\vec{r},t)}, \overline{f_i^{eq}(\rho,\vec{u})})
\end{gathered} \tag{二.7}$$

2. (f(F 平衡態分佈函數) 的 (濾波卷積)) 取為

$$\overline{f_i^{eq}(\rho,\vec{u})} \Rightarrow f_i^{eq}(\overline{\rho},\overline{\vec{u}}) \tag{二.8}$$

因此，以濾波速度場為自變數的平衡態分佈函數為

$$f_i(\overline{\rho}\,\overline{\vec{u}}) = w_i\overline{\rho}\left(1+\frac{c_{i\alpha}\overline{u_\alpha}}{c_s^2}+\frac{(\overline{u_\alpha}\cdot\overline{u_\beta})(c_{i\alpha}c_{i\beta}-c_s^2\delta_{\alpha\beta})}{2c_s^4}\right) \tag{二.9}$$

## 二、1　非封閉問題

如果我沒有一點修正，則該濾波型晶格波茲曼方程的解的濾波形式不見得為原晶格波茲曼方程的解：

$$\mathcal{F} \to .... \tag{二.10}$$

就算你做了第一點修正，形成如下濾波型晶格波茲曼方程：
令濾波變換為：

$$\mathcal{L}(f) = \int f(\vec{r})G(\vec{r},\vec{r}')dr^3 \tag{二.11}$$