离散数学

软件学院　韩春燕

课件及联系邮箱

- 课件下载：
  BlackBoard平台：**http://bb.neu.edu.cn**
  用户名：学号 密码：学号
- 邮箱：
  hancy@swc.neu.edu.com
- 办公地点：
  信息楼**B438**
- 办公电话：
  83656406

课程考核及教材、参考书

- **课程考核：**

平时测验**20%**、实验**20%**、期末**60%.**

- **教材：**

左孝凌，李为鑑，刘永才. 离散数学. 上海科学技术文献出版社，**2012-4.**

- **主要参考书**

1. K.H. Rosen. 离散数学及其应用. 原书第七版. 机械工业出版社，**2015-1.**

2. 屈婉玲，耿素云，张立昂. 离散数学. 清华大学出版社，**2014-1.**

课程的学时分配：（64学时）

课程内容	讲课	习题课	实验
第1章 命题逻辑	10	1	
第2章 谓词逻辑	8	1	4
第3章 集合论基础	4	0	
第4章 二元关系	12	2	
第5章 函数	3	1	
第6章 图论	12	2	4
合计	49	7	8

绪　　论

- 离散数学的性质、内容
- 学习此课的目的
- 学习此课的方法

一.此课的性质、内容：

- 数学所研究的对象根据它们的取值分为：

  连续的：如长度、温度、面积等。

  离散的：如商店商品，学生所学课程等。

- 离散数学是研究离散对象的结构以及它们之间相互关系的科学。

  因为计算机不论硬件还是软件都属于离散结构，所以它所应用的数学必是离散数学。

- 性质：此课是计算机科学与技术专业的重要的理论基础课，也是该专业的主干课。

- 内容：1. 数理逻辑（第一篇，1、2章）

  2. 集合论　　（第二篇，3，4，5章）

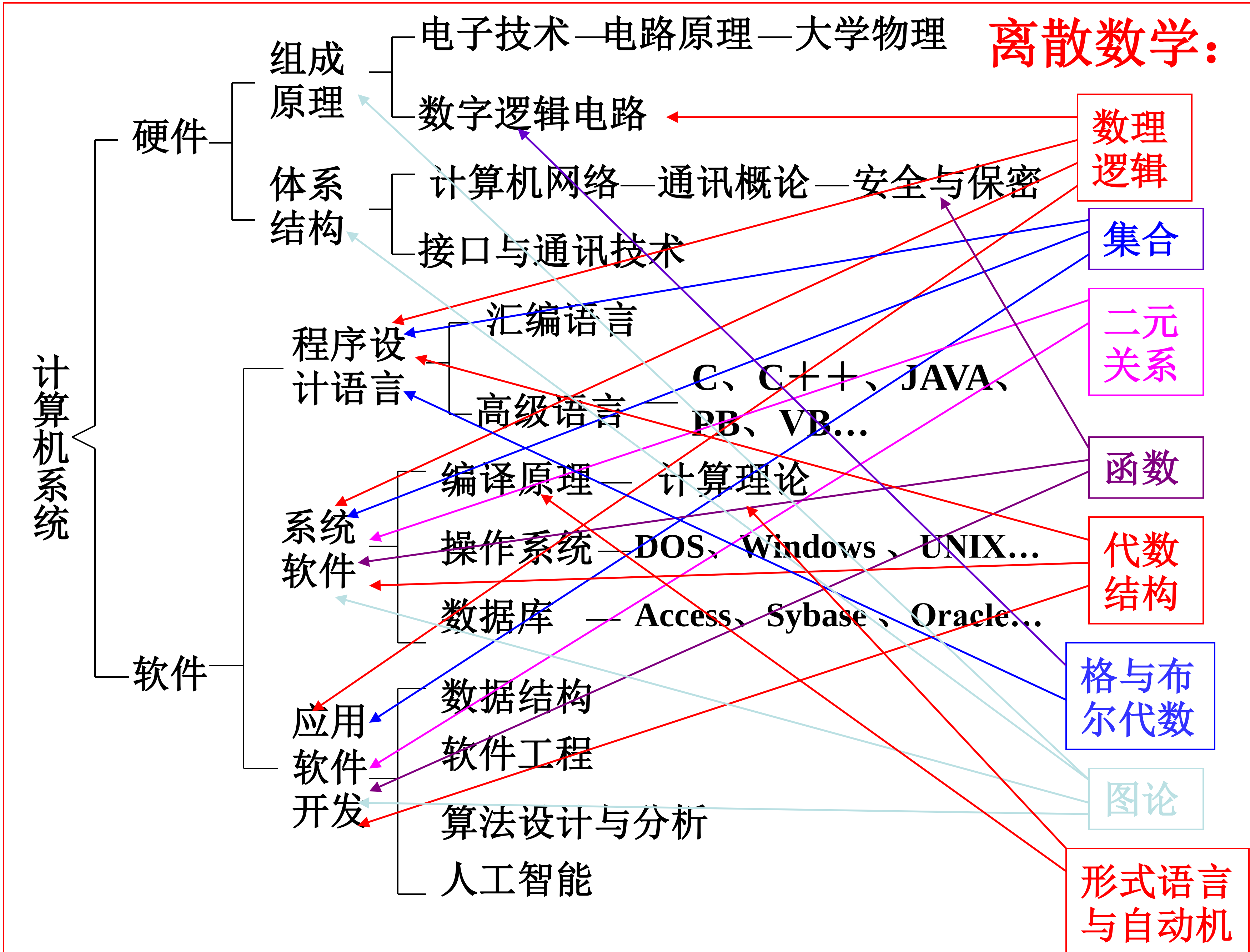
  *3. 代数系统（第三篇）

  4. 图论　　　（第四篇，6章）

  *5. 组合数学

  *6. 形式语言与自动机

  (由于时间的关系，我们只讨论第一、二、四篇的内容。)


离散数学：
计算机系统
硬件
组成原理
电子技术—电路原理—大学物理
数字逻辑电路
体系结构
计算机网络—通讯概论—安全与保密
接口与通讯技术
软件
程序设计语言
汇编语言
高级语言
C、C＋＋、JAVA、PB、VB…
系统软件
编译原理— 计算理论
操作系统—DOS、Windows 、UNIX…
数据库 — Access、Sybase 、Oracle…
应用软件开发
数据结构
软件工程
算法设计与分析
人工智能
数理逻辑
集合
二元关系
函数
代数结构
格与布尔代数
图论
形式语言与自动机

二.学习此课的目的：

1.计算机的诞生与发展和离散数学密切相关

- 正如马克思所说的：“**一门科学，只有当它能够运用数学时，才算真正发展了。**”
- 计算机的诞生：正是在离散数学中的图灵机的理论指导下诞生的(1936提出图灵机---1946诞生计算机)。
- 计算机硬件的发展：从第一代起现在发展到第四代(电子管→晶体管 →集成电路 →大规模集成电路)，第五代即将问世，正在向智能化、网络化发展。而且计算机技术发展速度越来越快。

- 计算机软件的发展：

  程序设计语言的发展，从机器语言→汇编语言→高级面向过程语言→面向对象语言→智能语言→…，

  系统软件的发展，如操作系统，从单用户→多用户→网络分布式操作系统，…，

  数据库、网络软件、开发工具软件、应用软件…
- 计算机应用越来越广，所有领域几乎无所不及。
- 计算机科学已发展成为一门一级学科。
- 计算机的产业已发展成为一个高科技的新兴产业。

- 所有这些发展都依赖于离散数学、数据结构、编译原理、操作系统、数据库原理、软件工程、网络等理论。其中离散数学是基础，其它的理论中都用到了离散数学中的基本概念、基本思想、基本方法。

这说明了理论常常可以导致实践方面的重大进展，即理论对实践的指导作用。

- 计算机专业的学生学习计算机不同于非计算机专业的学生学习计算机，必须掌握离散数学的理论，才能更好地了解和从事计算机科学的研究。

2.此课是主干课，也是后继课的基础课

计算机专业的后续课中都大量地应用到离散数学中的基本理论，所以要想学好专业课，必须先学好离散数学。

3.培养学生抽象思维和逻辑推理能力、创新能力

在大学学习知识很重要，但是能力的培养更重要。正如著名的物理学家劳厄所说：“重要的不是获得知识，而是发展思维能力。教育无非是一切已学过的东西都遗忘的时候，所剩下来的东西。”

剩下的就是思维能力，它可以长期起作用。

北京大学姜伯驹教授谈到数学时说："数学是学习科学技术的钥匙和先决条件。"

所以必须提高学生的数学修养(数学素质)。

数学修养包括：理解、抽象、见识、体验。

- 理解能力：逻辑推理能力、不同语言对应的转换能力、想象能力等。
- 抽象能力：敏锐的洞察力，灵活的联想类比、举一反三能力，特别是把实际问题转化为数学问题的能力。

- 见识：就是让学生见识一些重要的数学思想、数学方法以及用数学解决实际问题的著名事例。有了这样见识 才会思路宽，办法多，遇到问题会自觉求助于数学。
- 体验:数学是一种分析问题、解决问题的实践活动。与打猎一样是活本领。像转换观点、选择方法、熟悉软件、检验结果、发现毛病、查找原因多环节只有亲身经历才能学到手。

学到这些活本领，就是一些基本素质问题。

离散数学可以帮助学生提高数学素质。提高创造力。

三.此课的特点及学习方法：

- **特点**：内容较杂，概念多，定理多，比较抽象，给学习带来一定难度。
- **学习方法**：

  1.准确掌握每个概念(包括内涵及外延)。

  2.要有刻苦钻研精神,不断总结经验。

  3.在理解内容的基础上，要较多地做些习题，从而再进一步加深理解所学内容。

  4.注意培养分析问题和解决问题的能力。

第一篇　数理逻辑

- 逻辑--是研究人的思维的科学。
  它包含：
- 1.辩证逻辑：是研究人的思维中的辩证法。
  例如：用全面的和发展的观点观察事物；
  具体问题具体分析；
  实践是检查事物正误的唯一标准；等等。
- 2.形式逻辑：是研究人的思维的形式和一般规律。
- 这里我们只关心形式逻辑。

一 .形式逻辑

- 人的思维过程：
  概念 ⇒ 判断 ⇒ 推理
- 正确的思维：
  概念清楚，判断正确，推理合乎逻辑。
- 人们是通过各种各样的学习(理论学习和从实践中学习)来掌握许多概念和判断。
- 而形式逻辑主要是研究推理的。
- 推理：
  是由若干个已知的判断(**前提**)，推出新的判断(**结论**)的思维过程。

推理方法

- **类比推理：** 由个别事实推出个别结论。

  如：地球上有空气、水，地球上有生物。火星上有空气、水。

  ⇒火星上有生物。

- **归纳推理：** 由若干个别事实推出一般结论。

  如：铜能导电。铁能导电。锡能导电。铅能导电。……

  ⇒一切金属都导电。

- **演绎推理：** 由一般规律推出个别事实。

  形式逻辑主要是研究演绎推理的。

演绎推理　举例

- 例1：

  如果天下雨，则路上有水。　(一般规律)

  天下雨了。　(个别事实)

  推出结论：路上有水。　(个别结论)

- 例2：

  (大前提)：所有金属都导电。　(一般规律)

  (小前提)：铜是金属。　(个别事实)

  推出结论：铜能导电。　(个别结论)

二. 数理逻辑

- **数理逻辑**是用数学的方法研究形式逻辑。

  所谓“数学方法”：是建立一套有严格定义的符号，即建立一套形式语言，来研究形式逻辑。所以数理逻辑也称为“**符号逻辑**”。

- 用数学的方法研究形式逻辑，是由莱布尼兹(G.W.Leibniz, 1646-1716,德国)首先提出来的。所以莱布尼兹被认为是数理逻辑的创始人。
- 布尔(George Boole,1815-1864,英国) 和德.摩根(De Morgan, 1806-1876,英国)取得最初成果。

- 弗雷格 (G.Frege,1848-1925,德国) 、皮亚诺(G.Peano, 1883-1932,意大利)和罗素(B.Russell,1870-970,英国)建立了命题演算和谓词演算。突破了古典形式逻辑的局限性，形成了一个完整的逻辑体系。
- 希尔伯特(D.Hilbert,1862-1943,德国)和哥德尔(Kurt Gödel,1906-1978,美籍奥地利数学家)等人使得数理逻辑发展成为一门内容丰富的学科。

- 数理逻辑的主要内容：

  逻辑演算

  证明论

  公理集合论

  递归论

  模型论

  我们这里只涉及逻辑演算中“命题逻辑”和“谓词逻辑”。

  数理逻辑与数学的其它分支、计算机科学、人工智能、语言学等学科均有密切联系。

- 下面就前面两个例子，说明如何将推理符号化的。

数理逻辑把推理符号化之一

- 设 P表示：天下雨。
  设 Q表示：路上有水。
  设→表示：如果…则…

  例1的推理过程表示为：
  前提1：P→Q (如果天下雨,则路上有水。)
  前提2：P (天下雨了。)
  结 论：Q (路上有水。)
  (这就是第一章命题逻辑中要讨论的问题)

数理逻辑把推理符号化之二

- 设M(x)　：　x是金属。设C(x)：　x能导电。设∀x 表示：所有的x 。设 a　：　表示铜。

  例2的推理过程表示为：

  前提：$\forall x(M(x)\rightarrow C(x))$　(所有金属都导电)

  前提：$M(a)$　(铜是金属)

  结论：$C(a)$　(铜能导电)

  (其中符号M(x)是谓词，所以这就是第二章“谓词逻辑”中所讨论的内容.）

数理逻辑与计算机

使用计算机必须首先学会编“程序”，那么什么是程序？

程序＝算法＋数据

算法＝逻辑＋控制

可见“逻辑”对于编程序是多么重要。要想学好、使用好计算机，必须学习逻辑，此外，通过学习逻辑，掌握逻辑推理规律和证明方法，会培养学生的逻辑思维能力，提高证明问题的技巧。

钱学森谈“计算机与数理逻辑”

电子计算机与数理逻辑具有非常密切的关系。正是在数理逻辑中，把人类的推理过程分解成一些非常简单原始的、非常机械的动作，才使得用机器代替人类的推理的设想有了实现的可能。

有了电子计算机，使用它时，必须先进行程序设计，把整个推理、计算过程，丝毫不漏地考虑到，统统编入程序。

而机器则依次而运行；如稍有错误，将立即得到毫无意义的结果。可见必须有足够的数理逻辑的训练，熟悉推理过程的全部细节，才能从事程序设计。

此外，程序设计是一个很细致又很麻烦的工作，如何从事程序设计，如何防止在计算过程中出错，如何很快地发现这种错误而及时加以改正，都是程序设计理论(软件理论)中非常根本又非常重要的内容，大家都认为，这些内容都与数理逻辑息息相关。

正如著名的计算机软件大师迪杰斯特拉(E.W.Dijkstra)曾经说过：我现在年纪大了，搞了这么多年软件，错误不知犯了多少，现在觉悟了。我想，假如我早在数理逻辑上好好下点功夫的话，我就不会犯这么多错误。不少东西逻辑学家早就说过了，可是我不知道。要是我能年轻20岁的话，我就会回去学逻辑。

第一章　命题逻辑

- 这章是以“命题”为中心
- 主要讨论：
- 命题的表示、命题的演算
- 命题演算中的公式，及其应用
- 命题逻辑推理

1-1. 命题与命题的真值

- 本节主要讨论三个问题：
- 命题的概念
- 命题的真值
- 原子命题与复合命题

一. 命题的概念

命题是一个能确定是真的或是假的判断。（判断都是用陈述句表示）

例1-1.1　判定下面这些句子哪些是命题。

⑴ 2是个素数。

⑵ 雪是黑色的。

⑶ 2020年人类将到达火星。

⑷ 如果 a>b且b>c，则a>c 。（其中a,b,c都是确定的实数）

⑸ x+y<5

⑹ 请打开书！

⑺ 您去吗？

⑴⑵⑶⑷是命题

二.命题的真值

一个命题所作的判断有两种可能：是正确的判断或者**是错误的**判断。所以，一个命题的真值有两个：“真”或“**假**”。

真值为真:一个命题所作的判断与客观一致,则称该命题的真值为真,记作T (True)。

真值为**假**:一个命题所作的判断与客观不一致,则称该命题的真值为假,记作**F** (False)。

例1-1.1中(1)(4)的真值为真,(2)的真值为**假**,(3)暂时不能定，等到2020年底确定。

三．原子命题与复合命题

- 简单命题 (原子命题)：由最简单的陈述句构成的命题 (该句再不能分解成更简单的句子了)。通常用大写英文字母表示。

例1-1.1中的(1)、(2)、(3)是原子命题。

- 复合命题 (分子命题)：由若干个原子命题构成的命题。

例1-1.1中的(4)是由三个原子命题(a>b、b>c、a>c)构成的复合命题。

1-2　联结词

- 复合命题的构成：是用“联结词”将原子命题联结起来构成的。
- 归纳自然语言中的联结词，定义了六个逻辑联结词，分别是：
- (1) 否定“$\neg$”　　(2) 合取“$\wedge$”
  (3) 析取“$\vee$”　　(4) 异或“$\overline{\vee}$”
  (5) 蕴涵“$\rightarrow$”　　(6) 等价“$\leftrightarrow$”

一. 否定“¬”

表示：“…不成立”，“不…”。

用于：对一个命题**P**的否定，写成¬**P**，并读成“非**P**”。

¬**P**的真值：与**P**真值相反。

例**1-2.1**　**P**：**2**是素数。

¬**P**：**2**不是素数。

P	¬ P
F	T
T	F

二. 合取“∧”

表示：“并且”、“不但…而且…”、“既…又 …”“尽管…还… ”

例1-2.2 P：小王能唱歌。

Q：小王能跳舞。

P∧Q：小王能歌善舞。

P∧Q读成：P合取Q。

P∧Q的真值为真，当且仅当P和Q的真值均为真。

P	Q	P ∧ Q
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

三. 析取“$\vee$”、异或“$\overline{\vee}$”

- 表示“或者”
- “或者”有二义性，看下面两个例子：

  例1-2.3. 灯泡或者线路有故障。

  例1-2.4. 第一节课上数学或者上英语。

例3中的或者是可兼取的或。即析取“$\vee$”

例4中的或者是不可兼取的或，也称之为异或、排斥或。即“$\overline{\vee}$”.

1. 析取“∨”

P：灯泡有故障。

Q：线路有故障。

例3中的复合命题可表示为：

P∨Q，读成：P析取Q，

P或者Q。

P∨Q的真值为F，当且仅当P与Q均为F。

P	Q	P∨Q
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

2. 异或“$\overline{\vee}$”

P：第一节上数学。

Q：第一节上英语。

例4中的复合命题可写成

$P \overline{\vee} Q$，读成P异或Q。

$P \overline{\vee} Q$的真值为F，当且仅当P与Q的真值相同。

P	Q	$P \overline{\vee} Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

3.“异或”的另一种表示

- 异或是表示两个命题不可能同时都成立。
- 命题“第一节课上数学或者上英语。”
  可以解释为：
  “第一节课上数学而没有上英语或者第一节课上英语而没有上数学。”
  于是有：
  $P \bar{\vee} Q$ 与 $(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg P)$ 是一样的。
  实际应用中必须注意“或者”的二义性。

四．蕴涵（条件）“→”

- 表示“如果… 则 …”，
- 例1-2.5： P表示：缺少水分。

  Q表示：植物会死亡。
- $P \rightarrow Q$：如果缺少水分，植物就会死亡。
- $P \rightarrow Q$：也称之为蕴涵式，读成“P蕴涵Q”，“如果P则Q”。

  也说成P是$P \rightarrow Q$ 的前件，Q是$P \rightarrow Q$的后件。

  还可以说P是Q的充分条件，Q是P的必要条件。

关于充分条件和必要条件的说明：

- 充分条件：就是只要条件成立，结论就成立，则该条件就是充分条件。

  上例中，“缺少水分”就是“植物会死亡”的充分条件。在自然语言中表示充分条件的词有： 如果 …则… ， 只要… 就…，若…则…

- 必要条件：就是如果该条件不成立，那么结论就不成立, 则该条件就是必要条件。

  上例中，“植物死亡”就是“缺少水分”的必要条件(植物未死亡，一定不缺少水分)。

  在自然语言中表示必要条件的词有：只有 …才…； 仅当…，…； …, 仅当…。

P→Q的真值：

- P→Q的真值为假，当且仅当P为真，Q为假。注意：当前件P为假时，P→Q为T。

P 小王借钱不还	Q 我替他还	P → Q 我给小王担保
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

举例：

令：P：天气好。　Q：我去公园。

1.如果天气好，我就去公园。

2.只要天气好，我就去公园。

3.天气好，我就去公园。

4.仅当天气好，我才去公园。

5.只有天气好，我才去公园。

6.我去公园，仅当天气好。

命题1.、2.、3.写成：　$P \to Q$

命题4.、5.、6.写成：　$Q \to P$

可见“→”既表示充分条件（即前件是后件的充分条件）；也表示必要条件（即后件是前件的必要条件）。这一点要特别注意！！！它决定了哪个作为前件，哪个作为后件。

五. 等价（双条件）“↔”

- 表示“当且仅当”、“充分且必要”
- 例1-2.6：

  P：⊿ABC是等边三角形。

  Q：⊿ABC是等角三角形。

  P↔Q ：⊿ABC是等边三角形当且仅当它是等角三角形。

P↔Q的真值：

- P↔Q的真值为真，当且仅当P与Q的真值相同。

P	Q	P ↔ Q
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

本节小结：

- 要熟练掌握这五个联结词在自然语言中所表示的含义以及它们的真值表的定义。

P	Q	$P\land Q$	$P\lor Q$	$P\to Q$	$P\leftrightarrow Q$
F	F	F	F	T	T
F	T	F	T	T	F
T	F	F	T	F	F
T	T	T	T	T	T

- 特别要注意“或者”的二义性，即要区分给定的“或”是“可兼取的或”还是“不可兼取的或”。
- 特别要注意“→”的用法，它既表示“充分条件”也表示“必要条件”，即要弄清哪个作为前件，哪个作为后件。
- 课堂练习

- 练习：填空
- 已知$P \wedge Q$为T，则P为( )，Q为( )。
- 已知$P \vee Q$为F，则P为( )，Q为( )。
- 已知P为F，则$P \wedge Q$为( )。
- 已知P为T，则$P \vee Q$为( )。
- 已知$P \vee Q$为T，且P为F，则Q为( )。
- 已知$P \rightarrow Q$为F，则P为( )，Q为( )。
- 已知P为F，则$P \rightarrow Q$为( )。
- 已知Q为T，则$P \rightarrow Q$为( )。
- 已知 $\neg P \rightarrow \neg Q$为F，则P为( )， Q为( )。

- 已知P为T，　P$\rightarrow$Q为T，则Q为(　)。
- 已知$\neg$Q为T，P$\rightarrow$Q为T，则P为(　)。
- 已知P$\leftrightarrow$Q为T，P为T，则Q为(　).
- 已知P$\leftrightarrow$Q为F，P为T，则Q为(　).
- P$\leftrightarrow$P 的真值为(　).
- P$\rightarrow$P 的真值为(　)。

1-3 命题公式及命题符号化

一.常值命题与命题变元

- **常值命题**：即是我们前面所说的命题。它是有具体含义 (真值)的。例如："3是素数。" 就是常值命题。
- **命题变元**：用大写的英字母如P、Q等表示任何命题。称这些字母为命题变元。
- 对命题变元作**指派**(给命题变元一个**解释**)：将一个常值命题赋予命题变元的过程，或者是直接赋给命题变元真值"T"或"F"的过程。
- 注意：命题变元本身不是命题，只有给它一个解释，才变成命题。

二.合式公式（*wff*）(*well formed formulas*)

1.定义：

(1) 单个命题变元是个合式公式。

(2) 若A是合式公式，则$\neg A$是合式公式。

(3) 若A和B是合式公式，则$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \rightarrow B)$和$(A \leftrightarrow B)$都是合式公式。

(4) 当且仅当有限次地应用(1)，(2)，(3)所得到的含有命题变元、联结词和括号的符号串是**合式公式**。

- 注意这个定义是递归的。(1)是递归的基础，由(1)开始，使用(2)(3)规则，可以得到任意的合式公式。

- 这里所谓的合式公式可以解释为合法的命题公式之意，也称之为**命题公式**，有时也简称**公式**。
- 下面的式子不是合式公式：

  $P \wedge Q$， $P \neg \rightarrow R$， $P \vee Q \wedge R$
- 下面的式子才是合式公式：

  $(P \wedge Q)$，$(\neg P \rightarrow R)$，$((P \vee Q) \wedge R)$
- 按照合式公式定义最外层括号必须写。
- **约定**：为方便，最外层括号可以不写，上面的合式公式可以写成：

  $P \wedge Q$，$\neg P \rightarrow R$，$(P \vee Q) \wedge R$

2.命题公式的真值表

一个命题公式不是复合命题，所以它没有真值，但是给其中的所有命题变元作指派以后它就有了真值。可以以表的形式反应它的真值情况，例如命题公式：

$(\neg P \to Q) \vee Q$ 的真值表如下所示：

P	Q	$\neg P$	$\neg P \to Q$	$(\neg P \to Q) \vee Q$
F	F	T	F	F
F	T	T	T	T
T	F	F	T	T
T	T	F	T	T

- 由于对每个命题变元可以有两个真值(T,F)被指派，所以有n个命题变元的命题公式 $A(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ 的真值表有2^n行。
- 为有序地列出$A(P_1,P_2,\ldots,P_n)$的真值表，可将F看成0、T看成1，按二进制数次序列表。

如A(P,Q)的真值表可按照如下次序指派：

00(FF)，01(FT)，10(TF)，11(TT)

如A(P,Q,R)的真值表可按照如下次序指派：

0	1	2	3	4	5	6	7
000	001	010	011	100	101	110	111
FFF	FFT	FTF	FTT	TFF	TFT	TTF	TTT

$A(P_1,P_2,\ldots,P_n)$的真值表，按照二进制数

0…000	0…001	0…010	…	1…110	1…111
0	1	2	…	2^n-2	2^n-1

(即按照十进制的0,1,2,…. ,2^n-1的次序进行指派列真值表)。

- 例如列出P→(Q→R)的真值表

	P	Q	R	Q→R	P→(Q→R)
000	F	F	F	T	T
001	F	F	T	T	T
010	F	T	F	F	T
011	F	T	T	T	T
100	T	F	F	T	T
101	T	F	T	T	T
110	T	T	F	F	F
111	T	T	T	T	T

三. *命题符号化*

所谓命题符号化，就是用命题公式的符号串来表示给定的命题。

- 命题符号化的方法

1. 首先要明确给定命题的含义。
2. 对于复合命题，找联结词，用联结词断句，分解出各个原子命题。
3. 设原子命题符号，并用逻辑联结词联结原子命题符号，构成给定命题的符号表达式。

例1.说离散数学无用且枯燥无味是不对的。

P：离散数学是有用的。

Q：离散数学是枯燥无味的。

该命题可写成：$\neg(\neg P \wedge Q)$

例2.如果小张与小王都不去，则小李去。

P：小张去。　Q：小王去。　R：小李去。

该命题可写成：$(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow R$

如果小张与小王不都去，则小李去。

该命题可写成：$\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$

也可以写成：$(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow R$

- 例3. 仅当天不下雨且我有时间，才上街。

  P：天下雨。Q：我有时间。R：我上街。

  分析：由于“仅当”是表示“必要条件”的，既“天不下雨且我有时间”，是“我上街”的必要条件。所以

  该命题可写成： $R\rightarrow(\neg P\wedge Q)$

- 例4.人不犯我，我不犯人；人若犯我，我必犯人。

  P：人犯我。Q：我犯人。

  该命题可写成：$\underbrace{(\neg P\rightarrow\neg Q)}_{\text{P是Q的必要条件}}\wedge\underbrace{(P\rightarrow Q)}_{\text{P是Q的充分条件}}$

  或写成： $\underbrace{P\leftrightarrow Q}_{\text{P是Q的充分且必要条件}}$

- 例5 .若天不下雨，我就上街；否则在家。

  P：天下雨。Q ：我上街。R：我在家。

  该命题可写成： $(\neg P\rightarrow Q)\wedge(P\rightarrow R)$.

  注意：中间的联结词一定是“$\wedge$”，而不是“$\vee$”，也不是“$\bar{\vee}$ ”。

  因为原命题表示：“天不下雨时我做什么，天下雨我又做什么”的两种作法，其中有一种作法是假的，则我说的就是假话，所以中间的联结词一定是“$\wedge$ ”。

  如果写成 $(\neg P\rightarrow Q)\vee(P\rightarrow R)$，就表明两种作法都是假的时候，我说的才是假话。这显然不对。

实际上公式$(\neg P\to Q)\vee(P\to R)$ 的真值总是真的。
因为当P为T时，$(\neg P\to Q)$为T，

当P为F时，$(P\to R)$为T，

所以$(\neg P\to Q)\vee(P\to R)$ 的真值总是真的。
而例5中命题的真值不是总是真的。

若写成$(\neg P\to Q)\ \overline{\vee}\ (P\to R)$时，当P为F，Q为F时，即天没下雨而我没上街，此时我说的是假话，此时$(\neg P\to Q)$ 是F，而$(P\to R)$的真值是“T”。

于是表达式$(\neg P\to Q)\ \overline{\vee}\ (P\to R)$ 的真值是“T”。

所以这个表达式也不对。

- 本节重点掌握：

  列命题公式的真值表

  将给定命题符号化

- 作业题：

  第 8 页：（3）

  第12页：（5）、（7）

  第17页：（1）a)、d)

1-4 重言式与重言蕴涵式(Implication)

一.重言式(永真式)与矛盾式(永假式)

1.例子:

P	¬P∨P	¬P∧P
F	T	F
T	T	F

可见不论P取什么真值¬P∨P 的真值总是为真，¬P∧P的真值总是为假。故称¬P∨P为重言式(永真式)，称¬P∧P为矛盾式(永假式)。

2 .重言式(矛盾式)定义

$A(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ 是含有命题变元$P_1,P_2,\ldots,P_n$的命题公式，如不论对$P_1, P_2, \ldots, P_n$作任何指派，都使得$A(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ 为**真**(**假**)，则称之为**重言式**(**矛盾式**), 也称之为**永真式** (**永假式**)。

3.重言式的证明方法

方法1：列真值表。

方法2：公式的等价变换，化简成 “T”。

方法3：用公式的主析取范式。

- 其中方法2 和方法3 我们在以后讨论。

方法1. 列真值表。

例如，证明 $(P\wedge(P\rightarrow Q))\rightarrow Q$ 为重言式。

注：永真式真值表的最后一列全是“T”。

P	Q	$P\rightarrow Q$	$P\wedge(P\rightarrow Q)$	$(P\wedge(P\rightarrow Q))\rightarrow Q$
F	F	T	F	T
F	T	T	F	T
T	F	F	F	T
T	T	T	T	T

4. 永真式的性质

1).如果A是永真式，则$\neg$A是永假式。

2).如果A，B是永真式，则(A$\wedge$B)、(A$\vee$B)、(A$\rightarrow$B)和(A$\leftrightarrow$B)也都是永真式。

3).如果A是永真式，则A的置换例式也是永真式。

置换例式： $A(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ 是含有命题变元$P_1,P_2,\ldots,P_n$的命题公式，如果用合式公式X替换某个P_i(如果P_i在$A(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ 中多处出现，则各处均用X替换)，其余变元不变，替换后得到新的公式B，则称B是$A(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ 的置换例式。

- 例如：

  公式A：$P\vee(\neg P\wedge((P\to Q)\leftrightarrow R))$

  用$(D\to E)$替换A中P得到A的置换例式 B：

  $(D\to E)\vee(\neg(D\to E)\wedge(((D\to E)\to Q)\leftrightarrow R))$

- 如果A是永真式，例如A为$\neg P\vee P$，用$(D\to E)$替换A中P，得到A的置换例式 B：$\neg(D\to E)\vee(D\to E)$，

  显然B也是永真式。

- 如果可以断定给定公式是某个永真式的置换例式的话，则这个公式也是永真式。

二.重言(永真)蕴涵式

有些重言(永真)式，如$(P\wedge(P\rightarrow Q))\rightarrow Q$，公式中间是“$\rightarrow$”联结词，是很重要的，称之为重言蕴涵式。

1.定义：如果公式$A\rightarrow B$是重言式，则称**A重言(永真)蕴涵 B**，记作$\mathbf{A\Rightarrow B}$。

上式可以写成　$(P\wedge(P\rightarrow Q))\Rightarrow Q$

注意：符号“$\Rightarrow$”不是联结词，它是表示公式间的“永真蕴涵”关系，也可以看成是“推导”关系。即$A\Rightarrow B$可以理解成由**A可推出B**，即由A为真，可以推出B也为真。

2.重言(永真)蕴涵式证明方法

方法1. 列真值表。(即列永真式的真值表)这里就不再举例了。

下面讨论另外两种方法。

先看一看A→B的真值表，如果A→B为永真式，则真值表的第三组指派不会出现。于是有下面两种证明方法。

A	B	A→B
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

方法2.假设前件为真，推出后件也为真。

例如求证：

$$((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$$

证明:设前件$((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为真

则$((A \wedge B) \to C)$、$\neg D$、$(\neg C \vee D)$均真，

$\neg D$为T，则D为F

$\neg C \vee D$为T　　得C为F

$((A \wedge B) \to C\ )$为T　　得A∍B为F

如果A为F，则$\neg A$为T，所以$\neg A \vee \neg B$为T。

如果B为F，则$\neg B$为T，所以$\neg A \vee \neg B$ 为T。

$$\therefore ((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$$

方法3.假设后件为假，推出前件也为假。

例如求证：

$$((A\wedge B)\to C)\wedge\neg D\wedge(\neg C\vee D) \Rightarrow \neg A\vee\neg B$$

证明:假设后件$\neg A\vee\neg B$为F,则A与B均为T。

1.如C为F，则$(A\wedge B)\to C$为F，所以
  前件$((A\wedge B)\to C)\wedge\neg D\wedge(\neg C\vee D)$ 为F。

2.如C为T，则(1)若D为T，则$\neg D$为F，所以
  前件$((A\wedge B)\to C)\wedge\neg D\wedge(\neg C\vee D)$ 为假；
  (2)若D为F，则$\neg C\vee D$为F，所以
  前件$((A\wedge B)\to C)\wedge\neg D\wedge(\neg C\vee D)$ 为假。

$$\therefore((A\wedge B)\to C)\wedge\neg D\wedge(\neg C\vee D) \Rightarrow \neg A\vee\neg B$$

3.重要的重言蕴涵式(如教材第43页所示)

I_1. $P \wedge Q \Rightarrow P$

I_2. $P \wedge Q \Rightarrow Q$

I_3. $P \Rightarrow P \vee Q$

I_4. $Q \Rightarrow P \vee Q$

I_5. $\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$

I_6. $Q \Rightarrow P \rightarrow Q$

I_7. $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$

I_8. $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$

I_9. $P, Q \Rightarrow P \wedge Q$

I_{10}. $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$

I_{11}. $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$

I_{12}. $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$

I_{13}. $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$

I_{14}. $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow R$

I_{15}. $A \rightarrow B \Rightarrow (A \vee C) \rightarrow (B \vee C)$

I_{16}. $A \rightarrow B \Rightarrow (A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C)$

上述公式的证明都比较简单，可以用假设前件为T，推出后件也为T的方法证明。

- 4. 性质

1).有自反性：对任何命题公式A，有A⇒A

2).有传递性：若A⇒B且B⇒C，则A⇒C

3).有反对称性：若A⇒B且B⇒A，则A⇔B

符号“⇔”表示“等价”。

- 本节重点掌握：永真式及永真蕴涵式的定义、证明方法、以及常用的公式。
- **作业：第23页: (2) b) 、(6)、(8) e)**

1–5 等价公式(Equivalent)

1. 例子 看下面三个公式的真值表

P	Q	$P\rightarrow Q$	$\neg P\vee Q$	$\neg Q\rightarrow\neg P$
F	F	T	T	T
F	T	T	T	T
T	F	F	F	F
T	T	T	T	T

从真值表可以看出，不论对P、Q作何指派，都使得$P\rightarrow Q$、$\neg P\vee Q$和$\neg Q\rightarrow\neg P$的真值相同，表明它们之间彼此等价。

2. 定义：A、B是含有命题变元$P_1, P_2, \ldots, P_n$的命题公式，如不论对$P_1, P_2, \ldots, P_n$作任何指派，都使得A和B的真值相同，则称之为A与B等价，记作$A \Leftrightarrow B$。

显然 $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$

3. 重要的等价公式

(1) 对合律 $\neg\neg P \Leftrightarrow P$

(2) 幂等律 $P \vee P \Leftrightarrow P$ $P \wedge P \Leftrightarrow P$

(3) 结合律 $P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$

$P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$

(4)交换律 $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$

(5)分配律 $P\vee(Q\wedge R)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$

$P\wedge(Q\vee R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$

(6) 吸收律 $P\vee(P\wedge Q)\Leftrightarrow P$ $P\wedge(P\vee Q)\Leftrightarrow P$

(7)底-摩根定律 $\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q$

$\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$

(8) 同一律 $P\vee F\Leftrightarrow P$ $P\wedge T\Leftrightarrow P$

(9) 零律 $P\vee T\Leftrightarrow T$ $P\wedge F\Leftrightarrow F$

(10) 互补律 $P\vee\neg P\Leftrightarrow T$ $P\wedge\neg P\Leftrightarrow F$

(11) $P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$

(12) $P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg Q\rightarrow\neg P$

(13) $P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$

(14) $P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)$

(15) $P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$

- 为便于记忆，将等价公式(前10个)与集合论的公式比较，请看集合公式：

(1) 对合律 $\sim\sim A \Leftrightarrow A$　　$\sim A$表示A的绝对补集

(2) 幂等律 $A \cup A \Leftrightarrow A$　　$A \cap A \Leftrightarrow A$

(3) 结合律 $A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) \Leftrightarrow (A \cap B) \cap C$

(4) 交换律 $A \cup B \Leftrightarrow B \cup A$　　$A \cap B \Leftrightarrow B \cap A$

(5) 分配律 $A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(6) 吸收律 $A \cup (A \cap B) \Leftrightarrow A$　　$A \cap (A \cup B) \Leftrightarrow A$

(7) 底-摩根定律 $\sim(A \cup B) \Leftrightarrow \sim A \cap \sim B$

$\sim(A \cap B) \Leftrightarrow \sim A \cup \sim B$

(8) 同一律 $A \cup \Phi \Leftrightarrow A$　　$A \cap E \Leftrightarrow A$　　E表示全集

(9) 零律 $A \cup E \Leftrightarrow E$　　$A \cap \Phi \Leftrightarrow \Phi$

(10) 否定律 $A \cup \sim A \Leftrightarrow E$　　$A \cap \sim A \Leftrightarrow \Phi$

4. 等价公式的证明方法

- 方法1：用列真值表。（不再举例）
- 方法2：用公式的等价变换.(用置换定律)
- **置换定律**:A是一个命题公式，X是A中的一部分且也是合式公式，如果X⇔Y，用Y代替A中的X得到公式B，则A⇔B。
- 应用置换定律以及前面列出的等价公式可以对给定公式进行等价变换。

例题1. 求证吸收律 $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$

证明： $P \wedge (P \vee Q)$

$\Leftrightarrow (P \vee F) \wedge (P \vee Q)$ (同一律)

$\Leftrightarrow P \vee (F \wedge Q)$ (分配律)

$\Leftrightarrow P \vee F$ (零律)

$\Leftrightarrow P$ (同一律)

例题2. 求证 $(\neg P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$

证明 $(\neg P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee (P \wedge Q)$ (公式E_{16})

$\Leftrightarrow (\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$ (摩根定律)

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$ (对合律)

$\Leftrightarrow P \wedge (\neg Q \vee Q)$ (分配律)

$\Leftrightarrow P \wedge T$ (互补律)

$\Leftrightarrow P$ (同一律)

公式E_{16}： $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

例题3.化简$\neg(P\wedge Q)\rightarrow(\neg P\vee(\neg P\vee Q))$

解　原公式

$\Leftrightarrow\neg\neg(P\wedge Q)\vee((\neg P\vee\neg P)\vee Q)$　(E_{16},结合)

$\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(\neg P\vee Q)$　　(对合律，幂等律)

$\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(Q\vee\neg P)$　　(交换律)

$\Leftrightarrow((P\wedge Q)\vee Q)\vee\neg P$　　(结合律)

$\Leftrightarrow Q\vee\neg P$　　(吸收律)

公式E_{16}：$P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$

5. 性质

1).有自反性：任何命题公式A，有$A \Leftrightarrow A$。

2).有对称性：若$A \Leftrightarrow B$，则$B \Leftrightarrow A$

3).有传递性：若$A \Leftrightarrow B$且$B \Leftrightarrow C$，则$A \Leftrightarrow C$

4).如果$A(P_1,P_2,\ldots,P_n) \Leftrightarrow B(P_1,P_2,\ldots,P_n)$，则

$A(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n) \Leftrightarrow B(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n)$

例 $A(P,Q) \Leftrightarrow P \to Q$ $\quad$ $B(P,Q) \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

有 $A(P,Q) \Leftrightarrow B(P,Q)$

$A(\neg P,\neg Q) \Leftrightarrow \neg P \to \neg Q$

$B(\neg P, \neg Q) \Leftrightarrow P \vee \neg Q$

可见$A(\neg P,\neg Q) \Leftrightarrow B(\neg P, \neg Q)$

6.等价公式的对偶性

从前面列出的等价公式看出，有很多是成对出现的。这就是等价公式的对偶性。

(1)**对偶式**：在一个只含有联结词 $\neg$、$\vee$、$\wedge$ 的公式A中，将 $\vee$ 换成 $\wedge$， $\wedge$ 换成 $\vee$， T换成F，F换成T，其余部分不变，得到另一个公式A*，称A与A*互为对偶式。

例如：

A	A*
P	P
$\neg Q \wedge R$	$\neg Q \vee R$
$(P \vee T) \wedge \neg Q$	$(P \wedge F) \vee \neg Q$

(2)用对偶式求公式的否定

定理1-5.1 令$A(P_1,P_2,\ldots,P_n)$是一个只含有联结词$\neg$、$\vee$、$\wedge$的命题公式，则

$$\neg A(P_1,P_2,\ldots,P_n)\Leftrightarrow A^*(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n)$$

此定理可以反复地使用底-摩根定律得以证明。下面我们验证一下。

令 $A(P,Q)\Leftrightarrow P\vee Q$ $\quad A^*(P,Q)\Leftrightarrow P\wedge Q$

$$\neg A(P,Q)\Leftrightarrow\neg(P\vee Q)$$

$$A^*(\neg P,\neg Q)\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q$$

可见 $\neg A(P,Q)\Leftrightarrow A^*(\neg P,\neg Q)$

推论:$A(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n)\Leftrightarrow\neg A^*(P_1,P_2,\ldots,P_n)$

例如，利用上述求公式的否定公式求

$\neg(((P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q))\vee R)$

$\Leftrightarrow((\neg P\vee\neg Q)\wedge(\neg P\vee Q))\wedge\neg R$

(3)对偶原理(定理1-5.2)：

令$A(P_1,P_2,\ldots,P_n)$、$B(P_1,P_2,\ldots,P_n)$是只含有联结词$\neg$、$\vee$、$\wedge$的命题公式，则如果

$A(P_1,P_2,\ldots,P_n) \Leftrightarrow B(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ 则

$A^*(P_1,P_2,\ldots,P_n) \Leftrightarrow B^*(P_1,P_2,\ldots,P_n)$

证明：因为 $A(P_1,P_2,\ldots,P_n) \Leftrightarrow B(P_1,P_2,\ldots,P_n)$

故 $A(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n) \Leftrightarrow B(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n)$

而 $A(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1,P_2,\ldots,P_n)$

$B(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n) \Leftrightarrow \neg B^*(P_1,P_2,\ldots,P_n)$

故 $\neg A^*(P_1,P_2,\ldots,P_n) \Leftrightarrow \neg B^*(P_1,P_2,\ldots,P_n)$

所以 $A^*(P_1,P_2,\ldots,P_n) \Leftrightarrow B^*(P_1,P_2,\ldots,P_n)$

下面我们验证一下对偶原理：

$$\underbrace{P\vee(Q\wedge R)}_{A}\Leftrightarrow\underbrace{(P\vee Q)\wedge(P\vee R)}_{B}$$

$$\underbrace{P\wedge(Q\vee R)}_{A^*}\Leftrightarrow\underbrace{(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)}_{B^*}$$

$$\underbrace{P\vee T}_{A}\Leftrightarrow\underbrace{T}_{B}$$

$$\underbrace{P\wedge F}_{A^*}\Leftrightarrow\underbrace{F}_{B^*}$$

本节要求掌握等价公式的证明方法及记忆公式。

作业：第19页 (7) f) g) ，(8) c)

1-6. 范式 (Paradigm)

范式就是命题公式形式的规范形式。这里约定在范式中 只含有联结词¬、∨和∧。

一.析取范式与合取范式

1. *合取式与析取式*

合取式：是用"∧"联结命题变元或变元的否定构成的式子。

如 P、¬P、P∧¬Q、P∧¬Q∧¬R

析取式：是用"∨" 联结命题变元或变元的否定构成的式子。

如 P、¬P、P∨¬Q、P∨¬Q∨¬R

注:∵ P∨P⇔P P∧P⇔P ∴P是合(析)取式.

2. *析取范式*

公式A如果写成如下形式：

$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ $(n \geq 1)$ 其中每个A_i $(i=1,2,\ldots,n)$是合取式，称之为A的**析取范式**。

3. *合取范式*

公式A如果写成如下形式：

$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ $(n \geq 1)$ 其中每个A_i $(i=1,2,\ldots,n)$是析取式，称之为A的**合取范式**。

例如，$P \leftrightarrow Q$ 的析取范式与合取范式：

$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$----析取范式

$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$----合取范式

4.*析取范式与合取范式的写法*

(1)先用相应的公式去掉→和↔。

公式E_{16}　$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

公式E_{21}　$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

公式E_{20}　$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$

再用E_{16}　$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$

(2)用公式的否定公式或摩根定律将¬后移到命题变元之前。

$$\neg A(P_1,P_2,\ldots,P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n)$$

底-摩根定律　$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

(3)用分配律、幂等律等公式进行整理，使之成为所要求的形式。

例如求$(P\leftrightarrow Q)\rightarrow R$的析取范式与合取范式

$$(P\leftrightarrow Q)\rightarrow R$$

$$\Leftrightarrow\neg((\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q))\vee R$$

$$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee R$$ ------析取范式

$$(P\leftrightarrow Q)\rightarrow R\Leftrightarrow\neg((P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q))\vee R$$

$$\Leftrightarrow((\neg P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q))\vee R$$

$$\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee R)$$ ---合取范式

二.主析取范式与主合取范式

一个公式的析取范式与合取范式的形式是不唯一的。下面定义形式唯一的主析取范式与主合取范式。

㈠主析取范式

1.小项

(1)定义：在一个有n个命题变元的合取式中，每个变元必出现且仅出现一次，称这个合取式是个小项。

例如，有两个变元的小项：

$P\wedge Q$、$P\wedge\neg Q$、$\neg P\wedge Q$、$\neg P\wedge\neg Q$

(2)小项的性质

			m_3	m_2	m_1	m_0
	P	Q	$P\land Q$	$P\land\neg Q$	$\neg P\land Q$	$\neg P\land\neg Q$
00	F	F	F	F	F	T
01	F	T	F	F	T	F
10	T	F	F	T	F	F
11	T	T	T	F	F	F

a).有**n**个变元，则有2^n个小项。

b).每一组指派有且只有一个小项为**T**。

为了记忆方便，可将各组指派对应的为**T**的小项分别记作$m_0, m_1, m_2, \ldots, m_{2^n-1}$ 上例中

$m_0 \Leftrightarrow \neg P\land\neg Q$　　　$m_1 \Leftrightarrow \neg P\land Q$

$m_2 \Leftrightarrow P\land\neg Q$　　　$m_3 \Leftrightarrow P\land Q$

2. 主析取范式定义

析取范式 $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$，其中每个$A_i$ (i=1,2,…,n)都是小项，称之为**主析取范式**。

3. 主析取范式的写法

方法Ⅰ：列真值表

(1)列出给定公式的真值表。

(2)找出真值表中每个“T”对应的小项。

(如何根据一组指派写对应的为“T”的项：如果变元P被指派为T，P在小项中以P形式出现；如变元P被指派为F,P在小项中以¬P形式出现(**要保证该小项为T**))。

(3)用“∨”联结上述小项，即可。

例如求 $P\rightarrow Q$和$P\leftrightarrow Q$的主析取范式

P	Q	$P\rightarrow Q$	$P\leftrightarrow Q$
F	F	T	T
F	T	T	F
T	F	F	F
T	T	T	T

$$P\rightarrow Q \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3$$
$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$$

$$P\leftrightarrow Q \Leftrightarrow m_0 \vee m_3$$
$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$$

思考题:永真式的主析取范式是什么样？

方法Ⅱ：用公式的等价变换

(1)先写出给定公式的析取范式

$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$。

(2)为使每个A_i都变成小项，对缺少变元的A_i补全变元，比如缺变元R，就用$\wedge$联结永真式$(R \vee \neg R)$形式补R。

(3)用分配律等公式加以整理。

$$
\begin{aligned}
&P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q \\
&\Leftrightarrow (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q)) \vee ((P \vee \neg P) \wedge Q) \\
&\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \\
&\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)
\end{aligned}
$$

(二)主合取范式

1.大项

(1)定义:在有n个命题变元的析取式中，每个变元必出现且仅出现一次,称之为**大项**。

例如，有两个变元的大项及其真值表:

		M_0	M_1	M_2	M_3
P	Q	$P \vee Q$	$P \vee \neg Q$	$\neg P \vee Q$	$\neg P \vee \neg Q$
F	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T
T	F	T	T	F	T
T	T	T	T	T	F

(2)大项的性质

a).有n个变元，则有2^n个大项。

b).每一组指派有且只有一个大项为**F**。

为了记忆方便，可将各组指派对应的为**F**的大项分别记作$M_0,M_1,M_2,\ldots,M_{2^n-1}$。

上例中：

$M_0 \Leftrightarrow P \vee Q$ $\qquad$ $M_1 \Leftrightarrow P \vee \neg Q$

$M_2 \Leftrightarrow \neg P \vee Q$ $\qquad$ $M_3 \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

2.主合取范式定义

合取范式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$, 其中每个 A_i $(i=1,2,\ldots,n)$都是大项，称之为**主合取范式**。

3.主合取范式的写法

方法Ⅰ：列真值表

(1)列出给定公式的真值表。

(2)找出真值表中每个“F”对应的大项。

如何根据一组指派写对应的为“F”的大项：

如果变元P被指派为F，P在大项中以P形式出现；

如果变元P被指派为T，P在大项中以¬P形式出现(确保该大项为F)。

(3)用“∧”联结上述大项，即可。

例如求 P→Q和P↔Q的主合取范式

P	Q	P→Q	P↔Q
F	F	T	T
F	T	T	F
T	F	F	F
T	T	T	T

$P \to Q \Leftrightarrow M_2 \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow M_1 \wedge M_2$

$\Leftrightarrow (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$

课堂练习：

1.已知A(P,Q,R)的真值表如图：

求它的主析取和主合取范式。

P	Q	R	**A(P,Q,R)**
F	F	F	T
F	F	T	F
F	T	F	F
F	T	T	T
T	F	F	T
T	F	T	F
T	T	F	T
T	T	T	T

2.已知A(P,Q,R)的主析取范式中含有下面小项m_1, m_3, m_5, m_7求它的主合取范式.

3.已知$A(P_1,P_2,\ldots,P_n)$的主合取范式中含有k个大项，问它的主析取范式中有多少个小项？

练习答案：

1.A(P,Q,R)的主析取范式：

$A(P,Q,R) \Leftrightarrow m_0 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_6 \vee m_7$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

A(P,Q,R)的主合取范式：

$A(P,Q,R) \Leftrightarrow M_1 \wedge M_2 \wedge M_5$

$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$

2. $A(P,Q,R) \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_6$

$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

3. $A(P_1,P_2,\ldots,P_n)$的主析取范式中含有2^n-k个小项.

方法Ⅱ：用公式的等价变换

(1)先写出给定公式的合取范式

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$$ 。

(2)为使每个A_i变成大项，对缺少变元的析取式A_i补全变元，比如缺变元R，就用∨联结永假式$(R \wedge \neg R)$形式补R。

(3)用分配律等公式加以整理。

例如，求$(P\to Q)\to R$的主合取范式

$$(P\to Q)\to R$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg P\vee Q)\vee R$$

$$\Leftrightarrow (P\wedge\neg Q)\vee R$$

$$\Leftrightarrow (P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)$$

$$\Leftrightarrow (P\vee(Q\wedge\neg Q)\vee R)\wedge((P\wedge\neg P)\vee\neg Q\vee R)$$

$$\Leftrightarrow (P\vee Q\vee R)\wedge (P\vee\neg Q\vee R)\wedge$$
$$(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$$

$$\Leftrightarrow (P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge$$
$$(\neg P\vee\neg Q\vee R)$$

三.范式的应用

范式在逻辑设计方面有广泛的应用。

例1.加法器的设计，有两个n位二进制数a,b相加和为s(s=a+b)，a,b分别写成：

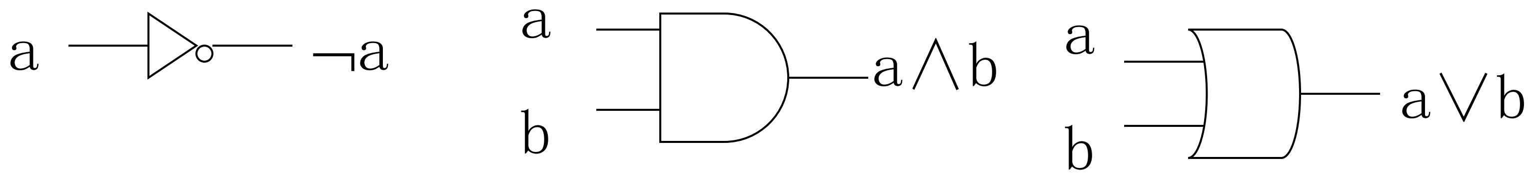
$$
\begin{array}{rl}
 & a=a_n\ a_{n-1}\cdots a_i\ \cdots\ a_2 a_1, \\
+ & b=b_n\ b_{n-1}\cdots b_i\ \cdots\ b_2 b_1 \\
 & c_n\ c_{n-1} c_{n-2}\cdots c_{i-1}\cdots c_1 \\
\hline
 & s=c_n\ s_n\ \ s_{n-1}\cdots s_i\ \cdots\ s_2\ s_1
\end{array}
$$

其中s_i是第i位a_i、b_i及c_{i-1} (c_{i-1}是第i-1位向第i位的进位) 的和，s_i是a_i、b_i及c_{i-1}的函数, 进位c_i也是a_i 、b_i及c_{i-1}的函数, 分别写成$s_i(a_i,b_i,c_{i-1})$，$c_i(a_i,b_i,c_{i-1})$。它们与a_i,b_i,c_{i-1}的关系如下表：

a_i	b_i	c_{i-1}	$s_i(a_i,b_i,c_{i-1})$	$c_i(a_i,b_i,c_{i-1})$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

在电路逻辑设计中用如下逻辑部件：

非门　与门　或门



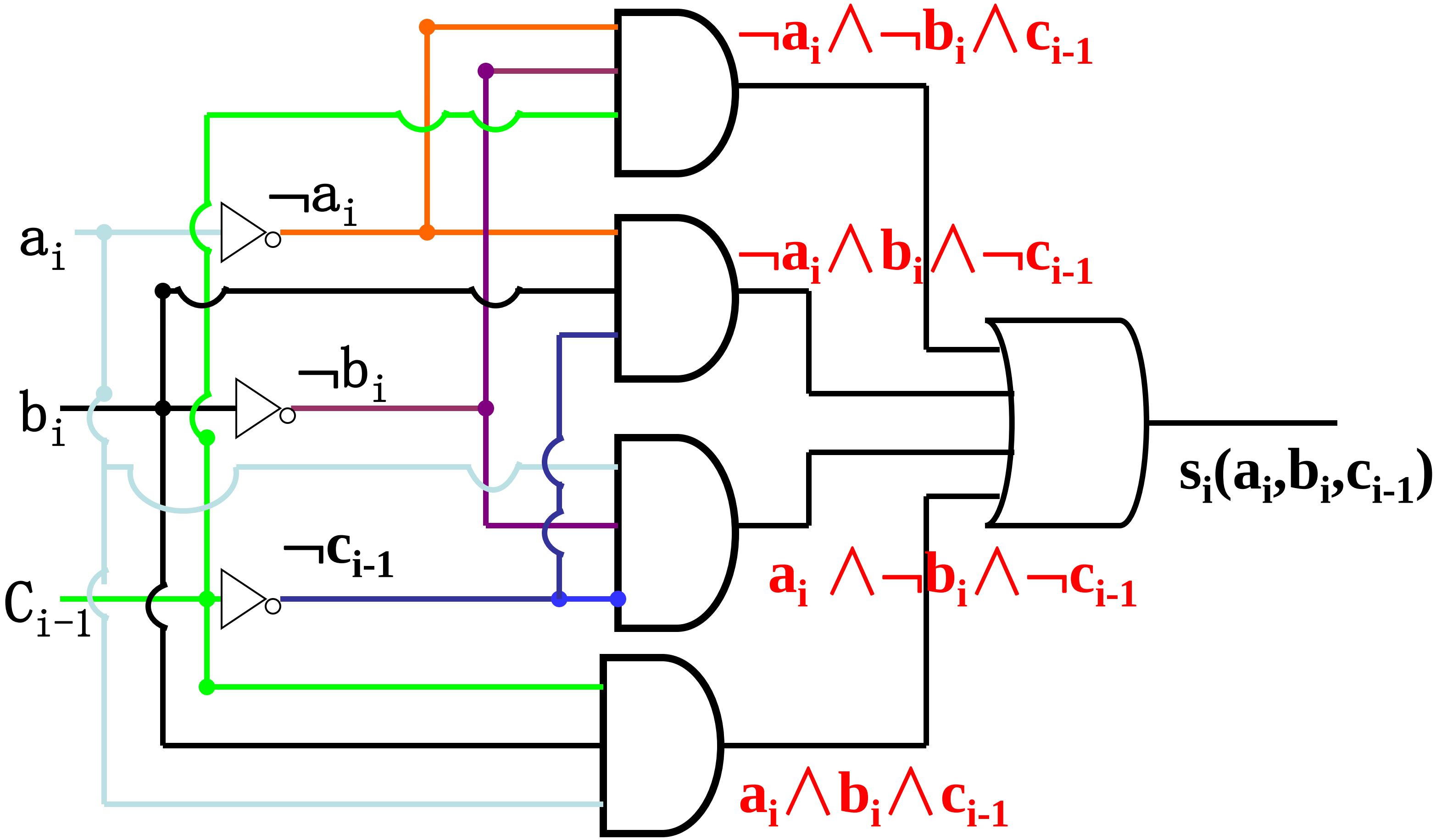
根据前边的表,列出$s_i(a_i,b_i,c_{i-1})$的主析取范式：

$$s_i(a_i,b_i,c_{i-1})=(\neg a_i\wedge\neg b_i\wedge c_{i-1})\vee(\neg a_i\wedge b_i\wedge\neg c_{i-1})\vee(a_i\wedge\neg b_i\wedge\neg c_{i-1})\vee(a_i\wedge b_i\wedge c_{i-1})$$

类似可以求出进位位$c_i(a_i,b_i,c_{i-1})$的表达式。

(在指派001、010、100、111时s_i为1)

下面设计出$s_i(a_i,b_i,c_{i-1})$的线路图。

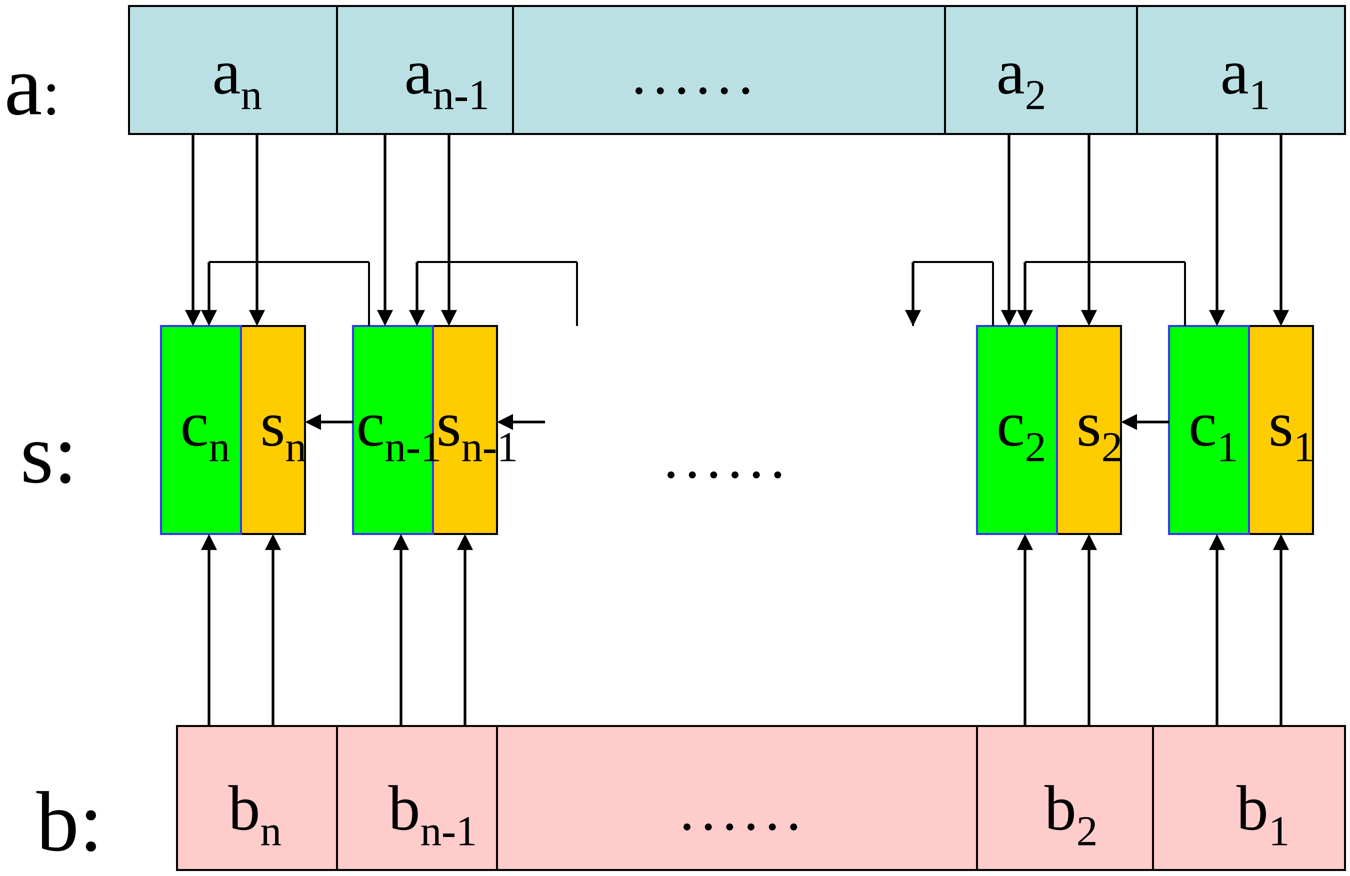


$$s_i(a_i,b_i,c_{i-1})=(\neg a_i\wedge\neg b_i\wedge c_{i-1})\vee(\neg a_i\wedge b_i\wedge\neg c_{i-1})\vee$$

$$(a_i\wedge\neg b_i\wedge\neg c_{i-1})\vee(a_i\wedge b_i\wedge c_{i-1})$$

$c_i(a_{i-1},b_{i-1},c_{i-2})$的线路图与之类似。

- a与b的和s的图：由n个s_i的图与n个c_i的图合并而成。



$S = c_n \, s_n \, s_{n-1} \dots s_2 \, s_1$

例2. 安排课表，教语言课的教师希望将课程安排在第一或第三节；教数学课的教师希望将课程安排在第二或第三节；教原理课的教师希望将课程安排在第一或第二节。如何安排课表，使得三位教师都满意。

令L_1、L_2、L_3分别表示语言课排在第一、第二、第三节。

M_1、M_2、M_3分别表示数学课排在第一、第二、第三节。

P_1、P_2、P_3分别表示原理课排在第一、第二、第三节。

三位教师都满意的条件是：

$(L_1 \vee L_3) \wedge (M_2 \vee M_3) \wedge (P_1 \vee P_2)$ 为真。

将上式写成析取范式(用分配律)得：

$((L_1 \wedge M_2) \vee (L_1 \wedge M_3) \vee (L_3 \wedge M_2) \vee$
$(L_3 \wedge M_3)) \wedge (P_1 \vee P_2)$

$\Leftrightarrow (L_1 \wedge M_2 \wedge P_1) \vee (L_1 \wedge M_3 \wedge P_1) \vee$
$(L_3 \wedge M_2 \wedge P_1) \vee (L_3 \wedge M_3 \wedge P_1) \vee$
$(L_1 \wedge M_2 \wedge P_2) \vee (L_1 \wedge M_3 \wedge P_2) \vee$
$(L_3 \wedge M_2 \wedge P_2) \vee (L_3 \wedge M_3 \wedge P_2)$

可以取$(L_3 \wedge M_2 \wedge P_1)$、$(L_1 \wedge M_3 \wedge P_2)$为T，得到两种排法。

- 本节要掌握：

  析取范式、合取范式、主析取范式、主合取范式的写法，范式的应用。

- 作业

  第39页：(2) d)，
  (3) d)，
  (4) c) d)，
  (7)

1-7. 命题逻辑推理

推理就是根据一个或几个已知的判断得出一个新的判断的思维过程。

称这些已知的判断为**前提**。得到的新的判断为前提的**有效结论**。

实际上，推理的过程就是证明永真蕴含式的过程，即令H_1，H_2，…，H_n是已知的命题公式(前提)，若有

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots\ldots \wedge H_n \Rightarrow C$$

则称C是H_1，H_2，…H_n的**有效结论**，简称**结论**。

如何根据前提得到结论，需要有推理的规则。下面先介绍两个**推理规则**。

规则P(引入前提规则)：在推理过程中，可以随时引入前提。

规则T(引入结论规则)：在推理过程中，如果前边有一个或几个公式永真蕴涵公式S，则可将S纳入推理过程中。

在推理过程中，还要应用教材43页表1-8.3中的永真蕴涵式I_1-I_{16}和表1-8.4中等价公式E_1-E_{22}（常用的公式要熟记）

下面主要介绍三种推理方法：

直接推理、条件论证及反证法

重要的重言蕴涵式(如教材第43页所示)

I_1. $P \land Q \Rightarrow P$

I_2. $P \land Q \Rightarrow Q$

I_3. $P \Rightarrow P \lor Q$

I_4. $Q \Rightarrow P \lor Q$

I_5. $\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$

I_6. $Q \Rightarrow P \rightarrow Q$

I_7. $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$

I_8. $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$

I_9. $P, Q \Rightarrow P \land Q$

I_{10}. $\neg P \land (P \lor Q) \Rightarrow Q$

I_{11}. $P \land (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$

I_{12}. $\neg Q \land (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$

I_{13}. $(P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$

I_{14}. $(P \lor Q) \land (P \rightarrow R) \land (Q \rightarrow R) \Rightarrow R$

I_{15}. $A \rightarrow B \Rightarrow (A \lor C) \rightarrow (B \lor C)$

I_{16}. $A \rightarrow B \Rightarrow (A \land C) \rightarrow (B \land C)$

重要的等价公式:

对合律 E_1 $\neg\neg P \Leftrightarrow P$

交换律 E_2 $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$ E_3 $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$

结合律 E_4 $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$ E_5 $P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$

分配律 E_6 $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

E_7 $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

底-摩根定律 E_8 $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$ E_9 $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

幂等律 E_{10} $P \vee P \Leftrightarrow P$ E_{11} $P \wedge P \Leftrightarrow P$

同一律 E_{12} $P \vee F \Leftrightarrow P$ E_{13} $P \wedge T \Leftrightarrow P$

零律 E_{14} $P \vee T \Leftrightarrow T$ E_{15} $P \wedge F \Leftrightarrow F$

E_{16} $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$ E_{17} $\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$

E_{18} $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$ E_{19} $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$

E_{20} $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ E_{21} $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

E_{22} $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$

吸收律 $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$ $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$

互补律 $P \vee \neg P \Leftrightarrow T$ $P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$

$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$

一. 直接推理

直接推理，就是从前提直接推出结论。

上面讲到推理的过程实际上是证明永真蕴含式的过程。只不过证明的过程采用另外一种书写格式。

格式中包含：步骤号，给定前提或得出的结论，推理时所用规则，此结论是从哪几步得到的以及所用公式。下面请看一些例子。

例题 1 求证 $P \rightarrow Q,\ Q \rightarrow R,\ P \Rightarrow R$

证明

序号	前提或结论	所用规则	从哪几步得到	所用公式
(1)	P	P		
(2)	$P \rightarrow Q$	P		
(3)	Q	T	(1) (2)	I_{11}
(4)	$Q \rightarrow R$	P		
(5)	R	T	(3) (4)	I_{11}

（注公式I_{11}为： $P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$ ）

例题 2 求证

$\neg(P\wedge Q)\wedge(Q\vee R)\wedge\neg R \Rightarrow \neg P$

(1)	$Q\vee R$	P		
(2)	$\neg R$	P		
(3)	Q	T	(1) (2)	I_{10}
(4)	$\neg(P\wedge Q)$	P		
(5)	$\neg P\vee\neg Q$	T	(4)	E_8
(6)	$\neg P$	T	(3) (5)	I_{10}

注公式I_{10}为： $\neg P, P\vee Q \Rightarrow \mathbf{Q}$

公式E_8为： $\neg(P\wedge Q) \Leftrightarrow \neg P\vee\neg Q$

例题 3 用命题逻辑推理方法证明下面推理的有效性：

如果我学习，那么我数学不会不及格。如果我不热衷于玩朴克，那么我将学习。但是我数学不及格。因此，我热衷于玩朴克。

解: 设 P：我学习。

Q：我数学及格。

R：我热衷于玩朴克。

于是符号化为：

$$P \to Q, \neg R \to P, \neg Q \Rightarrow R$$

$P \to Q, \neg R \to P, \neg Q \Rightarrow R$

(1)	$P \to Q$	P
(2)	$\neg Q$	P
(3)	$\neg P$	T (1)(2) I_{12}
(4)	$\neg R \to P$	P
(5)	$\neg\neg R$	T (3)(4) I_{12}
(6)	R	T (5) E_1

注：公式I_{12}为：$\neg Q, P \to Q \Rightarrow \neg P$

公式E_1 为：$\neg\neg R \Leftrightarrow \mathbf{R}$

下面同学动手作练习　第46页（1）b）

第46页 （1） b）

$J \to (M \vee N)$，$(H \vee G) \to J$，$H \vee G \Rightarrow \mathbf{M} \vee N$

(1)	$H \vee G$	P
(2)	$(H \vee G) \to J$	P
(3)	$\mathbf{J}$	T (1)(2) I_{11}
(4)	$J \to (M \vee N)$	P
(5)	$\mathbf{M} \vee N$	T (3)(4) I_{11}

例题 4 求证$P\rightarrow(Q\rightarrow S), \neg R\vee P, Q \Rightarrow R\rightarrow S$

证明

(1)	$P\rightarrow(Q\rightarrow S)$	P	
(2)	$\neg P\vee(\neg Q\vee S)$	T (1)	E_{16}
(3)	$\neg P\vee(S\vee\neg Q)$	T (2)	E_3
(4)	$(\neg P\vee S)\vee\neg Q$	T (3)	E_5
(5)	Q	P	
(6)	$\neg P\vee S$	T (4)(5)	I_{10}
(7)	$P\rightarrow S$	T (6)	E_{16}
(8)	$\neg R\vee P$	P	
(9)	$R\rightarrow P$	T (8)	E_{16}
(10)	$R\rightarrow S$	T (7)(9)	I_{13}

二. 条件论证

定理1-7.1 如果$H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n \wedge R \Rightarrow S$，

则 $H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n \Rightarrow R \rightarrow S$

证明： 因为$H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n \wedge R \Rightarrow S$

则 $(H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n \wedge R) \rightarrow S$ 是永真式。

根据结合律得 $((H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n) \wedge R) \rightarrow S$

是永真式。根据公式E_{19}得

$(H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n) \rightarrow (R \rightarrow S)$是永真式。

即 $H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n \Rightarrow R \rightarrow S$

定理得证。E_{19}：$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$

此定理告诉我们，如果要证明的结论是蕴涵式$(R\rightarrow S)$形式，则可以把结论中蕴涵式的前件R作为附加前提，与给定的前提一起推出后件S即可。

我们把上述定理写成如下规则：

规则CP(Conditional Proof)：

如果$H_1\wedge H_2\wedge ...\wedge H_n\wedge R \Rightarrow S$，则

$$H_1\wedge H_2\wedge ...\wedge H_n \Rightarrow R\rightarrow S$$

下面我们用条件论证方法求证例题4

$$P\rightarrow(Q\rightarrow S), \neg R\vee P, Q \Rightarrow R\rightarrow S$$

例题 5 用条件论证，证明例题 4

$P \to (Q \to S), \neg R \vee P, Q \Rightarrow R \to S$

证明

(1)	R	P(附加前提)
(2)	$\neg R \vee P$	P
(3)	P	T (1)(2) I_{10}
(4)	$P \to (Q \to S)$	P
(5)	$Q \to S$	T (3)(4) I_{11}
(6)	Q	P
(7)	S	T (5)(6) I_{11}
(8)	$R \to S$	CP

与例题 4 相比，因为它增加了一个附加前提，所以推理就容易些。

例题 6 用命题逻辑推理方法证明下面推理的有效性：

如果体育馆有球赛，青年大街交通就拥挤。在这种情况下，如果小王不提前出发，就会迟到。因此，小王没有提前出发也未迟到，则体育馆没有球赛。

证明 先将命题符号化。

设 P：体育馆有球赛。

Q：青年大街交通拥挤。

R：小王提前出发。

S：小王迟到。

$$P \to Q,\ (Q \wedge \neg R) \to S \Rightarrow (\neg R \wedge \neg S) \to \neg P$$

$P \to Q, (Q \wedge \neg R) \to S \Rightarrow (\neg R \wedge \neg S) \to \neg P$

证明

(1)	$\neg R \wedge \neg S$	P(附加前提)
(2)	$\neg R$	T (1) I_1
(3)	$\neg S$	T (1) I_2
(4)	$(Q \wedge \neg R) \to S$	P
(5)	$\neg(Q \wedge \neg R)$	T (3)(4) I_{12}
(6)	$\neg Q \vee R$	T (5) E_8
(7)	$\neg Q$	T (2)(6) I_{10}
(8)	$P \to Q$	P
(9)	$\neg P$	T (7)(8) I_{12}
(10)	$(\neg R \wedge \neg S) \to \neg P$	CP

下面同学动手作练习

用条件论证证明　第47页（2）a）

$\neg A \vee B,\ C \rightarrow \neg B \Rightarrow A \rightarrow \neg C$

证明 (1)	A	P(附加前提)
(2)	$\neg A \vee B$	P
(3)	B	T (1)(2) I_{10}
(4)	$C \rightarrow \neg B$	P
(5)	$\neg C$	T (3)(4) I_{12}
(6)	$A \rightarrow \neg C$	CP

三. 反证法

反证法的主要思想是：假设结论不成立，可以推出矛盾的结论(矛盾式)。下面先介绍有关概念和定理。

定义：设H_1，H_2，...，H_n是命题公式，P_1，$P_2, \ldots, P_m$是公式中的命题变元，如果对所有命题变元至少有一种指派，使得$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n$ 的真值为T，则称公式集合$\{H_1, H_2, \ldots H_n\}$是**相容的**(也称是**一致的**)；如果对所有命题变元每一种指派，都使得$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n$的真值为F，则称公式集合$\{H_1, H_2, \ldots H_n\}$是**不相容的**(也称是**不一致的**)。

定理1-7.2 若要证明相容的公式集合 $\{H_1, H_2, ... H_n\}$ 可以推出公式C，只要证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n \wedge \neg C$ 是个矛盾式即可。

证明 设 $H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n \wedge \neg C$ 是矛盾式，则 $\neg(H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n \wedge \neg C)$ 是个永真式。

上式 $\Leftrightarrow \neg(H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n) \vee C$

$\Leftrightarrow (H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n) \rightarrow C$

所以 $H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n \Rightarrow C$

实际上，要证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n \Rightarrow C$，只要证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n \wedge \neg C$ 可推出矛盾式即可，即

$$H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n \wedge \neg C \Rightarrow R \wedge \neg R$$

- 例 7 $P \rightarrow Q,\ (\neg Q \vee R) \wedge \neg R,\ \neg(\neg P \wedge S) \Rightarrow \neg S$

(1) $\neg\neg S$	P(假设前提)	
(2) S	T (1)	E_1
(3) $\neg(\neg P \wedge S)$	P	
(4) $P \vee \neg S$	T (3)	E_8
(5) P	T (2)(4)	I_{10}
(6) $P \rightarrow Q$	P	
(7) Q	T (5)(6)	I_{11}
(8) $(\neg Q \vee R) \wedge \neg R$	P	
(9) $\neg Q \vee R$	T (8)	I_1
(10) $\neg R$	T (8)	I_2
(11) R	T (7)(9)	I_{10}
(12) $R \wedge \neg R$	T (10)(11)	I_9

下面同学动手作练习

用反证法证明　第47页（4）a）

$R \to \neg Q$，$R \vee S$，$S \to \neg Q$，$P \to Q \Rightarrow \neg P$

证明	(1) $\neg\neg P$	P(假设前提)
	(2) P	T（1）E_1
	(3) $P \to Q$	P
	(4) Q	T（2）(3）I_{11}
	(5) $R \to \neg Q$	P
	(6) $\neg R$	T（4）(5）I_{12}
	(7) $R \vee S$	P
	(8) S	T（6）(7）I_{10}
	(9) $S \to \neg Q$	P
	(10) $\neg Q$	T（8）(9）I_{12}
	(11) $Q \wedge \neg Q$	T（4）(10）I_9

- 本节要掌握三种推理方法，按照所要求格式正确地书写推理过程。

- 作业

第47页： (2) b) , e)

(3) b) , c)

(4) a) , c)

(5) c)

*1-8 命题逻辑归结证明方法

归结证明是由J.A.Robinson在1965年提出来的。由于它只有赖于一个简单的**规则**，所以它成为机器定理证明常用方法。

1. 规则： 如果有P∨Q和¬P∨R， 则有Q∨R 。

即 $(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R)\Rightarrow Q\vee R$

证明：如果Q∨R为F，则Q,R均为F。于是

(1)假设P为T，则¬P为F，所以¬P∨R为F，进而 $(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R)$ 为F。

(2)假设P为F，则P∨Q为F，进而

$(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R)$ 为F。

所以$(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R)\Rightarrow Q\vee R$

此规则的特例：$(P\vee Q)\wedge\neg P \Rightarrow Q$

$$\neg P\wedge(P\vee R) \Rightarrow R$$

2.子句

定义：一个子句是由命题变元或者命题变元的否定构成的析取式子。

例如 $A\vee\neg B\vee C\vee\neg D$，$P$, $\neg Q$都是子句。

在归结证明中，前提和结论都写成子句形式。

如果前提中有$\rightarrow$和 $\leftrightarrow$要用下面公式变换。

$$P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$$

$$P\leftrightarrow Q \Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)$$ (看成两个前提)

另外，如果前提中$\neg$不是在命题变元之前，也要进行变换。例如

$$\neg(P\wedge\neg Q) \Leftrightarrow\neg P\vee Q$$

$$\neg(P\vee Q\vee\neg R)\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q\wedge R$$ (变成三个前提)

例1 归结证明：$A \vee B, \neg A \vee C, \neg C \vee D \Rightarrow B \vee D$

证明 (1) $A \vee B$

(2) $\neg A \vee C$

(3) $\neg C \vee D$

(4) $B \vee C$　　由(1)(2)归结

(5) $B \vee D$　　由(3)(4)归结

例2 归结证明：$A, \neg A \vee C, \neg C \vee D \Rightarrow D$

证明 (1) A

(2) $\neg A \vee C$

(3) $\neg C \vee D$

(4) C　　由(1)(2)归结

(5) D　　由(3)(4)归结

例3 归结证明：

$$A\vee(\neg B\wedge C),\ \neg(A\vee D)\ \Rightarrow\neg B$$

证明： 先对两个前提进行变换：

$A\vee(\neg B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee\neg B)\wedge(A\vee C)$ (两个前提)

$\neg(A\vee D)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg D$ (两个前提)

(1) $A\vee\neg B$

(2) $A\vee C$

(3) $\neg A$

(4) $\neg D$

(5) $\neg B$ 由(1)(3)归结

可以把归结证明与反证法相结合，得出矛盾式。

例4 $A \vee B, \neg A \vee C, \neg C \vee D \Rightarrow B \vee D$

将结论取反得 $\neg (B \vee D) \Leftrightarrow \neg B \wedge \neg D$

证明 (1) $A \vee B$

(2) $\neg A \vee C$

(3) $\neg C \vee D$

(4) $\neg B$

(5) $\neg D$

(6) $B \vee C$ 由(1)(2)归结

(7) $B \vee D$ 由(3)(6)归结

(8) D 由(4)(7)归结,

由(5)(8)得到矛盾式。

*1-9 联结词的全功能集(完备集)

前面定义了六个逻辑联结词，分别是:

(1)否定“$\neg$” (2) 合取“$\wedge$”

(3) 析取“$\vee$” (4) 异或“$\overline{\vee}$”

(5) 蕴涵“$\rightarrow$” (6) 等价“$\leftrightarrow$”

可以用这些联结词表示任何命题公式。而且我们已经知道，有些联结词可以用其它联结词表示。

比如：$P\rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P\vee Q$

$$P\overline{\vee}Q \Leftrightarrow (P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$$

$$P\leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$$

$$P\leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$$

$$P\leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)$$

在逻辑设计中还定义两个联结词“与非↑”、“或非↓”：

定义：设P、Q是命题，复合命题“P∧Q的否定”称为P与Q的与非，记作P↑Q，↑称作与非联结词。

即 $P\uparrow Q \Leftrightarrow \neg(P\wedge Q)$

定义：设P、Q是命题，复合命题“P∨Q的否定”称为P与Q的或非，记作P↓Q，↓称作或非联结词。

即 $P\downarrow Q \Leftrightarrow \neg(P\vee Q)$

在一个形式系统中定义多少个联结词“合适”？

在自然推理系统中联结词可以多一些；

在公理系统中联结词越少越好。

这里就是讨论公理系统“最少”需要多少个联结词。

联结词无论是多还是少，它必须具备一定功能，就是用这些联结词能够表达所有的命题公式。那么如何证明能表达所有命题公式呢？

我们知道有很多公式表面形式不同，但是它们的真值表相同，我们说它们是等价公式(即相同的公式)，所以不同真值表的个数＝公式的个数。

有n个命题变元，共有2^n个可能的赋值，对于每个赋值命题公式的真值都有两个(T、F)，于是可以构成 2^{2^n} 个不同的真值表(命题公式)。

比如，有两个命题变元P、Q，可以构成$2^4=16$个命题公式，如下$F_0, F_1, \ldots, F_{15}$所示：

P	Q	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

P	Q	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

实际上F_0,是个矛盾式；F_1,F_2,F_4 ,F_8是只含有一个小项的公式； F_3,F_5 ,F_6 ,F_9 ,F_{10},F_{12}是含有二个小项的公式； F_7, F_{11}, F_{13},F_{14}是含有三个小项的公式；F_{15}是含四个小项的公式。下面就讨论公理系统“最少”需要多少个联结词。

定义：在一个联结词集合中，如果一个联结词可由集合中的其它联结词定义，则称此联结词是冗余的联结词，否则称此联结词是独立的联结词。

如{¬, ∧, ∨, →, ↔}中→与↔是冗余的, {¬, ∧, ∨}中∨也是冗余的,因为$P \vee Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$，但是{¬, ∧}或者{¬,∨}中就无冗余的联结词。

定义：给定一个联结词集合，如果任何一个命题公式都可以用此集合中的联结词表示，则称为此联结词集合是全功能集。如果一个联结词的全功能集中不含有冗余的联结词，则称它是极小全功能集。

如{¬, ∧, ∨, →, ↔ ,↓, ↑}、{¬, ∧, ∨, →, ↔ } {¬, ∧, ∨}、{¬, ∧}、 {¬,∨}都是全功能集，而后两个是极小全功能集。

而{¬}{∧}{∧,∨}都不是全功能集。

在工程上有时需要考虑联结词最少的全功能集。

下面看看{↑}和{↓}是不是全功能集。就是看看是否用“↑”或者“↓”表示¬, ∧, ∨：

(1) $P\uparrow P \Leftrightarrow \neg(P\wedge P) \Leftrightarrow \neg P$

(2) $(P\uparrow Q)\uparrow(P\uparrow Q) \Leftrightarrow \neg(P\uparrow Q) \Leftrightarrow (P\wedge Q)$

(3) $(P\uparrow P)\uparrow(Q\uparrow Q) \Leftrightarrow \neg P\uparrow\neg Q$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P\wedge\neg Q) \Leftrightarrow P\vee Q$

所以{↑}是个极小全功能集。

在数字逻辑中，就有“与非门”逻辑组件，只用它就可以设计出任何逻辑线路。

再看↓：

(1) $P \downarrow P \Leftrightarrow \neg(P \vee P) \Leftrightarrow \neg P$

(2) $(P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q) \Leftrightarrow \neg P \downarrow \neg Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q)$

(3) $(P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q) \Leftrightarrow \neg(P \downarrow Q) \Leftrightarrow P \vee Q$

所以{↓}也是个极小全功能集。

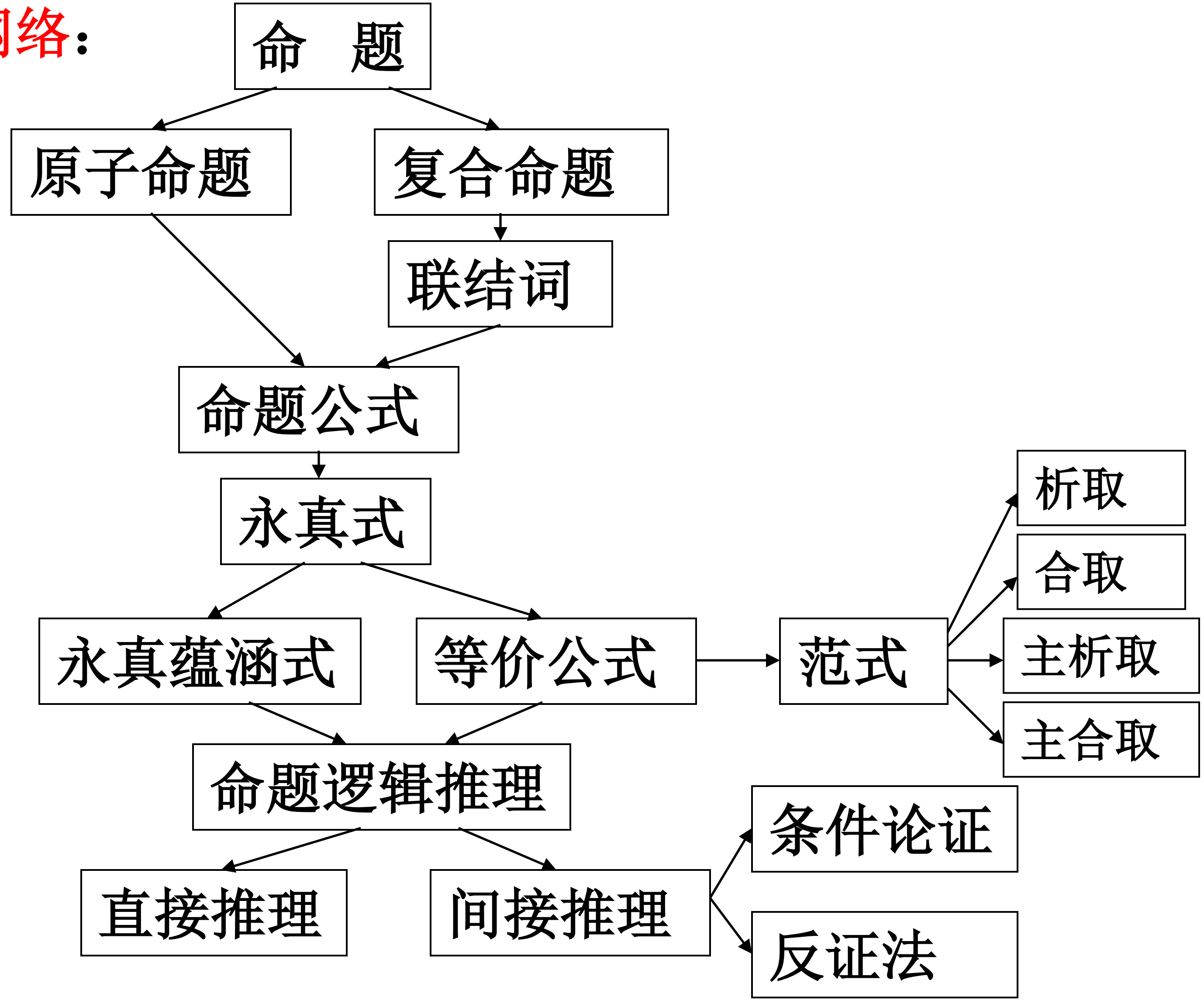
证明{¬, →}是全功能集。因为

$\neg P \to Q \Leftrightarrow P \vee Q$

$\neg(P \to \neg Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q) \Leftrightarrow P \wedge Q$

第一章　小结

知识网络：


命　题
原子命题
复合命题
联结词
命题公式
永真式
永真蕴涵式
等价公式
范式
析取
合取
主析取
主合取
命题逻辑推理
直接推理
间接推理
条件论证
反证法

本章的重点内容、及要求：

1．逻辑联结词，要熟练掌握联结词的真值表定义以及它们在自然语言中的含义。其中特别要注意“$\vee$”和“$\rightarrow$”的用法。

2．会命题符号化。

3．掌握永真式的证明方法：

(1)．真值表。

(2)．等价变换，化简成T。

(3)．主析取范式。

4．掌握永真蕴含式的证明方法，熟练记忆并会应用43页中表1-8.3中的永真蕴含式。

5．掌握等价公式的证明方法，熟练记忆并会应用43页表1-8.4中的等价公式。

6．熟练掌握范式的写法及其应用。

7．熟练掌握三种推理方法。