Local Time Step Method

Chen Peng Chung

February 23, 2026

Contents

一　前言

在 Imamura 本篇文獻中，提出 Gerneral Interpolation LBM(GILBM) 在本地時間步方法 (local time step method) 的應用，最基本的原因是因為在曲線座標系中，每一個網格系統的節點的鬆弛時間是隨空間變化的 (space varying)。因為在計算空間 (η, ξ, ζ) 中，每一個物理空間計算點 (i, j, k)，每一個離散速度編號 (α)，每一個正規化離散化粒子速度集的分量 $c_{\alpha\ i}$ 都會隨著網格系統間曲率變化而不同，因此在滿足 CFL 穩定條件下，在每一個物理空間計算點，遍歷每一個編號 (velocity direction)，每一個分量，選出該計算點上最滿足穩定條件下的 time step，稱之為 local time step，以此場空間變化的時間步驟為基礎，討論如何加入 LBGK 方程中，減少計算時間。

二　定義與概述

在本節中，將論述加入 local time step 後，各種方程式，如宏觀視角下的 N-S 方程，Discrete-Velocity Boltzmann Equation，有如何差異，以及為什麼能夠使用這一些帶有差異的 governing equation。

二、1　local time step

本地時間為掃描所有編號 (Discrete-Velocity Direction)，掃描所有分量下，正規化離散化粒子速度的分量最大的倒數定義，在 CFL 條件下，可以定義：

$$\Delta t_l(j,k) = \lambda \min_{alpha\ i} \left[\frac{1}{c_{\alpha\ i(j,k)}} \right] \tag{二.1}$$

其中，λ 為 CFL number，在 CFL 條件下，$\lambda \leq 1$，因此鬆弛時間隨場空間變化的 LBGK 方程為：

$$f_\alpha(\vec{r} + \vec{c}_\alpha \Delta t_l(j,k), t + \Delta t_l(j,k)) - f_\alpha(\vec{r}, t) = -\frac{1}{w_a(j,k)} \left[f_\alpha(\vec{r}, t) - f_\alpha^{eq}(\vec{r}, t) \right] \tag{二.2}$$

一般而言，時間變數的偏微分，指的是如下變數的變化率：

$$\Delta t_g = \lambda \min_{\alpha\ i\ (j,k)} \left[\frac{1}{c_{\alpha\ i(j,k)}} \right] \tag{二.3}$$

上述稱為全域時間步長 (global time step)，取遍歷每一個計算點，每一個粒子速度集編號，每一個分量下的粒子速度分量的最大值取倒數定義成。因此有如下關係：

$$\frac{\partial}{\partial t_l} = \frac{\partial}{\partial t_g} \frac{1}{a(j,k)} \tag{二.4}$$

其中，$a(j,k) \equiv \frac{\partial t_l}{\partial t_g}$