LES_LBM

Chen Peng Chung

February 11, 2026

Contents

一　前言

由速度空間離散化波茲曼方程：

$$\frac{\partial f_i}{\partial t}(\vec{r},t)+\vec{e}_i\cdot\frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}}(\vec{r},t)=\Omega(f_i,f_i^{eq}) \tag{一.1}$$

定義濾波變換：

$$\mathcal{L}[f]=\int_\Omega f(\vec{r})G(\vec{r}-\vec{r}')dr^3 \tag{一.2}$$

對(一.1)上式兩側左右同取濾波變換，則有：

$$\frac{\partial \mathcal{L}[f_i(\vec{r},t)]}{\partial t}+\vec{e}_i\cdot\frac{\partial \mathcal{L}[f_i(\vec{r},t)]}{\partial \vec{r}}=\mathcal{L}[\Omega(f_i,f_i^{eq})] \tag{一.3}$$

上式(一.3)即稱為濾波型速度空間離散化波茲曼方程，對上式(一.3)進行時空離散化，則有：

$$\mathcal{L}[f_i](\vec{r}+\vec{e}_i\delta t,t+\delta t)=\mathcal{L}[f_i](\vec{r},t)+\mathcal{L}[\Omega(f_i-f_i^{eq})]\delta t \tag{一.4}$$

上式即稱為濾波型晶格波茲曼方程。

二　亞格子模型與濾波

何謂亞格子應力張量模型？在紊流裡面，最需要關心的雷諾應力張量場 (Raynolds Stress Tensor)，在 LES 模擬中，為亞格子應力張量場 (subgrid stress tensor)，其表達式為：

$$\begin{aligned}\tau_{ij}&=R_{ij}+C_{ij}+L_{ij}\\&=\left(\overline{u'u'}\right)+\left(\overline{\overline{u}u'}+\overline{u'\overline{u}}\right)+\left(\overline{\overline{u}\overline{u}}-\overline{u}\cdot\overline{u}\right)+\overline{u}\cdot\overline{u}\end{aligned} \tag{二.1}$$

其中，R_{ij} 為亞格子雷諾應力張量場，由此延伸，亞格子應力張量場的一種近似：(S(R(D 亞格子應力張量場) 的 (各向異性部分)) 的 (Smagorinsky 模型))。如下給出該應力模型的定義：

$$\tau_{ij}=-2\nu_t\overline{S_{ij}}=-2\left(C_s\Delta^2\sqrt{2\overline{S_{ij}}\overline{S_{ij}}}\right)\overline{S_{ij}} \tag{二.2}$$

其中，$\overline{S_{ij}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i}+\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j}\right)$，$\nu_t$ 稱為 “ 渦黏度場”(Eddy viscosity)。在 Subgrid turbulance model 中，真正的意義為對於 “ 亞格子應力張量場”取 (R(D 亞格子應力張量場) 的 (Smagorinsky 模型))；同時，對 “ 運動黏度係數場”取為 (U(R 運動黏滯係數場) 的 (Smagorinsky 模型))：

$$\nu_s=\nu_o+C_s\Delta^2\sqrt{2\overline{S_{ij}}\cdot\overline{S_{ij}}} \tag{二.3}$$

如上所示，該模型為空間座標的函數，為原來運動粘滯係數場在 LES 當中的修正。在 Large Eddy Simulation 中，濾波型動量方程組為

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_i}=0\\&\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial t}+\frac{\partial\overline{u_i}\cdot\overline{u_j}}{\partial x_i}=-\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i}-\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nu\left(\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i}+\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j}\right)\right)\end{aligned} \tag{二.4}$$

在 LES 模擬中，我們應該關心到當對 elocity-discrete boltzmann equation 左右兩邊取濾波變換後，得到濾波型速度空間離散化波茲曼方程，我們要如何修正，才能讓時間空間離散化後的濾波型晶格波茲曼方程回歸到宏觀 Navier-Stokes 方程。
下面我們給出待修正的方程式：

$$\mathcal{L} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f_i(\vec{r},t)}{\partial t} + \vec{e}_i \cdot \frac{\partial f_i(\vec{r},t)}{\partial \vec{r}} = \Omega(f_i, f_i^{eq}) \tag{二.5}$$

這邊要注意，文獻在對於 LBM 處理濾波變換時，都是對於時空連續的方程式作用，然而因為等是左側的算子為線性算子，所以變換符號可以跟微分算子對調：

$$\mathcal{D}_t = \partial_t + \vec{e}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \leftrightarrow \mathcal{L} \tag{二.6}$$

因此有如下，濾波型速度空間離散化波茲曼方程：

$$\frac{\partial}{\partial t} + \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left(\mathcal{L}[f(\vec{r},t)]\right) = \mathcal{L}[\Omega(f_i(\vec{r},t) - f_i^{eq}(\rho,\vec{u})] \tag{二.7}$$

對於碰撞算子取濾波變換 $\mathcal{L}(\Omega(f_i(\vec{r},t) - f_i^{eq}(\rho,\vec{u}))$，文獻所採取的方法為

1. (L_{12}(C_{12}(E 一般態分佈函數) 且 (F 平衡態分佈函數) 的 (碰撞修正場)) 的 (濾波變換)) 改為 (C_{ef}(e(E 一般態分布函數) 的 (濾波變換)) 且 (f(F 平衡態分函數) 的 (濾波變換)) 的 (碰撞修正場))
$$\mathcal{L}[\Omega(f_i(\vec{r},t) - f_i^{eq}(\rho,\vec{u})] \Rightarrow \Omega\left(\mathcal{L}[f_i(\vec{r},t)] - \mathcal{L}[f_i^{eq}(\rho,\vec{u})]\right) \tag{二.8}$$

2. (f(F 平衡態分佈函數) 的 (濾波變換)) 取為

$$\mathcal{L}[f_i^{eq}(\rho,\vec{u})] \approx f_i^{eq}(\mathcal{L}[\rho], \mathcal{L}[\vec{u}]) \tag{二.9}$$

因此，以濾波速度場為自變數的平衡態分佈函數為

$$f_i^{eq}(\mathcal{L}[\rho], \mathcal{L}[\vec{u}]) = w_i \overline{\rho} \left(1 + \frac{c_{i\alpha}\mathcal{L}[u_\alpha]}{c_s^2} + \frac{(\mathcal{L}[u_\alpha]\cdot\mathcal{L}[u_\beta])(c_{i\alpha}c_{i\beta} - c_s^2\delta_{\alpha\beta})}{2c_s^4}\right) \tag{二.10}$$

二、1　第一非封閉問題

如果我沒有一點修正，則該濾波型晶格波茲曼方程的解的濾波形式不見得為原晶格波茲曼方程的解：

$$\mathcal{F} \rightarrow .... \tag{二.11}$$

就算你做了第一點修正，形成如下濾波型晶格波茲曼方程：

二、2　第二非封閉問題

令濾波變換為：

$$\mathcal{L}[f(\vec{r})] = \int f(\vec{r}) G(\vec{r}, \vec{r}') dr^3 \tag{二.12}$$

速度空間離散化 Boltzmann Equation 具體形式為：

$$\frac{\partial f_i(\vec{r},t)}{\partial t} + \vec{e}_i \cdot \frac{\partial f_i(\vec{r},t)}{\partial \vec{r}} = \frac{1}{\tau}\left(f_i(\vec{r},t) - f_i^{eq}(\rho,\vec{u})\right) \tag{二.13}$$

以下兩點基於宏觀參數上面的討論，基於動量守恆，(S(C_{12}(G 一般態分布函數) 且 (F 平衡態分佈函數 (碰撞修正場)) 的 (一階離散矩)) = 0，即有下式：

$$\begin{aligned}\sum_i \vec{e}_i \Omega\left(\mathcal{L}[f_i(\vec{r},t)] - \mathcal{L}[f_i^{eq}(\rho,\vec{u})]\right) &= \sum_i \vec{e}_i \frac{1}{\tau}\left(f_i(\vec{r},t) - f_i^{eq}(\rho,\vec{u})\right) = 0 \\ \sum_{i=} \vec{e}_i f_i(\vec{r},t) &= \sum_i \vec{e}_i f_i^{eq}(\rho,\vec{u})\end{aligned} \tag{二.14}$$

而因為平衡態分佈函數度的句體表達式為：

$$f_i(\rho,\vec{u}) = w_i\rho\left(1 + \frac{c_{i\alpha}u_\alpha}{c_s^2} + \frac{(u_\alpha\cdot u_\beta)(c_{i\alpha}c_{i\beta} - c_s^2\delta_{\alpha\beta})}{2c_s^4}\right) \tag{二.15}$$

所以，在方程式(二.26)中，(S(F 平衡態分佈函數) 的 (一階離散矩)) 為自身表達式的一階項係數：

$$\sum_{i=} \vec{e}_i f_i(\vec{r},t) = \sum_i \vec{e}_i f_i^{eq}(\rho,\vec{u}) = \rho\vec{u} \tag{二.16}$$

濾波型速度空間離散化 Boltzmann Equation 對於 Filtered discrete-velocity Boltzmann Equation :

$$\frac{\partial \mathcal{L}[f_i(\vec{r},t)]}{\partial t} + \vec{e}_i \cdot \frac{\partial \mathcal{L}[f_i(\vec{r},t)]}{\partial \vec{r}} = \frac{1}{\tau}\left(\mathcal{L}[f_i(\vec{r},t)] - \mathcal{L}[f_i^{eq}(\rho,\vec{u})]\right) \tag{二.17}$$

以下有兩點對於宏觀參數的討論，基於動量守恆，(B(C_{gf}(g_1(G_1 一般態分布函數) 的 (濾波變換)) 且 (f_1(F_1 平衡態分佈函數) 的 (濾波變換)) 的 (碰撞修正場)) 的一階離散矩)) = 0，即有下式：

$$\begin{aligned}\sum_i \vec{e}_i \Omega\left(f_i(\vec{r},t) - f_i^{eq}(\rho,\vec{u})\right) &= \sum_i \vec{e}_i \frac{1}{\tau}\left(\mathcal{L}[f_i(\vec{r},t)] - \mathcal{L}[f_i^{eq}(\rho,\vec{u})]\right) \\ \sum_{i=} \vec{e}_i \mathcal{L}[f_i(\vec{r},t)] &= \sum_i \vec{e}_i \mathcal{L}[f_i^{eq}(\rho,\vec{u})]\end{aligned} \tag{二.18}$$

對平衡態分佈函數取濾波變換，則有 (f_1(F_1 平衡態分佈函數) 的 (濾波變換)) 的表達式為：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f_i^{eq}(\rho,\vec{u})] &= w_i\mathcal{L}\left[\rho\left(1 + \frac{c_{i\alpha}u_\alpha}{c_s^2} + \frac{(u_\alpha\cdot u_\beta)(c_{i\alpha}c_{i\beta} - c_s^2\delta_{\alpha\beta})}{2c_s^4}\right)\right] \\ &= w_i\left[\mathcal{L}[\rho] + \mathcal{L}[\rho\vec{u}]\cdot\frac{\vec{c}_i}{c_s^2} + \mathcal{L}[\rho\vec{u}\vec{u}] : \frac{(\vec{c}_i\vec{c}_i - \sum_\alpha\sum_\beta c_s^2\delta_{\alpha\beta}\vec{e}_\alpha\vec{e}_\beta)}{2c_s^4}\right]\end{aligned} \tag{二.19}$$

所以在方程式(二.17)中，(T(f_1(F_1 平衡態分佈函數) 的 (濾波變換)) 的 (一階離散矩)) 為自身表達式(二.30)的一階項係數：

$$\sum_{i=} \vec{e}_i \mathcal{L}[f_i(\vec{r},t)] = \sum_i \vec{e}_i \mathcal{L}[f_i^{eq}(\rho,\vec{u})] = \mathcal{L}[\rho\vec{u}] \tag{二.20}$$

修正型濾波型速度空間離散化 Boltzmann Equation 在論文中，對於方程式(二.17)，有如下封閉性操作：(第二步)

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}[f_i(\vec{r},t)] + \vec{e}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\mathcal{L}[f_i(\vec{r},t)] = \frac{1}{\tau}\left(\mathcal{L}[f_i(\vec{r},t)] - f_i^{eq}(\mathcal{L}[\rho],\mathcal{L}[\vec{u}])\right) \tag{二.21}$$

以下有兩點關於宏觀參數的討論，基於動量守恆，(C_{gF}(F_2 濾波基底平衡態分佈函數) 且 (g_2(G_2 一般態分佈函數) 的 (濾波變換)) 的 (碰撞修正場)) = 0 ，所以有：

$$\begin{gathered}\sum_i \vec{e}_i\Omega\left(\mathcal{L}[f_i(\vec{r},t)] - f_i^{eq}(\mathcal{L}[\rho],\mathcal{L}[\vec{u}])\right) = \sum_i \vec{e}_i\frac{1}{\tau}\left(\mathcal{L}[f_i(\vec{r},t)] - f_i^{eq}(\mathcal{L}[\rho],\mathcal{L}[\vec{u}])\right)\\ \sum_i \vec{e}_i\mathcal{L}[f_i(\vec{r},t)] = \sum_i \vec{e}_i f_i^{eq}(\mathcal{L}[\rho],\mathcal{L}[\vec{u}])\end{gathered} \tag{二.22}$$

(F_2 濾波基底平衡態分佈函數) 的具體表達式為：

$$f_i^{eq}(\mathcal{L}[\rho],\mathcal{L}[\vec{u}]) = w_i\mathcal{L}[\rho]\left[1 + \frac{\vec{c}_i}{c_s^2}\mathcal{L}[\vec{u}] + \frac{\mathcal{L}[\vec{u}]\mathcal{L}[\vec{u}]}{2c_s^4} : \left(\vec{c}_i\vec{c}_i - c_s^2\sum_{\alpha,\beta}\delta_{\alpha\beta}\vec{e}_\alpha\vec{e}_\beta\right)\right] \tag{二.23}$$

所以在方程式：修正型濾波型速度空間離散化 Boltzmann Equation 中，(U(F_2 濾波基底平衡態分佈函數) 的 (一階離散矩)) 利用厄密特多項正交性，可以求出：

$$\sum_i \vec{e}_i f_i^{eq}(\mathcal{L}[\rho],\mathcal{L}[\vec{u}]) = \mathcal{L}[\rho]\cdot\mathcal{L}[\vec{u}] \tag{二.24}$$

所以我們有兩點重要結論：1. 因為平衡態分佈函數為非線性映射，所以 (f(F 平衡態分佈函數) 的 (濾波變換)) 不等於 (F_2 濾波基底平衡態分佈函數)

$$\mathcal{L}[f_i^{eq}(\rho,\vec{u})] \neq f_i^{eq}(\mathcal{L}[\rho],\mathcal{L}[\vec{u}]) \tag{二.25}$$

2. (T(s(D 濾波型速度空間離散化 Boltzmann Equation) 的 (解)) 的 (濾波變換)) 不等於 (I(R 速度空間離散化 BOltzmann Equation) 的 (解))：分別為如下方程式：

$$\begin{gathered}\frac{\partial f_i(\vec{r},t)}{\partial t} + \vec{e}_i\cdot\frac{\partial f_i(\vec{r},t)}{\partial \vec{r}} = \frac{1}{\tau}\left(f_i(\vec{r},t) - f_i^{eq}(\rho,\vec{u})\right)\\ \frac{\partial \mathcal{L}[f_i(\vec{r},t)]}{\partial t} + \vec{e}_i\cdot\frac{\partial \mathcal{L}[f_i(\vec{r},t)]}{\partial \vec{r}} = \frac{1}{\tau}\left(\mathcal{L}[f_i(\vec{r},t)] - \mathcal{L}[f_i^{eq}(\rho,\vec{u})]\right)\end{gathered} \tag{二.26}$$

原因可由一階離散矩得知：在第一式中，(R(G 一般態分佈函數) 的 (一階離散矩)) 為：

$$\sum_i \vec{e}_i f_i(\vec{r},t) = \rho\vec{u} \tag{二.27}$$

而在第二式中，(E(g_1(G_1 一般態分佈函數) 的 (濾波變換)) 的 (一階離散矩))：

$$\sum_i \vec{e}_i\mathcal{L}[f_i(\vec{r},t)] = \mathcal{L}[\rho\vec{u}] \tag{二.28}$$

所以我們可以知道，對於速度空間離散化 Boltzmann Equation 的解不唯一，實際求解時，可以為求方便，自動將其解視為某一個分佈函數的濾波變換，這就是在 LBE 中，可以隱式求解濾波解的特性。

二、3　第三非封閉問題

兩個最重要的應力參數　在宏觀空間當中，先定義兩個最重要的宏觀應力場：

1. (P(Y(N 非平衡態分佈函數) 的 (二階離散速度矩)) 的 (濾波變換)) 等於 (v(n(N 非平衡態分佈函數) 的 (濾波變換)) 的 (二階離散速度矩)):

$$\mathcal{L}\left[\prod_{\alpha\beta}^{neq}\right] = \sum_i e_{i\alpha}e_{i\beta}\mathcal{L}\left[f_i^{neq}\right] \Rightarrow |\mathcal{L}[S_{ij}]|\sqrt{2} = |\overline{S}| \tag{二.29}$$

2. (a(A(G_1 一階尺度一般態分佈函數) 的 (二階離散速度矩)) 的 (濾波變換)) = (E(g_1(G_1 一階尺度一般態分佈函數) 的 (濾波變換)) 的 (二階離散速度矩))

$$\mathcal{L}\left[\prod_{\alpha\beta}^{(1)}\right] = \sum_i e_{i\alpha}e_{i\beta}\mathcal{L}\left[f_i^{(1)}\right] = -\rho c_s^2\tau\left(\partial_\beta\mathcal{L}\left[u_\alpha\right] + \partial_\alpha\mathcal{L}\left[u_\beta\right]\right) \Rightarrow \mathcal{L}\left[S_{ij}\right] \tag{二.30}$$

其中，τ 為原鬆弛時間場。後來，發現其實一階尺度一般態分佈函數不好求解，方程式(二.30)基本上為理論過程的方程，可以說是用處不大。

公式組合　在 LES-LBM 當中，會對於原鬆弛時間場進行推廣，將原鬆弛時間場取為 (R(A 原鬆弛時間場) 的 (Smagorinsky 格式))，將原運動黏滯係數場推廣為 (R(A 原運動黏滯係數場) 的 (Smagorinsky 格式))，附加的渦運動黏滯係數場由 $\mathcal{L}\left[S_{ij}\right]$：(s(S 實對稱剪應變率張量場) 的 (濾波變換)) 計算，$\mathcal{L}\left[S_{ij}\right]$ 本身可以由 (E(g_1(G_1 一階尺度一般態分佈函數) 的 (濾波變換)) 的 (二階離散速度矩)) 求出，如果理想的話，一般由差分得出。$\sqrt{s\mathcal{L}\left[S_{ij}\right]\mathcal{L}\left[S_{ij}\right]}$ (T(s(S 實對稱簡應變率張量場) 的 (濾波變換)) 的 (絕對值)) 由 (P(n(N 非平衡態分佈函數) 的 (濾波變換)) 的 (二階離散速度矩)) 求出。

1.
$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk} \equiv -2\nu_t\mathcal{L}[S_{ij}] = -2\cdot\cdot C_s\Delta^2\sqrt{2\mathcal{L}[S_{ij}]\mathcal{L}[S_{ij}]}\cdot\mathcal{L}[S_{ij}] \tag{二.31}$$

其中，$\mathcal{L}[S_{ij}] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[\partial_\beta u_\alpha + \partial_\alpha u_\beta]$

2.
$$\tau^* \equiv \tau_0 + \tau_t \equiv \tau_0 + 3\left(C_s\Delta^2\sqrt{s\mathcal{L}[S_{ij}]\mathcal{L}[S_{ij}]}\right) + \frac{1}{2} \tag{二.32}$$

3.
$$\nu^* \equiv \nu_0 + \nu_t \equiv \nu_0 + \left(C_s\Delta^2\sqrt{s\mathcal{L}[S_{ij}]\mathcal{L}[S_{ij}]}\right) \tag{二.33}$$

4.
$$Q \equiv \mathcal{L}\left[\prod_{ij}^{neq}\right]\mathcal{L}\left[\prod_{ij}^{neq}\right] \tag{二.34}$$

5.
$$Q^{1/2} = (\tau_0 + 3C_s\Delta^2|\overline{S}|)2\rho c_s^2|\overline{S}| = (\tau_0 + 3\nu_t)2\rho c_s^2|\overline{S}| \tag{二.35}$$

6.

$$|\overline{S}| = \frac{\sqrt{\nu_0^2 + 18C_s\Delta^2 Q^{1/2}} - \nu_0}{6C_s\Delta^2} \tag{二.36}$$

LBM-LES 在濾波變換中，(R 修正型濾波型 Lattice Boltzmann Equation)) 為：

$$\mathcal{L}[f](\vec{r} + \vec{e}_i\delta t, t + \delta t) = \mathcal{L}[f](\vec{r,t}) + \frac{1}{\tau^*}\left(\mathcal{L}[f](\vec{r},t) - f^{eq}(\mathcal{L}[\rho], \mathcal{L}[\vec{u}])\right) \tag{二.37}$$

其中，

$$\text{(T(R 原鬆弛時間場) 的 (Smagorinsky 格式))} \equiv \tau_0 + 3\left(C_s\Delta^2|\overline{S}|\right) + \frac{1}{2}$$
$$= \tau_0 + 3\left(C_s\Delta^2\sqrt{2\mathcal{L}[S_{ij}]\mathcal{L}[S_{ij}]}\right) + \frac{1}{2} \tag{二.38}$$
$$\text{(S(D 原運動黏度場) 的 (Smagorinsky 格式))} \equiv \nu_0 + \nu_t \equiv \nu_0 + C_s\Delta^2||\overline{S}$$
$$= \nu_0 + C_s\Delta^2\sqrt{2\mathcal{L}[S_{ij}]\mathcal{L}[S_{ij}]}$$

其中，C_s 為 Smagorinsky 常數，Δ 為濾波尺度，ν_0 為原運動黏滯係數場，τ_0 為原鬆弛時間場。所以重點來了，應該是如何透過介關參數的濾波變換，求解 (R(D(A 實對稱剪應變率張量場) 的 (濾波變換)) 的 (絕對值))

第一步：

(r(R(N 非平衡態分佈函數) 的 (二階離散速度矩)) 的 (濾波變換)) = (Y(n(N 非平衡態分佈函數) 的 (濾波變換)) 的 (二階離散速度矩))

$$\mathcal{L}\left[\prod_{ij}^{neq}\right] = \sum_i e_{i\alpha}e_{i\beta}\mathcal{L}\left[f_i^{neq}\right] \tag{二.39}$$

第二步：取內積：(S(R(n(N 非平衡態分佈函數) 的 (二階離散速度矩)) 的 (濾波變換)) 的 (范數平方))：

$$Q \equiv \mathcal{L}\left[\prod_{ij}^{neq}\right]\mathcal{L}\left[\prod_{ij}^{neq}\right] \tag{二.40}$$

第三步：套公式：求 (T(s(S 實對稱剪應變率張量場) 的 (濾波變換)) 的 (絕對值))

$$\sqrt{2\mathcal{L}\left[S_{ij}\right]\mathcal{L}\left[S_{ij}\right]} = \frac{\sqrt{\nu_0 + 18C_s\Delta^2 Q^{1/2}} - \nu_0}{6C_s\Delta^2} \tag{二.41}$$

第四步：求解 (D(F 亞格子應力張量場) 的 (各向異性部分))

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij} = -2\nu_t\mathcal{L}\left[S_{ij}\right] = -2\nu_t\frac{1}{-\rho c_s^2\tau 2}\mathcal{L}\left[\prod_{ij}^{(1)}\right] \tag{二.42}$$

其中，$\mathcal{L}\left[S_{ij}\right]$ 為 (s(S 實對稱剪應變率張量場) 的 (濾波變換))，$\mathcal{L}\left[\prod_{ij}^{(1)}\right]$ 為 (E(g_1(G_1 一階尺度一般態分佈函數) 的 (濾波變換)) 的 (二階離散速度矩))。

$$\mathcal{L}\left[S_{ij}\right] = \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha \mathcal{L}[u_\beta] + \partial_\beta \mathcal{L}[u_\alpha]\right)$$
$$\mathcal{L}\left[\prod_{ij}^{(1)}\right] = \sum_i e_{i\alpha} e_{i\beta} \mathcal{L}\left[f_i^{(1)}\right] = -\rho c_s^2 \tau \left(\partial_\beta \mathcal{L}\left[u_\alpha\right] + \partial_\alpha \mathcal{L}\left[u_\beta\right]\right) = -2\rho c_s^2 \tau \mathcal{L}[S_{ij}] \tag{二.43}$$