

曲面三角剖分的参数化和平滑近似

Michael S. Floater *

Departamento de Matemática Aplicada, 西班牙萨拉戈萨大学, 1995 年 12 月, 1996 年 6 月修订

抽象的。研究了一种基于图论的方法,用于为表面三角剖分创建全局参数化,以达到平滑表面拟合的目的。参数化是平面三角剖分,是基于凸组合的线性系统的解。发现一种称为保形的特定参数化会导致视觉上平滑的表面近似。

§ 1. 介绍

通过给定的点序列 $x_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$ $i = 1, \dots, N$ 拟合平滑参数曲线 $c(t)$ 的标准方法是首先进行参数化,相应的递增序列数值 t_i 。通过找到平滑函数 $x, y, z: [t_1, t_N] \rightarrow \mathbb{R}$, 其中 $x(t_i) = x_i$, $y(t_i) = y_i$, $z(t_i) = z_i$ 插值曲线 $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 结果。两种常用的参数化是均匀参数化和弦长参数化,其中

$$(t_{i+1} - t_i)/(t_i - t_{i-1}) = 1, \quad (1)$$

和

$$(t_{i+1} - t_i)/(t_i - t_{i-1}) = x_{i+1} - x_i / x_i - x_{i-1}, \quad (2)$$

分别为 [2]、[6]。

在本文中,我们通过数值示例研究了一种基于 Tutte [25] 提出的用于绘制平面图的直线图的方法,对曲面三角剖分 S (具有三角形面和边界) 进行参数化的方法。 S 的节点 $x_i \in \mathbb{R}^3$ 映射到点 $u_i = (u_i, v_i) \in D$, 对于某些凸 $D \subset \mathbb{R}^2$

, 使得 S 的图像是平面三角剖分 P 。

基本思想是将每个 u_i 设置为其邻居的凸组合。通过考虑某些特定的凸组合,引入了三个特定的参数化:均匀、加权最小二乘和保形。第一个概括了 (1), 第二个和第三个都概括了 (2)。选择名称“保形”是因为此参数化具有再现属性 (命题 6)。

使用合适的散点数据方法 [11], 平滑函数 $x, y, z: D \rightarrow \mathbb{R}$, 可以独立构造以满足

$$x(u_i) = x_i, y(u_i) = y_i, z(u_i) = z_i. \quad (3)$$

参数曲面 $s: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ 满足 $s(u_i) = x_i$ 然后由设置产生

$$s(u) = (x(u), y(u), z(u)), u \in D. \quad (4)$$

* 作者得到欧盟项目 CHRX-CT94-0522 的部分支持。

尽管许多表面三角剖分不能在具有相当大的变形的情况下映射到 \mathbb{R}^2 , 但已经发现基于形状保持参数化的表面插值 s 在视觉上是平滑的。此外选择 D 作为单位正方形并使用散点数据近似的两阶段方法 [11], 整个表面三角剖分可以通过应用中流行的单个张量积样条曲面类型平滑地近似。

, A

用于近似表面三角剖分的大多数现有方法将一个或多个分段多项式补丁拟合到每个三角形面, 以便对于某些 k , 整体几何连续性为 G_k 。Lounsberry, Mann 和 DeRose [15] 对此类方法进行了调查。

但是, 当三角形数量很多时, 这将产生大量数据。

如果三角剖分是单个面片, 则最好使用单个参数曲面对其进行近似, 例如张量积样条。米尔罗伊等。 [18] 直接通过非线性最小化进行了这种近似。

Mail lot 等人提出了映射和变换三角测量的技术。 [16] 和李等人。 [14]。 [16] 中的方法是基于弹性理论最小化能量泛函, 而 [14] 中的方法是数值近似, 使用有限元或椭圆方程的有限差分。

§ 2. 图表和三角剖分

我们将从图论中得出一些标准定义; 见 [17]。一个 (简单的) 图 $G = G(V, E)$ 是一组节点 $V = \{i : i = 1, \dots, N\}$ 和一组边 E , 所有无序对的子集节点 (i, j) , $(i = j)$ 。如果 $(i, j) \in E$, 则节点 j 是节点 i 的邻居。第 i 个节点的度数 d_i 是其邻居的数量。如果图 H 的节点和边都属于图 G , 则图 H 是图 G 的子图。

如果图 G 可以嵌入平面中, 则称图 G 是平面的, 这样 (a) 每个节点 i 映射到 \mathbb{R}^2 中的一个点 (b) 每条边 $(i, j) \in E$ 映射到一条曲线, 其端点是 i , 和 j , (c) 曲线之间的唯一交点位于公共端点。

Nishizeki [19] 将 G 的这种平面嵌入称为平面图。平面图将平面划分为称为面的连接区域。特别是无界面称为外表面。平面图的不同嵌入可能以不同的方式划分平面, 这证明了单独的术语平面图。

已选择后续定义以适合我们想到的特定应用。设 G 为平面图, 定义 ∂G 为由入射在外表面上的所有节点和边组成的子图。如果 ∂G 是一条简单的平面曲线, 那么我们将说 G 是单连通的, 并且 ∂G 是 G 的边界。

如果一个平面图的所有有界面都是三角形, 即具有三个边 (对外表面没有要求), 我们就说这个平面图是三角剖分的。

在本文中, G 将始终是一个简单连接的三角平面图, 其中 $N \geq 3$ 。图 1 中显示了一个示例。尽管要讨论的方法当然可以推广到更广泛的图形, 包括许多具有多于三个边, 这可能会使说明过度复杂化, 而且三角图具有一些特别好的特性 (见命题 4)。

我们现在可以描述我们感兴趣的三角剖分。

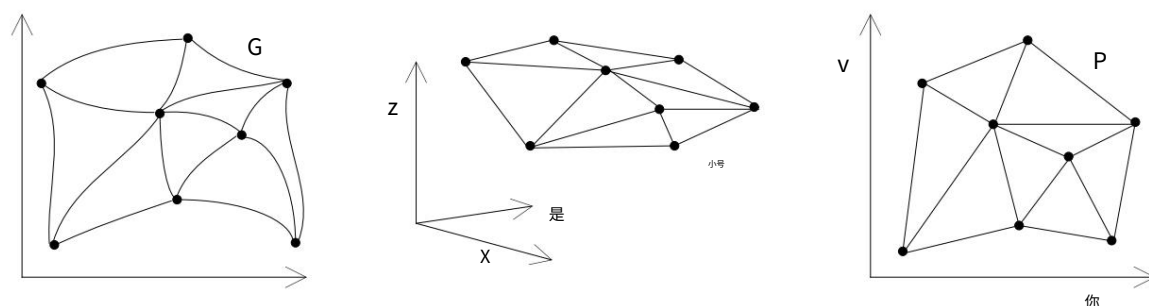


图 1. 图形、表面三角剖分和参数化。

定义 1 平面三角剖分 P 是边为直线的单连通三角剖分平面图。

令 F 为 G 的有界 (三角形) 面集, 我们写为 $G = G(V, E, F)$ 。

定义 2. 曲面三角剖分 $S = S(G, X)$ 是简单连接的三角剖分平面图 $G(V, E, F)$, $V = \{i : i = 1, \dots, N\}$ 在 \mathbb{R}^3 中的嵌入, 节点集 $X = \{x_i \in \mathbb{R}^3 : i = 1, \dots, N\}$, 直线为边, 三角形面为

面孔。

图 1 显示了一个示例。我们注意到我们的表面三角剖分不如 Schumaker [23] 讨论的三角剖分通用, 其中拓扑可以是任意的。

§ 3. 参数化

由于单连通平面图 G 的边界 ∂G 是一条简单的封闭平面曲线, 因此它具有明确的方向, 我们将其作为逆时针方向。

定义 3. 两个单连通三角平面图 G_1 和 G_2 是同构的, 如果它们的节点、边和面之间存在 1-1 的对应关系, 即: 对应的边连接对应的点; 对应的面连接对应的点和边; ∂G_1 和 ∂G_2 中节点的两个逆时针序列对应。

我们现在准备好表达我们的表面三角剖分参数化的概念; 参见图 1。

定义 4. 曲面三角剖分 $S(G, X)$ 的参数化是与 G 同构的任意平面三角剖分 P 。

在本文中, 我们关注的是为给定的表面三角剖分 S 找到参数化 P , 目的是通过光滑的参数化表面来近似 S 。我们从定义 4 中注意到, P 通常不需要依赖于由 X 中的点定义的 S 的几何形状。但是, 我们的数值示例将证明, 为了通过光滑表面来近似 S , P 的局部几何形状应该模仿 S 的局部几何。

示例 1. 设 u_1, \dots, u_N 不是全部共线, 并设 $N \geq 3$, 是 \mathbb{R}^2 中任意的 N 个不同点. 令 P 为 u_i 的 Delaunay 三角剖分 [20], [21], 并设置 $x_i = (u_i, v_i, z_i)$, 对于 $i = 1, \dots, N$, 其中 $u_i = (u_i, v_i)$. 那么 P 是平面三角剖分, $S(P, X)$ 是参数化 P 的曲面三角剖分。

在示例 1 中, 为逼近 S 提供了一个自然参数化 P . 如果 $z_i = f(u_i, v_i)$ 是函数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 对于某些未知的 C , 通常峭的梯度, 通过参数化曲面 s 逼近 S 用 $f(u_i, v_i)$ 逼近 f 样条函数 $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. 然而, 特别是如果 f 具有陡并因此逼近曲面 $(u, v) \rightarrow (u, v, f(u, v))$ 可以获得更好的结果: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. 这允许选择 S 的其他参数化的可能性, 这可能会产生更平滑的表面近似。

示例 2. 设 $s: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是光滑表面, 设 u_1, \dots, u_N , $N \geq 3$, 是 $[0, 1] \times [0, 1]$, 并非全部共线. 令 P 为 u_i 的任意三角剖分. 如果 $x_i = s(u_i)$, $X = \{x_i : i = 1, \dots, N\}$ 那么 $S(P, X)$ 是表面三角剖分, P 是它的参数化。

我们注意到示例 2 中的 S 不需要单射投影到平面上, 因为在示例 1 中。

表面三角测量也作为各种非显式数据集的粗略近似而出现, 例如横截面数据 [22], [9] 和从三维对象 [13] 采样的密集分散数据, 前提是拓扑合适. 在这些情况下, 通常没有可用的参数化, 能够构造尤为重要。

—。

§ 4. 参数化方法

为给定的表面三角剖分 S 找到任何参数化 P 可以看作等同于找到与给定的三角平面图 G 同构的平面三角剖分 (具有直线边缘)。在图论的语言中, 这是构建直线的问题平面图的线图。Fary [8] 首先使用归纳证明证明了每个 (简单的) 平面图都有一条直线图。

后来, 在 [24, 25] 中, Tutte 给出了一个建设性的证明, 该证明采用一种称为 “重心映射” 的方法来制作这样的图。 G 的边界节点被映射到任何凸多边形的边界, 图中的每个内部节点都被定义为其邻居的质心, 即它们的重心; 参见图 2. 读者参考 Chiba 等人。 [3] 和 Nishizeki [19] 讨论了构建平面图直线图的进一步方法。

Tutte 的重心映射是本文其余部分的起点. 在接下来的几页中, 我们将通过 (i) 首先观察到通过允许每个内部节点是其邻居的任何凸组合, 可

以使重心映射变得更加通用, 以及 (ii) 提供一种选择凸组合的算法, 以便 P 在局部保留了 S 的形状。

设 $S(G, X)$, 其中 $G = G(V, E, F)$, 是节点集 $X = \{x_i = (x_i, y_i, z_i)\}$, $1 \leq i \leq N$ 的表面三角剖分. 假设, 通过如有必要, 重新标记节点, 即 x_1, \dots, x_N 是

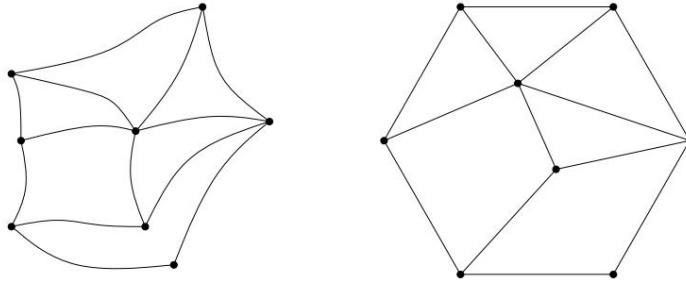


图 2. 重心映射。

内部节点和 x_{n+1}, \dots, x_N 是关于 G 边界的任何逆时针序列中的边界节点。设 $K = N - n$ 。考虑以下定义。

(1) 选择

$$u_{n+1}, \dots, u_N, \quad (5)$$

为任意 K 边凸多边形 $D \subset \mathbb{R}^2$ 逆时针方向的顶点顺序。

(2) 对于每个 $i \in \{1, \dots, n\}$, 选择任意一组实数 $\lambda_{i,j}$ for $j = 1, \dots, N$ 这样那

$$\lambda_{i,j} = 0, (i,j) \in E, \quad \lambda_{i,j} > 0, (i,j) \in E, \quad \sum_{j=1}^N \lambda_{i,j} = 1, \quad (6)$$

定义 u_1, \dots, u_n 为线性方程组的解,

$$\sum_{j=1}^N \lambda_{i,j} u_j = u_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

最后让

$P = P(G, U_b, \Lambda)$, 其中 $U_b = \{u_{n+1}, \dots, u_N\}$, 并且 $\Lambda = (\lambda_{i,j})_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, N}$, (8) 是 $G(V, E, F)$ 在 \mathbb{R}^2 中的

嵌入, 节点为 u_1, \dots, u_n , 边为直线, 面为三角形。

请注意, (7) 中的等式要求每个内部点 u_i 是严格凸的它的邻居的组合。

我们希望证明 P 是 S 的参数化。从定义 3 和 4 我们看到, 假设 P 是明确定义的, 因为 P 与 G 同构, 所以 P 是参数化, 前提是它是有效的平面三角剖分。因此, 只需证明节点 $u_i \in P$ 是明确定义的、不同的, 并且除了公共端点外, 没有两条边相交。

Tutte [25] 对一种绘制平面图形直线图的方法很感兴趣。对于一大类平面图 G , 包括三角化平面图 G , 他在 $\lambda_{i,j} = 1/d_i$ 对于所有 $(i,j) \in E, i = 1, \dots, n$ 的特殊情况下提出方程 (7) (即 u_i 是其邻居的重心)。他在这种情况下证明了他们有一个独特的

解并且 P 是一条直线图,也就是说 u_1, \dots, u_n 是唯一的、不同的并且 P 的两条边除了在公共端点外没有相交。在我们的例子中, G 是一个简单连接的三角平面图。因此 P 是 $S(G, X)$ 的参数化,只要 $\lambda_{i,j} = 1/d_i$ 对于所有 $(i,j) \in E, i = 1, \dots, n$ 。

我们现在考虑(6) 中一般 $\lambda_{i,j}$ 的情况。重要的是要表明 (7) 有唯一解。为此,请注意,它可以重写为

$$\lambda_{i,j} u_j = \sum_{j=1}^n \lambda_{i,j} u_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (9)$$

通过分别考虑 u_i 的两个分量 u_i 和 v_i , 这等效于两个矩阵方程

$$Au = b_1, \quad Av = b_2. \quad (10)$$

这里 u 和 v 是列向量 $(u_1 \dots u_n)^T$ 和 $(v_1 \dots v_n)^T$ 分别。矩阵 A 是 $n \times n$ 有元素

$$a_{i,j} = -\lambda_{i,j}, \quad j = i.$$

(7) 的解的存在性和唯一性等价于矩阵 A 的非奇异性。以下结果的证明基于 [1] 中矩阵可逆性的证明,该矩阵由有限差分产生二维泊松方程 $\Delta u = f$ 的近似值。

命题 1. 矩阵 A 是非奇异的。

证明。 A 是非奇异的等价于方程 $Aw = 0$ 的唯一解是 $w = 0$ [1]。从 (7) 方程 $Aw = 0$ 可以写成

$$w_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{i,j} w_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (11)$$

其中 $w_{n+1} = \dots = w_N = 0$ 。

令 w_{\max} 为 w_1, \dots, w_n 的最大值,并假设 $w_{\max} = w_k$ 。考虑节点 k 的任何相邻节点 j 。由于 $w_k = w_{\max}$ 和 (6), 满足 (11) 的唯一方法是 $w_j = w_{\max}$ 。以类似的方式, k 的邻居的每个邻居 j 都必须满足 $w_j = w_{\max}$ 等等。最终,由于 G 是连通的,因此必须到达一个边界节点,结果是对于某些 $j \in \{n+1, \dots, N\}$ $w_j = w_{\max}$ 。这意味着 $w_{\max} = 0$ 。类似的论证表明 $w_{\min} = 0$, 因此 $w = 0$ 。

仍然需要证明 P 是三角剖分。 [25] 中证明当 $\lambda_{i,j} = 1/d_i$ 对于 $(i,j) \in E$ 时 P 是一条直线图,仅取决于质心的一个不言自明的性质。这个性质是,如果一个点 $w \in \mathbb{R}^2$ 是任何点 $w_d \in \mathbb{R}^2$ 的重心,并且 l 是通过 w 的任何直线,则 (a) 所有 w_i 位于 l 或 (b) 至少有一个 w_i 在 l 的任一侧。由于当 w 是其邻居的任何严格凸组合时,此属性显然仍然成立,因此 [25] 中的定理也适用于 (6) 中 w_1, \dots, w_n 最一般的 $\lambda_{i,j}$ 。我们总结如下。

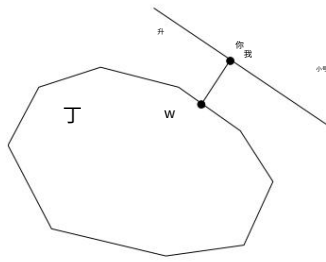


图 3。

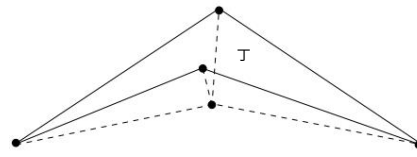


图 4。

推论 2. 设 $S(G, X)$ 为曲面三角剖分, 设 $P = P(G, U_b, \Lambda)$ 为 G 的嵌入, 如 (8) 中所示。那么 P 是 S 的参数化。

[25] 中的证明涉及大量的图论。我们在这里提供一个简单的证明, 即所有内部 $u_i \in P$ ($i = 1, \dots, n$) 都属于 D , 即使它是推论 2 的结果, 因为它强调了 D 的凸性的重要性。

命题 3. P 的每个内部节点 u_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, 属于 D 。

证明。根据命题 1, u_1, \dots, u_n 是明确定义的。

为了获得矛盾, 假设至少有一个 P 的内部节点不属于 D 。令 u_i 是任何这样的节点, 其到 D 的最短距离是最大的, 并且由于 D 是凸的, 令 w 是 ∂D 中最近的唯一点给它。点 w 可以是 D 的一个顶点, 也可以是它的一条边上的一个点, 如图 3 所示。

穿过 u_i 的是一条无限直线 l , 垂直于向量 $u_i - w$ 。它划分 \mathbb{R}^2 分为两个开放的半空间, 没有点 u_j 位于不包含 w 的半空间 S 中。

现在, 由于 u_i 是其邻居的严格凸组合, 并且它们都不属于 S , 因此它们必须都位于 l 上。同理, u_i 的邻居的邻居也一定在这条线上, 以此类推。最终, 由于 G 是连通的, 这意味着边界节点 (即 ∂D 中的一个点) 位于 l 上, 这是矛盾的。

D 的凸性也是 (7) 满足 (6) 的所有解都属于 D 的必要条件。即使图 4 中的单个内部节点是其邻居的凸组合, 它仍然位于 D 之外 (尽管不在外部 D) 的凸包。

正如我们现在将要看到的, 形式 (8) 的参数化类别非常大。

命题 4. 根据定义 4, 令 $P(S)$ 为给定曲面三角剖分 S 的所有参数化的类。定义 $T(S) \subset P(S)$ 为形式 (8) 的那些参数化, 并令 $C(S) \subset P(S)$ 是那些参数化, 其边界节点是逆时针序列中凸多边形的顶点。那么 $T(S) = C(S)$ 。

证明。由于 (5) 和推论 2, $T(S) \subset C(S)$ 。现在假设 $P \in C(S)$ 。那么由于 P 是平面三角剖分, 每个内部节点都严格位于其邻居的凸包内。事实上, 否则入射到节点上的其中一个面不会是凸多边形, 因此不可能是三角形。因此, 每个节点都可以表示为其邻居的严格凸组合, 即形式 (7)。此外, 由于 D 是凸多边形, 因此 $P \in T(S)$ 。

条件 (5) 要求 $(u_{i+1} - u_i) \times (u_{i+2} - u_{i+1}) > 0$ 对于所有 $i = n+1, \dots, N$, 我们定义 $(a_1, a_2) \times (b_1, b_2) = a_1 b_2 - a_2 b_1$ 和 $u_{N+k} = u_{n+k}$, 对于 $k = 1, 2$ 。在数值示例中, 我们将其放宽为 $(u_{i+1} - u_i) \times (u_{i+2} - u_{i+1}) \geq 0$ 。这样, D 可以被视为单位正方形, 其四个边各有几个边界节点。这种放松在实践中没有造成任何问题。

§ 5. 具体参数化

Tutte 的重心映射 $(\lambda_{ij}, j = 1/d_i, \text{ for } (i, j) \in E)$ 可以看作是点序列均匀参数化的推广。在本节中, 我们希望讨论这个和一些更具体的参数化。为了激发这些, 让我们回顾一下点序列的参数化。 $\{x_N\}$ 是 \mathbb{R}^3 中的一系列点。然后任何递增的 se 假设 $X = \{x_1, \dots, x_N\}$, 序列 of values $T = \{t_1 < t_2 < \dots < t_N\}$ 称为 X 的参数化。通常选择任意的 t_1 , 适当的正值

$1, \dots, N-1$ 。例如, 当 L_i 为常 L_1, \dots, L_{N-1} , 一个常量 $\mu > 0$, 然后递归定义 $t_{i+1} = t_i + \mu L_i, i = 1, \dots, N-1$ 。如果 $L_i = x_{i+1} - x_i$ 则称为弦长 [6]。

众所周知, 通过弦长选择参数值往往会导致比使用 uniform 更平滑的曲线近似, 尤其是当数据点分布不均匀时; 参见 Foley 和 Nielson [10]。出于这个原因, 我们寻找类似于表面三角测量的东西。首先观察还有其他方法可以根据 L_i 确定 t_i 。

命题 5. 假设 $t_1 < t_2 < \dots < t_N$ 以下陈述是等价, $t_i \in \mathbb{R}$ 且 $L_1, L_2, \dots, L_{N-1} > 0, L_i \in \mathbb{R}$ 。这的: (i) $t_{i+1} = t_i + \mu L_i, \text{ for } i = 1, \dots, N-1$, some $\mu > 0$, (ii) 如果 $s_1 = t_1, s_N = t_N$ $w_i(s_{i+1} - s_i)$ (iii)

$t_i = \lambda_{i,1} t_{i-1} + \lambda_{i,2} t_{i+1}, i = 2, \dots, N-1$, 然后 t_2, \dots, t_{N-1} 最小化函数 $F(s_2, \dots, s_{N-1}) = \sum_{i=2}^{N-1} w_i (s_i - t_{i-1})^2 + (s_i - t_{i+1})^2$ 其中 $w_i = 1/L_i$, 对于 $i = 2, \dots, N-1$, $\lambda_{i,1} = L_i / (L_{i-1} + L_i)$ 和 $\lambda_{i,2} = L_{i-1} / (L_{i-1} + L_i)$ 。

证明。我们首先证明 (ii) 蕴含 (iii)。由于 F 是凸的, 当 $\partial F / \partial s_i = 0$ 时, 对于所有 i , 它被最小化。这些方程式正是 (iii) 中的方程式。相反, (iii) 意味着 (ii), 因为最小值是唯一的。要看出 (i) 和 (iii) 是等价的, 可以很容易地证明它们都是等式 $(t_{i+1} - t_i) / (t_i - t_{i-1}) = L_i / L_{i-1}$ 的重排。

因此, 如果 L_i 是常数, 则 $t_i = (t_{i-1} + t_{i+1})/2$, 即 t_i 是其邻居的重心。当 $\lambda_{ij} = 1/d_{ij}$ 时, 对于 $(i, j) \in E$, 这证明了 P 的术语统一参数化。当 $L_i = x_{i+1} - x_i$ 时, 命题 5 提出了两种将弦长参数化推广到表面三角剖分的方法: 通过最小化边长的平方, 如 (ii); 并以与 (iii) 类似的方式直接选择 λ_{ij} 。我们现在简要地考虑其中的第一个, 在下一节中处理另一个更有效、更彻底的方法。

假设边界点 u_{n+1}, \dots, u_N 已被选择并固定。然后可以选择内部 u_i 以最小化功能

$$F(u_1, u_2, \dots, u_n) = \sum_{(i,j) \in E} w_{i,j} |u_i - u_j|^2,$$

其中 $w_{i,j} = w_{j,i} > 0$ 对于所有 $(i,j) = (j,i) \in E$ 。由于 $F: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ 是凸的, 它有一个全局最小值, 当 $\partial F / \partial u_i = 0$ 对于所有 i , $\partial F / \partial v_i = 0$ 。由于 $u_i = (u_i - u_j) + (u_j - v_j) + (v_j - v_i) + (v_i - u_i)$ 我们发现

$$u_i - u_j = (u_i - u_j) + (u_j - v_j) + (v_j - v_i) + (v_i - u_i),$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} = 2 \sum_{j:(i,j) \in E} w_{i,j} (u_i - u_j), \quad \frac{\partial F}{\partial v_i} = 2 \sum_{j:(i,j) \in E} w_{i,j} (v_i - v_j),$$

是当 $w_{i,j}$ 对于所有 $(i,j) \in E$ 都是常数时, 则 $\lambda_{i,j} = 1/d_i$ 。因此, $w_{i,j} u_j / \sum_{j:(i,j) \in E} w_{i,j}$ 这等同于求解 (7), 因此, $u_i = \sum_{j:(i,j) \in E} \lambda_{i,j} u_j$ 其中 $\lambda_{i,j} = w_{i,j} / \sum_{j:(i,j) \in E} w_{i,j}$ 。特别 Tutte 的重心映射, 或均匀参数化, 相对于固定边界最小化 P 中边长度的平方和。

表面近似值是基于通过设置 $w_{i,j} = 1/x_i - x_j$ 对于 q 的几个值 (包括 1) 获得的参数化计算的。虽然表面通常比使用均匀参数化时更光滑, 但它们仍然会遭受不想要的振荡。这可能是由于自由度受到条件 $w_{i,j} = w_{j,i}$ 的限制。

§ 6. 保形参数化 $x_N \in \mathbb{R}^3$ 有一个点序列的弦长参数化

点 $(t_i, 0, 0)$ 。这是我们在双变量情况下保留的此类属性, 现在我们描述形状保持 $1, \dots, \phi(x_i)$ (我们将 t_i 标识为参数化)。

令 $S(G, X)$, 其中 $G = G(V, E, F)$ 为表面三角剖分, 并假设每个三角形面都是非退化的 (具有仿射独立的顶点)。对于每个 i , 设 G_i 是 G 的子图, 其节点是 i 及其在 G 中的邻居, 其边是 E 中的边, 连接 G_i 中的节点对。进一步令 x_{j1}, \dots, x_{jd_i} 是 x_i 在任何逆时针序列中相对于 G 的邻居, 并定义 $X_i = \{x_i, x_{j1}, \dots, x_{jd_i}\}$ 。那么, 参照图 5, 我们的基本思路是

- (i) 为 $S_i = S(G_i, X_i)$ 找到局部保形参数化 P_i , 将 x_i 映射到 $p \in \mathbb{R}^2$ 并将 x_{j1}, \dots, x_{jd_i} 映射到合适的 $p_1, \dots, p_{d_i} \in \mathbb{R}^2$ 并且,
- (ii) 选择 $\lambda_{i,j} > 0$, 因为 $j: (i,j) \in E$ 满足

$$p = \sum_{k=1}^{d_i} \lambda_{i,j_k} p_k, \quad \sum_{k=1}^{d_i} \lambda_{i,j_k} = 1. \quad (12)$$

步骤 (i) 有多种方法可以将 S_i 映射到平面中。显而易见的方法是将它投影到通过 x_i 及其邻居的最小二乘平面上, 或者投影到

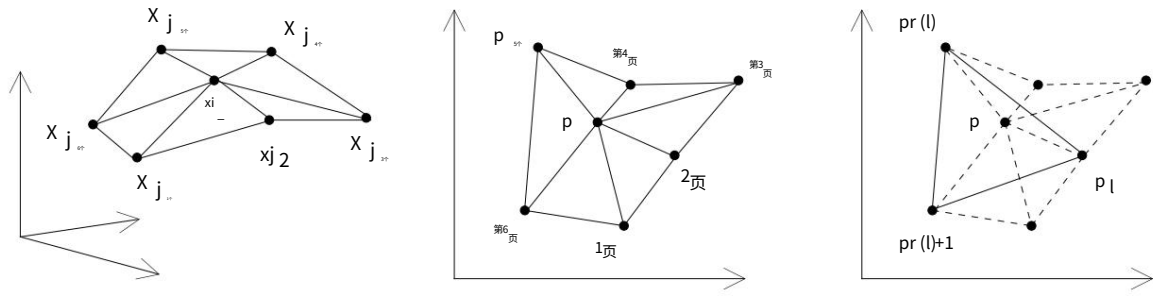


图 5. 子三角剖分 \$S_i(G_i, X_i)\$ 和局部参数化 \$P_i\$。

其法线是 \$S_i\$ 中三角形面法线的平均值的平面。然而, 当 \$S_i\$ 中的三角形面之间存在大角度时, 这两种方法都可能不稳定。由于 Welch 和 Witkin [27], 我们采用了一种简洁的方法来对表面三角测量进行局部参数化, 该方法模拟所谓的测地线极坐标图, 这是微分几何中已知的局部映射, 它保留每个径向方向的弧长。该方法只需要非退化面。

设 $\text{ang}(a, b, c)$ 表示向量 $a - b$ 和 $c - b$ 之间的角度, 如果它们在 \mathbb{R}^2 中则带符号。Welch 和 Witkin [27] 选择任意 $p \in \mathbb{R}^2$ 和 $p_1, \dots, p_{d_i} \in \mathbb{R}^2$ 满足, 对于 $k = 1, \dots, d_i$,

$$p_k - p = x_{jk} - x_i, \quad \text{ang}(p_k, p, p_{k+1}) = 2\pi \text{ang}(x_{jk}, x_{j_{k+1}}) / \theta_i, \quad (13)$$

其中 $\theta_i = \text{ang}(x_{j_k}, x_{j_{k+1}})$ 和 $x_{j_{d_i+1}} = x_{j_1}$, $p_{d_i+1} = p_1$ 。可以看出 p 和 p_1, \dots, p_{d_i} 在 \mathbb{R}^2 中的平移和旋转是唯一的。在实现中, 我们设置 $p = 0$ 和 $p_1 = (x_{j_1} - x_i, 0)$ 以用完自由度, 然后依次计算 p_2, \dots, p_{d_i} 。

步骤(ii) 点 p_1, \dots, p_{d_i} 是一个以 p 为核的星形多边形的顶点。我们现在希望找到合适的 $\lambda_{i,jk}$ 满足 (12)。如果 $d_i = 3$ 它们是 p 相对于 $\triangle p_1 p_2 p_3$ 的唯一重心坐标:

$$= \frac{\text{面积}(p, p_2, p_3)}{\text{面积}(p_1, p_2, p_3)} \lambda_{i,j1}, \quad \frac{\text{面积}(p_1, p, p_3)}{\text{面积}(p_1, p_2, p_3)} \lambda_{i,j2} = \frac{\text{面积}(p_1, p_2, p)}{\text{面积}(p_1, p_2, p_3)} \lambda_{i,j3} = \frac{\text{面积}(p_1, p_2, p)}{\text{面积}(p_1, p_2, p_3)}. \quad (14)$$

对于 $d_i > 3$, 有一些选择。下面的定义已经实现, 并在数值示例中产生了良好的结果。关于图 5, 对于每个 $l \in \{1, \dots, d_i\}$, 通过 p_l 和 p 的直线与多边形相交于唯一的第二个点, 该点可以是顶点 $pr(l)$ 也可以位于具有端点的线段上 $pr(l)$ 和 $pr(l)+1$ 。在任何一种情况下, 都存在唯一的 $r(l) \in \{1, \dots, d_i\}$ 和唯一的 $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ 使得 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 \geq 0, \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1$ 和

$$p = \delta_1 p_l + \delta_2 pr(l) + \delta_3 pr(l)+1。$$

定义 $\mu_{k,l}$ 对于 $k = 1, \dots, d_i$ 通过 $\mu_{k,l} = \delta_1, \mu_{k,l} = \delta_2, \mu_{k,l} = \delta_3, \mu_{k,l} = 0$ 否则。然后对于每个 l 我们现在找到

$$p = \sum_{k=1}^{d_i} \mu_{k,l} p_k, \quad \mu_{k,l} = 1, \quad \mu_{k,l} \geq 0。$$

最后定义

$$\lambda_{i,jk} = \frac{1}{d_i} \sum_{l=1}^{r(l)} \mu_{k,l}, \quad k = 1, \dots, d_i. \quad (15)$$

由于 $\mu_{k,l}$ 和 $r(l)$ 对于每个 l 都是非零的, 我们注意到对于所有 k , $\lambda_{i,jk} > 0$ 。人们还发现

$$p = \frac{1}{d_i} \sum_{l=1}^{r(l)} \mu_{k,l} \quad p = \frac{1}{d_i} \sum_{l=1}^{r(l)} \mu_{k,l} \quad \mu_{k,l} p_k = \frac{1}{d_i} \sum_{l=1}^{r(l)} \mu_{k,l} p_k = \frac{1}{d_i} \sum_{k=1}^{d_i} \lambda_{i,jk} p_k,$$

和

$$\lambda_{i,jk} = \frac{1}{d_i} \sum_{k=1}^{d_i} \mu_{k,l} = \frac{1}{d_i} \sum_{k=1}^{d_i} \mu_{k,l} = \frac{1}{d_i} \sum_{k=1}^{d_i} \mu_{k,l} = 1.$$

另请注意, 当 $d_i = 3$ 时, $r(l) = l + 1$, 并且

$$\lambda_{i,jk} = \mu_{k,1} = \mu_{k,2} = \mu_{k,3},$$

因此 (15) 符合 (14)。此外, 由于仿射组合在平移和旋转下是不变的, 因此 $\mu_{k,l}$ 和 $\lambda_{i,jk}$ 由 (13) 唯一确定, 因此也由 x_i 唯一确定。此外, 每个 $\lambda_{i,jk}$ 连续地 (但不是平滑地) 依赖于 x_i 和 x_{j1}, \dots, x_{jd_i} 。也可以考虑在 (15) 中取加权平均值, 但这尚未实现。

(15) 中 $\lambda_{i,jk}$ 的选择提供了以下再现特性。在什么
接下来我们确定一个点 $u = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ 和点 $(u, v, 0) \in \mathbb{R}^3$ 。

命题 6. 假设 S 是平面的, 其边界节点 x_1, \dots, x_N 在包含 S 的平面中形成凸多边形。设 $P(G, U_b, \Lambda)$ 为参数化, 其中 Λ 定义在 (15) 并且使得边界点 x_{n+1}, \dots, x_N 仿射映射到 $u_{n+1}, \dots, u_N \in U_b$ 。那么参数化 P 是 S 的仿射映射。

证明。设 $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是其中 $u_i = \phi(x_i)$ for $i = n+1, \dots, N$ 的仿射映射。

还需要证明 $u_i = \phi(x_i)$ 对于 $i = 1, \dots, n$ 。对于一些非奇异的 3×3 矩阵 M 和向量 b , 我们可以使用向量和矩阵表示法将 ϕ 表示为 $\phi(x) = Mx + b$, 这样对于平面中的所有 x , $\phi(x)$ 的第三个坐标为零。

由于 (13), 由于每个 S_i 都是平面的, 每个内部节点 x_i 及其邻居都被仿射映射到 p 及其邻居。从 (15) 可知, $\lambda_{i,j}$ 满足

$$\sum_{j=1}^{r(i)} \lambda_{i,j} x_j = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

所以,

$$\phi(x_i) - \sum_{j=1}^{r(i)} \lambda_{i,j} \phi(x_j) = Mx_i + b - \sum_{j=1}^{r(i)} \lambda_{i,j} (Mx_j + b) = M \sum_{j=1}^{r(i)} \lambda_{i,j} x_j = 0.$$

因为 (7) 的解是唯一的, 所以 $\phi(x_i) = u_i$ 对于 $i = 1, \dots, n$ 是必需的。

边界 ∂D 的选择应取决于应用和近似的种类。如果需要张量积样条近似,自然选择单位平方。如果需要三角面片或径向基函数形式的近似,可以使用单位圆。在构造保形参数化时,数值示例表明边界点 u_{n+1}, \dots, u_N 在 ∂D 周围的良好位置是弦长。

§ 7. 数值例子

经过一些实验发现,对于 n 高达 500, 矩阵方程 (10) 可以通过 LU 分解 [12] 充分求解。除此之外, 矩阵 A 的结构表明迭代方法会更好。

如果 x_i 的所有邻居都是内部节点, 则 (10) 中的矩阵 A 是对角占优的, 但在任何行 i 中都不是严格对角占优的。它也是稀疏的, 但通常不可能将非零项排列在对角带结构中。这种矩阵经常出现在微分方程的数值解中, 并且发现称为 Bi-CGSTAB [26] 的迭代方法非常有效。这是用于非对称矩阵的共轭梯度法的变体。

Bi-CGSTAB 用于求解 (10) 中的每个方程, n 的数量级为 25000, 将每个内部 $u_i = (u_i, v_i)$ 设置为 D 中心的一个点作为初始猜测。该算法仅在几百次迭代后就可以停止, 并且没有遇到任何不稳定性。Cline 和 Renka [4] 提出了一种适合三角测量的数据结构, 用于高效存储三角测量。

图 6 显示了平面中一组 27 个分散数据点的 Delaunay 三角剖分。这些点被均匀地映射到图 7 中的单位圆盘中 ($\lambda_{i,j} = 1/d_i$ for $(i,j) \in E$), 将八个边界节点均匀地放置在单位圆周围。在图 8 中, 相同的点被映射到单位正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$ 中。这一次, 四个选定的“角”边界点被映射到正方形的角上, 其余边界点沿每一边均匀映射。这些点使用图 9 中的形状保持参数化 (15) 进行映射, “边”由弦长映射。

图 10 显示了从盐丘 (具有悬垂的地质对象) 采样的 1000 个点的表面三角测量 S 。单位正方形中的三个参数化 P 显示在图 11、13 和 15 中, 分别使用 (i) 均匀, (ii) 带 $w_{i,j} = 1/x_i - x_j$ 的边长加权最小二乘, 和 (iii) 形状-保存。和前面的例子一样, 四个角点被映射到正方形的角上, 边在第一个中均匀映射, 在后两个中按弦长映射。在每个 1 个案例中, 三个 C 分段三次插值 x, y, z 满足 (3), 然后使用 P [7]、[11] 上的 Clough Tocher 拆分为每个组件制作。生成的插值曲面

然后在 40×40 正方形网格上对形式 (4) 的 $s(u, v)$ 进行采样, 并通过 $C(u, v)$ 进行插值。这些分别显示在图 12、14 和 16 中。
很明显, 基于保形参数化的第三个表面在视觉上比前两个表面更光滑。

最后, 通过使用新的三角剖分 P^\wedge 对 $u_i \in P$ 进行重新三角剖分, 我们获得了一个新的表面三角剖分 S^\wedge , 由 P^\wedge 参数化, 具有与 S 相同的节点 x_i 。如果选择

P^\wedge 满足一些理想的属性,可以将此属性传递给 S^\wedge ,提供一种有趣的“优化”表面三角剖分的方式。此类优化通常基于根据 Schumaker [21] 和 Dyn、Levin 和 Rippa [5] 所描述的某种良好标准递归交换现有边缘中的边缘。

此外,当它基于 P^\wedge 上的分段多项式时,用 P^\wedge 替换 P 可能会对曲面近似产生有益的影响。在图 17 中,Delaunay 三角剖分 P^\wedge 最大化了其三角形的最小角度,计算出 S^\wedge 出现的 u_i 显示在图 18 中。在图 15 中。张量积曲面近似 $^\wedge s$ 新曲面看起来更平滑一些与图 16 相比,受益于更匀称的三角形。图 19 中显示了相应的表面重三角测量 S^\wedge ,正如预期的那样,它具有比图 10 中的原始三角形更短的细三

§ 8.最后的评论

提出了一种对表面三角剖分进行形状保持参数化的方法,并用于生成性能良好的光滑表面插值和近似值。

在本文中,假设 G 是三角图。Tutte 的重心映射适用于更一般的图形,具有多于三个边的面,例如矩形网络或图 2 中的图形。小心地,形状保持参数化可以类似地扩展到 IR^3 中的各种点网络。

致谢。我要感谢 SINTEF 的 Hermann Kellermann 在实施数值示例方面提供的帮助。我还要感谢 Jes'us Miguel Carnicer 对本文布局提出的改进建议。

§ 9.参考

1. Atkinson KE,数值分析简介,Wiley,纽约,1989。
2. de Boor C.,A Practical Guide to Splines,Springer-Verlag,纽约,1978。
3. Chiba N.,K. Onoguchi,T. Nishizeki,很好地绘制平面图,Acta Informatica 22 (1985),187–201。
4. Cline AK,RL Renka,一种构建泰森的高效存储方法
三角测量,落基山。J. 数学。14 (1984), 119–139。
5. Dyn N.,D. Levin,S. Rippa,分段线性间的数据相关三角剖分
极化,IMA J. Numer.肛门。10 (1990), 137–154。
6. Farin G.,计算机辅助几何设计的曲线和曲面,学术出版社,
圣地亚哥,1988 年。
7. Farin G.,三角 Bernstein-B'ezier 补丁,Comp.辅助Geom.设计 3 (1986),
83–128。
8. Farin G.,关于平面图的直线表示,Acta Sci.数学。塞格德 11 (1948), 229–233。
9. Floater M., G. Westgaard,使用隐式方法从横截面重建光滑表面,预印本,SINTEF,奥斯陆。

10. Foley T., G. Nielson, 参数样条插值的结选择, 计算机辅助几何设计中的数学方法 II, T. Lyche 和 L. Schumaker (编), 学术出版社, 纽约, 1992 年, 261–271.
11. Franke R., L. Schumaker, 多元近似参考书目, 在多元近似主题中, C. Chui, L. Schumaker 和 F. Uteras (编), 学术出版社, 纽约, 1986 年, 275–335.
12. Golub GH, CF Van Loan, 矩阵计算, 约翰霍普金斯大学出版社, 1989 年。
13. Hoppe H., T. DeRose, T. DuChamp, J. McDonald, W. Stuetzle, 无组织点的表面重建, 计算机图形学 26 (1992), 71–78。
14. Li Z., C. Suen, T. Bui, Q. Gu, 数字图像和图案中形状变换的谐波模型, CVGIP: 图形。模型和图像。过程, 54 (1992), 198–209。
15. Lounsberry M., S. Mann, T. DeRose, 参数曲面插值, IEEE Comp. 图形。和应用程序, (1992), 45–52。
16. Maillot J., H. Yahia, A. Verroust, 交互式纹理贴图, SIGGRAPH Comp. 图形。过程。 (1993), 27–34。
17. Marshall CW, 应用图论, Wiley, 纽约, 1971 年。
18. Milroy M., C. Bradley, G. Vickers, D. Weir, 逆向工程中 B 样条曲面块的 G1 连续性, Comp. 辅助设计 27 (1995), 471–478。
19. Nishizeki T., 平面图问题, Computing Supplementum 7 (1990), 53–68。
20. Preparata FP, MI Shamos, Computational geometry, Springer-Verlag, New York, 1985。
21. Schumaker LL, Triangulation methods, in Topics in Multivariate Approximation, CK Chui, LL Schumaker, F. Utreras (编), Academic Press, 纽约 (1987), 219–232。
22. Schumaker LL, Reconstructing 3D objects from cross-sections, in Computation of Curves and Surfaces, W. Dahmen, M. Gasca 和 C. Micchelli eds., Kluwer, Dordrecht (1990), 275–309。
23. Schumaker LL, CAGD 中的三角剖分, IEEE 计算机图形与应用 (1993), 47–52。
24. Tutte WT, 图的凸表示, Proc. 伦敦数学。社会。 10 (1960), 304–320。
25. Tutte WT, 如何绘制图表, Proc. 伦敦数学。社会。 13 (1963), 743–768。 26. van der Vorst HA, Bi-CGSTAB: Bi-CG 的快速平滑收敛变体, 用于求解非对称线性系统, SIAMsci, 13 (1992), 631–644。
27. Welch W., A. Witkin, 使用三角曲面的自由形状设计, 计算机图形, SIGGRAPH 94 (1994), 247–256。

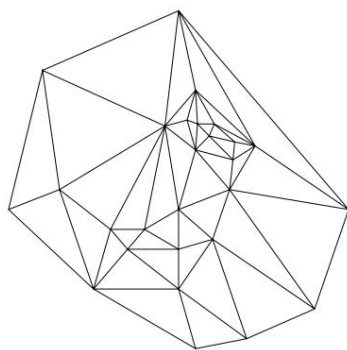


图 6. Delaunay 三角剖分。

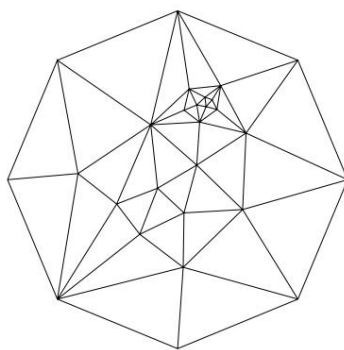


图 7. 统一参数化。

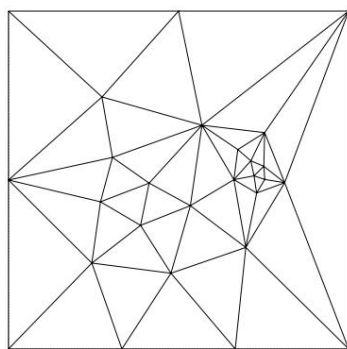


图 8. 统一参数化。

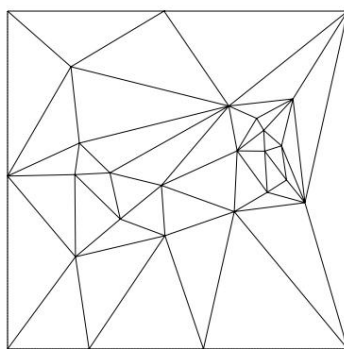


图 9. 形状保持参数化。

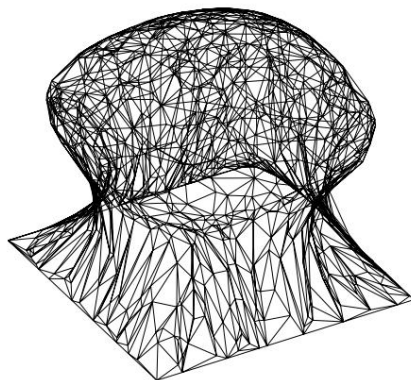


图 10. 三角盐丘。

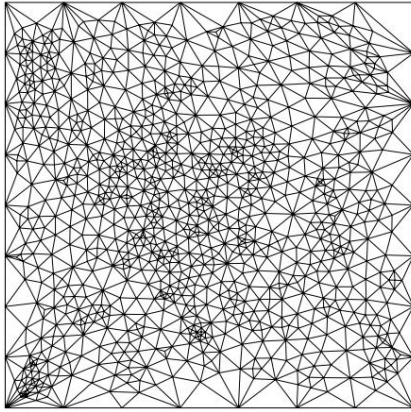


图 11. 统一参数化。

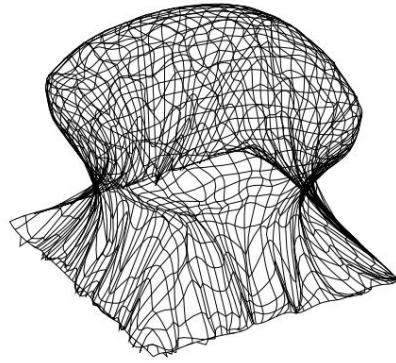


图 12. 表面近似。

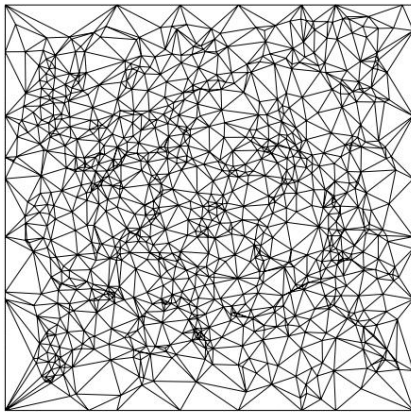


图 13. 加权最小二乘参数化。

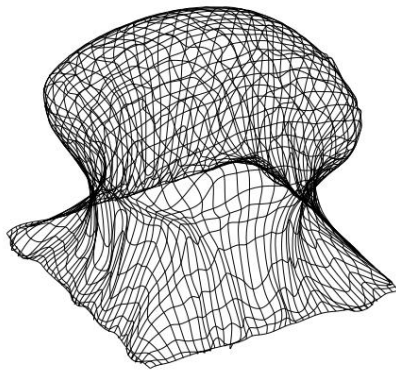


图 14. 表面近似。

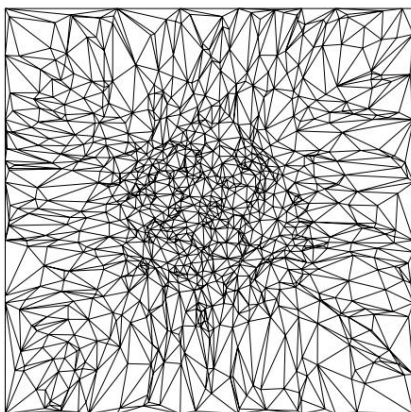


图 15. 形状保持参数化。

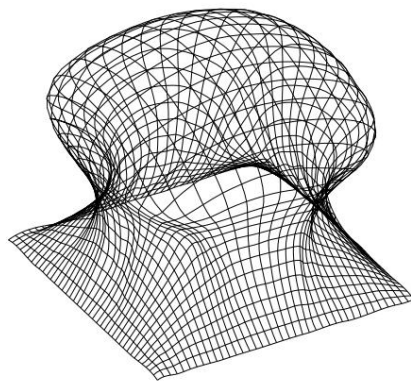


图 16. 表面近似。

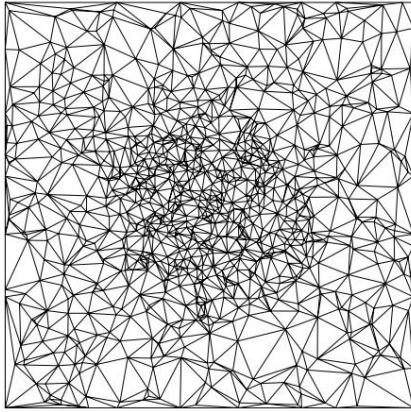


图 17. Delaunay 重三角测量。

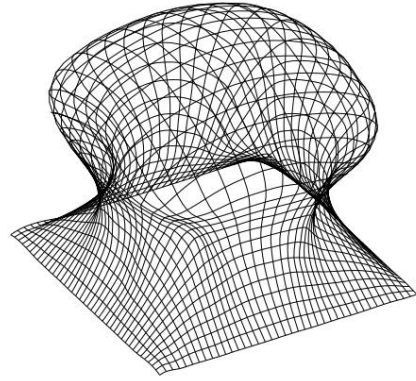


图 18. 表面近似。

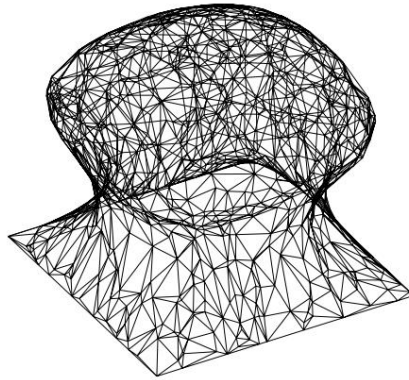


图 19. 表面重三角测量。