线+线

约定

为了简化问题, 我们把 l_1,l_2 通过旋转和平移使 l_2 与 y 轴重合, 因为 l_1 与 l_2 不重合， l_1 斜率必存在.

$$l_1: y=kx, l_2: x=0$$

设点 $P(x_0,y_0)$ 到 l_1 , l_2 的距离分别为 d_1 , d_2.

首先转换直线 l_1 的形式

$$l_1: kx-y=0$$

可以求出 d_1 , d_2

$$d_1=\frac{|kx_0-y_0|}{\sqrt{k^2+1}}, d_2=|x_0|$$

和

设点 $P(x_0,y_0)$ 到 l_1,l_2 的距离 d_1,d_2 之和

$$d_1+d_2=u(u>0)$$

1.计算:

即为

$$\frac{|kx_0-y_0|}{\sqrt{k^2+1}}+|x_0|=u$$
$$|kx_0-y_0|+\sqrt{k^2+1}|x_0|=\sqrt{k^2+1}u$$

发现图像关于原点中心对称，不妨设 $x_0>0$，分类讨论:

当 $kx_0-y_0>0$ (即 P 在 l_1 下方)时:

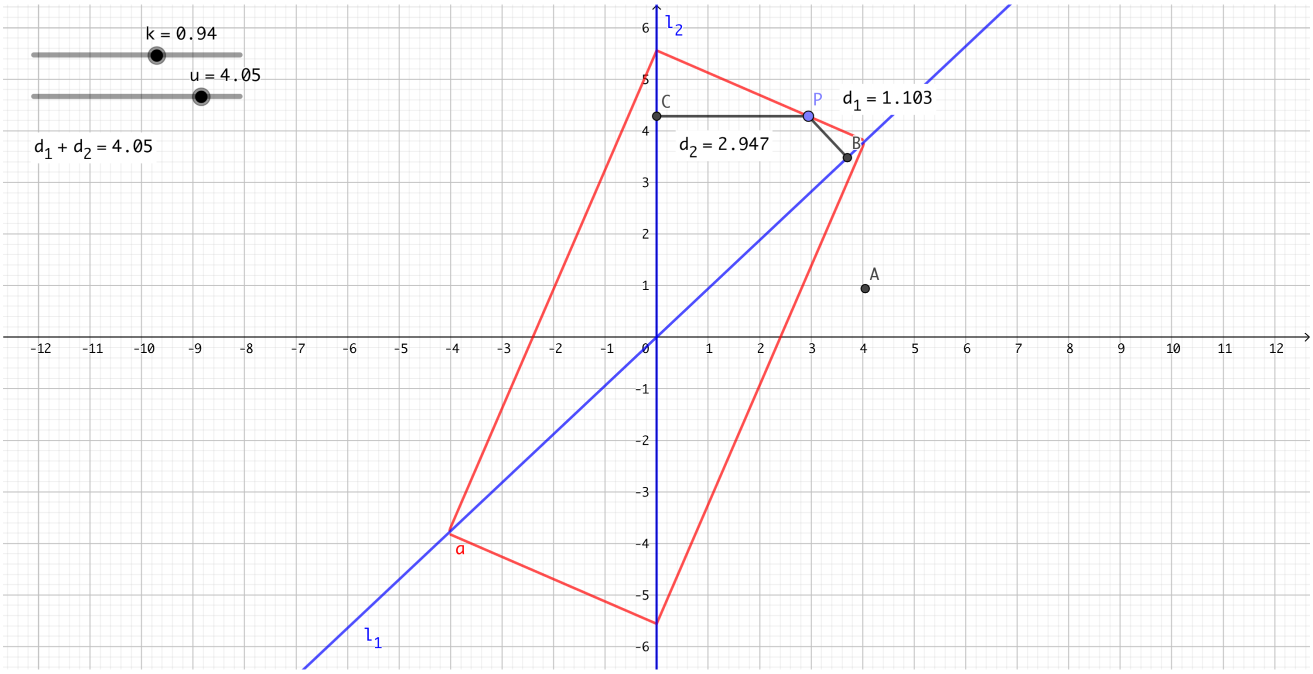
$$kx_0-y_0+\sqrt{k^2+1}x_0=\sqrt{k^2+1}u$$
$$y_0=(\sqrt{k^2+1}+k)x_0-\sqrt{k^2+1}u$$

当 $kx_0-y_0<0$ (即 P 在 l_1 上方)时:

$$y_0-kx_0+\sqrt{k^2+1}x_0=\sqrt{k^2+1}u$$
$$y_0=-(\sqrt{k^2+1}-k)x_0+\sqrt{k^2+1}u$$

2.图像:

曲线的图像为一个矩形，l_1 和 l_2 分别为其对角线。



差

设点 $P(x_0, y_0)$ 到 l_1, l_2 的距离 d_1, d_2 之差

$$d_1 - d_2 = u$$

1.计算:

即为

$$\frac{|kx_0 - y_0|}{\sqrt{k^2+1}} - |x_0| = u$$
$$|kx_0 - y_0| - \sqrt{k^2+1}|x_0| = \sqrt{k^2+1}u$$

发现图像关于原点中心对称，不妨设 $x_0 > 0$，分类讨论:

当 $kx_0 - y_0 > 0$ (即 P 在 l_1 下方)时:

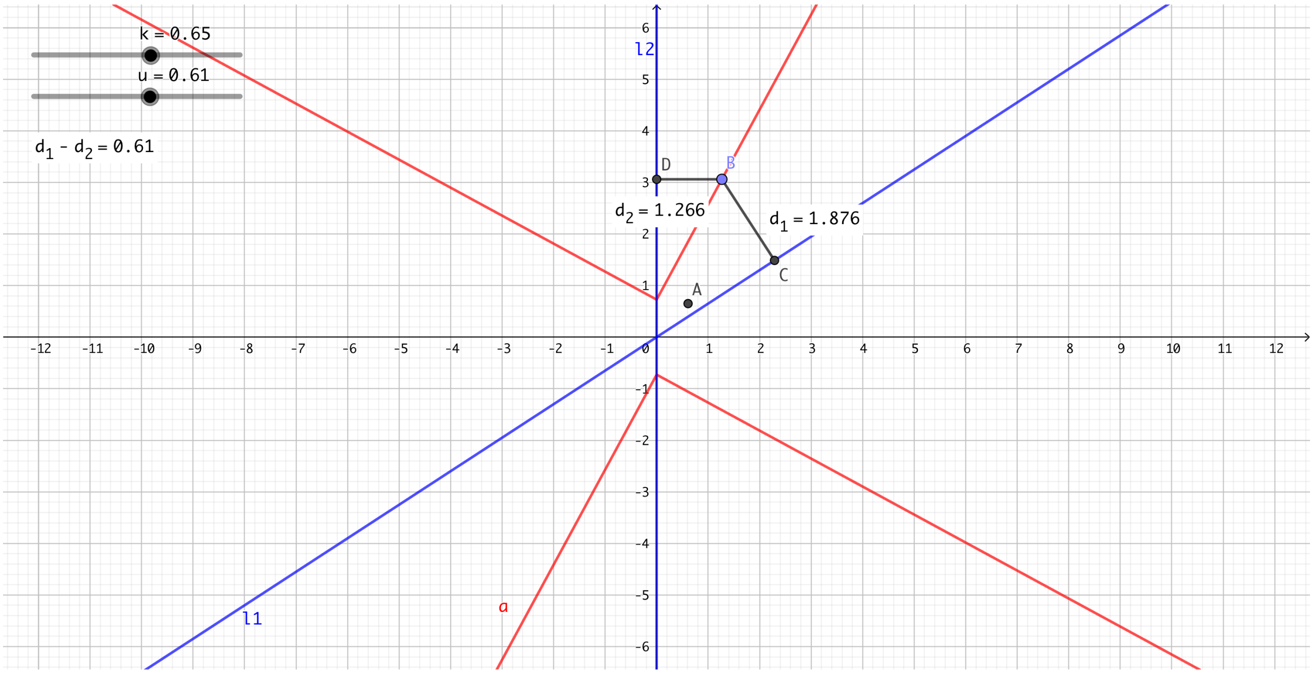
$$kx_0 - y_0 - \sqrt{k^2+1}x_0 = \sqrt{k^2+1}u$$
$$y_0 = -(\sqrt{k^2+1} - k)x_0 - \sqrt{k^2+1}u$$

当 $kx_0 - y_0 < 0$ (即 P 在 l_1 上方)时:

$$kx_0 - y_0 + \sqrt{k^2+1}x_0 = -\sqrt{k^2+1}u$$
$$y_0 = (\sqrt{k^2+1} + k)x_0 + \sqrt{k^2+1}u$$

2.图像:

曲线的图像为两组平行射线，每组射线之间相互垂直。



积

设点 $P(x_0,y_0)$ 到 l_1,l_2 的距离 d_1,d_2 之积

$$d_1d_2=u(u\neq 0)$$

1.计算：

即为

$$\frac{|kx_0-y_0|}{\sqrt{k^2+1}}|x_0|=u$$
$$|(kx_0-y_0)x_0|=u\sqrt{k^2+1}$$

发现图像关于原点中心对称，不妨设 $x_0>0$，分类讨论：

当 $kx_0-y_0>0$ (即 P 在 l_1 下方)时：

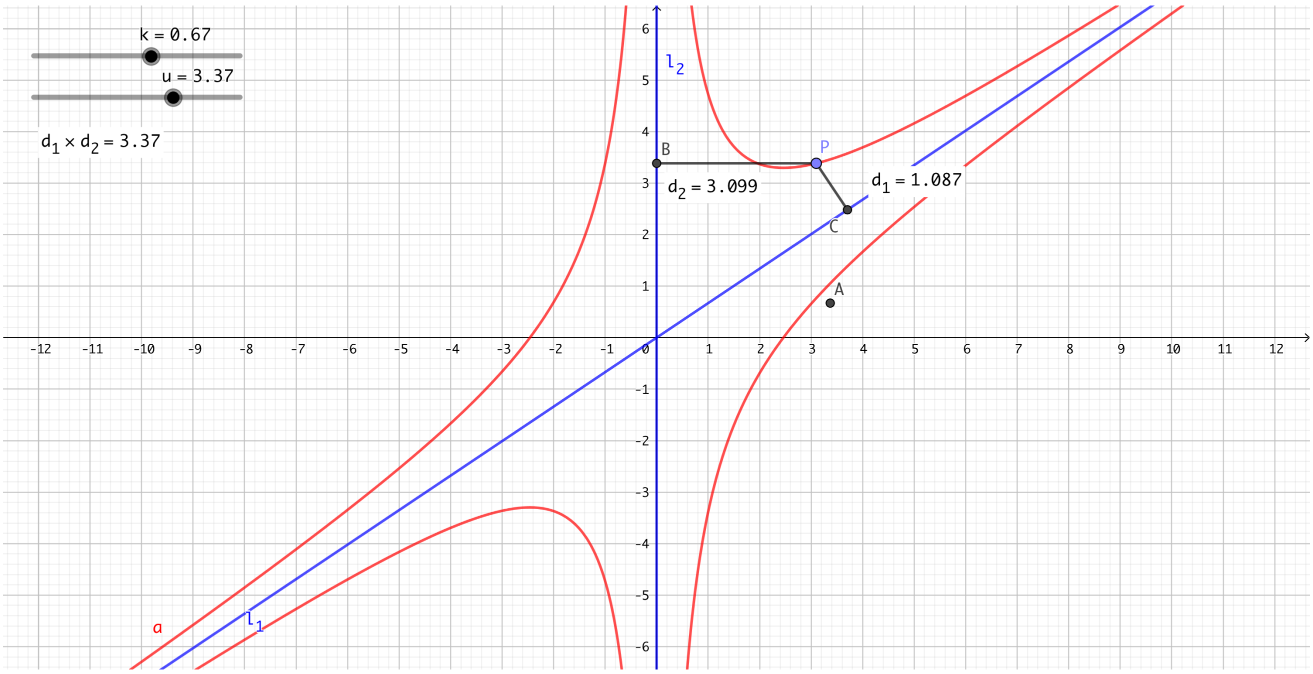
$$kx_0{}^2-x_0y_0=u\sqrt{k^2+1}$$
$$y_0=kx_0-u\sqrt{k^2+1}\cdot\frac{1}{x_0}$$

当 $kx_0-y_0<0$ (即 P 在 l_1 上方)时：

$$kx_0{}^2-x_0y_0=-u\sqrt{k^2+1}$$
$$y_0=kx_0+u\sqrt{k^2+1}\cdot\frac{1}{x_0}$$

2.图像：

曲线的图像为一组形如 $ax+b\frac{1}{x}$ 和 $ax-b\frac{1}{x}$ 的曲线，l_1 和 l_2 均为其渐近线。



比

设点 $P(x_0,y_0)$ 到 l_1,l_2 的距离 d_1,d_2 之比

$$\frac{d_1}{d_2}=u(u\neq 0)$$

1.计算：

即为

$$\frac{\frac{|kx_0-y_0|}{\sqrt{k^2+1}}}{|x_0|}=u$$
$$|kx_0-y_0|=u\sqrt{k^2+1}|x_0|$$

发现该图像关于原点中心对称，不妨设 $x_0>0$，分类讨论可得：

当 $kx_0-y_0>0$ (即 P 在 l_1 下方)时：

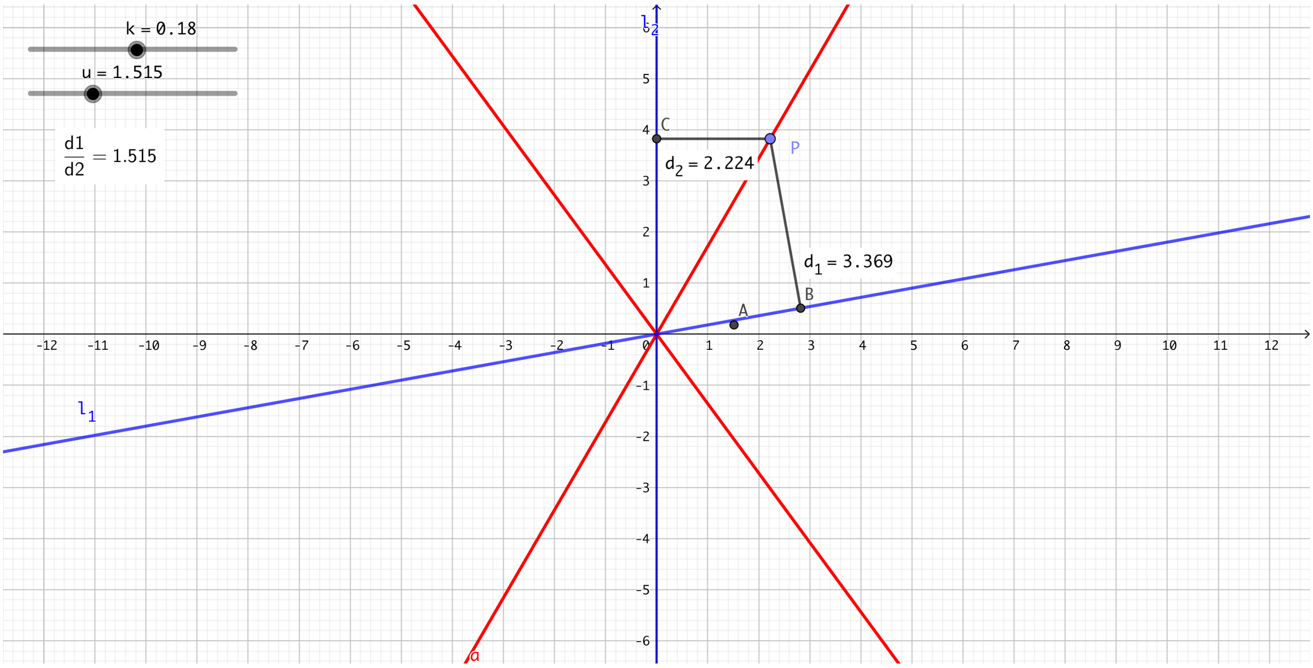
$$y_0-kx_0=u\sqrt{k^2+1}x_0$$
$$y_0=[k+u\sqrt{k^2+1}]x_0$$

当 $kx_0-y_0<0$ (即 P 在 l_1 上方)时：

$$kx_0-y_0=u\sqrt{k^2+1}x_0$$
$$y_0=[k-u\sqrt{k^2+1}]x_0$$

2.图像：

曲线的图像为两条相交于原点的直线



- 图例：
  - 点$A(u,k)$:拖动来调整 u,k 参数
  - l_1,l_2:蓝色直线两条
  - 所求曲线 l :红色直线
  - 点P :曲线上的点，可拖动