

广义 Pareto 分布变点检测似然比模型^{*}

胡 尧[†]

(贵州大学数学与统计学院, 贵阳 550025)

(贵州大学贵州省公共大数据重点实验室, 贵阳 550025)

([†]E-mail: yhu1@gzu.edu.cn)

谌业文

(中山大学数学学院, 广州 510000)

(E-mail: chenyw20150908@163.com)

摘要 为检测极端事件的状态变化, 基于似然比方法研究了广义 Pareto 分布 (Generalized Pareto Distribution, GPD) 变点检测模型。考虑三参数 GPD 变点的检验问题, 提出了最大似然比检验统计量。通过证明参数变换后 GPD 的对数似然和检验统计量的一系列极限性质, 得到了检验统计量的渐近分布。通过模拟研究, 对该方法的有限样本性质进行了评价, 实例分析也验证了该方法的可行性。

关键词 广义 Pareto 分布; 参数变点; 变点检测; 似然比检验统计量; 交通流

MR(2000) 主题分类 62F03; 62P05

中图分类 O212.1

1 引言

变点问题研究一直是统计学热门课题之一, 广泛应用于经济、质量控制与气候变化等领域^[1-3]。而广义 Pareto 分布 (Generalized Pareto Distribution, GPD) 作为超阈值极值理论渐近分布^[4], 在可靠性、金融和保险等领域具有广泛应用, 加之如金融风险、自然灾害和交通拥堵等极端事件时有发生, 使得近年 GPD 研究越来越受到诸多学者重视^[5-10]。本文关注的是 GPD 变点检测问题。

本文 2019 年 11 月 6 日收到, 2020 年 5 月 5 日收到修改稿。

* 国家自然科学基金 (11661018), 贵州省科技计划项目 (黔科合平台人才 [2017]5788 号), 贵州省数据驱动建模学习与优化创新团队 (黔科合平台人才 [2020]5016 号), 全国统计科学研究 (2014LZ46), 贵州省自然科学基金 (黔科合 J 字 [2014]2058 号) 资助项目。

[†] 通讯作者。

经典 GPD 研究日趋成熟。首先，就参数估计而言，似然和矩方法已被广泛研究并得以应用^[5,11]。例如，Castillo 等^[12]从数值分析角度给出不依赖于初值稳健的，并且收敛速度快的最大似然方法。其次，关于 GPD 阈值选择，不仅有结合截尾似然方法的应用^[5]，也有基于 Weibull 和右截断 Copula 的混合分布模型应用^[6,8]，还有 Bayesian 框架下的阈值模型选择研究^[13]，阈值选择应用基础广泛。而在 GPD 模型检验方面，Babu 等^[14]利用 Bootstrap 修正 A-D(Anderson-Darling) 统计量，通过势模拟分析展现检验的有效性，K-S(Kolmogorov-Smirnov) 和 A-D 方法也在 GPD 相关拟合检验中得以应用^[9]。最后，对于 GPD 模型的拓展，Nadarajah 等^[15]详细探讨了对称 GPD 模型，并对模型多元扩展形式进行了详解。Kiriliouk 等^[5]构建多变量 GPD 模型，应用于金融和风暴潮单峰超阈值建模并进行统计推断。Chen 等^[6]根据 GPD 导出 Weibull-Pareto 模型解析表达式并应用于重现期估计。Park 等^[16]结合经验分布与理论 GPD 函数之间的均方偏差，提出非线性加权最小二乘估计方法，并应用于丹麦火灾数据分析，体现了方法的优势。

以上研究极富创造性，但三参数 GPD 变点问题研究则较少。事实上，很多极端自然现象如风暴潮和强降雨等事件的演变，可视为随机过程来研究。而这些事件过程发展常常就是由一个平稳状态向另一个平稳状态的转移，即量变和质变交替变化的过程。若仍然使用已有的超阈值模型进行分析，势必造成较大的结果偏差。基于变点方法的 GPD 可为检测过程的质变和拟合这类过程提供一条可行的研究路径，从而弥补传统 GPD 模型在这方面的不足。可查的文献有 Chen 等^[17]提出基于 GPD 的极端气候数据的 Bayesian 变点检测方法，Susan 等^[18]以形状参数为研究出发点将 GPD 变点检测转化为模型选择问题，给出基于 Kullback-Leibler 散度的似然比方法进行变点检测，并实证分析气候极端事件突变规律，Drees 等^[19]研究了 Pareto 分布尾数据存在单参数变点情形，Dierckx 等^[20]利用 Pareto 型分布与 Wiener 过程的关系，对 Pareto 型分布与 GPD 变点检测方法进行了讨论，获得较好结果。Meng^[21]采用 Bayesian 原理结合 EM 算法给出 GPD 变点区间估计。Safari 等^[22]将 Pareto 分布用于异常值和变点数据检测。已有文献仅研究部分突变或单变点情形，实践需要既精准评估又切合实际应用的 GPD 变点理论研究。构建有效的 GPD 参数变点并精准描述极端事件质变的模型成为本文研究重点，为相关人员决策提供准确可靠的理论和应用指导。

本文剩余部分结构如下：第 2 节根据定义提出 GPD 变点假设检验问题，给出最大似然比检验统计量，第 3 节研究 GPD 变点对数似然函数，证明不连续点极限性质和渐近收敛定理。第 4 节模拟研究 GPD 变点检验统计量功效，从数值角度验证模型的精准性，第 5 节给出 GPD 变点模型在贵阳市交通流车道占有率数据分析中的应用。第 6 节总结并讨论下一步可以开展的工作。

2 GPD 变点模型

2.1 GPD 定义

在极值统计模型^[4]研究中, 一种广泛应用的方法是对样本进行分块, 只要分块样本容量足够大, 分块最大值就渐近服从广义极值分布. 但与选择的分块最大值相比, 分块内仍可能有低于最大值的极端事件值未被选择, 从而造成数据浪费, 导致估计结果存在较大偏差. 基于此, 选定阈值, 利用大于阈值的超出量数据进行建模, 效果会更好.

定义 1 若随机变量 X 的分布函数为

$$G(x; u, \sigma, \gamma) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \gamma \frac{x-u}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}, & \gamma \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x-u}{\sigma}\right), & \gamma = 0, \end{cases} \quad x \geq u, \quad 1 + \frac{\gamma}{\sigma}(x-u) > 0. \quad (1)$$

称 X 服从三参数 GPD 分布, 记 $X \sim G(x; u, \sigma, \gamma)$, 相应的密度函数为 $g(x; u, \sigma, \gamma)$. 其中 $u, \gamma \in R$ 和 $\sigma > 0$ 分别为位置、形状和尺度参数, 记 $\Phi = (u, \sigma, \gamma)$.

定义 2 设 X_1, \dots, X_n 是独立同分布样本, 总体分布函数为 $F(x)$, 假设 x^* 为右支撑点, 给定充分大的 $u < x^*$. 若 $X_i > u$, 称 X_i 为超阈值, $Y_i = X_i - u$ 为超出量, 分布函数为

$$F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u), \quad y > 0.$$

推导得 $F(x) = F(u) + [1 - F(u)]F_u(y)$. 实际中, $F(x)$ 通常未知, 由于 $F(u)$ 可由经验分布函数估计, 故可通过上式求得 $F(x)$ 的估计, 超出量分布函数 $F_u(y)$ 通常为模型 (1) 的 GPD 形式.

2.2 GPD 变点问题的提出

考虑检验问题:

$$H_0 : X_i \sim G(x; u_0, \sigma_0, \gamma_0), \quad i = 1, \dots, n. \quad \text{vs.} \quad H_1 : \text{存在 } m \in \{1, 2, \dots, n - n_0\}.$$

使得

$$X_i \sim G(x; u_1, \sigma_1, \gamma_1), \quad i = 1, \dots, m, \quad X_i \sim G(x; u_2, \sigma_2, \gamma_2), \quad i = m+1, \dots, n. \quad (2)$$

变点前 $\Phi_1 = (u_1, \sigma_1, \gamma_1)$ 和变点后 $\Phi_2 = (u_2, \sigma_2, \gamma_2)$ 未知且不等. 构造似然比统计量^[23]

$$Z_n = \sqrt{\max_{1 \leq m \leq n-1} (-2 \ln \Lambda_m)}, \quad \text{其中 } \Lambda_m = \frac{\sup_{\Phi_0} \prod_{i=1}^n g(X_i; \Phi_0)}{\sup_{\Phi_1} \prod_{i=1}^m g(X_i; \Phi_1) \sup_{\Phi_2} \prod_{i=m+1}^n g(X_i; \Phi_2)}.$$

显然, $\Lambda_m \leq 1$. 真实变点 m^* 发生改变, 将导致 Λ_{m^*} 更小, 从而 Z_n 越大越趋于拒绝 H_0 . 此外

$$\max_{1 \leq m \leq n-1} (-2 \ln \Lambda_m) = \max_{1 \leq m \leq n-1} (2(L_1(\hat{\Phi}_1) + L_2(\hat{\Phi}_2) - L_n(\hat{\Phi}))).$$

其中 $\hat{\Phi}_1$ 和 $\hat{\Phi}_2$ 与 $\hat{\Phi}$ 分别为基于 X_1, \dots, X_m 和 X_{m+1}, \dots, X_n 与 X_1, \dots, X_n 的参数估计, L 为对数似然函数.

解决上述检验问题需寻找统计量 Z_n 在 H_0 下的分布, 但 Z_n 的精确分布极难找到, 故转而寻找其渐近分布并以此获得临界值. 在指数分布族下, 该统计量极限分布已有很好的结论^[23]. 但对 GPD 而言, 由于分布定义在集合 $\{x : x \geq u, 1 + \gamma(x - u)\sigma^{-1} > 0\}$ 并不满足经典似然条件, 同时也不满足 Csörgö 等^[23] 中 C.4 和 C.5 各阶偏导连续条件, 从而已有理论和方法不能直接使用. 为此, 先对 GPD 做如下参数变换.

首先考虑 $\gamma < 0$ 情形. 令 $\theta' = u - \sigma\gamma^{-1}$, $\beta = (-\gamma\sigma^{-1})^{-\gamma^{-1}}$ 和 $\alpha = -\gamma^{-1}$, 则

$$g^*(x; \theta', \alpha, \beta) = \alpha\beta(\theta' - x)^{\alpha-1} I((\theta' - \beta^{-\alpha^{-1}}) \leq x \leq \theta'),$$

$I(\cdot)$ 为示性函数. 再令 $Y = -X$, $\theta = -\theta'$, 得

$$g(y; \theta, \alpha, \beta) = \alpha\beta(y - \theta)^{\alpha-1} I(\theta \leq y \leq (\theta + \beta^{-\alpha^{-1}})). \quad (3)$$

函数 g 是 [24] 的一般形式, $\theta \in R$, $(\alpha, \beta) \in \Psi \subseteq R^2$, 存在关于对数似然方程的估计序列 $(\hat{\theta}_k, \hat{\alpha}_k, \hat{\beta}_k)$, 满足 [24] 极限定理条件, 因此有如下结论成立.

$$\hat{\theta}_k - \theta_0 = O_p(\sqrt{k}), \quad \hat{\alpha}_k - \alpha_0 = O_p(\sqrt{k}), \quad \hat{\beta}_k - \beta_0 = O_p(\sqrt{k}).$$

注 $X_k = O_p(a_k)$ 表示任意小 $\epsilon > 0$, 存在 $K_\epsilon, \delta_\epsilon > 0$, 当 $k > K_\epsilon$, 使得 $P(|\frac{X_k}{a_k}| \geq \delta_\epsilon) \leq \epsilon$ 成立, 通常可简写为 $X_k = O(a_k)$.

基于 (3) 式, 将 (2) 转换为如下检验问题:

$H_0 : Y_i \sim g(y; \theta_0, \alpha_0, \beta_0)$, $i = 1, \dots, n$. vs. H_1 : 存在 $m \in \{1, 2, \dots, n - n_0\}$. 使得

$$Y_i \sim g(y; \theta_1, \alpha_1, \beta_1), \quad i = 1, \dots, m, \quad Y_i \sim g(y; \theta_2, \alpha_2, \beta_2), \quad i = m + 1, \dots, n. \quad (4)$$

变点前后仍记 $\Phi_1 = (\theta_1, \alpha_1, \beta_1)$ 和 $\Phi_2 = (\theta_2, \alpha_2, \beta_2)$ 未知, $\Phi_0 = (\theta_0, \alpha_0, \beta_0)$. 构造统计量

$$Z_n = \sqrt{\max_{1 \leq m \leq n-1} Z_m} = \sqrt{\max_{1 \leq m \leq n-1} (-2 \ln \Lambda_m)}.$$

3 GPD 变点模型极限性质

接下来, 为得到 Z_n 的渐近分布, 对密度函数 $g(y; \theta, \alpha, \beta)$ 相关性质进行详细研究.

考虑 (3) 式对数似然函数

$$L_k(\Phi) \triangleq L_k(\Phi; Y_1, \dots, Y_k) = \sum_{i=1}^k \ln g(Y_i; \Phi) = k \ln \alpha + k \ln \beta + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^k \ln(Y_i - \theta).$$

与 [24] 方法类似, 可以证明: 当 $\alpha > 2$ 时, 存在 $\hat{\Phi}_k = (\hat{\theta}_k, \hat{\alpha}_k, \hat{\beta}_k)$, 使得 $\frac{\partial L_k(\hat{\Phi}_k)}{\partial \Phi} = 0$ 成

立. 对数似然函数 $L_k(\Phi)$ 一二阶偏导求解得

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_k(\Phi)}{\partial \theta} &= -\sum_{i=1}^k \frac{\alpha-1}{Y_i-\theta}, & \frac{\partial L_k(\Phi)}{\partial \alpha} &= \frac{k}{\alpha} + \sum_{i=1}^k \ln(Y_i-\theta), \\ \frac{\partial L_k(\Phi)}{\partial \beta} &= \frac{k}{\beta}, & \frac{\partial^2 L_k(\Phi)}{\partial \alpha^2} &= -\frac{k}{\alpha^2}, & \frac{\partial^2 L_k(\Phi)}{\partial \beta^2} &= -\frac{k}{\beta^2} \\ \frac{\partial^2 L_k(\Phi)}{\partial \theta^2} &= -\sum_{i=1}^k \frac{\alpha-1}{(Y_i-\theta)^2}, & \frac{\partial^2 L_k(\Phi)}{\partial \theta \partial \alpha} &= -\sum_{i=1}^k \frac{1}{Y_i-\theta}.\end{aligned}\quad (5)$$

记 \mathbf{M} 为信息矩阵, 则

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{\theta\theta} & m_{\theta\alpha} & m_{\theta\beta} \\ m_{\alpha\theta} & m_{\alpha\alpha} & m_{\alpha\beta} \\ m_{\beta\theta} & m_{\beta\alpha} & m_{\beta\beta} \end{pmatrix},$$

元素分别为

$$\begin{aligned}m_{\theta\theta} &= -E\left[\frac{\partial^2 \ln g(Y_i; \Phi)}{\partial \theta^2}\right], & m_{\beta\beta} &= -E\left[\frac{\partial^2 \ln g(Y_i; \Phi)}{\partial \beta^2}\right], \\ m_{\theta\beta} &= m_{\beta\theta} = -E\left[\frac{\partial^2 \ln g(Y_i; \Phi)}{\partial \theta \partial \beta}\right], & m_{\alpha\alpha} &= -E\left[\frac{\partial^2 \ln g(Y_i; \Phi)}{\partial \alpha^2}\right], \\ m_{\theta\alpha} &= m_{\alpha\theta} = -E\left[\frac{\partial^2 \ln g(Y_i; \Phi)}{\partial \theta \partial \alpha}\right], & m_{\alpha\beta} &= m_{\beta\alpha} = -E\left[\frac{\partial^2 \ln g(Y_i; \Phi)}{\partial \alpha \partial \beta}\right].\end{aligned}$$

性质 1 设 Y_1, \dots, Y_k 独立同分布于概率密度函数 $g(y; \Phi)$, 有

1.1) 对于 $r, r' > 0$, 则

$$E\left[\frac{\partial \ln g(Y_i; \Phi)}{\partial \theta}\right]^r < \infty, \quad r < \alpha; \quad E\left[\frac{\partial^2 \ln g(Y_i; \Phi)}{\partial \theta^2}\right]^{r'} < \infty, \quad 2r' < \alpha.$$

1.2)

$$\sup_k \frac{\partial L_k(\Phi)/\partial \theta}{\sqrt{k \ln \ln k}} = O(1), \quad \text{a.s.} \quad (6)$$

1.3) 当 $2 < \alpha \leq 4$ 时, 对任意 $r \in [0, 1 - 2\alpha^{-1}]$, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^r \left(\frac{1}{k} \frac{\partial^2 L_k(\Phi)}{\partial \theta^2} + m_{\theta\theta} \right) = 0, \quad \text{a.s.};$$

当 $\alpha > 4$ 时, 对任意 $r \in [0, 0.5]$, 上式同样成立.

1.4) (a) 对于 $\theta \in R, \beta > 0$ 和 $\alpha > 3$, 有 $E(Y - \theta)^{-r} < \infty, r = 1, 2, 3$.

(b) 对于 $\theta \in R, \beta > 0$ 和 $2 < \alpha \leq 3$, 有 $E(Y - \theta)^{-r} < \infty, r = 1, 2$. 任意小 $\varepsilon > 0$, 则

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{(Y_i - \theta)^3} = o(k^{3/\alpha} (\ln k)^{3(1/\alpha + \varepsilon)}), \quad \text{a.s.} \quad (7)$$

1.5) 在 H_0 下, 任意小 $\varepsilon > 0$, 有

$$\left(1 - \frac{Y_{(1)} - \theta}{Y_{(2)} - \theta}\right)^{-1} = o((\ln k)^{1+\varepsilon}), \quad \text{a.s.} \quad (8)$$

注 1 a.s. (almost surely), 表示事件 $\{\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X\}$ 发生的概率 $P\{\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X\} = 1$, 记为 $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X$, a.s.;

注 2 $X_k = o_p(a_k)$ 表示任意小 $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, 存在 $K_{\varepsilon, \delta}$, 当 $k > K_{\varepsilon, \delta}$ 时, 使得 $P(|\frac{X_k}{a_k}| \geq \delta) \leq \epsilon$ 成立, 通常简写为 $X_k = o(a_k)$.

证 1.1) 由 $E(Y - \theta)^{-r} = \alpha \beta \int_{\theta}^{\theta + \beta^{-\frac{1}{\alpha}}} (y - \theta)^{-r + \alpha - 1} dy < \infty$, $r < \alpha$. 同理有

$$\begin{aligned} E\left[\frac{\partial \ln g(Y_i; \Phi)}{\partial \alpha}\right]^r &< \infty, \quad r < \alpha; \\ E\left[\frac{\partial^2 \ln g(Y_i; \Phi)}{\partial \theta^2}\right]^{r'} &< \infty, \quad 2r' < \alpha; \\ E\left[\frac{\partial^2 \ln g(Y_i; \Phi)}{\partial \theta \partial \alpha}\right]^{r'} &< \infty, \quad 2r' < \alpha. \end{aligned}$$

1.2) 由性质 1.1) 可知

$$E\left(\frac{\partial \ln g(Y_i; \Phi)}{\partial \theta}\right)^2 = -E\left(\frac{\partial^2 \ln g(Y_i; \Phi)}{\partial \theta^2}\right) < \infty.$$

此外,

$$E\left(\frac{\partial L_k(\Phi)}{\partial \theta}\right) = 0,$$

由 [25] 的 235 页定理 7.1 得

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial L_k(\Phi)/\partial \theta}{\sqrt{m_{\theta\theta}} \sqrt{2k \ln \ln k}}, \quad \text{a.s.},$$

故 (6) 式得证, 其它类似.

1.3)

$$\begin{aligned} k^r \left(\frac{1}{k} \frac{\partial^2 L_k(\Phi)}{\partial \theta^2} + m_{\theta\theta} \right) &= k^r \left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial^2 \ln g(Y_i; \Phi)}{\partial \theta^2} \right) - E\left(\frac{\partial^2 \ln g(Y_i; \Phi)}{\partial \theta^2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{k^{1-r}} \sum_{i=1}^k \left[\frac{\partial^2 \ln g(Y_i; \Phi)}{\partial \theta^2} - E\left(\frac{\partial^2 \ln g(Y_i; \Phi)}{\partial \theta^2}\right) \right]. \end{aligned}$$

由 [25] 中 M-Z 律与性质 1.1) 有 $1 \leq (1-r)^{-1} < \min\{0.5\alpha, 2\}$, 化简即证. 同理, 还可证明:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} k^r \left(\frac{1}{k} \frac{\partial^2 L_k(\Phi)}{\partial \alpha^2} + m_{\alpha\alpha} \right) &= 0, \quad \text{a.s.}; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} k^r \left(\frac{1}{k} \frac{\partial^2 L_k(\Phi)}{\partial \beta^2} + m_{\beta\beta} \right) &= 0, \quad \text{a.s.}; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} k^r \left(\frac{1}{k} \frac{\partial^2 L_k(\Phi)}{\partial \theta \partial \alpha} + m_{\theta\alpha} \right) &= 0, \quad \text{a.s.}; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} k^r \left(\frac{1}{k} \frac{\partial^2 L_k(\Phi)}{\partial \theta \partial \beta} + m_{\theta\beta} \right) &= 0, \quad \text{a.s.}; \end{aligned}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^r \left(\frac{1}{k} \frac{\partial^2 L_k(\Phi)}{\partial \alpha \partial \beta} + m_{\alpha \beta} \right) = 0, \quad \text{a.s.}$$

1.4) (a) 由性质 1.1) 可得, 下证 (7) 式. 由 [26], 当 $k \rightarrow \infty$ 时,

$$\sum_{i=1}^k (Y_i - \theta)^{-3} = o(\lambda_k), \quad \text{等价} \quad \sum_{i=1}^k P((Y_i - \theta)^{-3} \geq \lambda_i) < \infty.$$

而 $P((Y_i - \theta)^{-3} \geq \lambda_i) = F(Y_i \leq \theta + \lambda_i^{-1/3}) = \beta \lambda_i^{-\alpha/3}$. 对于任意小 $\varepsilon > 0$, 令 $\lambda_i = (\beta i)^{3/\alpha} (\ln i)^{3(1/\alpha+\varepsilon)}$, 则 $P((Y_i - \theta)^{-3} \geq \lambda_i) = (i(\ln i)^{1+\alpha\varepsilon})^{-1}$, 故得证.

1.5) 该性质具体证明过程类似对于 [27] 证明三参数 Weibull 分布方法. 证毕.

性质 2 对 $\delta > 0$ 和任意 $\{\delta_k > 0\}$, 满足 $\delta_k k^{\alpha-1+\delta} \rightarrow 0$. 设 $I_{\delta_k} = \{\hat{\theta} \in R, \hat{\alpha} > 2, \hat{\beta} > 0 : |\hat{\theta} - \theta_0| < \delta_k, |\hat{\alpha} - \alpha_0| < \delta_k, |\hat{\beta} - \beta_0| < \delta_k\}$, $0 < r < 1 - 2\alpha^{-1}$, 有

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} k^r \left(\sup_{I_{\delta_k}} \frac{1}{k} \left| \frac{\partial^2 L_k(\hat{\Phi})}{\partial \theta \partial \alpha} - \frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \theta \partial \alpha} \right| \right) &= 0, \quad \text{a.s.}; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} k^r \left(\sup_{I_{\delta_k}} \frac{1}{k} \left| \frac{\partial^2 L_k(\hat{\Phi})}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \theta^2} \right| \right) &= 0, \quad \text{a.s.}; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} k^r \left(\sup_{I_{\delta_k}} \frac{1}{k} \left| \frac{\partial^2 L_k(\hat{\Phi})}{\partial \theta \partial \beta} - \frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \theta \partial \beta} \right| \right) &= 0, \quad \text{a.s.}; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} k^r \left(\sup_{I_{\delta_k}} \frac{1}{k} \left| \frac{\partial^2 L_k(\hat{\Phi})}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \alpha^2} \right| \right) &= 0, \quad \text{a.s.}; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} k^r \left(\sup_{I_{\delta_k}} \frac{1}{k} \left| \frac{\partial^2 L_k(\hat{\Phi})}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \alpha \partial \beta} \right| \right) &= 0, \quad \text{a.s.}; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} k^r \left(\sup_{I_{\delta_k}} \frac{1}{k} \left| \frac{\partial^2 L_k(\hat{\Phi})}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \beta^2} \right| \right) &= 0, \quad \text{a.s.} \end{aligned}$$

证 由性质 1.4), 当 $\alpha > 3$ 时, 对数似然偏导不存在间断点; 当 $2 < \alpha \leq 3$ 时, 似然一二阶偏导在 $Y_i = \theta_0$ 不连续, 且除前两式存在间断点外, 其余均不存在. 易验证后四式成立, 故考虑当 $2 < \alpha \leq 3$ 时, 前两式的证明. 利用 (5) 式, 要证前两个等式, 只需证以下两式:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^r \left[\sup_{I_{\delta_k}} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{Y_i - \hat{\theta}} - \frac{1}{Y_i - \theta_0} \right) \right] = 0, \quad \text{a.s.}; \quad (9)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^r \left[\sup_{I_{\delta_k}} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{(Y_i - \hat{\theta})^2} - \frac{1}{(Y_i - \theta_0)^2} \right) \right] = 0, \quad \text{a.s.} \quad (10)$$

先证 (9) 式. 分解

$$k \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{Y_i - \hat{\theta}} - \frac{1}{Y_i - \theta_0} \right) = \frac{1}{k(Y_{(1)} - \hat{\theta})} - \frac{1}{k(Y_{(1)} - \theta_0)} + \frac{1}{k} \sum_{i=2}^k \left(\frac{1}{Y_i - \hat{\theta}} - \frac{1}{Y_i - \theta_0} \right). \quad (11)$$

不失一般性, 设 $\theta_0 = 0$, $\beta_0 = 1$, 令 $Z_k = (Y_k)^{-1}$, 则 Z_k 有 $f(z; \alpha) = \alpha z^{-\alpha-1} I(1 \leq z)$. 若 $r' < \alpha$, 有 $[k(Y_{(1)} - \theta_0)]^{-1} = o(k^{1/r'-1})$, a.s.. 而 $[Y_{(1)} - \hat{\theta}]^{-1} = [(Y_{(1)} - \theta_0)[1 - \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{Y_{(1)} - \theta_0}]]^{-1}$, 又 $\delta_k = o(k^{-(\alpha^{-1} + \delta)})$, 对 $\alpha^{-1} < 1/r'' < \alpha^{-1} + \delta$, 有 $\sup_{I_{\delta_k}} \frac{|\hat{\theta} - \theta_0|}{k(Y_{(1)} - \theta_0)} = o(k^{-(\alpha^{-1} + \delta) + 1/r''}) = o(1)$, a.s. 令 $r''' = 1 - 1/r'$, $\forall r' < \alpha$, 有

$$\sup_{I_{\delta_k}} \left(\frac{1}{k(Y_{(1)} - \hat{\theta})} - \frac{1}{k(Y_{(1)} - \theta_0)} \right) = o(k^{-(1-1/r')}) = o(k^{-r'''}), \quad \text{a.s.}$$

由于 $1 - 2\alpha^{-1} < 1 - \alpha^{-1}$, 故对 $0 < r < 1 - 2\alpha^{-1}$, 关于等式 (11) 右边前两项有

$$\sup_{I_{\delta_k}} \left(\frac{1}{k(Y_{(1)} - \hat{\theta})} - \frac{1}{k(Y_{(1)} - \theta_0)} \right) = o\left(\frac{1}{k^r}\right), \quad \text{a.s.} \quad (12)$$

对于等式 (11) 右端第三项, 存在 $\tilde{\theta}$,

i) 当 $\hat{\theta} < \theta_0$ 时, 有 $\hat{\theta} < \tilde{\theta} < \theta_0$, 所以

$$\frac{1}{k} |\hat{\theta} - \theta_0| \sum_{i=2}^k \frac{1}{(Y_i - \tilde{\theta})^2} \leq \frac{1}{k} |\hat{\theta} - \theta_0| \sum_{i=2}^k \frac{1}{(Y_i - \theta_0)^2}.$$

由性质 1.3) 和 (5) 式知

$$\frac{1}{k} \sum_{i=2}^k \frac{1}{(Y_i - \theta_0)^2} = O(1), \quad \text{a.s.} \quad (13)$$

ii) 当 $\hat{\theta} > \theta_0$ 时, 有 $\theta_0 < \tilde{\theta} < \hat{\theta}$, $Y_i - Y_{(1)} \leq Y_i - \tilde{\theta}$, 利用 (8), (12) 和 (13) 式, 有

$$\sup_{I_{\delta_k}} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k [(Y_i - \hat{\theta})^{-1} - (Y_i - \theta_0)^{-1}] = o(k^{-r}), \quad \text{a.s.}$$

因此, (9) 式得证.

(10) 式证明类似 (9) 式方法, 分解逐项证明, 在此不再一一证明. 性质 2 证毕.

定理 1 存在实数列 $\{\delta_k\}$, $\delta > 0$, 使 $\delta_k \sqrt{k^{-1} \ln \ln k} \rightarrow \infty$ 和 $\delta_k k^{\delta+\alpha^{-1}} \rightarrow 0$, 且 A , 有 $P(A) = 1$. 任意 $\omega \in A$, 有 $k_0(\omega)$, 使得任意 $k \geq k_0$, $L_k(\Phi)$ 存在估计 $\hat{\Phi}_k = (\hat{\theta}_k, \hat{\alpha}_k, \hat{\beta}_k)$, 满足 $\frac{\partial L_k(\hat{\Phi}_k)}{\partial \theta} = 0$, $\frac{\partial L_k(\hat{\Phi}_k)}{\partial \alpha} = 0$, $\frac{\partial L_k(\hat{\Phi}_k)}{\partial \beta} = 0$. 且 $|\hat{\theta}_k - \theta_0| \leq \delta_k$, $|\hat{\alpha}_k - \alpha_0| \leq \delta_k$, $|\hat{\beta}_k - \beta_0| \leq \delta_k$.

证 类似证明 Weibull 方法 [28], 满足定理条件 $\{\delta_k\}$, 任意 $x, y, z \in R$, 定义

$$f_k(x, y, z) = \frac{1}{\delta_k^2 k} L_k(\theta_0 + \delta_k x, \alpha_0 + \delta_k y, \beta_0 + \delta_k z).$$

只要 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, 利用 Taylor 展开式, 存在 $|x_\theta| < 1$, $|y_\theta| < 1$ 和 $|z_\theta| < 1$, 使得

$$\frac{\partial f_k(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial f_k(0, 0, 0)}{\partial x} + x \frac{\partial^2 f_k(x_\theta, y_\theta, z_\theta)}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 f_k(x_\theta, y_\theta, z_\theta)}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 f_k(x_\theta, y_\theta, z_\theta)}{\partial x \partial z}.$$

令 $\Phi_\theta = (\theta_\theta, \alpha_\theta, \beta_\theta)$, $\theta_\theta = \theta_0 + x_\theta \delta_k$, $\alpha_\theta = \alpha_0 + y_\theta \delta_k$ 和 $\beta_\theta = \beta_0 + z_\theta \delta_k$. 由于 $|x_\theta| < 1$, $|y_\theta| < 1$ 与 $|z_\theta| < 1$, 故 $|\theta_\theta - \theta_0| < \delta_k$, $|\alpha_\theta - \alpha_0| < \delta_k$ 和 $|\beta_\theta - \beta_0| < \delta_k$, 由上式得

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_k(x, y, z)}{\partial x} &= \frac{1}{\delta_k k} \frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \theta} + \frac{x}{k} \frac{\partial^2 L_k(\Phi_\theta)}{\partial \theta^2} + \frac{y}{k} \frac{\partial^2 L_k(\Phi_\theta)}{\partial \theta \partial \alpha} + \frac{z}{k} \frac{\partial^2 L_k(\Phi_\theta)}{\partial \theta \partial \beta} \\ &= \frac{1}{\delta_k k} \frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \theta} + \frac{x}{k} \frac{\partial^2 L_k(\Phi_\theta)}{\partial \theta^2} + \frac{y}{k} \frac{\partial^2 L_k(\Phi_\theta)}{\partial \theta \partial \alpha} + \frac{z}{k} \frac{\partial^2 L_k(\Phi_\theta)}{\partial \theta \partial \beta} \\ &\quad + \frac{x}{k} \frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \theta^2} + \frac{y}{k} \frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \theta \partial \alpha} + \frac{z}{k} \frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \theta \partial \beta} \\ &\quad - \frac{x}{k} \frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \theta^2} - \frac{y}{k} \frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \theta \partial \alpha} - \frac{z}{k} \frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \theta \partial \beta} \\ &\quad + xm_{\theta\theta} - xm_{\theta\theta} + ym_{\theta\alpha} - ym_{\theta\alpha} + zm_{\theta\beta} - zm_{\theta\beta}. \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k,\theta}(x_\theta, y_\theta, z_\theta) &= \frac{x}{k} \left(\frac{\partial^2 L_k(\Phi_\theta)}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \theta^2} \right) + x \left(\frac{1}{k} \frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \theta^2} + m_{\theta\theta} \right) \\ &\quad + \frac{y}{k} \left(\frac{\partial^2 L_k(\Phi_\theta)}{\partial \theta \partial \alpha} - \frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \theta \partial \alpha} \right) + y \left(\frac{1}{k} \frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \theta \partial \alpha} + m_{\theta\alpha} \right) \\ &\quad + \frac{z}{k} \left(\frac{\partial^2 L_k(\Phi_\theta)}{\partial \theta \partial \beta} - \frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \theta \partial \beta} \right) + z \left(\frac{1}{k} \frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \theta \partial \beta} + m_{\theta\beta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\delta_k k} \frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

所以,

$$\frac{\partial f_k(x, y, z)}{\partial x} = -xm_{\theta\theta} - ym_{\theta\alpha} - zm_{\theta\beta} + \varepsilon_{k,\theta}(x_\theta, y_\theta, z_\theta).$$

对 ε 等式通过放缩利用 (6) 式, 由性质 1.3) 与性质 2 可证明当 $k \rightarrow \infty$ 时, 若 \mathbf{M} 正定, 则 $x \frac{\partial f_k}{\partial x} + y \frac{\partial f_k}{\partial y} + z \frac{\partial f_k}{\partial z} < 0$. 根据 [28] 局部最大值定理, 当 $k \rightarrow \infty$, 在 $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ 内 f_k 存在局部最大值, 满足定理条件. 定理 1 证毕.

定理 2 对任意 r , 且 $0 < r < 1 - 2\alpha^{-1}$, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^r}{\sqrt{k \ln \ln k}} \left(\begin{pmatrix} \partial L_k(\Phi_0)/\partial \theta \\ \partial L_k(\Phi_0)/\partial \alpha \\ \partial L_k(\Phi_0)/\partial \beta \end{pmatrix} - k \mathbf{M} \begin{pmatrix} \hat{\theta}_k - \theta_0 \\ \hat{\alpha}_k - \alpha_0 \\ \hat{\beta}_k - \beta_0 \end{pmatrix} \right) = \mathbf{0}, \quad \text{a.s.} \quad (14)$$

证 令 $\tilde{\delta}_k = \ln \ln \ln k \sqrt{\ln \ln k/k}$, 满足性质 2, $\tilde{\delta}_k k^{1/\alpha+\delta} \rightarrow 0$, 最大似然估计 $\hat{\Phi}_k = (\hat{\theta}_k, \hat{\alpha}_k, \hat{\beta}_k)$, 则 Taylor 展开

$$\frac{\partial L_k(\hat{\Phi}_k)}{\partial \theta} = \frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 L_k(\tilde{\Phi}_k)}{\partial \theta^2}(\hat{\theta}_k - \theta_0) + \frac{\partial^2 L_k(\tilde{\Phi}_k)}{\partial \theta \partial \alpha}(\hat{\alpha}_k - \alpha_0) + \frac{\partial^2 L_k(\tilde{\Phi}_k)}{\partial \theta \partial \beta}(\hat{\beta}_k - \beta_0),$$

其中 $\tilde{\Phi}_k = (\tilde{\theta}_k, \tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k)$, $|\tilde{\theta}_k - \theta_0| < |\hat{\theta}_k - \theta_0| < \tilde{\delta}_k$, $|\tilde{\alpha}_k - \alpha_0| < |\hat{\alpha}_k - \alpha_0| < \tilde{\delta}_k$, $|\tilde{\beta}_k - \beta_0| < |\hat{\beta}_k - \beta_0| < \tilde{\delta}_k$. 有

$$\frac{\partial L_k(\hat{\Phi}_k)}{\partial \theta} = \frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \theta} - k(\hat{\theta}_k - \theta_0)m_{\theta\theta} - k(\hat{\alpha}_k - \alpha_0)m_{\theta\alpha} - k(\hat{\beta}_k - \beta_0)m_{\theta\beta}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \theta^2} + km_{\theta\theta} \right) (\hat{\theta}_k - \theta_0) + \left(\frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \theta \partial \alpha} + km_{\theta\alpha} \right) (\hat{\alpha}_k - \alpha_0) \\
& + \left(\frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \theta \partial \beta} + km_{\theta\beta} \right) (\hat{\beta}_k - \beta_0) + \left(\frac{\partial^2 L_k(\tilde{\Phi}_k)}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \theta^2} \right) (\hat{\theta}_k - \theta_0) \\
& + \left(\frac{\partial^2 L_k(\tilde{\Phi}_k)}{\partial \theta \partial \alpha} - \frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \theta \partial \alpha} \right) (\hat{\alpha}_k - \alpha_0) + \left(\frac{\partial^2 L_k(\tilde{\Phi}_k)}{\partial \theta \partial \beta} - \frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \theta \partial \beta} \right) (\hat{\beta}_k - \beta_0).
\end{aligned}$$

因为 $\frac{\partial L_k(\tilde{\Phi}_k)}{\partial \theta} = 0$, 所以

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{k \ln \ln k}} \left(\frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \theta} - k(\hat{\theta}_k - \theta_0)m_{\theta\theta} - k(\hat{\alpha}_k - \alpha_0)m_{\theta\alpha} - k(\hat{\beta}_k - \beta_0)m_{\theta\beta} \right) \\
& = - \frac{1}{\sqrt{k \ln \ln k}} \left(\frac{\partial^2 L_k(\tilde{\Phi}_k)}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \theta^2} \right) (\hat{\theta}_k - \theta_0) \\
& - \frac{1}{\sqrt{k \ln \ln k}} \left(\frac{\partial^2 L_k(\tilde{\Phi}_k)}{\partial \theta \partial \alpha} - \frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \theta \partial \alpha} \right) (\hat{\alpha}_k - \alpha_0) \\
& - \frac{1}{\sqrt{k \ln \ln k}} \left(\frac{\partial^2 L_k(\tilde{\Phi}_k)}{\partial \theta \partial \beta} - \frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \theta \partial \beta} \right) (\hat{\beta}_k - \beta_0) \\
& - \frac{1}{\sqrt{k \ln \ln k}} \left(\frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \theta^2} + km_{\theta\theta} \right) (\hat{\theta}_k - \theta_0) \\
& - \frac{1}{\sqrt{k \ln \ln k}} \left(\frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \theta \partial \alpha} + km_{\theta\alpha} \right) (\hat{\alpha}_k - \alpha_0) \\
& - \frac{1}{\sqrt{k \ln \ln k}} \left(\frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \theta \partial \beta} + km_{\theta\beta} \right) (\hat{\beta}_k - \beta_0). \tag{15}
\end{aligned}$$

又 $|\tilde{\theta}_k - \theta_0| < \ln \ln \ln k \sqrt{\frac{\ln \ln k}{k}}$, $|\tilde{\alpha}_k - \alpha_0| < \ln \ln \ln k \sqrt{\frac{\ln \ln k}{k}}$, $|\tilde{\beta}_k - \beta_0| < \ln \ln \ln k \sqrt{\frac{\ln \ln k}{k}}$.

故将性质 1.3) 和性质 2 应用于 (15) 式得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^r}{\sqrt{k \ln \ln k}} \left[\frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \theta} - k(\hat{\theta}_k - \theta_0)m_{\theta\theta} - k(\hat{\alpha}_k - \alpha_0)m_{\theta\alpha} - k(\hat{\beta}_k - \beta_0)m_{\theta\beta} \right] = 0, \text{ a.s.},$$

其中 $m_{\theta\theta}$, $m_{\theta\alpha}$ 和 $m_{\theta\beta}$ 为信息矩阵 \mathbf{M} 的第一行对应元素. 针对 α , β 类似可证

$$\begin{aligned}
& \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^r}{\sqrt{k \ln \ln k}} \left[\frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \alpha} - k(\hat{\theta}_k - \theta_0)m_{\alpha\theta} - k(\hat{\alpha}_k - \alpha_0)m_{\alpha\alpha} - k(\hat{\beta}_k - \beta_0)m_{\alpha\beta} \right] = 0, \text{ a.s.}; \\
& \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^r}{\sqrt{k \ln \ln k}} \left[\frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \beta} - k(\hat{\theta}_k - \theta_0)m_{\beta\theta} - k(\hat{\alpha}_k - \alpha_0)m_{\beta\alpha} - k(\hat{\beta}_k - \beta_0)m_{\beta\beta} \right] = 0, \text{ a.s.}
\end{aligned}$$

证毕.

推论 1 由定理 1 得最大似然估计 $\hat{\Phi}_k = (\hat{\theta}_k, \hat{\alpha}_k, \hat{\beta}_k)$ 满足

$$\begin{aligned}
& \sup_k \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\ln \ln k}} |\hat{\theta}_k - \theta_0| = O(1), \quad \text{a.s.}; \\
& \sup_k \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\ln \ln k}} |\hat{\alpha}_k - \alpha_0| = O(1), \quad \text{a.s.}; \\
& \sup_k \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\ln \ln k}} |\hat{\beta}_k - \beta_0| = O(1), \quad \text{a.s.}
\end{aligned}$$

证 由定理 1 知 $g(y; \theta, \alpha, \beta)$ 的对数似然函数 $L_k(\Phi)$ 存在序列 $\widehat{\Phi}_k$, 使得 $\frac{\partial L_k(\widehat{\Phi}_k)}{\partial \theta} = 0$. 对于函数 $L_k(\theta_0 + \delta_k x, \alpha_0 + \delta_k y, \beta_0 + \delta_k z)$, 令 $(x, y, z) = (1, 0, 0)$, δ_k 满足定理 1 条件, 利用 Taylor 展开式, 由性质 2 与性质 1.3) 可知, 当 $k \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{1}{k} \left(\frac{\partial^2 L_k(\widetilde{\Phi}_k)}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \theta^2} \right) (\widehat{\theta}_k - \theta_0) \rightarrow 0, \quad \frac{1}{k} \left(\frac{\partial^2 L_k(\Phi_0)}{\partial \theta^2} + k m_{\theta\theta} \right) (\widehat{\theta}_k - \theta_0) \rightarrow 0.$$

故

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \theta} - m_{\theta\theta} (\widehat{\theta}_k - \theta_0) \right) = 0,$$

由性质 1.2) 得

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{k m_{\theta\theta}} |\widehat{\theta}_k - \theta_0|}{\sqrt{2 \ln \ln k}} = 1, \quad \text{a.s.}$$

其它同证. 证毕.

推论 2 对任意 r , 使得 $0 < r < 1 - 2\alpha^{-1}$, 有

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} k^r \left[\frac{1}{k} \begin{pmatrix} \frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \beta} \end{pmatrix}^T \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \beta} \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} \widehat{\theta}_k - \theta_0 \\ \widehat{\alpha}_k - \alpha_0 \\ \widehat{\beta}_k - \beta_0 \end{pmatrix}^T \mathbf{M} \begin{pmatrix} \widehat{\theta}_k - \theta_0 \\ \widehat{\alpha}_k - \alpha_0 \\ \widehat{\beta}_k - \beta_0 \end{pmatrix} \right] \\ &= 0, \quad \text{a.s.} \end{aligned} \tag{16}$$

证 \mathbf{M} 正定, 必存在矩阵 \mathbf{Q} 使 $\mathbf{M} = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}$, 要证 (16) 式只需证 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{q}_k \mathbf{q}_k^T = 0$, 其中

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_k &= \sqrt{\ln \ln k} \left[\frac{1}{\sqrt{k}} \left(\frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \theta}, \frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \alpha}, \frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \beta} \right) \mathbf{Q}^{-1} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{k} (\widehat{\theta}_k - \theta_0, \widehat{\alpha}_k - \alpha_0, \widehat{\beta}_k - \beta_0) \mathbf{Q}^T \right], \\ \mathbf{q}_k^T &= \frac{k^r}{\sqrt{\ln \ln k}} \left[\frac{1}{\sqrt{k}} (\mathbf{Q}^T)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \beta} \end{pmatrix} - \sqrt{k} \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \widehat{\theta}_k - \theta_0 \\ \widehat{\alpha}_k - \alpha_0 \\ \widehat{\beta}_k - \beta_0 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{\mathbf{q}_k}{\sqrt{\ln \ln k}} = O(\sqrt{\ln \ln k}), \quad \text{a.s.}$$

由 (14) 式可知 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{q}_k^T = \mathbf{0}$, a.s., 证毕.

定理 3 对任意 r , 使 $0 < r < 1 - 2\alpha^{-1}$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\begin{aligned} & k^r \left[2(L_k(\widehat{\Phi}_k) - L_k(\Phi_0)) - \frac{1}{k} \left(\frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \theta}, \frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \alpha}, \frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \beta} \right) \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \beta} \end{pmatrix} \right] \\ & \longrightarrow 0, \quad \text{a.s.} \end{aligned}$$

类似 [28], 利用 Taylor 展开方法, 推论 1 和性质 1.3), 证毕.

定理 4 检验问题 (4), H_0 下, 对任意 $t, \alpha > 2$ (即 $-0.5 < \gamma < 0$) 分别有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{A(\ln n) \sqrt{\max_{1 \leq k \leq n-1} 2 \ln \Lambda_k^{(0)}} \leq t + D_3(\ln n)\} = \exp\{-e^{-t}\},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{A(\ln n) \sqrt{\max_{1 \leq k \leq n-1} 2 \ln \Lambda_k} \leq t + D_3(\ln n)\} = \exp\{-2e^{-t}\}.$$

其中 $A(y) = \sqrt{2 \ln y}$, $D_d(y) = 2 \ln y + (0.5d) \ln \ln y - \ln \Gamma(0.5d)$, $\Lambda_k^{(0)}$ 为 $\Phi_1 = \Phi_0$ 的检验统计量.

证 利用定理 3 结论, 可证下式

$$\left| \max_{1 \leq k \leq n} [2(L_k(\hat{\Phi}_k) - L_k(\Phi_0))] - \max_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k} \left(\frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \theta}, \frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \alpha}, \frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \beta} \right) \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial L_k(\Phi_0)}{\partial \beta} \end{pmatrix} \right| = o(\ln \ln n).$$

并且由此容易得到命题结论, 具体证明过程类似 [23]. 证毕.

对于 $\gamma > 0$ 的 GPD 变点问题, 通过参数变换得类似 (3) 式的密度函数, 对数似然函数各阶偏导不存在间断点, 利用 $\gamma < 0$ 方法, 易得类似定理 4 结论. 此外, 当 $\gamma = 0$ 时, GPD 退化为指数分布, 上述结论对于指数分布族依然成立^[23]. 从而, 可知下述定理成立.

定理 5 检验问题 (2), H_0 下, 对于任意 $t, \gamma > -0.5$ 分别有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{A(\ln n) \sqrt{\max_{1 \leq k \leq n-1} 2 \ln \Lambda_k^{(0)}} \leq t + D_3(\ln n)\} = \exp\{-e^{-t}\},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{A(\ln n) \sqrt{\max_{1 \leq k \leq n-1} 2 \ln \Lambda_k} \leq t + D_3(\ln n)\} = \exp\{-2e^{-t}\}.$$

其中 $A(x) = \sqrt{2 \ln x}$, $D_d(x) = 2 \ln x + (0.5d) \ln \ln x - \ln \Gamma(0.5d)$, $\Lambda_k^{(0)}$ 含义同定理 4.

4 模拟研究

模拟研究基于 GPD 变点问题 (2). 在定理 5 与 H_0 下, 2.2 节中检验统计量 Z_n 的临界值由下式模拟得.

$$P\left(\max_{c \leq m \leq n-h} \sqrt{-2 \ln \Lambda_m} > x\right) = \frac{x^d \exp\{-\frac{x^2}{2}\}}{2^{d/2} \Gamma(\frac{d}{2})} \left\{ \ln \left(\frac{(1-c)(1-h)}{ch} \right) - \frac{d}{x^2} \ln \frac{(1-c)(1-h)}{ch} + \frac{4}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right\}.$$

Csörgő 等^[23] 指出当 $c = h = n^{-1}(\ln n)^{3/2}$ 时, 效果较好.

4.1 统计量的检验功效比较

变点存在的自然想法是变点前后参数距离越大, 检验统计量 Z_n 落入拒绝域的概率越大并越靠近 1. 为了解 Z_n 落入拒绝域的概率变化, 给定检验水平考虑如下三种情况:

- 1) 形状参数变点: $\Phi_1 = (0, 1, 0.1)$ 和 $\Phi_2 = (0, 1, 0.1 + 0.01j)$;
- 2) 尺度参数变点: $\Phi_1 = (0, 1, 0.1)$ 和 $\Phi_2 = (0, 1 + 0.01j, 0.1)$;
- 3) 形状和尺度两参数变点: $\Phi_1 = (0, 1, 0.1)$ 和 $\Phi_2 = (0, 1 + 0.01j, 0.1 + 0.01j)$.

进行功效函数模拟, $\Phi_i = (u_{ij}, \sigma_{ij}, \gamma_{ij})$ 表示第 i 组 GPD 参数, 取 $i = 1, 2; j = 1, 2, \dots, 100$.

第 1 步 统计模拟设置. 固定 j , 本文设置每次分别产生容量为 200 和 500 的 GPD 样本, 变点位置分别设在第 100 个和第 250 个样本处.

第 2 步 计算模拟结果. 计算统计量 $Z_n^{(j)}$, 重复 $N = 500$ 次. 统计落入拒绝域次数 N_j^0 , 即检验统计量大于临界值次数.

第 3 步 概率求解. 利用频率与概率关系: $\frac{N_j^0}{N} \rightarrow P_j$, 计算样本落入拒绝域概率 P_j .

第 4 步 递增 j 至 100, 即不断增加两分布参数间距离, 所得模拟结果如图 1 所示.

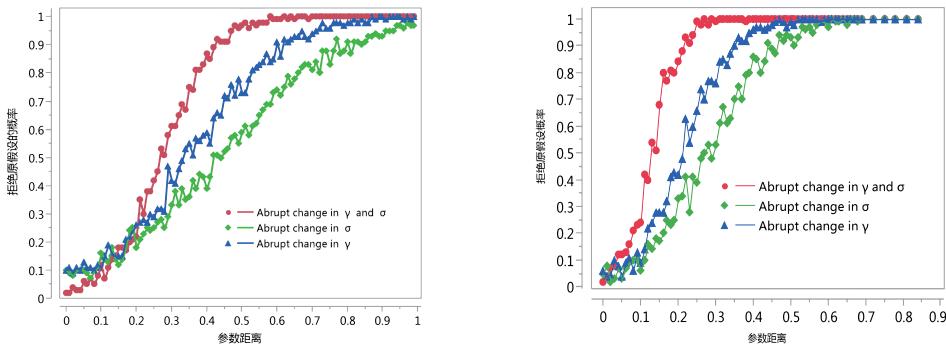


图 1 样本量分别为 200 和 500 情形下的功效函数变化情况

由图 1 知: Z_n 统计量检验功效两参数 (γ 和 σ) 变点大于单参数 (γ 或 σ) 变点, 形状参数 (γ) 变点的检验功效又大于尺度参数 (σ) 变点, 功效随样本增加而提高.

4.2 各参数变点情形下功效模拟

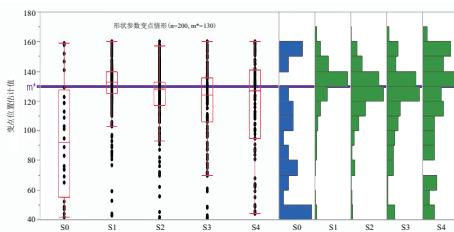
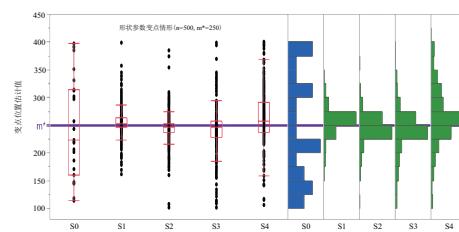
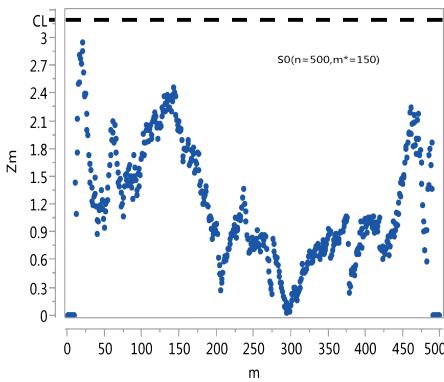
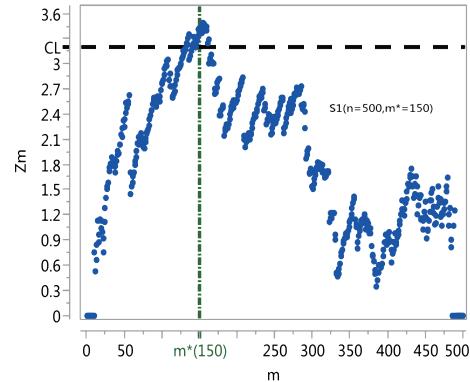
4.2.1 形状参数变点情形

设置随机模拟 $N = 300$ 次 (实际上, 模拟 300 次和 500 次结果一致, 考虑到实现效率以下均取 300 次), 并给出了 S_0, \dots, S_4 ($\mu_1 = \mu_2 = 0, \sigma_1 = \sigma_2 = 1$) 五种情形, 模拟计算检验水平 $\alpha = 0.05$ (以下均采用此值) 时拒绝原假设的概率大小, 计算结果如表 1 所示, m^* 表示真实变点位置 (注: 生成序列时会在 m^* 处重新根据 $S_0, \dots, S_4, S_5, \dots, S_9$ 和 S_{10}, \dots, S_{14} 不同情形参数设置产生数据). 由表 1 看到 H_0 为真, 犯 I 类错误概率比 α 稍高, 效果一般. 但 H_0 为假时, 拒绝原假设的概率较高, 即犯 II 类错误的概率较低. 此外, 随着样本增加, 统计量检验功效有增大趋势. 表 1 从概率角度得到了形状参数变点在各种情况下拒绝原假设的期望大小. 那么, 当形状参数变点存在时, 为了直观看

到变点位置估计效果, 分别对 S_0, \dots, S_4 , 以 $n = 200$, $m^* = 130$ 和 $n = 500$, $m^* = 250$ 为例, 300 次模拟变点位置估计结果如图 2 与图 3 所示. 图 2 左半部分表示拒绝原假设变点位置估计结果箱线图, 右半部分表示拒绝原假设变点位置估计结果柱状图. 对于 S_0, \dots, S_4 (图中 S_0, \dots, S_4 , 其它类似), 变点位置估计结果的中位数大多在真实变点 m^* 位置附近. 由图 2 右半部分可看到 S_4 结果则较差, 但就整体五种情形而言, 变点位置估计结果主要集中在 m^* 附近较小范围内变动. 对于容量 500 的情况如图 3 所示.

表 1 形状参数 (γ) 变点情形

n	H_0 为真 (无变点)		H_0 为假 (有变点)			
	S_0	m^*	S_1	S_2	S_3	S_4
	$\gamma_1 = 1.0$		$\gamma_1 = 1.0$	$\gamma_1 = 2.0$	$\gamma_1 = 1.0$	$\gamma_1 = 1.0$
	$\gamma_2 = 1.0$		$\gamma_2 = 2.0$	$\gamma_2 = 1.0$	$\gamma_2 = 0.5$	$\gamma_2 = 1.5$
200	0.096	70	0.637	0.727	0.507	0.280
	0.080	100	0.780	0.783	0.557	0.303
	0.107	130	0.720	0.683	0.417	0.280
500	0.086	150	0.970	0.980	0.843	0.610
	0.077	250	0.980	0.990	0.870	0.610
	0.093	350	0.987	0.967	0.813	0.577

图 2 $n = 200$, 形状参数变点 300 次位置模拟图 3 $n = 500$, 形状参数变点 300 次位置模拟图 4 500 个样本下的 S_0 情形一次实现图 5 500 个样本下的 S_1 情形一次实现

对比图 2, 图 3 可看到, 图 3 左半部分 (不考虑 S_0 情形) 四分位点间距 (Inter Quartile

Range, IQR) 更短 (变点位置估计结果更集中) 和图 3 右半部分柱状图也更集中于真实变点位置, 说明随着样本量增大, 变点位置估计更精确.

为更好看到形状参数变点存在与否情形差别, 以 $n = 500$ 的 S_0 和 $S_1(m^* = 150)$ 为例, 作 Z_m 随 m 的一次模拟变化 (如图 4 图 5 所示), 图中黑色虚线表示临界值线 (Critical Line, CL). 对于变点存在情形 (图 5), Z_m 随着 m 的变化比较有规律, 从样本两端变化到最大值附近趋势比较明显, 而变点不存在情形 (图 4), 这种变化比较混乱. 统计量 Z_m 变化曲线为实际应用提供一种判断变点是否真实存在的主观依据.

4.2.2 尺度参数变点情形

表 2 尺度参数 (σ) 变点情形

n	H_0 为真 (无变点)		H_0 为假 (有变点)			
	S_5	m^*	S_6	S_7	S_8	S_9
	$\sigma_1 = 1.0$		$\sigma_1 = 1.0$	$\sigma_1 = 2.0$	$\sigma_1 = 1.0$	$\sigma_1 = 1.0$
	$\sigma_2 = 1.0$		$\sigma_2 = 2.0$	$\sigma_2 = 1.0$	$\sigma_2 = 0.5$	$\sigma_2 = 1.5$
200	0.070	70	0.820	0.800	0.790	0.360
	0.083	100	0.867	0.860	0.850	0.377
	0.080	130	0.857	0.827	0.790	0.433
500	0.090	150	0.983	0.980	0.993	0.670
	0.093	250	1.000	0.997	0.997	0.740
	0.087	350	0.997	1.000	0.997	0.643

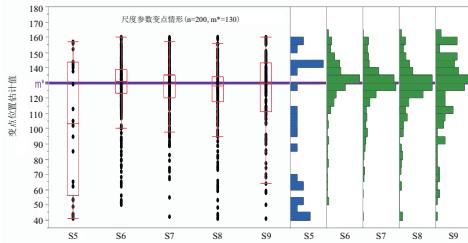


图 6 $n = 200$, 尺度参数变点 300 次位置模拟

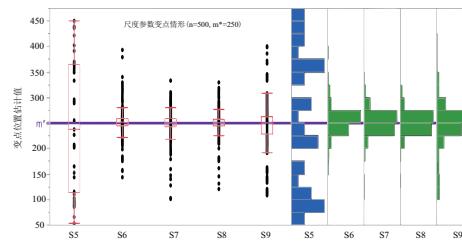


图 7 $n = 500$, 尺度参数变点 300 次位置模拟

不失一般性, 表 2 给出 S_5, \dots, S_9 ($\mu_1 = \mu_2 = 0, \gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$) 情形下模拟 300 次拒绝原假设的概率大小. 由此看出 H_0 为真时, 犯 I 类错误的概率与表 1 中 S_0 情形类似, 比 0.05 稍高. 若 H_0 为假, 犯 II 类错误的概率很低, 当尺度参数差距大于 1, 300 次模拟结果均落入拒绝域. 对比 S_8 和 S_9 , 与尺度参数变大情形相比, 尺度参数变小情形似乎更容易得到正确的结论. 如第 5 节实例分析中超过某阈值的交通流车道占有率服从 GPD, 其尺度参数随着时间推移而变小, 那么在这种参数变化状态下, 更容易检测到变点 (形状参数变点情形也有类似结论). 但上述结论与参数的距离范围是有关的, 如 S_6 和 S_7 就不符合这种情况. 同形状参数变点情形, 为直观看到尺度参数变点情形变点的位置估计效果, 对 S_5, \dots, S_9 , 以 $n = 200, m^* = 130$ 和 $n = 500, m^* = 250$ 为例,

300 次模拟变点位置估计的结果以图形式进行展现(如图 6, 图 7 所示). 与图 2 和图 3 类似, 对于 $S_6 - S_9$ 四种情形, 图 6, 图 7 左半部分的 IQR 都很小, 表明大部分位置估计值都在真值附近, 估计偏差较大的点个数较少. 此外, 对比图 6 图 7, 随着样本量的增加, 变点位置估计精度更准确.

4.2.3 形状和尺度两参数变点情形

表 3 给出 S_{10}, \dots, S_{14} 随机模拟 300 次时拒绝原假设的概率. 在 H_0 为假情况下, 犯 II 类错误的概率也非常低. 随着参数距离增大(由 S_{14} 到 S_{11} 再到 S_{13}), 拒绝原假设概率越大. 为了直观看到位置参数的估计效果, 作图如图 8 所示. 并由图 8 能更清晰看到, 300 次模拟 S_{10} 情形下, 拒绝原假设次数很少. 另外几种情形下, IQR 很小且柱状图比较集中于真实变点位置, 说明变点位置估计结果较好. 此外, 随着样本容量增加到 500 时, 结果变得更加的精准, 如图 9 所示.

表 3 双参数 (σ, γ) 变点情形

n	H_0 为真(无变点)		H_0 为假(有变点)			
	S_{10}	m^*	S_{11}	S_{12}	S_{13}	S_{14}
	$\Phi_1 = (0.0, 1.1, 0.1)$		$\Phi_1 = (0.0, 1.1, 0.1)$	$\Phi_1 = (0.0, 1.5, 0.5)$	$\Phi_1 = (0.0, 1.1, 0.1)$	$\Phi_1 = (0.0, 1.1, 0.1)$
200	$\Phi_2 = (0.0, 1.1, 0.1)$		$\Phi_2 = (0.0, 1.5, 0.5)$	$\Phi_2 = (0.0, 1.1, 0.1)$	$\Phi_2 = (0.0, 1.8, 0.8)$	$\Phi_2 = (0.0, 0.5, 0.5)$
	0.083	70	0.783	0.847	0.997	0.550
	0.097	100	0.807	0.827	0.993	0.687
500	0.123	130	0.780	0.777	0.993	0.633
	0.020	150	0.997	0.993	1.000	0.970
	0.010	250	0.997	1.000	1.000	0.987
	0.013	350	1.000	0.993	1.000	0.957

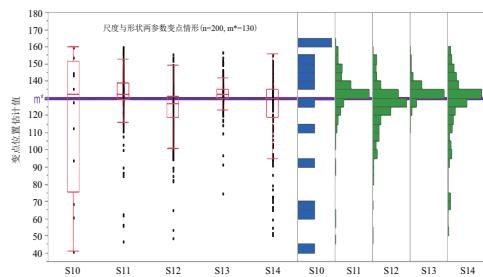


图 8 $n = 200$, 形状与尺度参数变点 300 次位置模拟

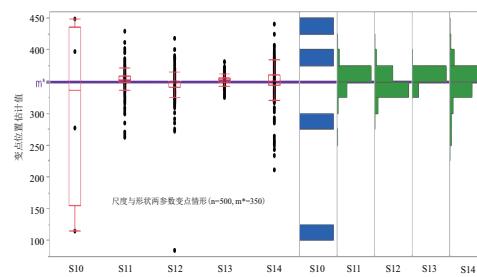


图 9 $n = 500$, 形状与尺度参数变点 300 次位置模拟

对比图 2, 6 和图 8 以及对比图 3, 7 和图 9 可看到: 形状和尺度两参数变点情形下 IQR 最小, 估计波动范围也窄, 而形状或尺度单参数变点情形的估计波动均较分散, 故说明形状和尺度两参数变点情形下, GPD 变点估计结果最好.

5 实例分析

为解决贵阳市中心城区交通拥堵, 当地采取了如摇限号和禁限行等系列缓堵措施, 这些措施是否真正对交通拥堵有缓解作用。在此, 基于本文 GPD 变点模型给出评估探寻。选取贵阳市大十字路口入口每天 8:00-9:00 交通流车道占有率数据, 总时长 2011 年 05 月 01 日至 2012 年 05 月 10 日, 时序如图 10 所示。图中可看出 2012 年以前出现车道占有率更接近 1 的极端事件整体高于 2012 年以后。下面给出该现象 GPD 变点模型的合理特征描述。

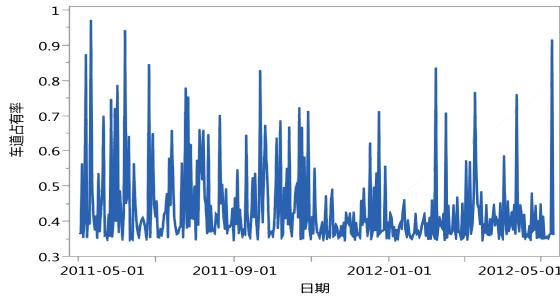


图 10 交通流车道占有率数据时序图

首先, 交通流数据厚尾性诊断和阈值选择。图 11 表示交通流车道占有率数据次序统计与标准指数分布分位数关系, 其值并不总在直线附近波动, 数据尾部有向上趋势, 具有厚尾特点。图 12 超额均值函数关于阈值先上后下, 具有明显厚尾特点, 出现拐点所对应阈值大约在 0.5 即 $u \in [0.4, 0.5]$, 同时 $u > 0.6$ 出现超额均值函数近似线性, 故选择阈值 $u = 0.4$ 。

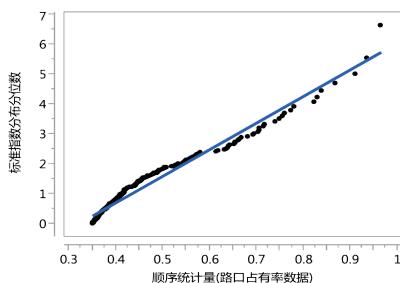


图 11 QQ 图

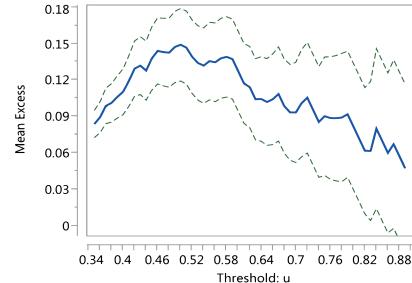


图 12 超额均值函数图

其次, 交通流变点探测与诊断。计算 m 对应 Z_m 值并绘制关系如图 13。图中 CL 为单参数 GPD 变点临界参考值 3.17, 经计算得 $Z_n = 3.23 > 3.17$ 拒绝原假设, 故变点存在且 $m^* = 181$ (10 月 28 日), 二分法验证不存在其它变点。该检测变点可整体说明交通疏

缓堵措施自实施以来确实产生了效果. 下面以该变点为分界点, 对数据进行 GPD 变点分组拟合.

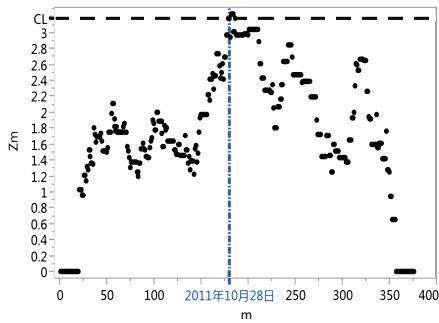


图 13 车道占有率数据 Z_m 统计量变化图

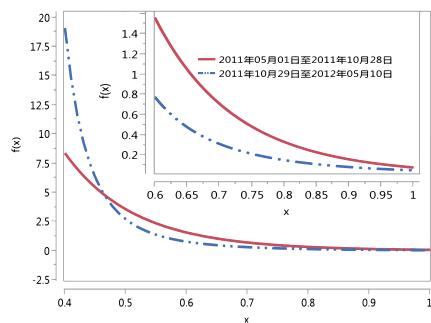


图 14 组 1 与组 2 的 GPD 概率密度曲线图

最后, GPD 变点参数估计与模型检验. 利用似然方法得到三种分组参数估计及 A-D 统计量 A^2 拟合优度检验(见表 4). P 值大于 0.05, 该检验水平下, 没有明显证据显示占有率数据不服从 GPD. 同时, 三组形状参数均大于 0, 说明该数据确有厚尾特征, 组 1 尺度参数大于组 2, 前者更离散, 位置参数差别也不大, 表明前者出现拥堵极端事件较频繁. 为直观描述二者对应交通现象的差别, 绘制出拟合 GPD 概率密度曲线如图 14. 从图中可看到, 车道占有率低于 0.46 的交通现象发生概率, 后者大于前者, 而大于 0.46 的概率, 内嵌图更易看到前者大于后者, 也说明措施自实施以来, 对缓解交通拥堵起到了作用. 除此之外, 该变点模型还能应用于水文气象中的极端事件重现期预测^[29].

表 4 三种分组下 GPD 参数估计及其模型检验

Group	Mean	Sd	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\gamma}$	A^2	P value
2011.05.01 至 2012.05.10	0.43	0.11	0.40	0.09	0.25	0.54	0.23
组 1:2011.05.01 至 2011.10.28	0.46	0.13	0.40	0.12	0.05	0.73	0.11
组 2:2011.10.28 至 2012.05.10	0.41	0.09	0.41	0.05	0.40	0.20	0.92

6 结论

针对 GPD 变点假设检验问题, 本文构造了检验三参数 GPD 变点检测与诊断的最大似然比统计量. 通过参数变换后得 GPD 变点对数似然函数不连续点性质, 推导出 GPD 随机变量在不连续点一二阶矩收敛条件, 并证明检验统计量相关收敛定理. 模拟研究结果验证了本文 GPD 变点检验统计量的高可靠性, GPD 两参数变点功效高于单参数变点, GPD 变点估计效果较好. 同时, GPD 变点检测模型结合二分法适用于多变点性, 实证分析也表明基于最大似然比检验统计量的 GPD 变点检测模型是极端事件可行有效的评估方法.

本文还有待作如下深入研究: 1) 利用本文方法, 构造混合 GPD 变点检测模型,

将变点方法与混合 GPD 结合进行实际数据分析, 对于 GPD 的分位点估计或许更加精准。2) 研究参数含协变量的 GPD 变点检测模型, 完善 GPD 解决实际问题的评估方法。3) 在本文研究基础上, 可将检测到的变点集视为随机过程来研究其预测问题。

致谢 感谢编委和审稿人提出宝贵的修改意见。

参 考 文 献

- [1] Holger Dette, Josua Gösmann. A Likelihood ratio approach to sequential change point detection for a general class of parameters. *Journal of the American Statistical Association*, 2019, 00(0): 1–17
- [2] Baranowski R, Chen Y N, Fryzlewicz P. Narrowest-over-threshold detection of multiple change points and change-point-like features. *Journal of the Royal Statistical Society*, 2019, 81(3): 649–672
- [3] Yu M, Ruggieri E. Change point analysis of global temperature records. *International Journal of Climatology*, 2019, 39(8): 3679–3688
- [4] Coles S. An introduction to statistical modeling of extreme values. London: Springer US, 2001
- [5] Kiriliouk A, Rootzén H, Segers J, Wadsworth J L. Peaks over thresholds modeling with multivariate generalized Pareto distributions. *Technometrics*, 2019, 61(1): 123–135
- [6] Chen B Y, Zhang K Y, Wang L P, Jiang S, Liu G L. Generalized extreme value-Pareto distribution function and its applications in ocean engineering. *China Ocean Engineering*, 2019, 33(2): 127–136
- [7] Mo C X, Ruan Y L, He J Q, Jin J L, Liu P, Sun G K. Frequency analysis of precipitation extremes under climate change. *International Journal of Climatology*, 2019, 39(12): 1373–1387
- [8] 刘新红, 孟生旺, 李政宵. 地震损失风险的 Copula 混合分布模型及其应用. *系统工程理论与实践*, 2019, 39(7): 1855–1866
(Liu X H, Meng S W, Li Z X. Copula-mixed distribution model and its application in modeling earthquake loss in China. *Systems Engineering-theory & Practice*, 2019, 39(7): 1855–1866)
- [9] 崔玫意, 张玉虎, 陈秋华. Box-Cox 正态分布及其在降雨极值分析中的应用. *数理统计与管理*, 2017, 36(1): 8–17
(Cui M Y, Zhang Y H, Chen Q H. Box-Cox normal distribution and its application in rainfall extreme value. *Journal of Applied Statistics and Management*, 2017, 36(1): 8–17)
- [10] 胡立伟, 杨锦青, 何越人, 孟玲, 罗振武, 胡澄宇. 城市交通拥塞辐射模型及其对路网服务能力损伤研究. *中国公路学报*, 2019, 32(3): 145–154
(Hu L W, Yang J Q, He Y R, Meng L, Luo Z W, Hu C Y. Urban traffic congestion radiation model and damage caused to service capacity of road network. *China Journal of Highway and Transport*, 2019, 32(3): 145–154)
- [11] Bermudez P d Z, Kotz S. Parameter estimation of the generalized Pareto distribution-part I & II. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 2010, 140(6): 1353–1388
- [12] Castillo J D, Serra I. Likelihood inference for generalized Pareto distribution. *Computational Statistics & Data Analysis*, 2015, 83: 116–128

-
- [13] Lee J, Fan Y, Sisson S A. Bayesian threshold selection for extremal models using measures of surprise. *Computational Statistics & Data Analysis*, 2015, 85: 84–99
 - [14] Babu G J, Toreti A. A goodness-of-fit test for heavy tailed distributions with unknown parameters and its application to simulated precipitation extremes in the Euro-Mediterranean region. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 2016, 174: 11–19
 - [15] Nadarajah S, Afuecheta E, Chan S. A double generalized Pareto distribution. *Statistics and Probability Letters*, 2013, 83: 2656–2663
 - [16] Park M H, Kim J H T. Estimating extreme tail risk measures with generalized Pareto distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, 2016, 98: 91–104
 - [17] Chen S, Li Y X, Kim J H, Kim S W. Bayesian change point analysis for extreme daily precipitation. *International Journal of Climatology*, 2017(37): 3123–3137
 - [18] Susan M, Waititu A G, Mwita P N. Change point analysis in the generalized Pareto distribution. 2019, 197.136.134.32
 - [19] Drees H, JanBen A, Resnick S I, Wang T D. On a minimum distance procedure for threshold selection in tail analysis. *SIAM Journal on Mathematics of Data Science*, 2020, 2(1): 75–102
 - [20] Dierckx G, Teugels J L. Change point analysis of extreme values. *Environmetrics*, 2010, 21: 661–686
 - [21] Meng R. Growth curve analysis and change-points detection in extremes. Doctoral dissertation, King Abdullah University of Science and Technology, 2016
 - [22] Safari M A M, Masseran N, Ibrahim K. Outliers detection for Pareto distributed data. *AIP Conference Proceedings*, 2018, 1940(1): 020119-1–020119-6
 - [23] Csörgő M, Horváth L. Limit theorems in change-point analysis. New York: John Wiley & Sons, 1997
 - [24] Smith R L. Maximum likelihood estimation in a class of nonregular cases. *Biometrika*, 1985, 72(1): 67–90
 - [25] Shorack G R. Probability for statisticians. Springer US, 2000
 - [26] Feller W. An introduction to probability theory and its applications. Volume I, Second Edition, New York: John Wiley & Sons, 1968
 - [27] Jarušková D. Maximum log-likelihood ratio test for a change in three parameter Weibull distribution. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 2007, 137: 1805–1815
 - [28] Rencová M. Change-point detection in temperature series. Doctoral dissertation. Prague: Czech Technical University, 2009
 - [29] 胡尧, 谌业文, 王旭琴, 刘伟. 广义 Pareto 分布变点检测重现期预测模型及其应用. 系统工程理论与实践, 2020, Doi: 10.12011/SETP2020-0098
(Hu Y, Chen Y W, Wang X Q, Liu W. Generalized Pareto distribution change point detection model and its application in modeling return period prediction. *Systems Engineering-theory & Practice*, 2020, Doi: 10.12011/SETP2020-0098)

A Likelihood Ratio Model for Change Point Detection of Generalized Pareto Distribution

HU YAO[†]

(School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang 550025, China)

(Guizhou Provincial Key Laboratory of Public Big Data, Guizhou University, Guiyang 550025, China)

([†]E-mail: yhu1@gzu.edu.cn)

CHEN YEWEI

(School of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510000, China)

(E-mail: chenyw20150908@163.com)

Abstract To detect state changes in extreme events, the generalized Pareto distribution (GPD) change point detection model was studied based on likelihood ratio method. This paper considered the testing problem of the GPD change point with three parameters, and proposed maximization likelihood ratio test statistics. The asymptotic distribution of test statistic was obtained by proving a series of limit properties of the log-likelihood of GPD after parameter transformation and the test statistic. We evaluated the finite sample properties of the proposed method through simulation studies. The case study also verified the feasibility of the proposed method.

Key words generalized Pareto distribution;
change point of parameter; change point detection;
likelihood ratio test statistic; traffic flow

MR(2000) Subject Classification 62F03; 62P05

Chinese Library Classification O212.1