离散数学学期课程作业

离散数学第五小组

December 22, 2024

1 引言

在数学和计算机科学领域，等价关系作为一种满足自反性、对称性和传递性的二元关系，是将集合元素划分为等价类的理论基础。等价关系的应用贯穿于众多领域，例如数论中的同余、逻辑中的等价公式以及图论中的节点划分等，展现了其强大的问题简化能力。在计算机科学中，等价关系常被用来优化算法、压缩状态空间以及提升系统效率。

本文以确定性有限自动机（Deterministic Finite Automaton, DFA）的状态最小化问题为切入点，系统性地介绍等价关系的定义与性质，分析其在多个领域中的典型应用，并以 DFA 最小化为案例，详细讲解如何利用等价关系划分状态集合，实现自动机的简化构造。通过理论与实践相结合，本文旨在为读者提供理解等价关系及其应用的完整视角。

2 理论基础

2.1 等价关系的定义与性质

等价关系是一种二元关系 R，若集合 A 上的二元关系 A 满足以下三个条件，称 R 为等价关系:

1. 自反性: $\forall a \in A, (a, a) \in R$
2. 对称性: $\forall (a, b) \in R \to (b, a) \in R$
3. 传递性: $\forall a, b, c \in A, (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \to (a, c) \in R$

2.2 等价类与商集

在等价关系 R 下，集合 A 可被划分为若干互不相交的等价类，每个元素所属的等价类是其在 R 下的“等价群体”。等价类的集合称为商集，记作 A/R。这种划分为解决复杂问题提供了重要的结构化手段。

2.3 应用意义

等价关系通过将集合元素划分为等价类，减少了问题的复杂度。在许多算法中，等价关系作为划分与合并的理论基础，为优化问题提供了强有力的支持。

3 等价关系的应用

3.1 数学领域

同余关系：模运算中，整数在模 n 意义下形成的等价类，即同余类，是数论的基础工具之一。

3.2 计算机科学领域

状态最小化：DFA 最小化是等价关系在计算机科学中的经典应用之一，通过等价类划分实现状态压缩。并查集：用于动态维护元素间等价关系的数据结构，广泛应用于图算法中，如最小生成树的构造。

3.3 其他领域

逻辑与推理：等价公式的判定与简化。网络科学：在社交网络中分析等价节点的聚类特性。

4 等价关系在 DFA 中的应用

4.1 背景介绍

DFA(deterministic finite automaton) 是一个有限状态机，通过接受由字符串唯一确定的状态序列来接受或拒绝给定的字符串 有限状态自动机 M 是一个五元组 $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, 包含了

- 有限状态 Q
- 有限输入符号 Σ
- 转移函数 $\delta : Q \times \Sigma \mapsto Q$
- 初识状态 q_0
- 可接受状态集合 $F \subset Q$

当一个字符串 $w = a_0 a_1 \cdots a_n$ 输入状态机中，称 w 是可接受的当且仅当状态机接受 w 后产生的序列 $r_0, r_1, \cdots, r_n$ 满足:

1. $r_0 = q_0$
2. $r_{k+1} = \delta(r_k, q_k + 1), fork = 0, 1, \ldots, n-1$
3. $r_n \in F$

称所有可接受的字符串为有限状态机 M 的语言，记为 $L(M)$。

其中 δ 通常用状态转移表和状态转移图表示, 下面以一个 M_1 为例子 在有

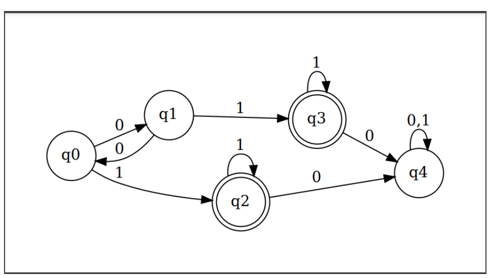

Figure 1: 有限状态机 M_1 的状态转移图

限状态机 M_1 中, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, 初始状态为 q_0 可接受状态的集合 $F = \{q_2, q_3\}$, 其中状态转移图由双圆圈标出的状态为可接受状态

4.2 等价关系在 DFA 中的应用

4.3 DFA 最小化意义

4.4 DFA 最小化方法

状态最小化一般分为两个步骤: 步骤一首先，将 DFA 的所有状态分成两组：

- 结束状态（接受信号并输出结果的状态）。
- 非结束状态（不会输出结果的状态）。

这两组不可能是相同的，因为它们在 DFA 中执行的功能显然不同。

步骤二然后，重复涉及 DFA 的所有状态，根据它们在接收信号后的转移情况进一步分组。举一个简单的示例：

- 如果状态 A 和 B 在接收同样的信号后，转向了同一组的其他状态，那么 A 和 B 可以视为相同状态，将它们合并。
- 如果不同，则它们需要分在不同组中。

这个过程是通过一种迭代方式完成的，直到没有更多的状态需要分组。

步骤三最后，根据分组结果，将同一组的状态合并为一个新状态，构造出一个最小化后的 DFA。

4.5 DFA 最小化算法

4.5.1 Hopcraft 算法

这部分由陈新宇完成

4.5.2 常翰堃算法 (bushi)

这部分由常翰堃完成

5 总结

6 参考文献

1. Hopcroft, J.E.Motwani, R.Ullman, J.D.(2007). $IntroductiontoAutomataTheory, Languages, andCompu$
2. Sipser.M.(2013). $IntroductiontotheTheoryofComputation.CengageLearning.$