

1-1 分析与解 (1) 质点在 t 至 $(t + \Delta t)$ 时间内沿曲线从 P 点运动到 P' 点, 各量关系如图所示, 其中路程 $s = PP'$, 位移大小 $|\Delta \mathbf{r}| = PP'$, 而 $\Delta r = |\mathbf{r}'| - |\mathbf{r}|$ 表示质点位矢大小的变化量, 三个量物理含义不同, 在曲线运动中大小也不相等 (注: 在直线运动中有相等的可能). 但当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 点 P' 无限趋近 P 点, 则有 $|\Delta \mathbf{r}| = ds$, 但却不等于 Δr . 故选 (B).

(2) 由于 $|\Delta \mathbf{r}| \neq s$, 故 $\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} \neq \frac{s}{\Delta t}$, 即 $|\bar{\mathbf{v}}| \neq \bar{v}$.

但由于 $|\Delta \mathbf{r}| = ds$, 故 $\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \frac{ds}{dt}$, 即 $|\mathbf{v}| = v$. 由此可见, 应选 (C).

1-2 分析与解 $\frac{dr}{dt}$ 表示质点到坐标原点的距离随时间的变化率, 在极坐标系中叫径向

速率. 通常用符号 v_r 表示, 这是速度矢量在位矢方向上的一个分量; $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 表示速度矢量; 在自

然坐标系中速度大小可用公式 $v = \frac{ds}{dt}$ 计算, 在直角坐标系中则可由公式

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \text{ 求解. 故选 (D).}$$

1-3 分析与解 $\frac{dv}{dt}$ 表示切向加速度 a_t , 它表示速度大小随时间的变化率, 是加速度矢

量沿速度方向的一个分量, 起改变速度大小的作用; $\frac{dr}{dt}$ 在极坐标系中表示径向速率 v_r (如题 1

-2 所述); $\frac{ds}{dt}$ 在自然坐标系中表示质点的速率 v ; 而 $\left| \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|$ 表示加速度的大小而不是切向加

速度 a_t . 因此只有 (3) 式表达是正确的. 故选 (D).

1-4 分析与解 加速度的切向分量 a_t 起改变速度大小的作用, 而法向分量 a_n 起改变速度方向的作用. 质点作圆周运动时, 由于速度方向不断改变, 相应法向加速度的方向也在不断改变, 因而法向加速度是一定改变的. 至于 a_t 是否改变, 则要视质点的速率情况而定. 质点作匀速率圆周运动时, a_t 恒为零; 质点作匀变速率圆周运动时, a_t 为一不为零的恒量, 当 a_t 改变时, 质点则作一般的变速率圆周运动. 由此可见, 应选 (B).

1-5 分析与解 本题关键是先求得小船速度表达式, 进而判断运动性质. 为此建立如图所示坐标系, 设定滑轮距水面高度为 h , t 时刻定滑轮距小船的绳长为 l , 则小船的运动方程为

$$x = \sqrt{l^2 - h^2}, \text{ 其中绳长 } l \text{ 随时间 } t \text{ 而变化. 小船速度 } v = \frac{dx}{dt} = \frac{l \frac{dl}{dt}}{\sqrt{l^2 - h^2}}, \text{ 式中 } \frac{dl}{dt} \text{ 表示绳}$$

长 l 随时间的变化率, 其大小即为 v_0 , 代入整理后为 $v = \frac{v_0}{\sqrt{l^2 - h^2} / l} = \frac{v_0}{\cos \theta}$, 方向沿 x 轴负

向. 由速度表达式, 可判断小船作变加速运动. 故选 (C).

1-6 分析 位移和路程是两个完全不同的概念. 只有当质点作直线运动且运动方向不改变时, 位移的大小才会与路程相等. 质点在 t 时间内的位移 x 的大小可直接由运动方程得

到: $x = x_1 - x_0$, 而在求路程时, 就必须注意到质点在运动过程中可能改变运动方向, 此时, 位移的大小和路程就不同了. 为此, 需根据 $\frac{dx}{dt} = 0$ 来确定其运动方向改变的时刻 t_p , 求出 $0 \sim t_p$ 和 $t_p \sim t$ 内的位移大小 x_1 、 x_2 , 则 t 时间内的路程 $s = |\Delta x_1| + |\Delta x_2|$, 如图所示, 至于 $t = 4.0 \text{ s}$ 时质点速度和加速度可用 $\frac{dx}{dt}$ 和 $\frac{d^2x}{dt^2}$ 两式计算.

解 (1) 质点在 4.0 s 内位移的大小 $x = x_4 - x_0 = -32 \text{ m}$

(2) 由 $\frac{dx}{dt} = 0$ 得知质点的换向时刻为 $t_p = 2 \text{ s}$ ($t = 0$ 不合题意)

则 $x_1 = x_2 - x_0 = 8.0 \text{ m}$, $x_2 = x_4 - x_2 = -40 \text{ m}$

所以, 质点在 4.0 s 时间间隔内的路程为 $s = |x_1| + |x_2| = 48 \text{ m}$

(3) $t = 4.0 \text{ s}$ 时, $v = \frac{dx}{dt} \bigg|_{t=4.0\text{s}} = -48 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
 $a = \frac{d^2x}{dt^2} \bigg|_{t=4.0\text{s}} = -36 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

1-7 分析 根据加速度的定义可知, 在直线运动中 $v-t$ 曲线的斜率为加速度的大小 (图中 AB CD 段斜率为定值, 即匀变速直线运动; 而线段 BC 的斜率为 0, 加速度为零, 即匀速直线运动). 加速度为恒量, 在 $a-t$ 图上是平行于 t 轴的直线, 由 $v-t$ 图中求出各段的斜率, 即可作出 $a-t$ 图线. 又由速度的定义可知, $x-t$ 曲线的斜率为速度的大小. 因此, 匀速直线运动所对应的 $x-t$ 图应是一直线, 而匀变速直线运动所对应的 $x-t$ 图为 t 的二次曲线. 根据各段时间内的运动方程 $x = x(t)$, 求出不同时刻 t 的位置 x , 采用描数据点的方法, 可作出 $x-t$ 图.

解 将曲线分为 AB BC CD 三个过程, 它们对应的加速度值分别为

$$a_{AB} = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (\text{匀加速直线运动}), \quad a_{BC} = 0 \quad (\text{匀速直线运动})$$

$$a_{CD} = \frac{v_D - v_C}{t_D - t_C} = -10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (\text{匀减速直线运动})$$

根据上述结果即可作出质点的 $a-t$ 图 [图 (B)] .

在匀变速直线运动中, 有

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

由此, 可计算在 $0 \sim 2 \text{ s}$ 和 $4 \sim 6 \text{ s}$ 时间间隔内各时刻的位置分别为

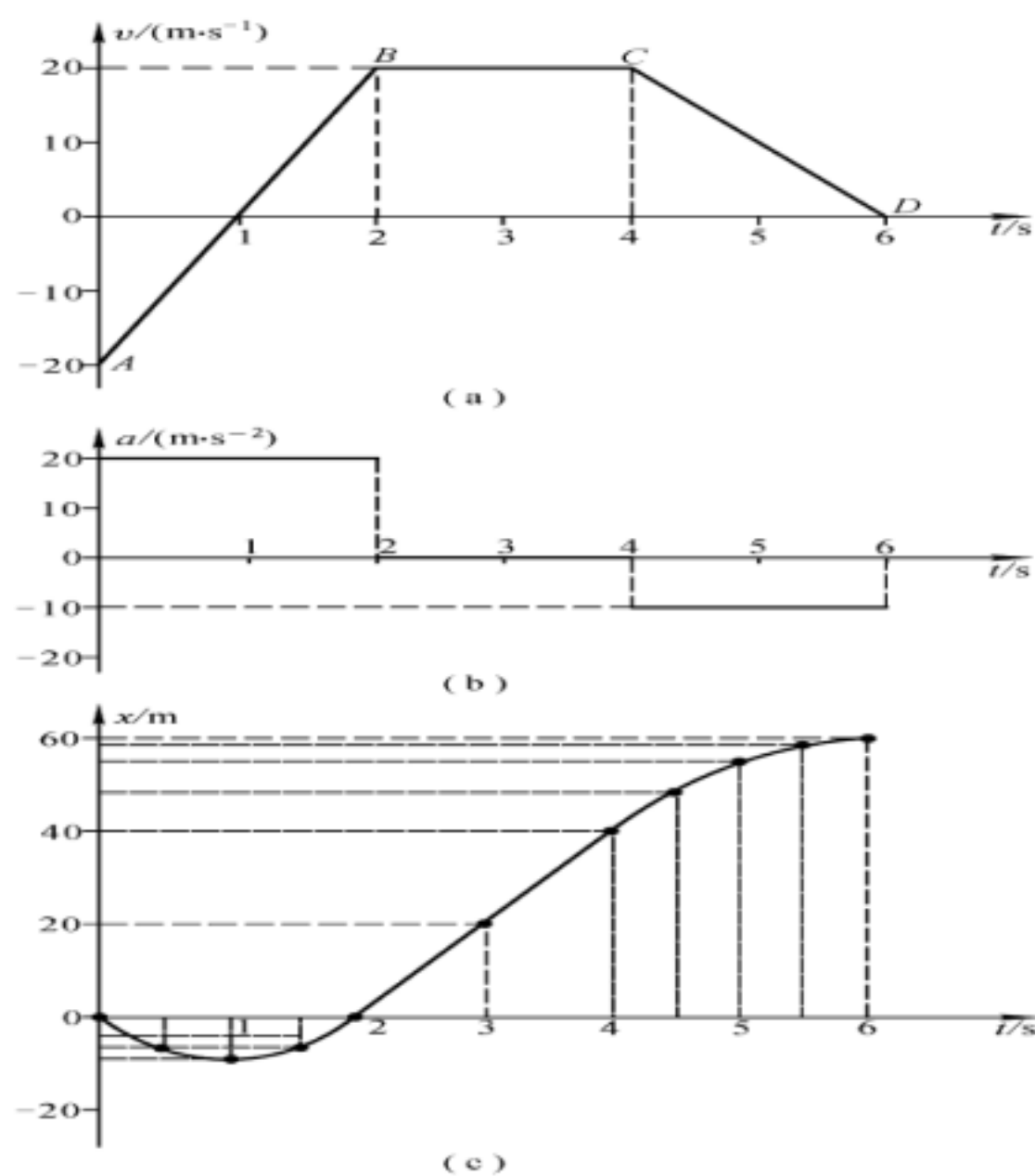
t/s	0	0.5	1	1.5	2	4	4.5	5	5.5	6
x/m	0	-7.5	-10	-7.5	0	40	48.8	55	58.8	60

用描数据点的作图方法, 由表中数据可作 $0 \sim 2 \text{ s}$ 和 $4 \sim 6 \text{ s}$ 时间内的 $x-t$ 图. 在 $2 \sim 4 \text{ s}$ 时间内, 质点是作 $v = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的匀速直线运动, 其 $x-t$ 图是斜率 $k = 20$ 的一段直线 [图 (c)] .

1-8 分析 质点的轨迹方程为 $y = f(x)$, 可由运动方程的两个分量式 $x(t)$ 和 $y(t)$ 中消去 t 即可得到. 对于 r 、 \dot{r} 、 \ddot{r} 、 s 来说, 物理含义不同, 可根据其定义计算. 其中对 s 的求解用到积分方法, 先在轨迹上任取一段微元 ds , 则 $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, 最后用 $s = \int ds$ 积分求 s .

解 (1) 由 $x(t)$ 和 $y(t)$ 中消去 t 后得质点轨迹方程为 $y = 2 - \frac{1}{4} x^2$

这是一个抛物线方程, 轨迹如图 (a) 所示.



题 1-7 图

(2) 将 $t = 0 \text{ s}$ 和 $t = 2 \text{ s}$ 分别代入运动方程，可得相应位矢分别为

$$\mathbf{r}_0 = 2\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}_2 = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$$

图(a) 中的 P、Q 两点，即为 $t = 0 \text{ s}$ 和 $t = 2 \text{ s}$ 时质点所在位置。

(3) 由位移表达式，得 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_0)\mathbf{i} + (y_2 - y_0)\mathbf{j} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

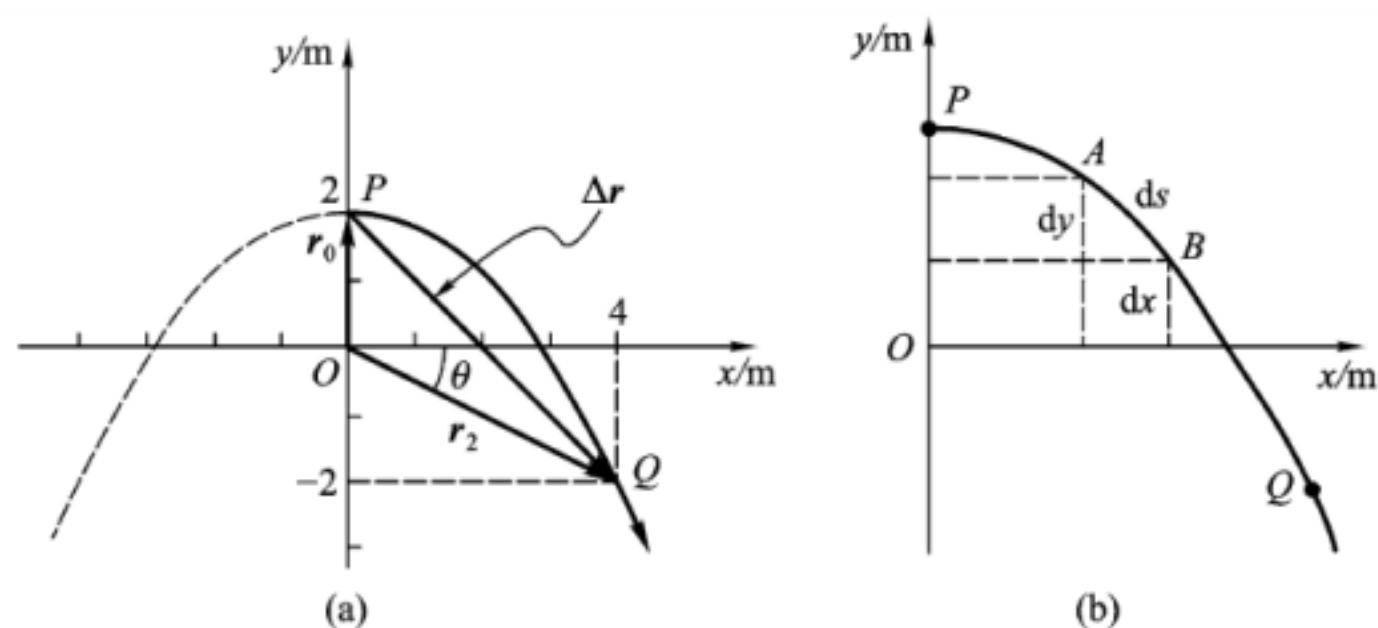
其中位移大小 $|\mathbf{r}| = \sqrt{(x)^2 + (y)^2} = 5.66 \text{ m}$

而径向增量 $r = |\mathbf{r}| = r_2 - r_0 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 2.47 \text{ m}$

* (4) 如图 (B) 所示，所求 s 即为图中 PQ 段长度，先在其间任意处取 AB 微元 ds ，则

$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ ，由轨道方程可得 $dy = -\frac{1}{2}xdx$ ，代入 ds ，则 2 s 内路程为

$$s = \int_P^Q ds = \int_0^4 \sqrt{4 + x^2} dx = 5.91 \text{ m}$$



题 1-8 图

1-9 分析 由运动方程的分量式可分别求出速度、加速度的分量,再由运动合成算出速度和加速度的大小和方向.

解 (1) 速度的分量式为

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -10 + 60t, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 15 - 40t$$

当 $t = 0$ 时, $v_{0x} = -10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_{0y} = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 则初速度大小为

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = 18.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

设 v_0 与 x 轴的夹角为, 则

$$\tan = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = -\frac{3}{2} = 123^\circ 41'$$

(2) 加速度的分量式为

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

则加速度的大小为 $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 72.1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

设 a 与 x 轴的夹角为, 则

$$\tan = \frac{a_y}{a_x} = -\frac{2}{3}, \quad = -33^\circ 41' \quad (\text{或 } 326^\circ 19')$$

1-10 分析 在升降机与螺丝之间有相对运动的情况下, 一种处理方法是取地面为参考系, 分别讨论升降机竖直向上的匀加速度运动和初速不为零的螺丝的自由落体运动, 列出这两种运动在同一坐标系中的运动方程 $y_1 = y_1(t)$ 和 $y_2 = y_2(t)$, 并考虑它们相遇, 即位矢相同这一条件, 问题即可解; 另一种方法是取升降机 (或螺丝) 为参考系, 这时, 螺丝 (或升降机) 相对它作匀加速运动, 但是, 此加速度应该是相对加速度. 升降机厢的高度就是螺丝 (或升降机) 运动的路程.

解 1 (1) 以地面为参考系, 取如图所示的坐标系, 升降机与螺丝的运动方程分别为

$$y_1 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad y_2 = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

当螺丝落至底面时, 有 $y_1 = y_2$, 即

$$v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g+a}} = 0.705 \text{ s}$$

(2) 螺丝相对升降机外固定柱子下降的距离为

$$d = h - y_2 = -v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 = 0.716 \text{ m}$$

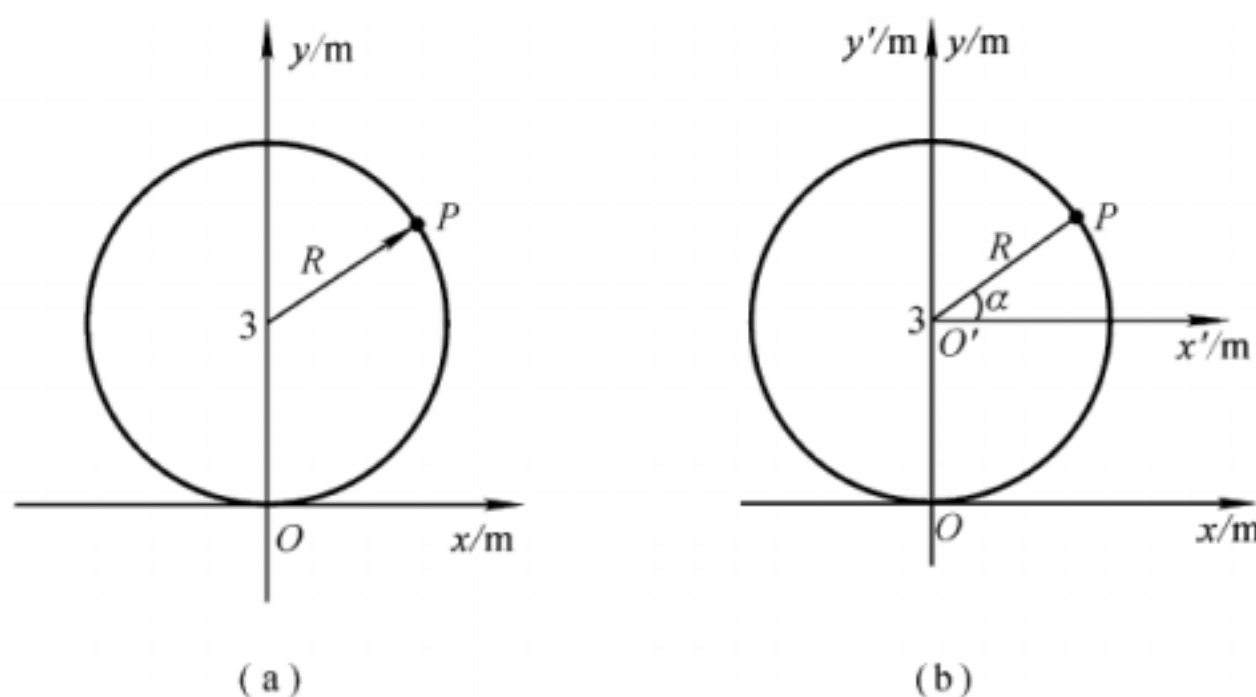
解 2 (1) 以升降机为参考系, 此时, 螺丝相对它的加速度大小 $a = g + a$, 螺丝落至底面时, 有

$$0 = h - \frac{1}{2} (g + a) t^2 \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g+a}} = 0.705 \text{ s}$$

(2) 由于升降机在 t 时间内上升的高度为

$$h' = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{则} \quad d = h - h' = 0.716 \text{ m}$$

1-11 分析 该题属于运动学的第一类问题, 即已知运动方程 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 求质点运动的一切信息(如位置矢量、位移、速度、加速度). 在确定运动方程时, 若取以点 $(0, 3)$ 为原点的 $Ox'y'$ 坐标系, 并采用参数方程 $x' = x'(t)$ 和 $y' = y'(t)$ 来表示圆周运动是比较方便的. 然后, 运用坐标变换 $x = x_0 + x'$ 和 $y = y_0 + y'$, 将所得参数方程转换至 Oxy 坐标系中, 即得 Oxy 坐标系中质点 P 在任意时刻的位矢. 采用对运动方程求导的方法可得速度和加速度.



题 1-11 图

解 (1) 如图(B)所示, 在 $Ox'y'$ 坐标系中, 因 $\alpha = \frac{2}{T}t$, 则质点 P 的参数方程为

$$x' = R \sin \frac{2}{T} t$$

$$y' = -R \cos \frac{2}{T} t$$

坐标变换后,

在 Oxy 坐标系中有

$$x = x' = R \sin \frac{2}{T} t, \quad y = y' + y_0 = -R \cos \frac{2}{T} t + R$$

则质点 P 的位矢方程为

$$\mathbf{r} = R \sin \frac{2}{T} t \mathbf{i} + \left(-R \cos \frac{2}{T} t + R \right) \mathbf{j} = 3 \sin(0.1 t) \mathbf{i} + 3[1 - \cos(0.1 t)] \mathbf{j}$$

(2) 5 s 时的速度和加速度分别为

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = R \frac{2}{T} \cos \frac{2}{T} t \mathbf{i} + R \frac{2}{T} \sin \frac{2}{T} t \mathbf{j} = (0.3 \text{ m s}^{-1}) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -R \left(\frac{2}{T} \right)^2 \sin \frac{2}{T} t \mathbf{i} + R \left(\frac{2}{T} \right)^2 \cos \frac{2}{T} t \mathbf{j} = (-0.03 \text{ m s}^{-2}) \mathbf{i}$$

1-12 分析 为求杆顶在地面上影子速度的大小, 必须建立影长与时间的函数关系, 即影子端点的位矢方程. 根据几何关系, 影长可通过太阳光线对地转动的角速度求得. 由于运动的相对性, 太阳光线对地转动的角速度也就是地球自转的角速度. 这样, 影子端点的位矢方程和速度均可求得.

解 设太阳光线对地转动的角速度为 ω , 从正午时分开始计时, 则杆的影长为 $s = h \tan \omega t$, 下午 2:00 时, 杆顶在地面上影子的速度大小为

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{h}{\cos^2 \omega t} = 1.94 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$$

当杆长等于影长时, 即 $s = h$, 则

$$t = \frac{1}{4} \arctan \frac{s}{h} = \frac{1}{4} = 3 \times 60 \times 60 \text{ s}$$

即为下午 3 00 时.

1-13 分析 本题属于运动学第二类问题, 即已知加速度求速度和运动方程, 必须在给定条件下用积分方法解决. 由 $a = \frac{dv}{dt}$ 和 $v = \frac{dx}{dt}$ 可得 $dv = a dt$ 和 $dx = v dt$. 如 $a = a(t)$ 或 $v = v(t)$, 则可两边直接积分. 如果 a 或 v 不是时间 t 的显函数, 则应经过诸如分离变量或变量代换等数学操作后再做积分.

解 由分析知, 应有

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt$$

得

$$v = 4t - \frac{1}{3}t^3 + v_0 \quad (1)$$

由 $\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v dt$

得 $x = 2t^2 - \frac{1}{12}t^4 + v_0 t + x_0 \quad (2)$

将 $t = 3 \text{ s}$ 时, $x = 9 \text{ m}$, $v = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 代入 (1) (2) 得 $v_0 = -1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $x_0 = 0.75 \text{ m}$. 于是可得质点运动方程为

$$x = 2t^2 - \frac{1}{12}t^4 + 0.75$$

1-14 分析 本题亦属于运动学第二类问题, 与上题不同之处在于加速度是速度 v 的函数,

因此, 需将式 $dv = a(v) dt$ 分离变量为 $\frac{dv}{a(v)} = dt$ 后再两边积分.

解 选取石子下落方向为 y 轴正向, 下落起点为坐标原点.

(1) 由题意知 $a = \frac{dv}{dt} = A - Bv \quad (1)$

用分离变量法把式 (1) 改写为

$$\frac{dv}{A - Bv} = dt \quad (2)$$

将式 (2) 两边积分并考虑初始条件, 有

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{A - Bv} = \int_0^t dt \quad \text{得石子速度} \quad v = \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt})$$

由此可知当 $t \rightarrow \infty$ 时, $v \rightarrow \frac{A}{B}$ 为一常量, 通常称为极限速度或收尾速度.

(2) 再由 $v = \frac{dy}{dt} = \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt})$ 并考虑初始条件有

$$\int_0^y dy = \int_0^t \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt}) dt \quad \text{得石子运动方程} \quad y = \frac{A}{B}t + \frac{A}{B^2}(e^{-Bt} - 1)$$

1-15 分析 与上两题不同处在于质点作平面曲线运动, 根据叠加原理, 求解时需根据加速度的两个分量 a_x 和 a_y 分别积分, 从而得到运动方程 r 的两个分量式 $x(t)$ 和 $y(t)$. 由于本题中

质点加速度为恒矢量，故两次积分后所得运动方程为固定形式，即 $x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$ 和

$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$ ，两个分运动均为匀变速直线运动。读者不妨自己验证一下。

解 由加速度定义式，根据初始条件 $t_0 = 0$ 时 $v_0 = 0$ ，积分可得

$$\int_0^v dv = \int_0^t a dt = \int_0^t (6i + 4j) dt \quad v = 6ti + 4tj$$

又由 $v = \frac{dr}{dt}$ 及初始条件 $t = 0$ 时， $r_0 = (10\text{ m})i$ ，积分可得

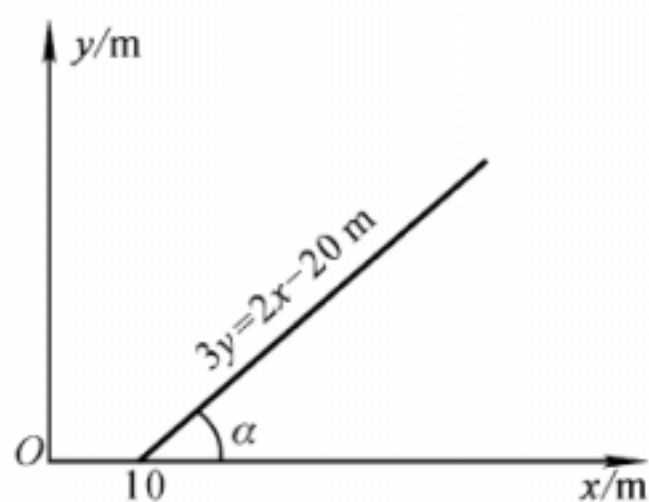
$$\int_{r_0}^r dr = \int_0^t v dt = \int_0^t (6ti + 4tj) dt \quad r = (10 + 3t^2)i + 2t^2j$$

由上述结果可得质点运动方程的分量式，即

$$x = 10 + 3t^2 \quad y = 2t^2$$

消去参数 t ，可得运动的轨迹方程 $3y = 2x - 20\text{ m}$

这是一个直线方程。直线斜率 $k = \frac{dy}{dx} = \tan \alpha = \frac{2}{3}$ ， $\alpha = 33^\circ 41'$ 。轨迹如图所示。



题 1-15 图

1-16 分析 瞬时加速度和平均加速度的物理含义不同，它们分别表示为 $a = \frac{dv}{dt}$ 和

$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ 。在匀速率圆周运动中，它们的大小分别为 $a_n = \frac{v^2}{R}$ ， $\bar{a} = \frac{|\Delta v|}{\Delta t}$ ，式中 $|\Delta v|$ 可由

图(B)中的几何关系得到，而 Δt 可由转过的角度 $\Delta \theta$ 求出。

由计算结果能清楚地看到两者之间的关系，即瞬时加速度是平均加速度在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时的极限值。

解 (1) 由图(b)可看到 $v = v_2 - v_1$ ，故

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\theta} = v\sqrt{2(1 - \cos\theta)} \quad \text{而} \quad t = \frac{s}{v} = \frac{R\theta}{v}$$

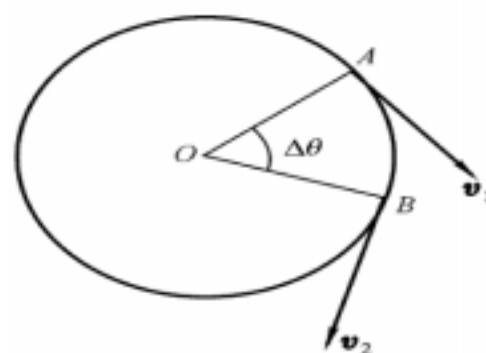
所以

$$a = \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \sqrt{2(1 - \cos\theta)} \frac{v^2}{R}$$

(2) 将 $\theta = 90^\circ, 30^\circ, 10^\circ, 1^\circ$ 分别代入上式，得，

$$a_1 \approx 0.9003 \frac{v^2}{R}, \bar{a}_2 \approx 0.9886 \frac{v^2}{R} \quad \bar{a}_3 \approx 0.9987 \frac{v^2}{R}, a_4 \approx 1.000 \frac{v^2}{R}$$

以上结果表明, 当 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 时, 匀速率圆周运动的平均加速度趋近于一极限值, 该值即为法向加速度 $\frac{v^2}{R}$.



(a)



(b)

题 1-16 图

1-17 分析 根据运动方程可直接写出其分量式 $x = x(t)$ 和 $y = y(t)$, 从中消去参数 t , 即得质点的轨迹方程. 平均速度是反映质点在一段时间内位置的变化率, 即 $\bar{v} = \frac{\mathbf{r}}{t}$, 它与时间间隔 t 的大小有关, 当 $t \rightarrow 0$ 时, 平均速度的极限即瞬时速度 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$. 切向和法向加速度是指在自然坐标下的分矢量 a_t 和 a_n , 前者只反映质点在切线方向速度大小的变化率, 即 $a_t = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t$, 后者只反映质点速度方向的变化, 它可由总加速度 \mathbf{a} 和 a_t 得到. 在求得 t_1 时刻质点的速度和法向加速度的大小后, 可由公式 $a_n = \frac{v^2}{R}$ 求.

解 (1) 由参数方程 $x = 2.0t$, $y = 19.0 - 2.0t^2$

消去 t 得质点的轨迹方程: $y = 19.0 - 0.50x^2$

(2) 在 $t_1 = 1.00 \text{ s}$ 到 $t_2 = 2.0 \text{ s}$ 时间内的平均速度

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{r}}{t} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{t_2 - t_1} = 2.0\mathbf{i} - 6.0\mathbf{j}$$

(3) 质点在任意时刻的速度和加速度分别为

$$\mathbf{v}(t) = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} = 2.0\mathbf{i} - 4.0t\mathbf{j} \quad \mathbf{a}(t) = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{j} = -4.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \mathbf{j}$$

则 $t_1 = 1.00 \text{ s}$ 时的速度

$$\mathbf{v}(t) \big|_{t=1\text{s}} = 2.0 \mathbf{i} - 4.0 \mathbf{j}$$

切向和法向加速度分别为

$$\mathbf{a}_t \big|_{t=1\text{s}} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t = \frac{d}{dt} (\sqrt{v_x^2 + v_y^2}) \mathbf{e}_t = 3.58 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \mathbf{e}_t \quad \mathbf{a}_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} \mathbf{e}_n = 1.79 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \mathbf{e}_n$$

(4) $t = 1.0 \text{ s}$ 质点的速度大小为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 4.47 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{则} \quad \frac{v^2}{a_n} = 11.17 \text{ m}$$

1-18 分析 物品空投后作平抛运动。忽略空气阻力的条件下，由运动独立性原理知，物品在空中沿水平方向作匀速直线运动，在竖直方向作自由落体运动。到达地面目标时，两方向上运动时间是相同的。因此，分别列出其运动方程，运用时间相等的条件，即可求解。

此外，平抛物体在运动过程中只存在竖直向下的重力加速度。为求特定时刻 t 时物体的切向加速度和法向加速度，只需求出该时刻它们与重力加速度之间的夹角或。由图可知，在特定时刻 t ，物体的切向加速度和水平线之间的夹角，可由此时刻的两速度分量 v_x 、 v_y 求出，这样，也就可将重力加速度 g 的切向和法向分量求得。

解 (1) 取如图所示的坐标，物品下落时在水平和竖直方向的运动方程分别为

$$x = vt, \quad y = \frac{1}{2} gt^2$$

飞机水平飞行速度 $v = 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ，飞机离地面的高度 $y = 100 \text{ m}$ ，由上述两式可得目标在飞机正下方前的距离

$$x = v \sqrt{\frac{2y}{g}} = 452 \text{ m}$$

(2) 视线和水平线的夹角为

$$= \arctan \frac{y}{x} = 12.5^\circ$$

(3) 在任意时刻物品的速度与水平轴的夹角为

$$= \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \frac{gt}{v}$$

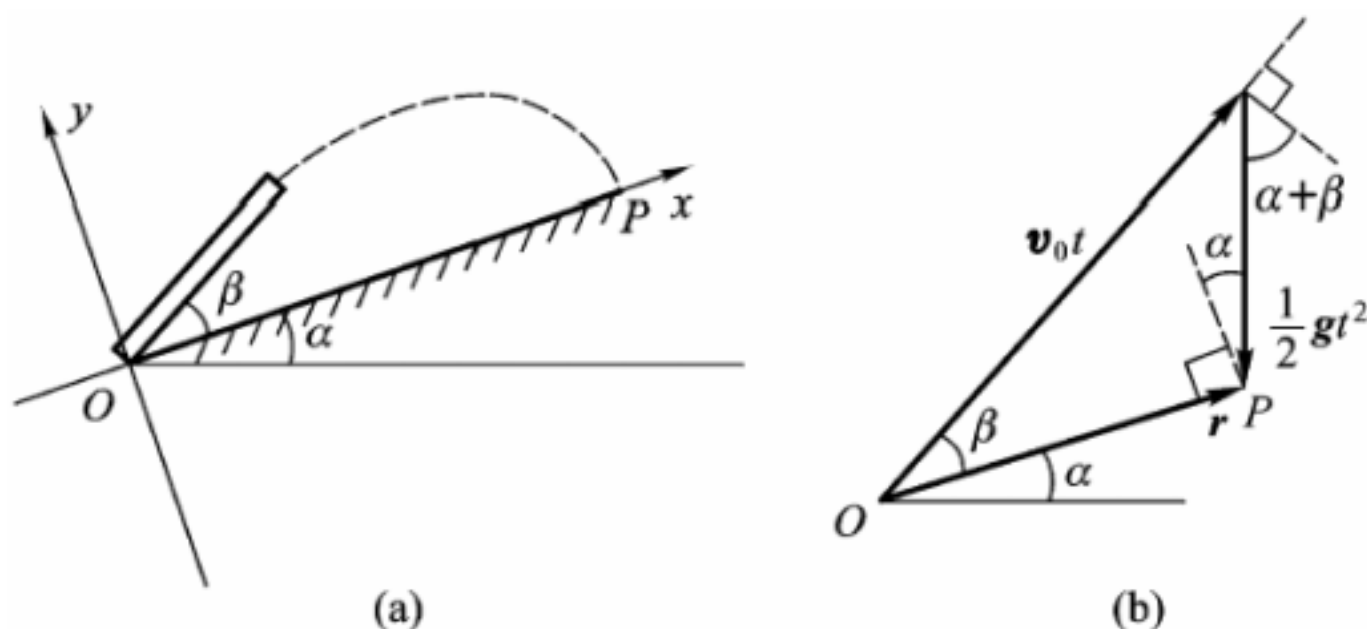
取自然坐标，物品在抛出 2s 时，重力加速度的切向分量与法向分量分别为

$$a_t = g \sin \left(\arctan \frac{gt}{v} \right) = 1.88 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a_n = g \cos \left(\arctan \frac{gt}{v} \right) = 9.62 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

1-19 分析 这是一个斜上抛运动，看似简单，但针对题目所问，如不能灵活运用叠加原理，建立一个恰当的坐标系，将运动分解的话，求解起来并不容易。现建立如图 (a) 所示坐标系，则炮弹在 x 和 y 两个方向的分运动均为匀减速直线运动，其初速度分别为 $v_0 \cos \theta$ 和 $v_0 \sin \theta$ ，其加速度分别为 $g \sin \theta$ 和 $g \cos \theta$ 。在此坐标系中炮弹落地时，应有 $y = 0$ ，则 $x = OP$ 。如欲使炮弹垂直击中坡面，则应满足 $v_x = 0$ ，直接列出有关运动方程和速度方程，即可求解。由于本

题中加速度 g 为恒矢量. 故第一问也可由运动方程的矢量式计算, 即 $\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} g t^2$, 做出炮弹落地时的矢量图 [如图 (B) 所示], 由图中所示几何关系也可求得 \overrightarrow{OP} (即图中的 r 矢量).



题 1-19 图

解1 由分析知, 炮弹在图 (a) 所示坐标系中两个分运动方程为

$$x = v_0 t \cos \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha \quad (1) \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \cos \alpha \quad (2)$$

令 $y = 0$ 求得时间 t 后再代入式 (1) 得

$$OP = x = \frac{2v_0^2 \sin \alpha}{g \cos^2 \alpha} (\cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha) = \frac{2v_0^2 \sin \alpha}{g \cos^2 \alpha} \cos(2\alpha)$$

解2 做出炮弹的运动矢量图, 如图 (b) 所示, 并利用正弦定理, 有

$$\frac{|\vec{r}|}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{v_0 t}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{\frac{1}{2} g t^2}{\sin(\alpha + \beta)}$$

从中消去 t 后也可得到同样结果.

(2) 由分析知, 如炮弹垂直击中坡面应满足 $y = 0$ 和 $v_x = 0$, 则

$$v_x = v_0 \cos \alpha - g t \sin \alpha = 0 \quad (3)$$

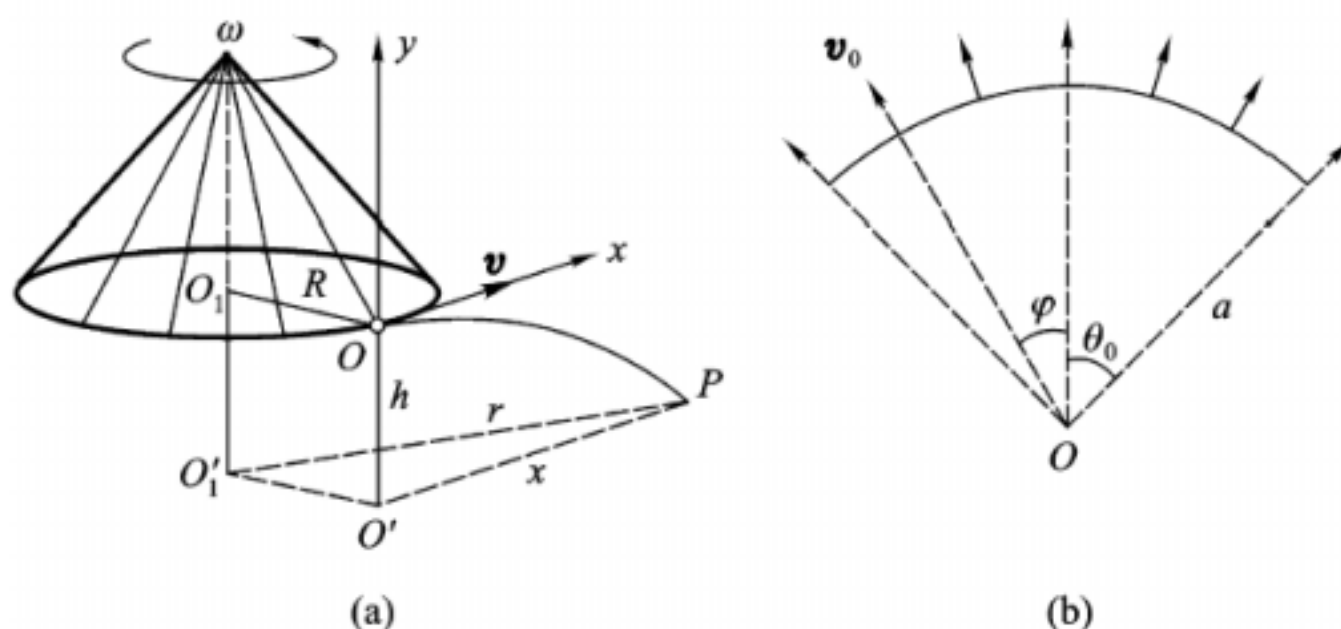
由 (2)(3) 两式消去 t 后得

$$\tan \alpha = \frac{1}{2 \sin \alpha}$$

由此可知, 只要角 α 和 β 满足上式, 炮弹就能垂直击中坡面, 而与 v_0 的大小无关.

讨论 如将炮弹的运动按水平和竖直两个方向分解, 求解本题将会比较困难, 有兴趣读者不妨自己体验一下.

1-20 分析 选定伞边缘 O 处的雨滴为研究对象, 当伞以角速度 ω 旋转时, 雨滴将以速度 v 沿切线方向飞出, 并作平抛运动. 建立如图 (a) 所示坐标系, 列出雨滴的运动方程并考虑图中所示几何关系, 即可求证. 由此可以想像如果让水从一个旋转的有很多小孔的喷头中飞出, 从不同小孔中飞出的水滴将会落在半径不同的圆周上, 为保证均匀喷洒对喷头上小孔的分布



题 1-20 图

解 (1) 如图 (a) 所示坐标系中, 雨滴落地的运动方程为

$$x = vt = R \omega t \quad (1) \quad y = \frac{1}{2} g t^2 = h \quad (2)$$

由式 (1)(2) 可得
$$x^2 = \frac{2R^2 \omega^2 h}{g}$$

由图 (a) 所示几何关系得雨滴落地处圆周的半径为

$$r = \sqrt{x^2 + R^2} = R \sqrt{1 + \frac{2\omega^2 h}{g}}$$

(2) 常用草坪喷水器采用如图 (b) 所示的球面喷头 ($\theta_0 = 45^\circ$) 其上有大量小孔. 喷头旋转时, 水滴以初速度 v_0 从各个小孔中喷出, 并作斜上抛运动, 通常喷头表面基本上与草坪处在同一水平面上. 则以 θ_0 角喷射的水柱射程为

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

为使喷头周围的草坪能被均匀喷洒, 喷头上的小孔数不但很多, 而且还不能均匀分布, 这是喷头设计中的一个关键问题.

1-21 分析 被踢出后的足球, 在空中作斜抛运动, 其轨迹方程可由质点在竖直平面内的运动方程得到. 由于水平距离 x 已知, 球门高度又限定了在 y 方向的范围, 故只需将 x 、 y 值代入即可求出.

解 取图示坐标系 Oxy , 由运动方程

$$x = v \cos \theta, \quad y = v \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2$$

消去 t 得轨迹方程

$$y = x \tan \theta - \frac{g}{2v^2} (1 + \tan^2 \theta) x^2$$

以 $x = 25.0 \text{ m}$, $v = 20.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 及 3.44 m $y = 0$ 代入后, 可解得

$$71.11^\circ \quad 1 \quad 69.92^\circ \quad 27.12^\circ \quad 2 \quad 18.89^\circ$$

如何理解上述角度的范围? 在初速一定的条件下, 球击中球门底线或球门上缘都将对应

有两个不同的投射倾角 (如图所示) . 如果以 $\theta > 71.11^\circ$ 或 $\theta < 18.89^\circ$ 踢出足球 , 都将因射程不足而不能直接射入球门 ; 由于球门高度的限制 , θ 角也并非能取 71.11° 与 18.89° 之间的任何值 . 当倾角取值为 $27.92^\circ < \theta < 69.92^\circ$ 时 , 踢出的足球将越过门缘而离去 , 这时球也不能射入球门 . 因此可取的角度范围只能是解中的结果 .

1-22 分析 在自然坐标中 , s 表示圆周上从某一点开始的曲线坐标 . 由给定的运动方程 $s = s(t)$, 对时间 t 求一阶、二阶导数 , 即是沿曲线运动的速度 v 和加速度的切向分量 a_t , 而加速度的法向分量为 $a_n = v^2 / R$. 这样 , 总加速度为 $a = a_t e_t + a_n e_n$. 至于质点在 t 时间内通过的路程 , 即为曲线坐标的改变量 $s = s_t - s_0$. 因圆周长为 $2\pi R$, 质点所转过的圈数自然可求得 .

解 (1) 质点作圆周运动的速率为

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 - bt$$

其加速度的切向分量和法向分量分别为

$$a_t = \frac{d^2 s}{dt^2} = -b, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 - bt)^2}{R}$$

故加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{\frac{a_t^2 b^2 + (v_0 - bt)^4}{R}}$$

其方向与切线之间的夹角为

$$= \arctan \frac{a_n}{a_t} = \arctan \left[-\frac{(v_0 - bt)^2}{Rb} \right]$$

(2) 要使 $|a| = b$, 由 $\frac{1}{R} \sqrt{R^2 b^2 + (v_0 - bt)^4} = b$ 可得

$$t = \frac{v_0}{b}$$

(3) 从 $t = 0$ 开始到 $t = v_0/b$ 时, 质点经过的路程为

$$s = s_t - s_0 = \frac{v_0^2}{2b}$$

因此质点运行的圈数为

$$n = \frac{s}{2\pi R} = \frac{v_0^2}{4\pi bR}$$

1-23 分析 首先应该确定角速度的函数关系 $\omega = kt^2$. 依据角量与线量的关系由特定时刻的速度值可得相应的角速度 , 从而求出式中的比例系数 k , $\omega = \omega(t)$ 确定后 , 注意到运动的角量描述与线量描述的相应关系 , 由运动学中两类问题求解的方法 (微分法和积分法), 即可得到特定时刻的角加速度、切向加速度和角位移 .

解 因 $R = v$, 由题意 $v = kt^2$ 得比例系数

$$k = \frac{v}{t^2} = \frac{v}{Rt^2} = 2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-3} \quad \text{所以} \quad \omega = \omega(t) = 2t^2$$

则 $t = 0.5 \text{ s}$ 时的角速度、角加速度和切向加速度分别为

$$\omega = 2t^2 = 0.5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = 4t = 2.0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \quad a_t = R\alpha = 1.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\text{总加速度} \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t = R\boldsymbol{\epsilon}_t + R^2\boldsymbol{\epsilon}_n \quad a = \sqrt{(R\alpha)^2 + (R^2)^2} = 1.01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

在 2.0 s 内该点所转过的角度

$$\theta - \theta_0 = \int_0^2 \omega dt = \int_0^2 2t^2 dt = \frac{2}{3} t^3 \Big|_0^2 = 5.33 \text{ rad}$$

1-24 分析 掌握角量与线量、角位移方程与位矢方程的对应关系，应用运动学求解的方法即可得到。

解 (1) 由于 $\omega = 2 + 4t^3$ ，则角速度 $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 12t^2$ 。在 $t = 2 \text{ s}$ 时，法向加速度和切向加速度的数值分别为

$$a_n|_{t=2\text{s}} = r\omega^2 = 2.30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad a_t|_{t=2\text{s}} = r\alpha = 4.80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$(2) \text{ 当 } a_t = a/2 = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + a_t^2} \text{ 时, 有 } 3a_t^2 = a_n^2, \text{ 即}$$

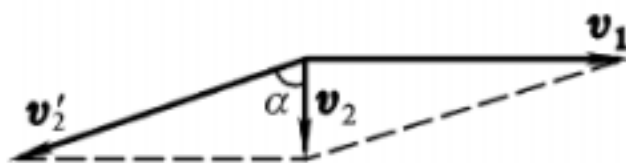
$$3(24rt^2)^2 = r^2(12t^2)^4 \quad \text{得} \quad t^3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{此时刻的角位置为} \quad \theta = 2 + 4t^3 = 3.15 \text{ rad}$$

$$(3) \text{ 要使 } a_n = a_t, \text{ 则有 } 3(24rt^2)^2 = r^2(12t^2)^4 \quad t = 0.55 \text{ s}$$

1-25 分析 这是一个相对运动的问题。设雨滴为研究对象，地面为静止参考系 S ，火车为动参考系 S' 。 v_1 为 S' 相对 S 的速度， v_2 为雨滴相对 S 的速度，利用相对运动速度的关系即可解。解 以地面为参考系，火车相对地面运动的速度为 v_1 ，雨滴相对地面竖直下落的速度为 v_2 ，旅客看到雨滴下落的速度 v_2' 为相对速度，它们之间的关系为 $\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$ (如图所示)，于是可得

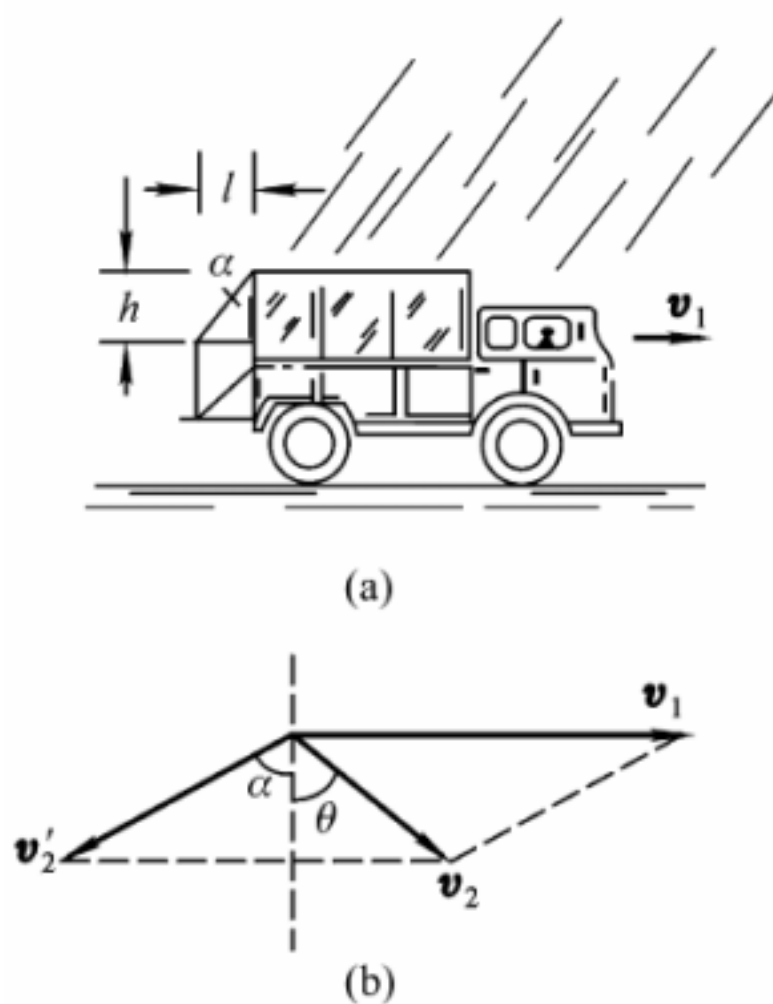
$$v_2' = \frac{v_1}{\tan 75^\circ} = 5.36 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$



题 1-25 图

1-26 分析 这也是一个相对运动的问题。可视雨点为研究对象，地面为静参考系 S ，汽车为动参考系 S' 。如图 (a) 所示，要使物体不被淋湿，在车上观察雨点下落的方向 (即雨点相对于汽车的运动速度 v_2' 的方向) 应满足 $\theta \geq \arctan \frac{l}{h}$ 。再由相对速度的矢量关系

$$\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \text{ 即可求出所需车速 } v_1.$$



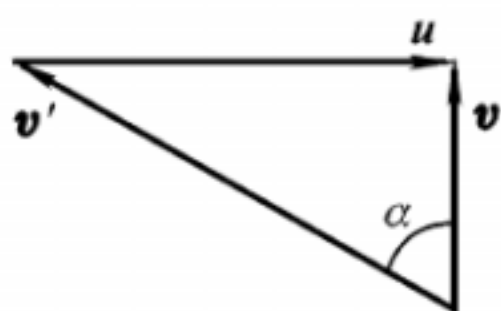
题 1-26 图

解 由 $v_2' = v_2 - v_1$ [图 (b)] , 有

$$= \arctan \frac{v_1 - v_2 \sin \theta}{v_2 \cos \theta}$$

而要使 $\alpha \geq \arctan \frac{l}{h}$, 则 $\frac{v_1 - v_2 \sin \theta}{v_2 \cos \theta} \geq \frac{l}{h}$ $v_1 \geq v_2 \left(\frac{l \cos \theta}{h} + \sin \theta \right)$

1-27 分析 船到达对岸所需时间是由船相对于岸的速度 v 决定的 . 由于水流速度 u 的存在, v 与船在静水中划行的速度 v' 之间有 $v = u + v'$ (如图所示) . 若要使船到达正对岸 , 则必须使 v 沿正对岸方向 ; 在划速一定的条件下 , 若要用最短时间过河 , 则必须使 v 有极大值 .



题 1-27 图

解 (1) 由 $v = u + v'$ 可知 $\alpha = \arcsin \frac{u}{v'}$, 则船到达正对岸所需时间为

$$t = \frac{d}{v} = \frac{d}{v' \cos \alpha} = 1.05 \times 10^3 \text{ s}$$

(2) 由于 $v = v' \cos \alpha$, 在划速 v' 一定的条件下 , 只有当 $\alpha = 0$ 时, v 最大 (即 $v = v'$) , 此时 , 船过河时间 $t = d / v'$, 船到达距正对岸为 l 的下游处 , 且有

$$l = ut' = u \frac{d}{v'} = 5.0 \times 10^2 \text{ m}$$

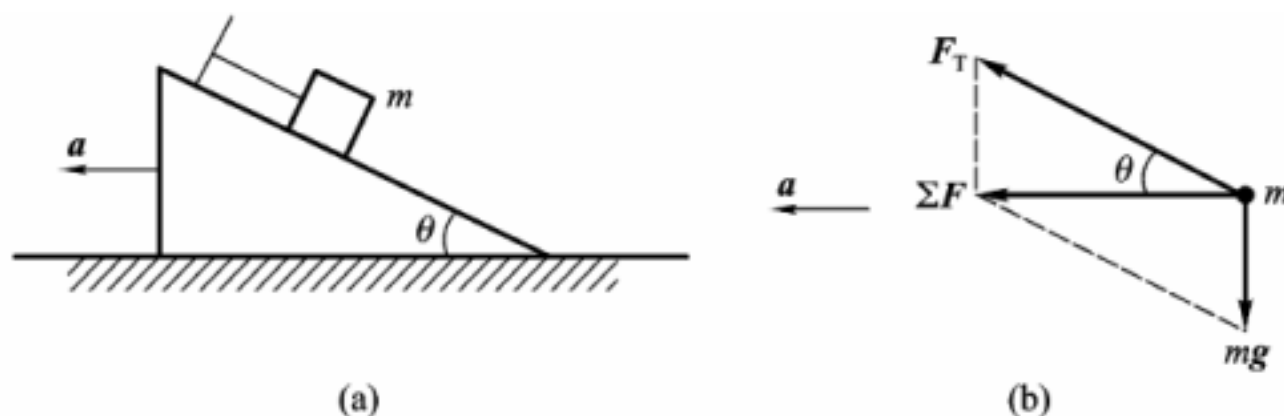
1-28 分析 该问题涉及到运动的相对性. 如何将已知质点相对于观察者 O 的运动转换到相对于观察者 O' 的运动中去, 其实质就是进行坐标变换, 将系 O 中一动点 (x, y) 变换至系 O' 中的点 (x', y') . 由于观察者 O' 相对于观察者 O 作匀速运动, 因此, 该坐标变换是线性的.

解 取 Oxy 和 $O'x'y'$ 分别为观察者 O 和观察者 O' 所在的坐标系, 且使 Ox 和 $O'x$ 两轴平行. 在 $t = 0$ 时, 两坐标原点重合. 由坐标变换得

$$x' = x - vt = vt - vt = 0 \quad y' = y = \frac{1}{2} gt^2$$

加速度
$$a = a_y' = \frac{d^2 y'}{dt^2} = g$$

由此可见, 动点相对于系 O' 是在 y' 方向作匀变速直线运动. 动点在两坐标系中加速度相同, 这也正是伽利略变换的必然结果.



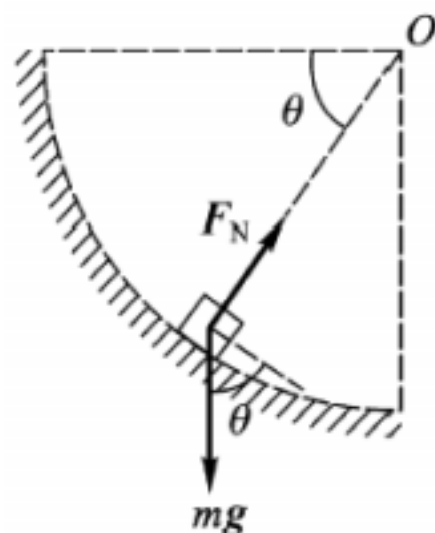
题 2-1 图

2-1 分析与解 当物体离开斜面瞬间, 斜面对物体的支持力消失为零, 物体在绳子拉力 F_T (其方向仍可认为平行于斜面) 和重力作用下产生平行水平面向左的加速度 a , 如图 (b) 所示, 由其可解得合外力为 $m g \cot \theta$, 故选 (D). 求解的关键是正确分析物体刚离开斜面瞬间的物体受力情况和状态特征.

2-2 分析与解 与滑动摩擦力不同的是, 静摩擦力可在零与最大值 μF_N 范围内取值. 当 F_N 增加时, 静摩擦力可取的最大值成正比增加, 但具体大小则取决于被作用物体的运动状态. 由题意知, 物体一直保持静止状态, 故静摩擦力与重力大小相等, 方向相反, 并保持不变, 故选 (A).

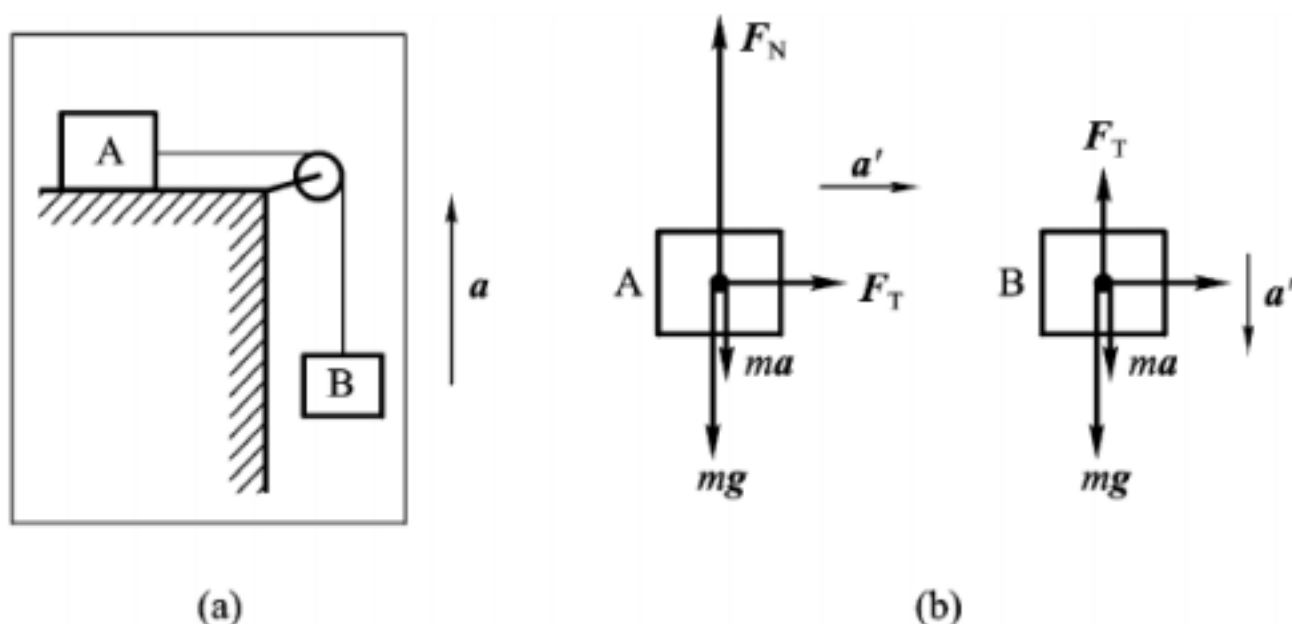
2-3 分析与解 由题意知, 汽车应在水平面内作匀速率圆周运动, 为保证汽车转弯时不侧向打滑, 所需向心力只能由路面与轮胎间的静摩擦力提供, 能够提供的最大向心力应为 μF_N . 由此可算得汽车转弯的最大速率应为 $v = \mu R g$. 因此只要汽车转弯时的实际速率不大于此值, 均能保证不侧向打滑. 应选 (C).

2-4 分析与解 由图可知, 物体在下滑过程中受到大小和方向不变的重力以及时刻指向圆轨道中心的轨道支持力 F_N 作用, 其合外力方向并非指向圆心, 其大小和方向均与物体所在位置有关. 重力的切向分量 $(m g \cos \theta)$ 使物体的速率将会不断增加 (由机械能守恒亦可判断), 则物体作圆周运动的向心力 (又称法向力) 将不断增大, 由轨道法向方向上的动力学方程 $F_N - m g \sin \theta = m \frac{v^2}{R}$ 可判断, 随 θ 的不断增大过程, 轨道支持力 F_N 也将不断增大, 由此可见应选 (B).



题 2-4 图

2-5 分析与解 本题可考虑对 A、B 两物体加上惯性力后，以电梯这个非惯性参考系进行求解。此时 A、B 两物体受力情况如图 (b) 所示，图中 a 为 A、B 两物体相对电梯的加速度， ma 为惯性力。对 A、B 两物体应用牛顿第二定律，可解得 $F_T = 5/8 mg$ 。故选 (A)。



题 2-5 图

讨论 对于习题 2-5 这种类型的物理问题，往往从非惯性参考系（本题为电梯）观察到的运动图像较为明确，但由于牛顿定律只适用于惯性参考系，故从非惯性参考系求解力学问题时，必须对物体加上一个虚拟的惯性力。如以地面为惯性参考系求解，则两物体的加速度 a_A 和 a_B 均应对地而言，本题中 a_A 和 a_B 的大小与方向均不相同。其中 a_A 应斜向上。对 a_A 、 a_B 、 a 和 a' 之间还要用到相对运动规律，求解过程较繁。有兴趣的读者不妨自己尝试一下。

2-6 分析 动力学问题一般分为两类：(1) 已知物体受力求其运动情况；(2) 已知物体的运动情况分析其所受的力。当然，在一个具体题目中，这两类问题并无截然的界限，且都是以加速度作为中介，把动力学方程和运动学规律联系起来。本题关键在列出动力学和运动学方程后，解出倾角与时间的函数关系 $\theta = f(t)$ ，然后运用对 t 求极值的方法即可得出数值来。

解 取沿斜面为坐标轴 Ox 原点 O 位于斜面顶点，则由牛顿第二定律有

$$mg \sin \theta - mg \mu \cos \theta = ma \quad (1)$$

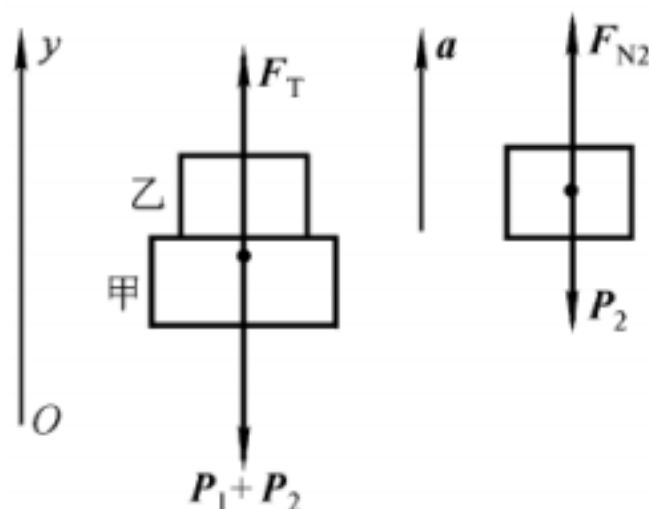
又物体在斜面上作匀变速直线运动，故有

$$\frac{l}{\cos \theta} = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} g (\sin \theta - \mu \cos \theta) t^2 \quad \text{则} \quad t = \sqrt{\frac{2l}{g \cos \theta (\sin \theta - \mu \cos \theta)}} \quad (2)$$

为使下滑的时间最短，可令 $\frac{dt}{d\alpha} = 0$ ，由式 (2) 有

$$-\sin(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + \cos(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) = 0 \quad \text{则可得} \quad \tan 2\alpha = -\frac{1}{\mu}, \alpha = 49^\circ$$

此时
$$t = \sqrt{\frac{2l}{g\cos(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}} = 0.99 \text{ s}$$



题 2-7 图

2-7 分析 预制板、吊车框架、钢丝等可视为一组物体。处理动力学问题通常采用“隔离体”的方法，分析物体所受的各种作用力，在所选定的惯性系中列出它们各自的动力学方程。根据连接体中物体的多少可列出相应数目的方程式。结合各物体之间的相互作用和联系，可解决物体的运动或相互作用力。

解 按题意，可分别取吊车（含甲、乙）和乙作为隔离体，画示力图，并取竖直向上为 Oy 轴正方向（如图所示）。当框架以加速度 a 上升时，有

$$F_T - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a \quad (1), \quad F_{N2} - m_2g = m_2a \quad (2)$$

解上述方程，得

$$F_T = (m_1 + m_2)(g + a) \quad (3) \quad F_{N2} = m_2(g + a) \quad (4)$$

(1) 当整个装置以加速度 $a = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 上升时，由式 (3) 可得绳所受张力的值为

$$F_T = 5.94 \times 10^3 \text{ N}$$

乙对甲的作用力为 $F_{N2} = -F_{N2} = -m_2(g + a) = -1.98 \times 10^3 \text{ N}$

(2) 当整个装置以加速度 $a = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 上升时，得绳张力的值为

$$F_T = 3.24 \times 10^3 \text{ N}$$

此时，乙对甲的作用力则为 $F_{N2} = -1.08 \times 10^3 \text{ N}$

由上述计算可见，在起吊相同重量的物体时，由于起吊加速度不同，绳中所受张力也不同，加速度大，绳中张力也大。因此，起吊重物时必须缓慢加速，以确保起吊过程的安全。

2-8 分析 该题为连接体问题，同样可用隔离体法求解。分析时应注意到绳中张力大小处处相等是有条件的，即必须在绳的质量和伸长可忽略、滑轮与绳之间的摩擦不计的前提下成立。同时也要注意张力方向是不同的。

解 分别对物体和滑轮作受力分析 [图 (b)]。由牛顿定律分别对物体 A、B 及滑轮列动力学方程，有

$$m_A g - F_T = m_A a \quad (1)$$

$$F_{T1} - F_f = m_B a \quad (2)$$

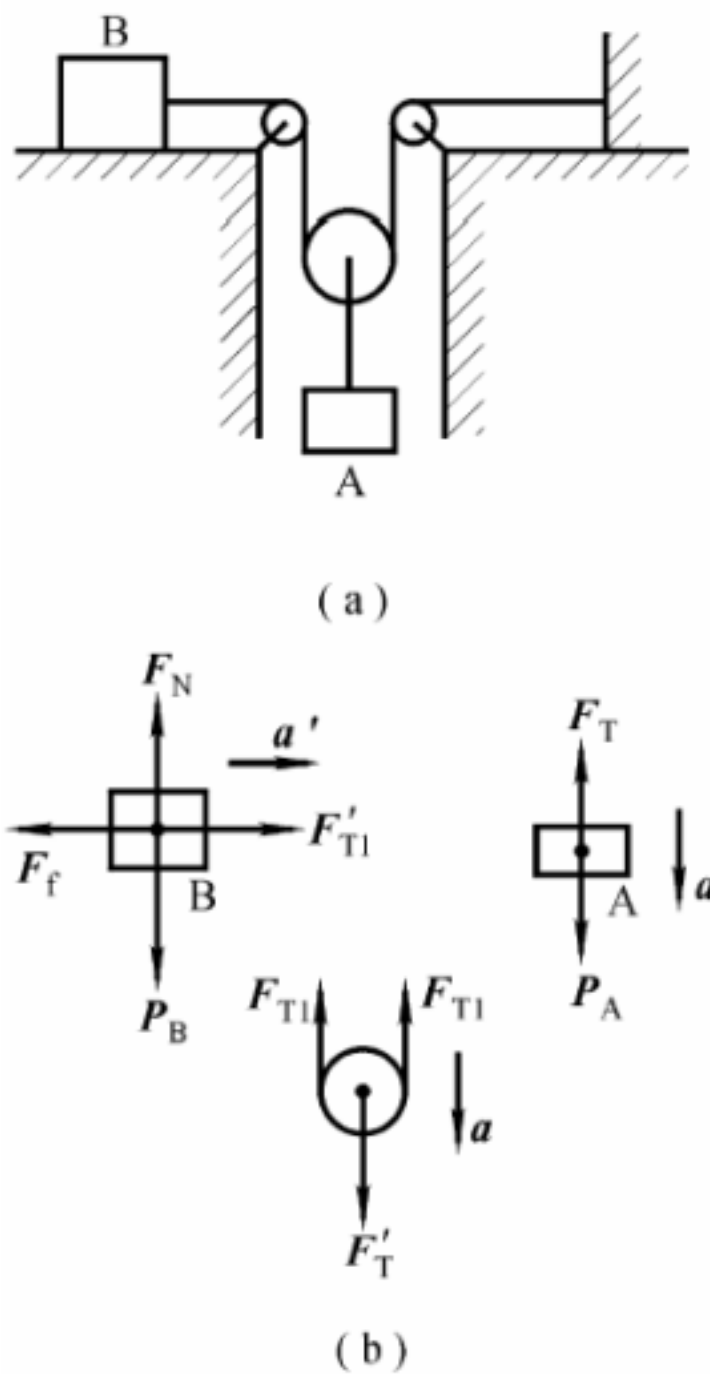
$$F_T - 2F_{T1} = 0 \quad (3)$$

考虑到 $m_A = m_B = m$, $F_T = F_{T1}$, $F_{T1} = F_{T2}$, $a = 2a$, 可联立解得物体与桌面的摩擦力

$$F_f = \frac{mg - (m + 4m)a}{2} = 7.2 \text{ N}$$

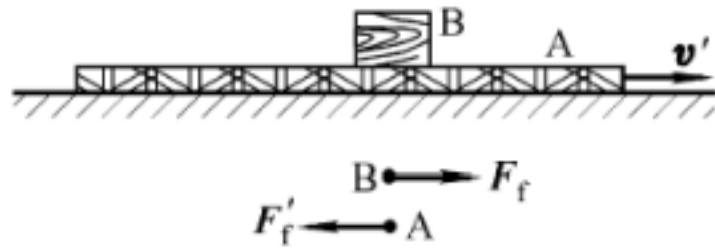
讨论 动力学问题的一般解题步骤可分为：(1) 分析题意，确定研究对象，分析受力，选定坐标；(2) 根据物理的定理和定律列出原始方程组；(3) 解方程组，得出文字结果；(4) 核对量纲，再代入数据，计算出结果来。

2-9 分析 当木块 B 平稳地轻轻放至运动着的平板 A 上时，木块的初速度可视为零，由于它与平板之间速度的差异而存在滑动摩擦力，该力将改变它们的运动状态。根据牛顿定律可得到它们各自相对地面的加速度。换以平板为参考系来分析，此时，木块以初速度 $-v$ （与平板运动速率大小相等、方向相反）作匀减速运动，其加速度为相对加速度，按运动学公式即可解得。



题 2-8 图

该题也可应用第三章所讲述的系统的动能定理来解。将平板与木块作为系统，该系统的动能由平板原有的动能变为木块和平板一起运动的动能，而它们的共同速度可根据动量定理求得。又因为系统内只有摩擦力做功，根据系统的动能定理，摩擦力的功应等于系统动能的增量。木块相对平板移动的距离即可求出。



题 2-9 图

解1 以地面为参考系，在摩擦力 $F_f = \mu mg$ 的作用下，根据牛顿定律分别对木块、平板列出动力学方程

$$F_f = \mu mg = ma_1 \quad F_{f2} = -F_f = m_2 a_2$$

a_1 和 a_2 分别是木块和木板相对地面参考系的加速度。若以木板为参考系，木块相对平板的加速度 $a = a_1 + a_2$ ，木块相对平板以初速度 $-v'$ 作匀减速运动直至最终停止。由运动学规律有

$$v'^2 = 2as$$

由上述各式可得木块相对于平板所移动的距离为

$$s = \frac{m'v'^2}{2\mu g(m' + m)}$$

解2 以木块和平板为系统，它们之间一对摩擦力作的总功为

$$W = F_f(s + l) - F_{f2}l = \mu mgs$$

式中 l 为平板相对地面移动的距离。

由于系统在水平方向上不受外力，当木块放至平板上时，根据动量守恒定律，有

$$m'v' = (m' + m)v$$

由系统的动能定理，有

$$\mu mgs = \frac{1}{2}m'v'^2 - \frac{1}{2}(m' + m)v^2$$

由上述各式可得
$$s = \frac{m'v'^2}{2\mu g(m' + m)}$$

2-10 分析 维持钢球在水平面内作匀角速度转动时，必须使钢球受到一与向心加速度相对应的力（向心力），而该力是由碗内壁对球的支持力 F_N 的分力来提供的，由于支持力 F_N 始终垂直于碗内壁，所以支持力的大小和方向是随 θ 而变的。取图示 Oxy 坐标，列出动力学方程，即可求解钢球距碗底的高度。

解 取钢球为隔离体，其受力分析如图 (b) 所示。在图示坐标中列动力学方程

$$F_N \sin \theta = ma_n = mR \omega^2 \sin \theta \quad (1)$$

$$F_N \cos \theta = mg \quad (2)$$

且有
$$\cos \theta = \frac{(R - h)}{R} \quad (3)$$

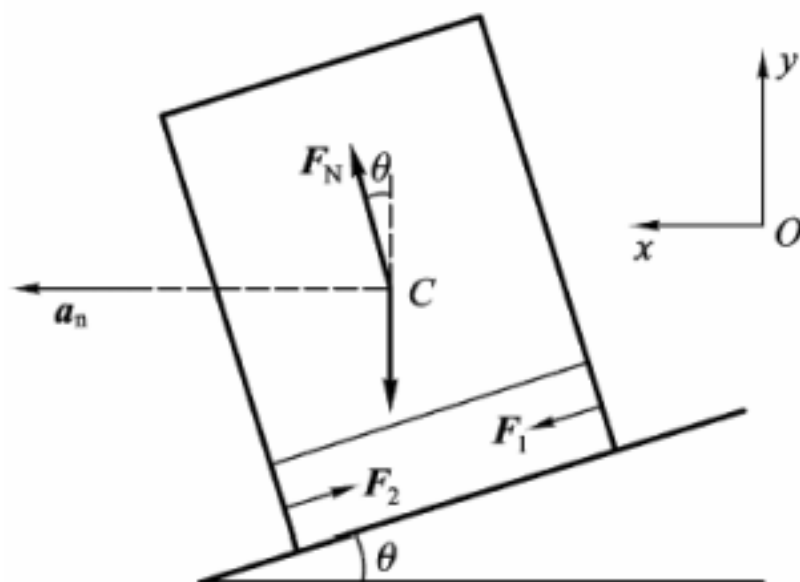
由上述各式可解得钢球距碗底的高度为

$$h = R - \frac{g}{\omega^2}$$

可见， h 随 ω 的变化而变化。

2-11 分析 如题所述，外轨超高的目的欲使火车转弯的所需向心力仅由轨道支持力的水平分量 $F_N \sin \theta$ 提供（式中 θ 为路面倾角）。从而不会对内外轨产生挤压。与其对应的

是火车转弯时必须以规定的速率 v_0 行驶。当火车行驶速率 $v \neq v_0$ 时,则会产生两种情况: 如图所示,如 $v > v_0$ 时,外轨将会对车轮产生斜向内的侧压力 F_1 , 以补偿原向心力的不足, 如 $v < v_0$ 时,则内轨对车轮产生斜向外的侧压力 F_2 , 以抵消多余的向心力, 无论哪种情况火车都将对外轨或内轨产生挤压。由此可知, 铁路部门为什么会在每个铁轨的转弯处规定时速, 从而确保行车安全。



题 2-11 图

解 (1) 以火车为研究对象, 建立如图所示坐标系。据分析, 由牛顿定律有

$$F_N \sin \theta = m \frac{v^2}{R} \quad (1) \quad F_N \cos \theta - mg = 0 \quad (2)$$

解(1)(2) 两式可得火车转弯时规定速率为

$$v_0 = \sqrt{gR \tan \theta}$$

(2) 当 $v > v_0$ 时, 根据分析有

$$F_N \sin \theta + F_1 \cos \theta = m \frac{v^2}{R} \quad (3) \quad F_N \cos \theta - F_1 \sin \theta - mg = 0 \quad (4)$$

解(3)(4) 两式, 可得外轨侧压力为

$$F_1 = m \left(\frac{v^2}{R} \cos \theta - g \sin \theta \right)$$

当 $v < v_0$ 时, 根据分析有

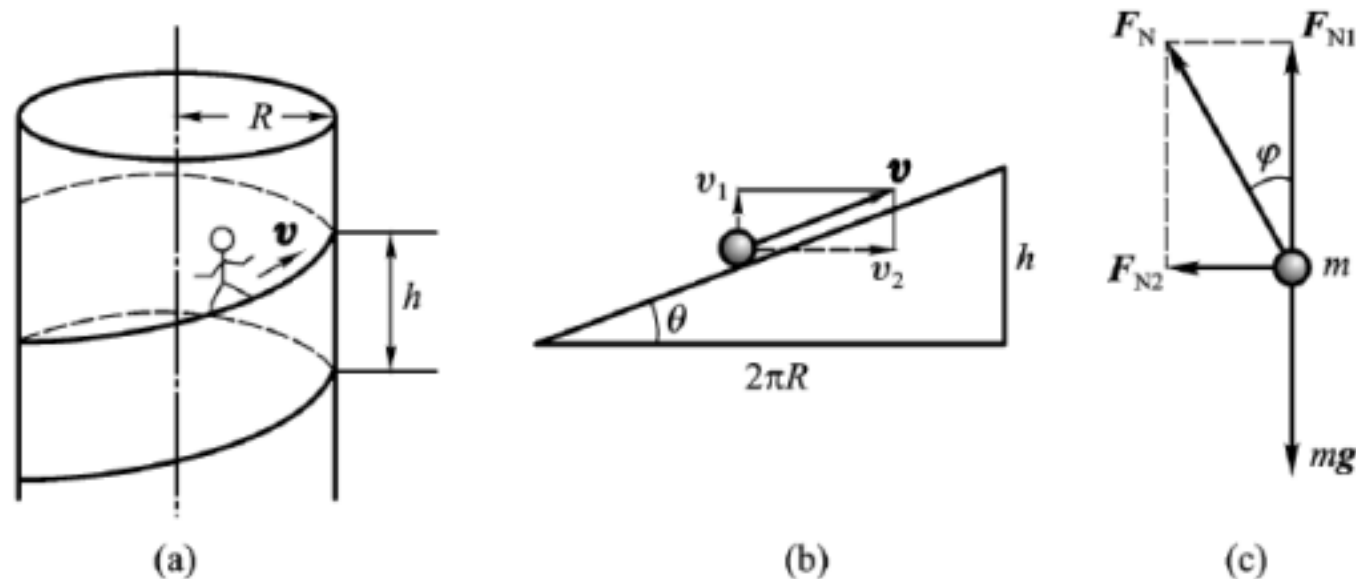
$$F_N \sin \theta - F_2 \cos \theta = m \frac{v^2}{R} \quad (5) \quad F_N \cos \theta + F_2 \sin \theta - mg = 0 \quad (6)$$

解(5)(6) 两式, 可得内轨侧压力为

$$F_2 = m \left(g \sin \theta - \frac{v^2}{R} \cos \theta \right)$$

2-12 分析 杂技演员(连同摩托车)的运动可以看成一个水平面内的匀速率圆周运动和一个竖直向上匀速直线运动的叠加。其旋转一周所形成的旋线轨迹展开后, 相当于如图(b)所示的斜面。把演员的运动速度分解为图示的 v_1 和 v_2 两个分量, 显然 v_1 是竖直向上作匀速直线运动的分速度, 而 v_2 则是绕圆筒壁作水平圆周运动的分速度, 其中向心力由筒壁对演员的支持力 F_N 的水平分量 F_{N2} 提供, 而竖直分量 F_{N1} 则与重力相平衡。如图(c)所示, 其中 θ 角为摩

托车与筒壁所夹角，运用牛顿定律即可求得筒壁支持力的大小和方向力。



题 2-12 图

解 设杂技演员连同摩托车整体为研究对象，据(b)(c) 两图应有

$$F_{N1} - mg = 0 \quad (1) \quad F_{N2} = m \frac{v^2}{R} \quad (2)$$

$$v_2 = v \cos \theta = v \frac{2R}{\sqrt{(2R)^2 + h^2}} \quad (3) \quad F_N = \sqrt{F_{N1}^2 + F_{N2}^2} \quad (4)$$

以式(3)代入式(2)，得

$$F_{N2} = \frac{m}{R} \frac{4R^2 v^2}{4R^2 + h^2} = \frac{4R^2 m v^2}{4R^2 + h^2} \quad (5)$$

将式(1)和式(5)代入式(4)，可求出圆筒壁对杂技演员的作用力（即支承力）大小为

$$F_N = \sqrt{F_{N1}^2 + F_{N2}^2} = m \sqrt{g^2 + \left(\frac{4R^2 v^2}{4R^2 + h^2} \right)^2}$$

与壁的夹角为

$$\theta = \arctan \frac{F_{N2}}{F_{N1}} = \arctan \frac{4R^2 v^2}{(4R^2 + h^2)g}$$

讨论 表演飞车走壁时，演员必须控制好运动速度，行车路线以及摩托车的方位，以确保三者之间满足解题用到的各个力学规律。

2-13 分析 首先应由题图求得两个时间段的 $F(t)$ 函数，进而求得相应的加速度函数，运用积分方法求解题目所问，积分时应注意积分上下限的取值应与两时间段相应的时刻相对应。

解 由题图得

$$F(t) = \begin{cases} 2t, & 0 < t < 5s \\ 35 - 5t, & 5s < t < 7s \end{cases}$$

由牛顿定律可得两时间段质点的加速度分别为

$$a = 2t, \quad 0 < t < 5s \quad a = 35 - 5t, \quad 5s < t < 7s$$

对 $0 < t < 5 \text{ s}$ 时间段, 由 $a = \frac{dv}{dt}$ 得

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt \quad \text{积分后得} \quad v = 5 + t^2$$

再由 $v = \frac{dx}{dt}$ 得 $\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v dt$

积分后得 $x = 2 + 5t + \frac{1}{3}t^3$

将 $t = 5 \text{ s}$ 代入, 得 $v_5 = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 和 $x_5 = 68.7 \text{ m}$

对 $5 \text{ s} < t < 7 \text{ s}$ 时间段, 用同样方法有

$$\int_{v_0}^v dv = \int_{5\text{s}}^t a_2 dt \quad \text{得} \quad v = 35t - 2.5t^2 - 82.5t$$

再由 $\int_{x_5}^x dx = \int_{5\text{s}}^t v dt$ 得 $x = 17.5t^2 - 0.83t^3 - 82.5t + 147.87$

将 $t = 7 \text{ s}$ 代入分别得 $v_7 = 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 和 $x_7 = 142 \text{ m}$

2-14 分析 这是在变力作用下的动力学问题. 由于力是时间的函数, 而加速度 $a = dv/dt$, 这时, 动力学方程就成为速度对时间的一阶微分方程, 解此微分方程可得质点的速度 $v(t)$; 由速度的定义 $v = dx/dt$, 用积分的方法可求出质点的位置.

解 因加速度 $a = dv/dt$, 在直线运动中, 根据牛顿运动定律有

$$120t + 40 = m \frac{dv}{dt}$$

依据质点运动的初始条件, 即 $t_0 = 0$ 时 $v_0 = 6.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 运用分离变量法对上式积分, 得

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t (12.0t + 4.0) dt \quad v = 6.0 + 4.0t + 6.0t^2$$

又因 $v = dx/dt$, 并由质点运动的初始条件: $t_0 = 0$ 时 $x_0 = 5.0 \text{ m}$, 对上式分离变量后积分, 有

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t (6.0 + 4.0t + 6.0t^2) dt$$

$$x = 5.0 + 6.0t + 2.0t^2 + 2.0t^3$$

2-15 分析 飞机连同驾驶员在水平跑道上运动可视为质点作直线运动. 其水平方向所受制动力 F 为变力, 且是时间的函数. 在求速率和距离时, 可根据动力学方程和运动学规律, 采用分离变量法求解.

解 以地面飞机滑行方向为坐标正方向, 由牛顿运动定律及初始条

件, $F = ma = m \frac{dv}{dt} = -kt$ $\int_{v_0}^v dv = \int_0^t -\frac{k}{m} dt$ 得 $v = v_0 - \frac{k}{2m}t^2$

因此, 飞机着陆 10 s 后的速率为

$$v = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

又

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t \left(v_0 - \frac{k}{2m}t^2 \right) dt$$

故飞机着陆后 10 s 内所滑行的距离 $s = x - x_0 = v_0 t - \frac{1}{6} g t^3 = 467 \text{ m}$

2-16 分析 该题可以分为两个过程，入水前是自由落体运动，入水后，物体受重力 P 、浮力 F 和水的阻力 F_f 的作用，其合力是一变力，因此，物体作变加速运动。虽然物体的受力分析比较简单，但是，由于变力是速度的函数（在有些问题中变力是时间、位置的函数），对这类问题列出动力学方程并不复杂，但要从它计算出物体运动的位置和速度就比较困难了。通常需要采用积分的方法去解所列出的微分方程。这也成了解题过程中的难点。在解方程的过程中，特别需要注意到积分变量的统一和初始条件的确定。

解 (1) 运动员入水前可视为自由落体运动，故入水时的速度为

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

运动员入水后，由牛顿定律得 $P - F_f - F = ma$

由题意 $P = F$ 、 $F_f = bv^2$ ，而 $a = dv/dt = v(dv/dy)$ ，代

入上式后得 $-bv^2 = mv(dv/dy)$

考虑到初始条件 $y_0 = 0$ 时， $v_0 = \sqrt{2gh}$ ，对上式积分，有

$$\int_0^y \left(-\frac{m}{b}\right) dy = \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} \quad v = v_0 e^{-by/m} = \sqrt{2gh} e^{-by/m}$$

(2) 将已知条件 $b/m = 0.4 \text{ m}^{-1}$ ， $v = 0.1 v_0$ 代入上式，则得

$$y = -\frac{m}{b} \ln \frac{v}{v_0} = 5.76 \text{ m}$$

2-17 分析 螺旋桨旋转时，叶片上各点的加速度不同，在其各部分两侧的张力也不同；由于叶片的质量是连续分布的，在求叶片根部的张力时，可选取叶片上一小段，分析其受力，列出动力学方程，然后采用积分的方法求解。

解 设叶片根部为原点 O ，沿叶片背离原点 O 的方向为正向，距原点 O 为 r 处的长为 dr 一小段叶片，其两侧对它的拉力分别为 $F_T(r)$ 与 $F_T(r + dr)$ 。叶片转动时，该小段叶片作圆周运动，由牛顿定律有

$$dF_T = F_T(r) - F_T(r + dr) = -\frac{m}{l} \omega^2 r dr$$

由于 $r = l$ 时外侧 $F_T = 0$ ，所以有

$$\int_{F_T(r)}^0 dF_T = \int_r^l \frac{m}{l} \omega^2 r dr \quad F_T(r) = -\frac{m}{2l} \omega^2 (l^2 - r^2) = -\frac{2}{l} \frac{m n^2}{2} (l^2 - r^2)$$

上式中取 $r = 0$ ，即得叶片根部的张力 $F_{T0} = -2.79 \times 10^5 \text{ N}$

负号表示张力方向与坐标方向相反。

2-18 分析 该题可由牛顿第二定律求解。在取自然坐标的情况下，沿圆弧方向的加速度就是切向加速度 a_t ，与其相对应的外力 F_t 是重力的切向分量 $mg \sin \theta$ ，而设法向加速度 a_n 相对应的外力是支持力 F_n 和重力的法向分量 $mg \cos \theta$ 。由此，可分别列出切向和法向的动力学方程 $F_t = m dv/dt$ 和 $F_n = ma_n$ 。由于小球在滑动过程中加速度不是恒定的，因此，需应用积分求解，为使运算简便，可转换积分变量。该题也能应用以小球、圆弧与地球为系统的机械能守恒定律求解小球的速度和角速度，方法比较简便。但它不能直接给出小球与圆弧表面之间的作

用力。

解 小球在运动过程中受到重力 P 和圆轨道对它的支持力 F_N 。取图 (b) 所示的自然坐标系, 由牛顿定律得

$$F_t = -mg \sin \theta = m \frac{dv}{dt} \quad (1) \quad F_n = F_N - mg \cos \theta = m \frac{mv^2}{R} \quad (2)$$

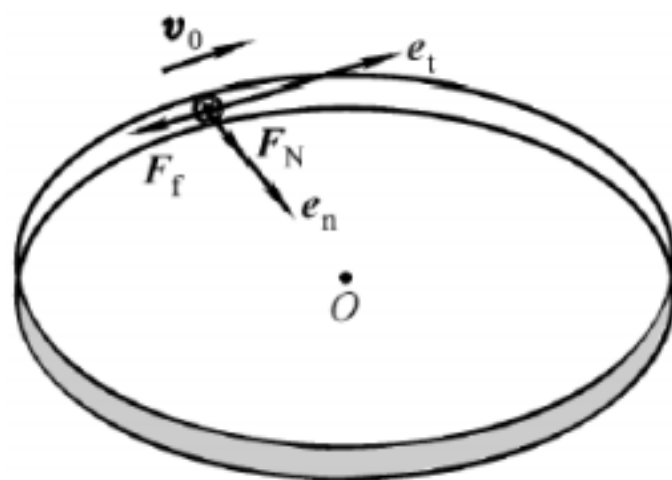
由 $v = \frac{ds}{dt} = \frac{rd\theta}{dt}$, 得 $dt = \frac{rd\theta}{v}$, 代入式 (1), 并根据小球从点 A 运动到点 C 的始末条件, 进行积分, 有

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_{90^\circ}^0 (-rg \sin \theta) d\theta \quad \text{得} \quad v = \sqrt{2rg \cos \theta}$$

则小球在点 C 的角速度为

$$\omega = \frac{v}{r} = \sqrt{2g \cos \theta} / r \quad \text{由式 (2) 得} \quad F_N = m \frac{mv^2}{r} + mg \cos \theta = 3mg \cos \theta$$

由此可得小球对圆轨道的作用力为 $F'_N = -F_N = -3mg \cos \theta$ 负号表示 F'_N 与 e_n 反向。



题 2-19 图

2-19 分析 运动学与动力学之间的联系是以加速度为桥梁的, 因而, 可先分析动力学问题。物体在作圆周运动的过程中, 促使其运动状态发生变化的是圆环内侧对物体的支持力 F_N 和环与物体之间的摩擦力 F_f , 而摩擦力大小与正压力 F_N 成正比, 且 F_f 与 F_N 又是作用力与反作用力, 这样, 就可通过它们把切向和法向两个加速度联系起来了, 从而可用运动学的积分关系式求解速率和路程。

解 (1) 设物体质量为 m 取图中所示的自然坐标, 按牛顿定律, 有

$$F_N = ma_n = \frac{mv^2}{R} \quad F_f = -ma_t = -\frac{dv}{dt}$$

由分析中可知, 摩擦力的大小 $F_f = \mu F_N$, 由上述各式可得

$$\mu \frac{v^2}{R} = -\frac{dv}{dt}$$

取初始条件 $t = 0$ 时 $v = v_0$, 并对上式进行积分, 有

$$\int_0^t dt = -\frac{R}{\mu} \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} \quad v = \frac{Rv_0}{R + v_0 \mu t}$$

(2) 当物体的速率从 v_0 减少到 $1/2 v_0$ 时, 由上式可得所需的时间为

$$t' = \frac{R}{\mu v_0}$$

物体在这段时间内所经过的路程

$$s = \int_0^{t'} v dt = \int_0^{t'} \frac{Rv_0}{R + v_0 \mu t} dt \quad s = \frac{R}{\mu} \ln 2$$

2-20 分析 物体在发射过程中, 同时受到重力和空气阻力的作用, 其合力是速率 v 的一次函数, 动力学方程是速率的一阶微分方程, 求解时, 只需采用分离变量的数学方法即可. 但是, 在求解高度时, 则必须将时间变量通过速度定义式转换为位置变量后求解, 并注意到物体上升至最大高度时, 速率应为零.

解 (1) 物体在空中受重力 mg 和空气阻力 $F_r = kv$ 作用而减速. 由牛顿定律得

$$-mg - kv = m \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

根据始末条件对上式积分, 有

$$\int_0^t dt = -m \int_{v_0}^v \frac{dv}{mg + kv} \quad t = \frac{m}{k} \ln \left(1 + \frac{kv_0}{mg} \right) \approx 6.11 \text{ s}$$

(2) 利用 $\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dy}$ 的关系代入式 (1), 可得

$$-mg - kv = mv \frac{dv}{dy}$$

分离变量后积分

$$\int_0^y dy = \int_{v_0}^0 - \frac{mvdv}{mg + kv} \quad \text{故} \quad y = -\frac{m}{k} \left[\frac{mg}{k} \ln \left(1 + \frac{kv_0}{mg} \right) - v_0 \right] \approx 183 \text{ m}$$

讨论 如不考虑空气阻力, 则物体向上作匀减速运动. 由公式 $t = \frac{v_0}{g}$ 和 $y = \frac{v_0^2}{2g}$ 分别算

得 $t = 6.12 \text{ s}$ 和 $y = 184 \text{ m}$, 均比实际值略大一些.

2-21 分析 由于空气对物体的阻力始终与物体运动的方向相反, 因此, 物体在上抛过程中所受重力 P 和阻力 F_r 的方向相同; 而下落过程中, 所受重力 P 和阻力 F_r 的方向则相反. 又因阻力是变力, 在解动力学方程时, 需用积分的方法.

解 分别对物体上抛、下落时作受力分析, 以地面为原点, 竖直向上为 y 轴 (如图所示). (1) 物体在上抛过程中, 根据牛顿定律有

$$-mg - kmv^2 = m \frac{dv}{dt} = m v \frac{dv}{dy}$$

依据初始条件对上式积分, 有

$$\int_0^y dy = - \int_{v_0}^0 \frac{v dv}{g + kv^2} \quad y = -\frac{1}{2k} \ln \left(\frac{g + kv^2}{g + kv_0^2} \right)$$

物体到达最高处时, $v = 0$, 故有

$$h = y_{\max} = \frac{1}{2k} \ln \left(\frac{g + kv_0^2}{g} \right)$$

(2) 物体下落过程中, 有

$$-mg + kmv^2 = m \frac{v dv}{dy} \quad \text{对上式积分, 有}$$

$$\int_0^y dy = - \int_{v_0}^0 \frac{v dv}{g - kv^2} \quad \text{则} \quad v = v_0 \left(1 + \frac{kv^2}{g} \right)^{-1/2}$$

2-22 分析 该题依然是运用动力学方程求解变力作用下的速度和位置的问题, 求解方法与前两题相似, 只是在解题过程中必须设法求出阻力系数 k . 由于阻力 $F_r = kv^2$, 且 F_r 又与恒力 F 的方向相反; 故当阻力随速度增加至与恒力大小相等时, 加速度为零, 此时速度达到最大. 因此, 根据速度最大值可求出阻力系数来. 但在求摩托车所走路程时, 需对变量作变换.

解 设摩托车沿 x 轴正方向运动, 在牵引力 F 和阻力 F_r 同时作用下, 由牛顿定律有

$$F - kv^2 = m \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

当加速度 $a = dv/dt = 0$ 时, 摩托车的速率最大, 因此可得

$$k = F/v_m^2 \quad (2)$$

由式 (1) 和式 (2) 可得

$$F \left(1 - \frac{v^2}{v_m^2} \right) = m \frac{dv}{dt} \quad (3)$$

根据始末条件对式 (3) 积分, 有

$$\int_0^t dt = \frac{m}{F} \int_0^{1/2 v_m} \left(1 - \frac{v^2}{v_m^2} \right)^{-1} dv \quad \text{则} \quad t = \frac{mv_m}{2F} \ln 3$$

又因式 (3) 中 $m \frac{dv}{dt} = m v \frac{dv}{dx}$, 再利用始末条件对式 (3) 积分, 有

$$\int_0^x dx = \frac{m}{F} \int_0^{1/2 v_m} \left(1 - \frac{v^2}{v_m^2} \right)^{-1} dv \quad \text{则} \quad x = \frac{mv_m^2}{2F} \ln \frac{4}{3} \approx 0.144 \frac{mv_m^2}{F}$$

2-23 分析 如图所示, 飞机触地后滑行期间受到 5 个力作用, 其中 F_1 为空气阻力, F_2 为空气升力, F_3 为跑道作用于飞机的摩擦力, 很显然飞机是在合外力为变力的情况下作减速运动, 列出牛顿第二定律方程后, 用运动学第二类问题的相关规律解题. 由于作用于飞机的合外力为速度 v 的函数, 所求的又是飞机滑行距离 x , 因此比较简便方法是直接对牛顿第二定律方程中的积分变量 dt 进行代换, 将 dt 用 $\frac{dx}{v}$ 代替, 得到一个有关 v 和 x 的微分方程, 分离变量后再作积分.

解 取飞机滑行方向为 x 的正方向, 着陆点为坐标原点, 如图所示, 根据牛顿第二定律有

$$F_N - k_1 v^2 = m \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

$$F_N + k_2 v^2 - mg = 0 \quad (2)$$

将式 (2) 代入式 (1), 并整理得

$$-\mu mg - (k_1 - \mu k_2) v^2 = m \frac{dv}{dt} = mv \frac{dv}{dx}$$

分离变量并积分, 有

$$\int_{v_0}^v \frac{mvdv}{\mu mg + (k_1 - \mu k_2) v^2} = - \int_0^x dx$$

得飞机滑行距离

$$x = \frac{m}{2(k_1 - \mu k_2)} \ln \left[\frac{\mu mg + (k_1 - \mu k_2) v^2}{\mu mg} \right] \quad (3)$$

考虑飞机着陆瞬间有 $F_N = 0$ 和 $v = v_0$, 应有 $k_2 v_0^2 = mg$, 将其代入 (3) 式, 可得飞机滑行距离 x 的另一表达式

$$x = \frac{k_2 v_0^2}{2g(k_1 - \mu k_2)} \ln \left(\frac{k_1}{\mu k_2} \right)$$

讨论 如飞机着陆速度 $v_0 = 144 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, $\mu = 0.1$, 升阻比 $\frac{k_1}{k_2} = 5$, 可算得飞机的滑行距

离 $x = 560 \text{ m}$, 设计飞机跑道长度时应参照上述计算结果。

2-24 分析 如同习题 2-5 分析中指出的那样, 可对木箱加上惯性力 F_0 后, 以车厢为参考系进行求解, 如图所示, 此时木箱在水平方向受到惯性力和摩擦力作用, 图中 a 为木箱相对车厢的加速度。

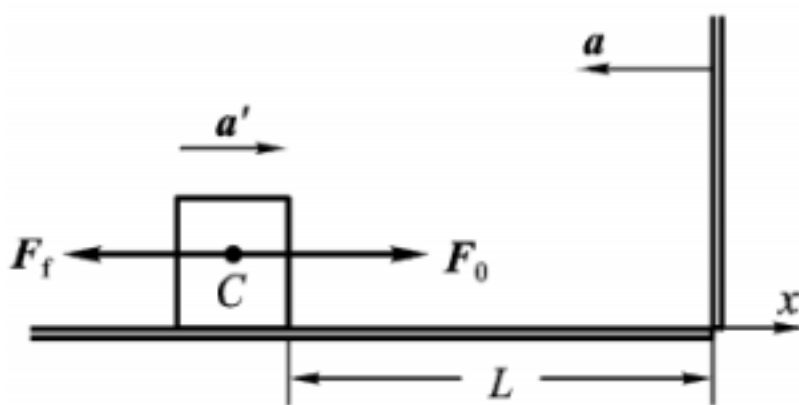
解 由牛顿第二定律和相关运动学规律有

$$F_0 - F_f = ma - \mu mg = ma \quad (1)$$

$$v'^2 = 2aL \quad (2)$$

联立解 (1)(2) 两式并代入题给数据, 得木箱撞上车厢挡板时的速度为

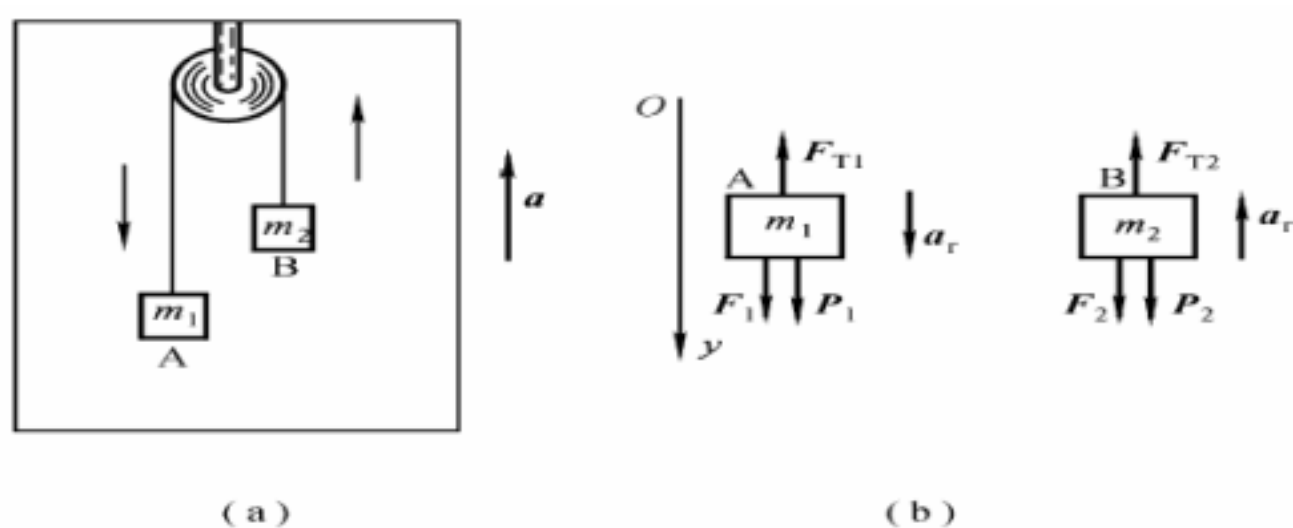
$$v' = \sqrt{2(a - \mu g)L} = 2.9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$



题 2-24 图

2-25 分析 如以加速运动的电梯为参考系, 则为非惯性系。在非惯性系中应用牛顿定律

时必须引入惯性力。在通常受力分析的基础上，加以惯性力后，即可列出牛顿运动方程来。



题 2-25 图

解 取如图 (b) 所示的坐标，以电梯为参考系，分别对物体 A、B 作受力分析，其中 $F_1 = m_1 a$, $F_2 = m_2 a$ 分别为作用在物体 A、B 上的惯性力。设 a_r 为物体相对电梯的加速度，根据牛顿定律有

$$m_1 g + m_1 a - F_{T1} = m_1 a_r \quad (1)$$

$$m_2 g + m_2 a - F_{T2} = -m_2 a_r \quad (2)$$

$$F_{T1} = F_{T2} \quad (3)$$

由上述各式可得

$$a_r = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} (g + a) \quad F_{T1} = F_{T2} = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} (g + a)$$

由相对加速度的矢量关系，可得物体 A、B 对地面的加速度值为

$$a_1 = a_r - a = \frac{(m_1 - m_2)g - 2m_2 a}{m_1 + m_2} \quad a_2 = -(a_r + a) = -\frac{2m_1 a + (m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}$$

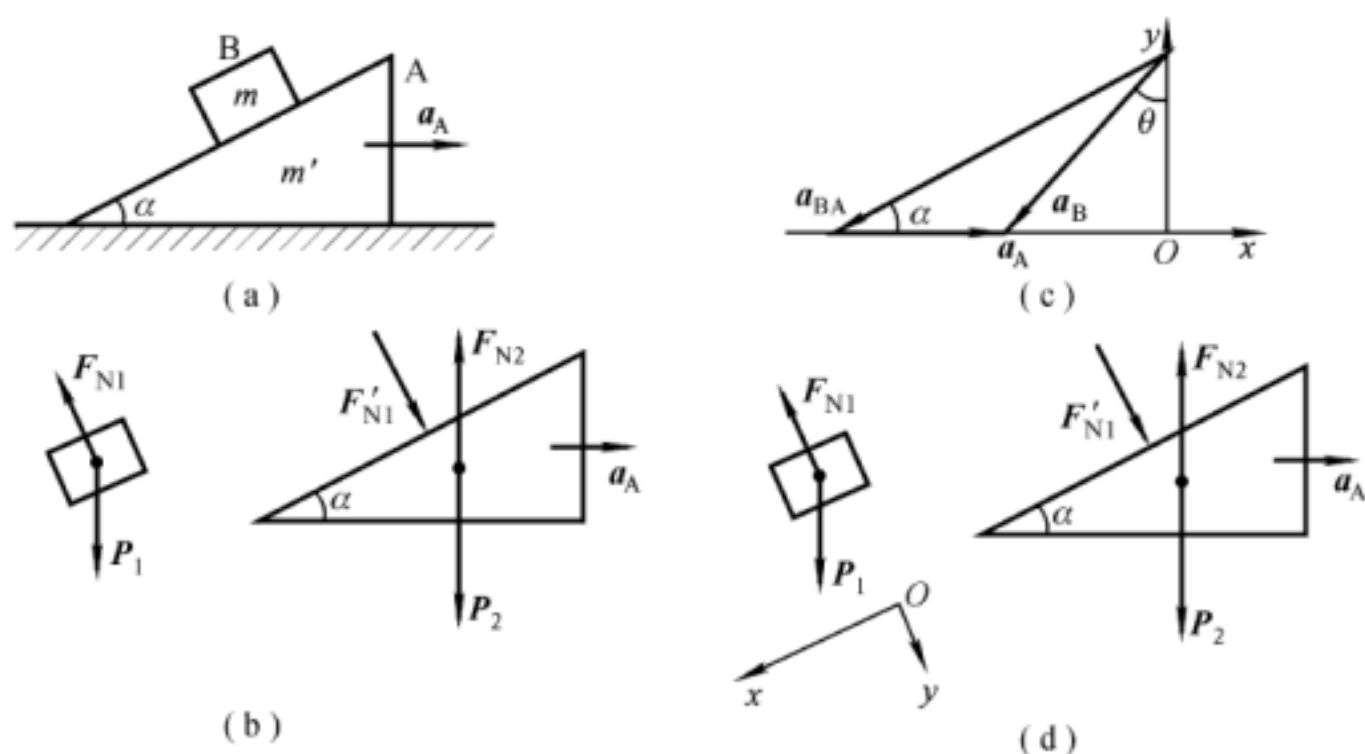
a_2 的方向向上， a_1 的方向由 a_r 和 a 的大小决定。当 $a_r < a$ ，即 $m_1 g - m_2 g - 2m_2 a > 0$ 时， a_1 的方向向下；反之， a_1 的方向向上。

2-26 分析 这类问题可应用牛顿定律并采用隔离体法求解。在解题的过程中必须注意：

(1) 参考系的选择。由于牛顿定律只适用于惯性系，可选择地面为参考系（惯性系）。因地面和斜面都是光滑的，当滑块在斜面上下滑时，三棱柱受到滑块对它的作用，也将沿地面作加速度为 a_A 的运动，这时，滑块沿斜面的加速度 a_{BA} ，不再是它相对于地面的加速度 a_B 了。必须注意到它们之间应满足相对加速度的矢量关系，即 $a_B = a_A + a_{BA}$ 。若以斜面为参考系（非惯性系），用它求解这类含有相对运动的力学问题是较为方便的。但在非惯性系中，若仍要应用牛顿定律，则必须增添一惯性力 F ，且有 $F = ma$ 。

(2) 坐标系的选择。常取平面直角坐标，并使其中一坐标轴方向与运动方向一致，这样，可使解题简化。

(3) 在分析滑块与三棱柱之间的正压力时，要考虑运动状态的影响，切勿简单地把它视为滑块重力在垂直于斜面方向的分力 $mg \cos$ ，事实上只有当 $a_A = 0$ 时，正压力才等于 $mg \cos$ 。



题 2-26 图

解1 取地面为参考系，以滑块 B 和三棱柱 A 为研究对象，分别作示力图，如图 (b) 所示。B 受重力 P_1 、A 施加的支持力 F_{N1} ；A 受重力 P_2 、B 施加的压力 F'_{N1} 、地面支持力 F_{N2} 。A 的运动方向为 Ox 轴的正向，Oy 轴的正向垂直地面向上。设 a_A 为 A 对地的加速度， a_B 为 B 对地的加速度。由牛顿定律得

$$F_{N1} \sin \alpha = m a_A \quad (1)$$

$$-F_{N1} \cos \alpha = m a_{Bx} \quad (2)$$

$$F_{N1} \cos \alpha - mg = m a_{By} \quad (3)$$

$$F_{N1} = F'_{N1} \quad (4)$$

设 B 相对 A 的加速度为 a_{BA} ，则由题意 a_B 、 a_{BA} 、 a_A 三者的矢量关系如图 (c) 所示。据此可得

$$a_{Bx} = a_A - a_{BA} \cos \alpha \quad (5)$$

$$a_{By} = -a_{BA} \sin \alpha \quad (6)$$

解上述方程组可得三棱柱对地面的加速度为

$$a_A = \frac{mg \sin \alpha \cos \alpha}{m' + m \sin^2 \alpha}$$

滑块相对地面的加速度 a_B 在 x、y 轴上的分量分别为

$$a_{Bx} = \frac{m' g \sin \alpha \cos \alpha}{m' + m \sin^2 \alpha} \quad a_{By} = -\frac{(m' + m) g \sin^2 \alpha}{m' + m \sin^2 \alpha}$$

则滑块相对地面的加速度 a_B 的大小为

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = g \sin \alpha \sqrt{\frac{m'^2 + (2mm' + m^2) \sin^2 \alpha}{m' + m \sin^2 \alpha}}$$

其方向与 y 轴负向的夹角为

$$= \arctan \frac{a_{Bx}}{a_{By}} = \arctan \frac{m' + \cot}{m' + m} \quad A \text{ 与 } B \text{ 之间的正压力} \quad F_{N1} = \frac{m' mg \cos}{m' + m \sin^2}$$

解2 若以 A 为参考系, Ox 轴沿斜面方向 [图 (d)] . 在非惯性系中运用牛顿定律, 则滑块 B 的动力学方程分别为

$$mg \sin + ma_A \cos = ma_{BA} \quad (1)$$

$$mg \cos - F_{N1} - ma_A \sin = 0 \quad (2)$$

$$\text{又因} \quad F_{N1}' \sin - m' a_A = 0 \quad (3)$$

$$F_{N1} = F_{N1}' \quad (4)$$

由以上各式可解得

$$a_A = \frac{mg \sin \cos}{m' + m \sin^2} \quad a_{BA} = -\frac{(m' + m) g \sin}{m' + m \sin^2}$$

由 a_B 、 a_{BA} 、 a_A 三者的矢量关系可得

$$a_B = g \sin \frac{\sqrt{m'^2 + (2m'm + m^2) \sin^2}}{m' + m \sin^2} \quad \text{以 } a_A \text{ 代入式 (3) 可得} \quad F_{N1} = \frac{m' mg \cos}{m' + m \sin^2}$$

3-1 分析与解 在质点组中内力总是成对出现的, 它们是作用力与反作用力. 由于一对内力的冲量恒为零, 故内力不会改变质点组的总动量. 但由于相互有作用力的两个质点的位移大小以及位移与力的夹角一般不同, 故一对内力所作功之和不一定为零, 应作具体分析, 如一对弹性内力的功的代数和一般为零, 一对摩擦内力的功代数和一般不为零, 对于保守内力来说, 所作功能使质点组动能与势能相互转换, 因此保守内力即使有可能改变质点组的动能, 但不可能改变质点组的机械能. 综上所述 (1)(3) 说法是正确的. 故选 (C).

3-2 分析与解 对题述系统来说, 由题意知并无外力和非保守内力做功, 故系统机械能守恒. 物体在下滑过程中, 一方面通过重力做功将势能转化为动能, 另一方面通过物体与斜面之间的弹性内力做功将一部分能量转化为斜面的动能, 其大小取决于其中一个内力所作功. 由于斜面倾角不同, 故物体沿不同倾角斜面滑至底端时动能大小不等. 动量自然也就不等 (动量方向也不同). 故 (A)(B)(C) 三种说法均不正确. 至于说法 (D) 正确, 是因为该系统动量虽不守恒 (下滑前系统动量为零, 下滑后物体与斜面动量的矢量和不可能为零. 由此可知, 此时向上的地面支持力并不等于物体与斜面向下的重力), 但在水平方向上并无外力, 故系统在水平方向上分动量守恒.

3-3 分析与解 保守力作正功时, 系统内相应势能应该减少. 由于保守力作功与路径无关, 而只与始末位置有关, 如质点环绕一周过程中, 保守力在一段过程中作正功, 在另一段过程中必然作负功, 两者之和必为零. 至于一对作用力与反作用力分别作用于两个质点所作功之和未必为零 (详见习题 3-2 分析), 由此可见只有说法 (2) 正确, 故选 (C).

3-4 分析与解 由题意知, 作用在题述系统上的合外力为零, 故系统动量守恒, 但机械能未必守恒, 这取决于在 A 、 B 弹开过程中 C 与 A 或 D 与 B 之间有无相对滑动, 如有则必然会因摩擦内力做功, 而使一部分机械能转化为热能, 故选 (D).

3-5 分析与解 子弹 - 木块系统在子弹射入过程中 , 作用于系统的合外力为零 , 故系统动量守恒, 但机械能并不守恒. 这是因为子弹与木块作用的一对内力所作功的代数和不为零 (这是因为子弹对地位移大于木块对地位移所致), 子弹动能的减少等于子弹克服阻力所作功, 子弹减少的动能中, 一部分通过其反作用力对木块作正功而转移为木块的动能, 另一部分则转化为热能 (大小就等于这一对内力所作功的代数和). 综上所述, 只有说法 (C) 的表述是完全正确的.

3-6 分析 由于鸟与飞机之间的作用是一短暂时间内急剧变化的变力, 直接应用牛顿定律解决受力问题是不可能的. 如果考虑力的时间累积效果, 运用动量定理来分析, 就可避免作用过程中的细节情况. 在求鸟对飞机的冲力 (常指在短暂时间内的平均力) 时, 由于飞机的状态 (指动量) 变化不知道, 使计算也难以进行; 这时, 可将问题转化为讨论鸟的状态变化来分析其受力情况, 并根据鸟与飞机作用的相互性 (作用与反作用), 问题就很简单了.

解 以飞鸟为研究对象, 取飞机运动方向为 x 轴正向. 由动量定理得

$$\bar{F}' t = mv - 0$$

式中 \bar{F}' 为飞机对鸟的平均冲力, 而身长为 20cm 的飞鸟与飞机碰撞时间约为 $t = l/v$, 以此代入上式可得

$$\bar{F}' = \frac{mv^2}{l} = 2.55 \times 10^5 \text{ N} \quad \text{鸟对飞机的平均冲力为} \quad \bar{F} = -\bar{F}' = -2.55 \times 10^5 \text{ N}$$

式中负号表示飞机受到的冲力与其飞行方向相反. 从计算结果可知, $2.25 \times 10^5 \text{ N}$ 的冲力大致相当于一个 22 t 的物体所受的重力, 可见, 此冲力是相当大的. 若飞鸟与发动机叶片相碰, 足以使发动机损坏, 造成飞行事故.

3-7 分析 重力是恒力, 因此, 求其在一段时间内的冲量时, 只需求出时间间隔即可. 由抛体运动规律可知, 物体到达最高点的时间 $t_1 = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$, 物体从出发到落回至同一水平面

所需的时间是到达最高点时间的两倍. 这样, 按冲量的定义即可求得结果.

另一种解的方法是根据过程的始、末动量, 由动量定理求出.

解 1 物体从出发到达最高点所需的时间为

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \theta}{g} \quad \text{则物体落回地面的时间为} \quad t_2 = 2 t_1 = \frac{2 v_0 \sin \theta}{g}$$

于是, 在相应的过程中重力的冲量分别为

$$\mathbf{I}_1 = \int_{t_1} \mathbf{F} dt = -mg t_1 \mathbf{j} = -mv_0 \sin \theta \mathbf{j} \quad \mathbf{I}_2 = \int_{t_2} \mathbf{F} dt = -mg t_2 \mathbf{j} = -2mv_0 \sin \theta \mathbf{j}$$

解 2 根据动量定理, 物体由发射点 O 运动到点 A、B 的过程中, 重力的冲量分别为

$$\mathbf{I}_1 = m\mathbf{v}_{Ay} \mathbf{j} - m\mathbf{v}_0 \mathbf{j} = -mv_0 \sin \theta \mathbf{j} \quad \mathbf{I}_2 = m\mathbf{v}_{By} \mathbf{j} - m\mathbf{v}_0 \mathbf{j} = -2mv_0 \sin \theta \mathbf{j}$$

3-8 分析 本题可由冲量的定义式 $\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt$, 求变力的冲量, 继而根据动量定理求物体的速度 v_2 .

解 (1) 由分析知 $I = \int_0^2 (30 + 4t) dt = 30t + 2t^2 \Big|_0^2 = 68 \text{ N} \cdot \text{s}$

(2) 由 $I = 300 = 30t + 2t^2$, 解此方程可得 $t = 6.86 \text{ s}$ (另一解不合题意已舍去)

(3) 由动量定理, 有 $I = mv_2 - mv_1$

由(2)可知 $t = 6.86 \text{ s}$ 时 $I = 300 \text{ N} \cdot \text{s}$, 将 I 、 m 及 v_1 代入可得 $v_2 = \frac{I + mv_1}{m} = 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

3-9 分析 从人受力的情况来看, 可分两个阶段: 在开始下落的过程中, 只受重力作用, 人体可看成是作自由落体运动; 在安全带保护的缓冲过程中, 则人体同时受重力和安全带冲力的作用, 其合力是一变力, 且作用时间很短. 为求安全带的冲力, 可以从缓冲时间内, 人体运动状态(动量)的改变来分析, 即运用动量定理来讨论. 事实上, 动量定理也可应用于整个过程. 但是, 这时必须分清重力和安全带冲力作用的时间是不同的; 而在过程的初态和末态, 人体的速度均为零. 这样, 运用动量定理仍可得到相同的结果.

解1 以人为研究对象, 按分析中的两个阶段进行讨论. 在自由落体运动过程中, 人跌落至 2 m 处时的速度为

$$v_1 = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

在缓冲过程中, 人受重力和安全带冲力的作用, 根据动量定理, 有

$$(F + P)t = mv_2 - mv_1 \quad (2)$$

由式(1)、(2)可得安全带对人的平均冲力大小为

$$\bar{F} = mg + \frac{(mv)}{t} = mg + \frac{\sqrt{2gh}}{t} = 1.14 \times 10^3 \text{ N}$$

解2 从整个过程来讨论. 根据动量定理有

$$\bar{F} = \frac{mg}{t} \sqrt{2h/g} + mg = 1.14 \times 10^3 \text{ N}$$

3-10 分析 由冲量定义求得 F 的冲量后, 根据动量原理, 即为动量增量, 注意用式

$\int_{t_1}^{t_2} F dt$ 积分前, 应先将式中 x 用 $x = A \cos \omega t$ 代之, 方能积分.

解 力 F 的冲量为

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F dt = \int_{t_1}^{t_2} -kx dt = -\int_0^{1/2} kA \cos \omega t dt = -\frac{kA}{\omega} \quad \text{即} \quad (mv) = -\frac{kA}{\omega}$$

3-11 分析 对于弯曲部分 AB 段内的水而言, 由于流速一定, 在时间 t 内, 从其一端流入的水量等于从另一端流出的水量. 因此, 对这部分水来说, 在时间 t 内动量的增量也就是流入与流出水的动量的增量 $p = m(v_B - v_A)$; 此动量的变化是管壁在 t 时间内对其作用冲量 I 的结果. 依据动量定理可求得该段水受到管壁的冲力 F ; 由牛顿第三定律, 自然就得到水流对管壁的作用力 $F' = -F$.

解 在 t 时间内, 从管一端流入(或流出)水的质量为 $m = \rho S t$, 弯曲部分 AB 的水的动量的增量则为 $p = m(v_B - v_A) = \rho S t (v_B - v_A)$

依据动量定理 $I = p$, 得到管壁对这部分水的平均冲力

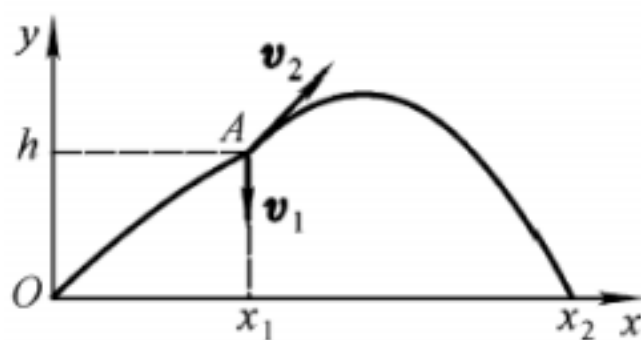
$$\bar{F} = \frac{I}{t} = \rho S v t (v_B - v_A)$$

从而可得水流对管壁作用力的大小为 $\bar{F}' = -\bar{F} = -\sqrt{2} \rho S v^2 = -2.5 \times 10^3 \text{ N}$

作用力的方向则沿直角平分线指向弯管外侧。

3-12 分析 根据抛体运动规律，物体在最高点处的位置坐标和速度是易求的。因此，若能求出第二块碎片抛出的速度，按抛体运动的规律就可求得落地

的位置。为此，分析物体在最高点处爆炸的过程，由于爆炸力属内力，且远大于重力，因此，重力的冲量可忽略，物体爆炸过程中应满足动量守恒。由于炸裂后第一块碎片抛出的速度可由落体运动求出，由动量守恒定律可得炸裂后第二块碎片抛出的速度，进一步求出落地位置。



题 3-12 图

解 取如图示坐标，根据抛体运动的规律，爆炸前，物体在最高点 A 的速度的水平分量为

$$v_{0x} = \frac{x_1}{t_0} = x_1 \sqrt{\frac{g}{2h}} \quad (1)$$

物体爆炸后，第一块碎片竖直落下的运动方程为

$$y_1 = h - v_1 t - \frac{1}{2} g t^2$$

当该碎片落地时，有 $y_1 = 0$, $t = t_1$ ，则由上式得爆炸后第一块碎片抛出的速度

$$v_1 = \frac{h - \frac{1}{2} g t_1^2}{t_1} \quad (2)$$

又根据动量守恒定律，在最高点处有

$$m v_{0x} = \frac{1}{2} m v_{2x} \quad (3)$$

$$0 = -\frac{1}{2} m v_1 + \frac{1}{2} m v_{2y} \quad (4)$$

联立解式 (1)、(2)、(3) 和 (4)，可得爆炸后第二块碎片抛出时的速度分量分别为

$$v_{2x} = 2v_{0x} = 2x_1 \sqrt{\frac{g}{2h}} = 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad v_{2y} = v_1 = \frac{h - \frac{1}{2} g t_1^2}{t_1} = 14.7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

爆炸后，第二块碎片作斜抛运动，其运动方程为

$$x_2 = x_1 + v_{2x} t_2 \quad (5)$$

$$y_2 = h + v_{2y} t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 \quad (6)$$

落地时， $y_2 = 0$ ，由式 (5)、(6) 可解得第二块碎片落地点的水平位置 $x_2 = 500 \text{ m}$

3-13 分析 由于两船横向传递的速度可略去不计，则对搬出重物后的船 A 与从船 B 搬

入的重物所组成的系统 来讲 , 在水平方向上无外力作用 , 因此, 它们相互作用的过程中应满足动量守恒; 同样, 对搬出重物后的船 B 与从船 A 搬入的重物所组成的系统 亦是这样. 由此, 分别列出系统 、 的动量守恒方程即可解出结果.

解 设 A、B 两船原有的速度分别以 v_A 、 v_B 表示, 传递重物后船的速度分别以 v_A' 、 v_B' 表示, 被搬运重物的质量以 m 表示. 分别对上述系统 、 应用动量守恒定律 , 则有

$$(m_A - m)v_A + mv_B = m_A v_A' \quad (1)$$

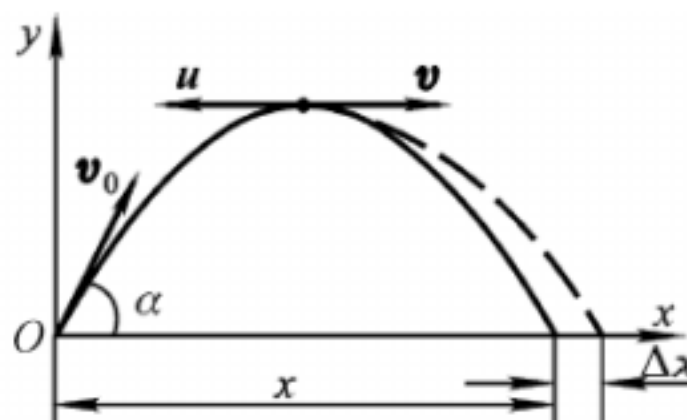
$$(m_B - m)v_B + mv_A = m_B v_B' \quad (2)$$

由题意知 $v_A = 0$, $v_B = 3.4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 代入数据后, 可解得

$$v_A' = \frac{-m_B m v_B'}{(m_B - m)(m_A - m) - m^2} = -0.40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_B' = \frac{(m_A - m)m_B v_B}{(m_A - m)(m_B - m) - m^2} = 3.6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

也可以选择不同的系统, 例如, 把 A、B 两船 (包括传递的物体在内) 视为系统, 同样能满足动量守恒, 也可列出相对应的方程求解.



题 3-14 图

3-14 分析 人跳跃距离的增加是由于他在最高点处向后抛出物体所致. 在抛物的过程中, 人与物之间相互作用力的冲量, 使他们各自的动量发生了变化. 如果把人与物视为一系统, 因水平方向不受外力作用, 故外力的冲量为零, 系统在该方向上动量守恒. 但在应用动量守恒定律时, 必须注意系统是相对地面 (惯性系) 而言的, 因此, 在处理人与物的速度时, 要根据相对运动的关系来确定. 至于, 人因跳跃而增加的距离, 可根据人在水平方向速率的增量 v 来计算.

解 取如图所示坐标. 把人与物视为一系统, 当人跳跃到最高点处, 在向左抛物的过程中, 满足动量守恒, 故有

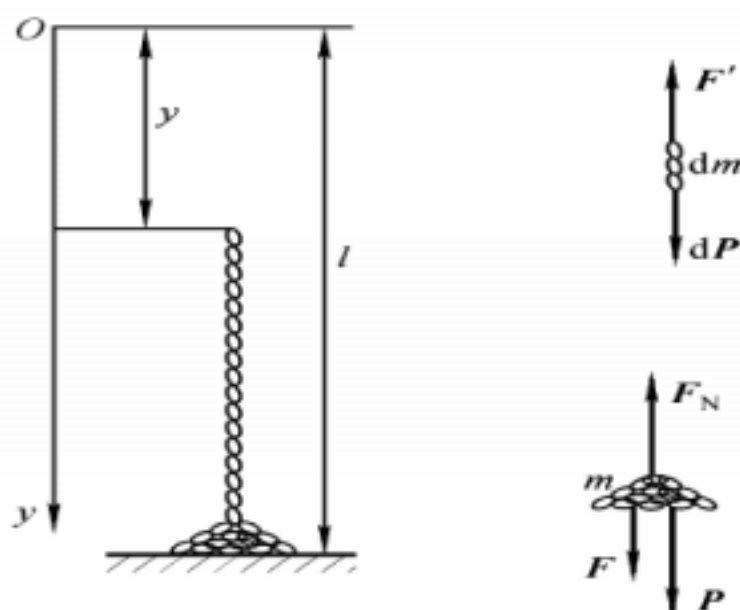
$$(m + m')v_0 \cos \alpha = m'v + m(v - u)$$

式中 v 为人抛物后相对地面的水平速率, $v - u$ 为抛出物对地面的水平速率. 得

$$v_0 = v_0 \cos \alpha + \frac{m}{m + m'} u \quad \text{人的水平速率的增量为} \quad v = v - v_0 \cos \alpha = \frac{m}{m + m'} u \quad \text{而人从}$$

最高点到地面的运动时间为 $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ 所以, 人跳跃后增加的距离 $x = vt = \frac{mv_0 \sin \alpha}{(m + m')g}$

3-15 分析 由于桌面所受的压力难以直接求出, 因此, 可转化为求其反作用力, 即桌面给绳的托力. 但是, 应注意此托力除了支持已落在桌面上的绳外, 还有对 dt 时间内下落绳的冲力, 此力必须运用动量定理来求.



题 3-15 图

解 取如图所示坐标, 开始时绳的上端位于原点, Oy 轴的正向竖直向下. 绳的总长为 l , 以 t 时刻, 已落到桌面上长为 y 、质量为 m 的绳为研究对象. 这段绳受重力 P 、桌面的托力 F_N 和下落绳子对它的冲力 F (如图中所示) 的作用. 由力的平衡条件有

$$\frac{m}{l}yg + F - F_N = 0 \quad (1)$$

为求冲力 F , 可取 dt 时间内落至桌面的线元 dy 为研究对象. 线元的质量 $dm = \frac{m}{l}dy$, 它受到重力 dP 和冲力 F 的反作用力 F' 的作用, 由于 $F \gg dP$, 故由动量定理得

$$F' dt = 0 - \frac{m}{l}v dy \quad (2)$$

$$\text{而} \quad F = -F' \quad (3)$$

由上述三式可得任意时刻桌面受到的压力大小为

$$F_N' = |F_N| = \frac{m}{l}yg + \frac{m}{l}v^2 = 3\frac{m}{l}yg = 3m'g$$

3-16 分析 这是一个系统内质量转移的问题. 为了讨论火箭的运动规律, 仍需建立其在重力场中的动力学方程. 为此, 以 t 时刻质量为 m 的火箭为研究对象, 它在 t 到 $t + dt$ 的时间内, 将分离成火箭主体 (包括尚剩的燃料) 和排出的燃料两部分. 根据它们的总动量的增量

dP 和系统所受的外力——重力 (阻力不计), 由动量定理可得到 $-mg = u dm/dt + m dv/dt$ (推导从略, 见教材), 即火箭主体的动力学方程. 由于在 dt 时间内排出燃料的质量 dm 很小, 式中 m 也就可以视为此刻火箭主体的质量, 而燃料的排出率 dm/dt 也就是火箭质量的变化率 $-dm/dt$. 这样, 上述方程也可写成 $u \frac{dm}{dt} - mg = ma$. 在特定加速度 a_0 的条件下,

根据初始时刻火箭的质量 m_0 , 就可求出燃料的排出率 dm/dt . 在火箭的质量比 (即 t 时刻火箭的质量 m 与火箭的初始质量 m_0 之比) 已知的条件下, 可算出火箭所经历的时间, 则火箭运动的速率可通过对其动力学方程积分后解得.

解 (1) 以火箭发射处为原点, 竖直向上为正方向. 该火箭在重力场中的动力学方程为

$$u \frac{dm}{dt} - mg = ma \quad (1)$$

因火箭的初始质量为 $m = 5.00 \times 10^5 \text{ kg}$, 要使火箭获得最初的加速度 $a_0 = 4.90 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, 则燃气的排出率为

$$\frac{dm}{dt} = \frac{m_0(g + a_0)}{u} = 3.68 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 为求火箭的最后速率, 可将式 (1) 改写成

$$u \frac{dm}{dt} - mg = m \frac{dv}{dt} \quad \text{分离变量后积分, 有} \quad \int_{v_0}^v dv = u \int_{m_0}^m \frac{dm}{m} - \int_0^t g dt$$

火箭速率随时间的变化规律为

$$v = v_0 - u \ln \frac{m}{m_0} - gt \quad (2)$$

因火箭的质量比为 6.00, 故经历时间 t 后, 其质量为

$$m = m_0 - \frac{dm}{dt} t = \frac{1}{6} m_0$$

$$\text{得} \quad t = \frac{5m_0}{6dm/dt} \quad (3)$$

将式 (3) 代入式 (2), 依据初始条件, 可得火箭的最后速率

$$v' = u \ln \frac{m_0}{m} - gt = u \ln \frac{m_0}{m_0/6} - \frac{5m_0}{6dm/dt} g = 2.47 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

3-17 分析 由题意知质点是在变力作用下运动, 因此要先找到力 F 与位置 x 的关系, 由题给条件知 $F = F_0 - \frac{F_0}{L} x$. 则该力作的功可用式 $\int_0^L F dx$ 计算, 然后由动能定理求质点速率.

解 由分析知 $F = F_0 - \frac{F_0}{L} x$, 则在 $x = 0$ 到 $x = L$ 过程中做功,

$$W = \int_0^L \left(F_0 - \frac{F_0}{L} x \right) dx = \frac{F_0 L}{2}$$

由动能定理有 $W = \frac{1}{2} mv^2 - 0$ 得 $x = L$ 处的质点速率为 $v = \sqrt{\frac{F_0 L}{m}}$

此处也可用牛顿定律求质点速率, 即

$$F_0 - \frac{F_0}{L} x = m \frac{dv}{dt} = mv \frac{dv}{dx}$$

分离变量后, 两边积分也可得同样结果.

3-18 分析 该题中虽施以“恒力”, 但是, 作用在物体上的力的方向在不断变化. 需按功的矢量定义式 $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 来求解.

解 取图示坐标, 绳索拉力对物体所作的功为

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int F \cos \theta dx = \int_{x_1}^{x_2} -\frac{Fx}{\sqrt{d^2 + x^2}} dx = 1.69 \text{ J}$$

3-19 分析 本题是一维变力做功问题，仍需按功的定义式 $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$ 来求解。关键在于寻找力函数 $F = F(x)$ 。根据运动学关系，可将已知力与速度的函数关系 $F(v) = kv^2$ 变换到 $F(t)$ ，进一步按 $x = ct^3$ 的关系把 $F(t)$ 转换为 $F(x)$ ，这样，就可按功的定义式求解。

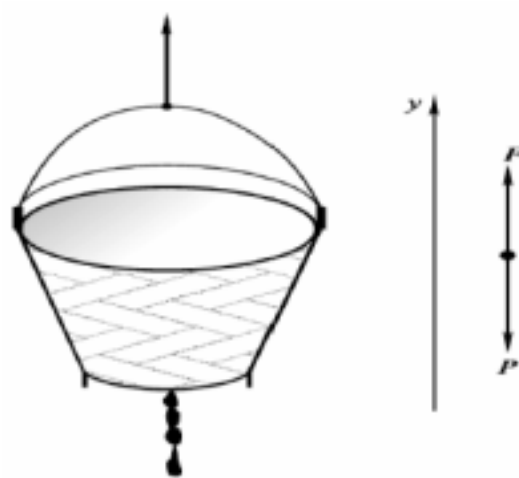
解 由运动学方程 $x = ct^3$ ，可得物体的速度

$$v = \frac{dx}{dt} = 3ct^2$$

按题意及上述关系，物体所受阻力的大小为 $F = kv^2 = 9kc^2t^4 = 9kc^{2/3}x^{4/3}$

则阻力的功为

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^l \cos 180^\circ dx = - \int_0^l 9kc^{2/3}x^{4/3} dx = -\frac{27}{7}kc^{2/3}l^{7/3}$$



题 3-20 图

3-20 分析 由于水桶在匀速上提过程中，拉力必须始终与水桶重力相平衡。水桶重力因漏水而随提升高度而变，因此，拉力做功实为变力做功。由于拉力做功也就是克服重力的功，因此，只要能写出重力随高度变化的关系，拉力做功即可由题 3-20 图求出。

解 水桶在匀速上提过程中， $a = 0$ ，拉力与水桶重力平衡，有

$$F + P = 0$$

在图示所取坐标下，水桶重力随位置的变化关系为 $P = mg - \rho gy$

其中 $\rho = 0.2 \text{ kg/m}$ ，人对水桶的拉力的功为

$$W = \int_0^l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{y} = \int_0^{10} (mg - \rho gy) dy = 882 \text{ J}$$

3-21 分析 (1) 在计算功时，首先应明确是什么力做功。小球摆动过程中同时受到重力和张力作用。重力是保守力，根据小球下落的距离，它的功很易求得；至于张力虽是一变力，但是，它的方向始终与小球运动方向垂直，根据功的矢量式 $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ ，即能得出结果来。(2) 在计算功的基础上，由动能定理直接能求出动能和速率。(3) 在求最低点的张力时，可根据小球作圆周运动时的向心加速度由重力和张力提供来确定。解 (1) 如图所示，重力对小球所作的功只与始末位置有关，即

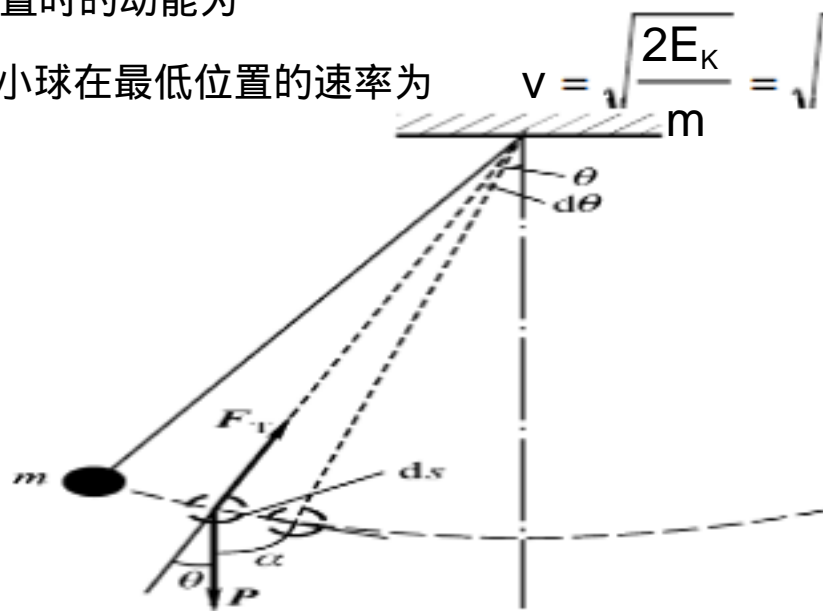
$$W_p = P \cdot h = mgl(1 - \cos \theta) = 0.53 \text{ J}$$

在小球摆动过程中，张力 F_T 的方向总是与运动方向垂直，所以，张力的功

$$W_T = \int \mathbf{F}_T \cdot d\mathbf{s}$$

(2) 根据动能定理, 小球摆动过程中, 其动能的增量是由于重力对它做功的结果. 初始时动能为零, 因而, 在最低位置时的动能为

$$E_k = E_k = 0.53 \text{ J} \quad \text{小球在最低位置的速率为} \quad v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2W_p}{m}} = 2.30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$



题 3-21 图

(3) 当小球在最低位置时, 由牛顿定律可得

$$F_T - P = \frac{mv^2}{l} \quad F_T = mg + \frac{mv^2}{l} = 2.49 \text{ N}$$

3-22 分析 质点在运动过程中速度的减缓, 意味着其动能减少; 而减少的这部分动能则消耗在运动中克服摩擦力做功上. 由此, 可依据动能定理列式解之.

解 (1) 摩擦力做功为

$$W = E_k - E_{k0} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{3}{8}mv_0^2 \quad (1)$$

(2) 由于摩擦力是一恒力, 且 $F_f = \mu mg$ 故有

$$W = F_f s \cos 180^\circ = -2r\mu mg \quad (2)$$

由式 (1)、(2) 可得动摩擦因数为

$$\mu = \frac{3v_0^2}{16rg}$$

(3) 由于一周中损失的动能为 $\frac{3}{8}mv_0^2$, 则在静止前可运行的圈数为

$$n = \left| \frac{E_{k0}}{W} \right| = \frac{4}{3} \text{ 圈}$$

3-23 分析 运用守恒定律求解是解决力学问题最简捷的途径之一. 因为它与过程的细节无关, 也常常与特定力的细节无关. “守恒”则意味着在条件满足的前提下, 过程中任何时刻守恒量不变. 在具体应用时, 必须恰当地选取研究对象 (系统), 注意守恒定律成立的条件. 该题可用机械能守恒定律来解决. 选取两块板、弹簧和地球为系统, 该系统在外界所施压力撤除后 (取作状态 1), 直到 B 板刚被提起 (取作状态 2), 在这一过程中, 系统不受外力作用, 而内力中又只有保守力 (重力和弹力) 做功, 支持力不做功, 因此, 满足机械能守恒的条件. 只需取状态 1 和状态 2, 运用机械能守恒定律列出方程, 并结合这两状态下受力的平衡, 便可将

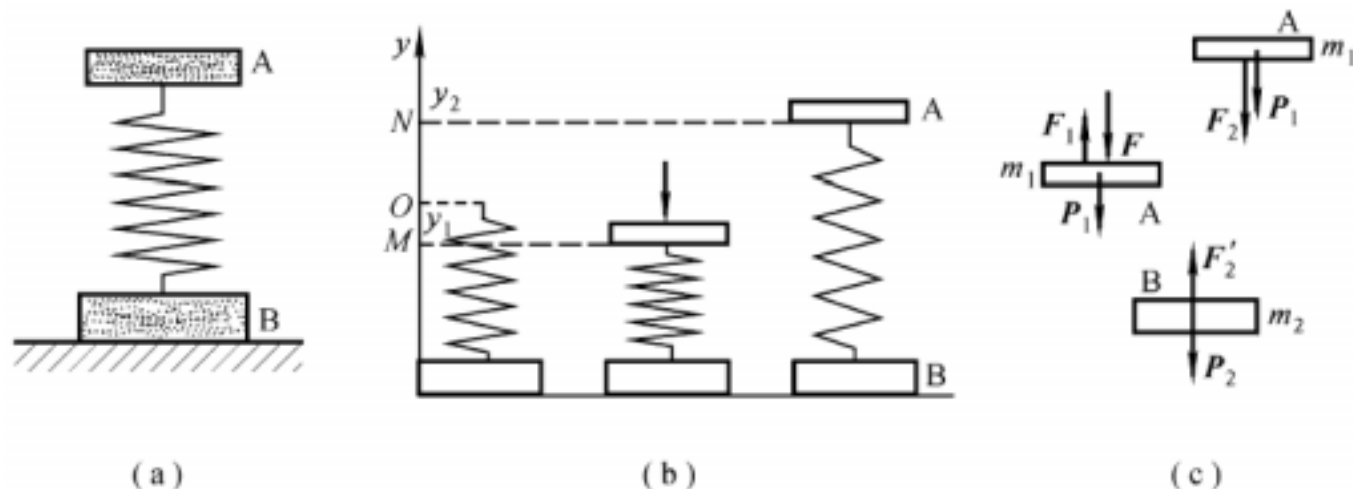
所需压力求出。

解 选取如图 (b) 所示坐标，取原点 O 处为重力势能和弹性势能零点。作各状态下物体的受力图。对 A 板而言，当施以外力 F 时，根据受力平衡有

$$F_1 = P_1 + F \quad (1)$$

当外力撤除后，按分析中所选的系统，由机械能守恒定律可得

$$\frac{1}{2}ky_1^2 - mgy_1 = \frac{1}{2}ky_2^2 + mgy_2$$



题 3-23 图

式中 y_1 、 y_2 为 M、N 两点对原点 O 的位移。因为 $F_1 = ky_1$ ， $F_2 = ky_2$ 及 $P_1 = mg$ ，上式可写为

$$F_1 - F_2 = 2P_1 \quad (2)$$

由式 (1)、(2) 可得

$$F = P_1 + F_2 \quad (3)$$

当 A 板跳到 N 点时，B 板刚被提起，此时弹性力 $F_2 = P_2$ ，且 $F_2 = F_2$ 。由式 (3) 可得

$$F = P_1 + P_2 = (m + m)g$$

应注意，势能的零点位置是可以任意选取的。为计算方便起见，通常取弹簧原长时的弹性势能为零点，也同时为重力势能的零点。

3-24 分析 矿车在下滑和返回的全过程中受到重力、弹力、阻力和支持力作用。若取矿车、地球和弹簧为系统，支持力不作功，重力、弹力为保守力，而阻力为非保守力。矿车在下滑和上行两过程中，存在非保守力做功，系统不满足机械能守恒的条件，因此，可应用功能原理去求解。在确定重力势能、弹性势能时，应注意势能零点的选取，常常选取弹簧原长时的位置为重力势能、弹性势能共同的零点，这样做对解题比较方便。

解 取沿斜面向上为 x 轴正方向。弹簧被压缩到最大形变时弹簧上端为坐标原点 O。矿车在下滑和上行的全过程中，按题意，摩擦力所作的功为

$$W = (0.25mg + 0.25m'g)(l + x) \quad (1)$$

式中 m 和 m' 分别为矿车满载和空载时的质量，x 为弹簧最大被压缩量。

根据功能原理，在矿车运动的全过程中，摩擦力所作的功应等于系统机械能增量的负值，故有

$$W = -\Delta E = -(E_p + E_k)$$

由于矿车返回原位时速度为零，故 $E_k = 0$ ；而 $E_p = (m - m')g(l + x)\sin\theta$ ，

故有

$$W = -(m - m')g(l + x)\sin\theta \quad (2)$$

由式(1)、(2)可解得

$$\frac{m}{m'} = \frac{1}{3}$$

3-25 分析 由于两次锤击的条件相同，锤击后钉子获得的速度也相同，所具有的初动能也相同。钉子钉入木板是将钉子的动能用于克服阻力做功，由功能原理可知钉子两次所作的功相等。由于阻力与进入木板的深度成正比，按变力的功的定义得两次功的表达式，并由功相等的关系即可求解。

解 因阻力与深度成正比，则有 $F = kx$ (k 为阻力系数)。现令 $x_0 = 1.00 \times 10^{-2} \text{ m}$ ，第二次钉入的深度为 x ，由于钉子两次所作功相等，可得

$$\int_0^{x_0} kx dx = \int_{x_0}^{x_0+x} kx dx \quad x = 0.41 \times 10^{-2} \text{ m}$$

3-26 分析 根据势能和动能的定义，只需知道卫星的所在位置和绕地球运动的速率，其势能和动能即可算出。由于卫星在地球引力作用下作圆周运动，由此可算得卫星绕地球运动的速率和动能。由于卫星的引力势能是属于系统（卫星和地球）的，要确定特定位置的势能时，必须规定势能的零点，通常取卫星与地球相距无限远时的势能为零。这样，卫星在特定位置的势能也就能确定了。至于卫星的机械能则是动能和势能的总和。

解 (1) 卫星与地球之间的万有引力提供卫星作圆周运动的向心力，由牛顿定律可得

$$G \frac{m_E m}{(3R_E)^2} = m \frac{v^2}{3R_E} \quad \text{则} \quad E_K = \frac{1}{2} mv^2 = G \frac{m_E m}{6R_E}$$

(2) 取卫星与地球相距无限远 ($r \rightarrow \infty$) 时的势能为零，则处在轨道上的卫星所具有的势能为

$$E_P = -G \frac{m_E m}{3R_E}$$

(3) 卫星的机械能为

$$E = E_K + E_P = G \frac{m_E m}{6R_E} - G \frac{m_E m}{3R_E} = -G \frac{m_E m}{6R_E}$$

3-27 分析 取冰块、屋面和地球为系统，由于屋面对冰块的支持力 F_N 始终与冰块运动的方向垂直，故支持力不作功；而重力 P 又是保守内力，所以，系统的机械能守恒。但是，仅有一个机械能守恒方程不能解出速度和位置两个物理量；因此，还需设法根据冰块在脱离屋面时支持力为零这一条件，由牛顿定律列出冰块沿径向的动力学方程。求解上述两方程即可得出结果。

解 由系统的机械能守恒，有

$$mgR = \frac{1}{2} mv^2 + mgR \cos \theta \quad (1)$$

根据牛顿定律，冰块沿径向的动力学方程为

$$mgR \cos \theta - F_N = \frac{mv^2}{R} \quad (2)$$

冰块脱离球面时，支持力 $F_N = 0$ ，由式 (1)、(2) 可得冰块的角位置

$$= \arccos \frac{2}{3} = 48.2^\circ$$

冰块此时的速率为

$$v = \sqrt{gR \cos \theta} = \sqrt{\frac{2Rg}{3}}$$

v 的方向与重力 P 方向的夹角为 $= 90^\circ - 48.2^\circ = 41.8^\circ$

3-28 分析 若取小球、弹簧和地球为系统，小球在被释放后的运动过程中，只有重力和弹力这两个保守内力做功，轨道对球的支持力不做功，因此，在运动的过程中，系统的机械能守恒。运用守恒定律解题时，关键在于选好系统的初态和终态。为获取本题所求的结果，初态选在压缩弹簧刚被释放时刻，这样，可使弹簧的劲度系数与初态相联系；而终态则取在小球刚好能通过半圆弧时的最高点 C 处，因为这时小球的速率正处于一种临界状态，若大于、等于此速率时，小球定能沿轨道继续向前运动；小于此速率时，小球将脱离轨道抛出。该速率则可根据重力提供圆弧运动中所需的向心力，由牛顿定律求出。这样，再由系统的机械能守恒定律即可解出该弹簧劲度系数的最小值。

解 小球要刚好通过最高点 C 时，轨道对小球支持力 $F_N = 0$ ，因此，有

$$mg = \frac{mv_c^2}{r} \quad (1)$$

取小球开始时所在位置 A 为重力势能的零点，由系统的机械能守恒定律，有

$$\frac{1}{2} k(l)^2 = mg(3r) + \frac{1}{2} mv_c^2 \quad (2) \quad \text{由式 (1)、(2) 可得}$$

$$k = \frac{7mgr}{(l)^2} = 366 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

3-29 分析 这也是一种碰撞问题。碰撞的全过程是指小球刚与弹簧接触直至弹簧被压缩到最大，小球与靶刚好到达共同速度为止，在这过程中，小球和靶组成的系统在水平方向不受外力作用，外力的冲量为零，因此，在此方向动量守恒。但是，仅靠动量守恒定律还不能求出结果来。又考虑到无外力对系统做功，系统无非保守内力做功，故系统的机械能也守恒。应用上述两个守恒定律，并考虑到球与靶具有相同速度时，弹簧被压缩量最大这一条件，即可求解。应用守恒定律求解，可免除碰撞中的许多细节问题。

解 设弹簧的最大压缩量为 x_0 。小球与靶共同运动的速度为 v_1 。由动量守恒定律，有

$$mv = (m + m')v_1 \quad (1)$$

又由机械能守恒定律，有

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} (m + m')v_1^2 + \frac{1}{2} kx_0^2 \quad (2)$$

由式 (1)、(2) 可得

$$x_0 = \sqrt{\frac{mm'}{k(m+m')}}v$$

3-30 分析 该题可分两个过程分析. 首先是弹丸穿越摆锤的过程. 就弹丸与摆锤所组成的系统而言, 由于穿越过程的时间很短, 重力和的张力在水平方向的冲量远小于冲击力的冲量, 因此, 可认为系统在水平方向不受外力的冲量作用, 系统在该方向上满足动量守恒. 摆锤在碰撞中获得了一定的速度, 因而具有一定的动能, 为使摆锤能在垂直平面内作圆周运动, 必须使摆锤在最高点处有确定的速率, 该速率可由其本身的重力提供圆周运动所需的向心力来确定; 与此同时, 摆锤在作圆周运动过程中, 摆锤与地球组成的系统满足机械能守恒定律, 根据两守恒定律即可解出结果.

解 由水平方向的动量守恒定律, 有

$$mv = m\frac{v}{2} + m'v' \quad (1)$$

为使摆锤恰好能在垂直平面内作圆周运动, 在最高点时, 摆线中的张力 $F_T = 0$, 则

$$m'g = \frac{m'v_h'^2}{l} \quad (2)$$

式中 v_h 为摆锤在圆周最高点的运动速率.

又摆锤在垂直平面内作圆周运动的过程中, 满足机械能守恒定律, 故有

$$\frac{1}{2}m'v'^2 = 2m'gl + \frac{1}{2}m'v_h'^2 \quad (3)$$

解上述三个方程, 可得弹丸所需速率的最小值为

$$v = \frac{2m'}{m\sqrt{5gl}}$$

3-31 分析 对于粒子的对心弹性碰撞问题, 同样可利用系统 (电子和氢原子) 在碰撞过程中所遵循的动量守恒和机械能守恒来解决. 本题所求电子传递给氢原子的能量的百分数, 即氢原子动能与电子动能之比 E_H / E_e . 根据动能的定义, 有 $E_H / E_e = m'v_H'^2 / mv_e'^2$, 而氢原子与电子的质量比 m' / m 是已知的, 它们的速率比可应用上述两守恒定律求得, E_H / E_e 即可求出.

解 以 E_H 表示氢原子被碰撞后的动能, E_e 表示电子的初动能, 则

$$\frac{E_H}{E_e} = \frac{\frac{1}{2}m'v_H'^2}{\frac{1}{2}mv_e'^2} = \frac{m'}{m} \left(\frac{v_H}{v_e} \right)^2 \quad (1)$$

由于粒子作对心弹性碰撞, 在碰撞过程中系统同时满足动量守恒和机械能守恒定律, 故有

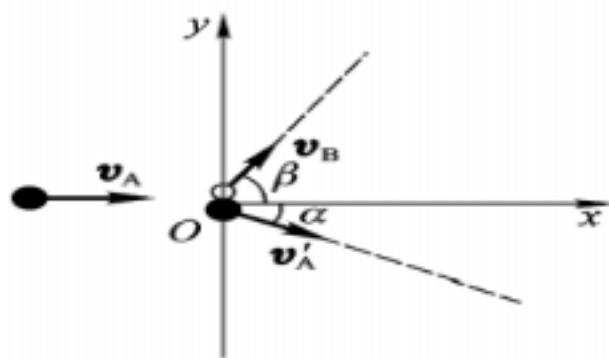
$$mv_e = m'v_H + mv_e' \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}mv_e^2 = \frac{1}{2}m'v_H'^2 + \frac{1}{2}mv_e'^2 \quad (3)$$

由题意知 $m' / m = 1840$, 解上述三式可得

$$\frac{E_H}{E_e} = \frac{m'}{m} \left(\frac{v_H}{v_e} \right)^2 = 1840 \left(\frac{2m}{m' + m} \right)^2 \approx 2.2 \times 10^{-3}$$

3-32 分析 这是粒子系统的二维弹性碰撞问题。这类问题通常采用守恒定律来解决。因为粒子系统在碰撞的平面内不受外力作用，同时，碰撞又是完全弹性的，故系统同时满足动量守恒和机械能守恒。由两守恒定律方程即可解得结果。



题 3-32 图

解 取如图所示的坐标，由于粒子系统属于斜碰，在碰撞平面内根据系统动量守恒定律可取两个分量式，有

$$\frac{1}{2}mv_A = \frac{m}{2}v_B \cos \beta + mv_A' \cos \alpha \quad (1)$$

$$0 = \frac{m}{2}v_B \sin \beta - mv_A' \sin \alpha \quad (2)$$

又由机械能守恒定律，有

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} \right) v_B^2 + \frac{1}{2}mv_A'^2 \quad (3)$$

解式(1)、(2)、(3)可得碰撞后 B 粒子的速率为

$$v_B = \sqrt{2(v_A^2 - v_A'^2)} = 4.69 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

各粒子相对原粒子方向的偏角分别为

$$= \arccos \frac{v_A^2 + 3v_A'^2}{4v_A v_A'} = 22^\circ 20'$$

3-33 分析 该题可分两个阶段来讨论，首先是子弹和物块的撞击过程，然后是物块（包含子弹）沿斜面向上的滑动过程。在撞击过程中，对物块和子弹组成的系统而言，由于撞击前后的总动量明显是不同的，因此，撞击过程中动量

不守恒。应该注意，不是任何碰撞过程中动量都是守恒的。但是，若取沿斜面的方向，因撞击力（属于内力）远大于子弹的重力 P_1 和物块的重力 P_2 在斜面的方向上的分力以及物块所受的摩擦力 F_f ，在该方向上动量守恒，由此可得到物块被撞击后的速度。在物块沿斜面上滑的过程中，为解题方便，可重新选择系统（即取子弹、物块和地球为系统），此系统不受外力作用，而非保守内力中仅摩擦力做功，根据系统的功能原理，可解得最终的结果。

解 在子弹与物块的撞击过程中，在沿斜面的方向上，根据动量守恒有

$$mv_0 \cos \theta = (m + m')v_1 \quad (1)$$

在物块上滑的过程中，若令物块刚滑出斜面顶端时的速度为 v_2 ，并取 A 点的重力势能为零。由系统的功能原理可得

$$-\mu(m+m')g\cos\frac{h}{\sin\theta} = \frac{1}{2}(m+m')v_2^2 + (m+m')gh - \frac{1}{2}(m+m')v_1^2 \quad (2)$$

由式 (1)、(2) 可得

$$v_2 = \sqrt{\left(\frac{m}{m+m'}v_0\cos\theta\right)^2 - 2gh(\mu\cot\theta + 1)}$$

3-34 分析 由于桌面无摩擦，容器可以在水平桌面上滑动，当小球沿容器内壁下滑时，容器在桌面上也要发生移动。将小球与容器视为系统，该系统在运动过程中沿水平桌面方向不受外力作用，系统在该方向上的动量守恒；若将小球、容器与地球视为系统，因系统无外力作用，而内力中重力是保守力，而支持力不作功，系统的机械能守恒。由两个守恒定律可解得小球和容器在惯性系中的速度。由于相对运动的存在，小球相对容器运动的轨迹是圆，而相对桌面运动的轨迹就不再是圆了，因此，在运用曲线运动中的法向动力学方程求解小球受力时，必须注意参考系的选择。若取容器为参考系（非惯性系），小球在此参考系中的轨迹仍是容器圆弧，其法向加速度可由此刻的速度（相对于容器速度）求得。在分析小球受力时，除重力和支持力外，还必须计及它所受的惯性力。小球位于容器的底部这一特殊位置时，容器的加速度为零，惯性力也为零。这样，由法向动力学方程求解小球所受的支持力就很容易了。若仍取地面为参考系（惯性系），虽然无需考虑惯性力，但是因小球的轨迹方程比较复杂，其曲率半径及法向加速度难以确定，使求解较为困难。

解 根据水平方向动量守恒定律以及小球在下滑过程中机械能守恒定律可分别得

$$mv_m - m'v_m' = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}mv_v^2 + \frac{1}{2}m'v_m'^2 = mgR \quad (2)$$

式中 v_m 、 v_m' 分别表示小球、容器相对桌面的速度。由式 (1)、(2) 可得小球到达容器底部时小球、容器的速度大小分别为

$$v_m = \sqrt{\frac{2m'gR}{m+m'}}$$

$$v_m' = \frac{m}{m'}\sqrt{\frac{2m'gR}{m+m'}}$$

由于小球相对地面运动的轨迹比较复杂，为此，可改为以容器为参考系（非惯性系）。在容器底部时，小球相对容器的运动速度为

$$v_m' = v_m - (-v_m) = v_m + v_m = \sqrt{\left(\frac{m+m'}{m'}\right)2gR} \quad (3)$$

在容器底部，小球所受惯性力为零，其法向运动方程为

$$F_N - mg = \frac{mv_m^2}{R} \quad (4)$$

由式 (3)、(4) 可得小球此时所受到的支持力为

$$F_N = mg \left(3 + \frac{2m}{m'} \right)$$

3-35 分析 (1) 桩依靠自重下沉是利用重力势能的减少来克服摩擦力做功，可根据功能原理求解。(2) 打桩过程可分为三个阶段。1. 锤自由下落的过程。在此过程中，锤与地球系统的势能转化为锤的动能，满足机械能守恒定律。2. 碰撞的过程。在这过程中，由于撞击力远大于重力和泥土的阻力，锤与桩这一系统满足动量守恒定律。由于碰撞是完全非弹性的，碰撞后桩和锤以共同速度运动。3. 桩下沉的过程。在这过程中，桩和锤的动能和系统的势能将用于克服摩擦力做功，可应用系统的功能原理。根据以上分析列出相应方程式即可解。(3) 仍为打桩过程。所不同的是，在此过程中，碰撞是非弹性的，因此，桩获得的速度还需根据锤反弹的高度求出。桩下沉时，仍是以桩的动能和势能减少来克服摩擦力做功的。

解 (1) 在锤击桩之前，由于桩的自重而下沉，这时，取桩和地球为系统，根据系统的功能原理，有

$$m'gh_1 = \int_0^{h_1} 4\sqrt{Sh}Kdh \quad (1)$$

桩下沉的距离为

$$h_1 = \frac{m'g}{2\sqrt{SK}} = 8.88 \text{ m}$$

(2) 锤从 1 m 高处落下，其末速率为 $v_0 = \sqrt{2gh}$ 。由于锤与桩碰撞是完全非弹性的，锤与桩碰撞后将有共同的速率，按动量守恒定律，有

$$mv_0 = (m' + m)v \quad (2)$$

随后桩下沉的过程中，根据系统的功能原理，有

$$\int_{h_1}^{h_1+h_2} -4\sqrt{Sh}Kdh = -\frac{1}{2}(m' + m)v^2 - (m' + m)gh_2 \quad (3)$$

由式 (2)、(3) 可解得桩下沉的距离为

$$h_2 = 0.2 \text{ m}$$

(3) 当桩已下沉 35 m 时，再一次锤桩，由于此时的碰撞是一般非弹性的，锤碰撞后的速率可由上抛运动规律得 $v_1 = \sqrt{2gh'}$ ，再根据动量守恒定律，有

$$mv_0 = -m\sqrt{2gh'} + m'v' \quad (4)$$

随后，桩在下沉过程中，再一次应用系统的功能原理，得

$$\int_0^{h_3} -4\sqrt{S(35\text{m} + h)}Kdh = -m'gh_3 - \frac{1}{2}m'v'^2 \quad (5)$$

由式 (4)、(5) 可得桩再一次下沉的距离

$$h_3 = 0.033 \text{ m}$$

3-36 分析 因质点系的质心是静止的, 质心的速度为零, 即 $v_C = dr_C/dt = 0$

$$v_C = \frac{dr_C}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \right) = 0, \text{ 故有 } \frac{d}{dt} \sum m_i x_i = \sum m_i \dot{x}_i = 0, \text{ 这是一矢量方程. 将质点}$$

系中各质点的质量和速度分量代入其分量方程式, 即可解得第三质点的速度.

解 在质点运动的平面内取如图 3-36 所示坐标. 按 $\sum m_i \dot{x}_i = 0$ 的分量式, 有

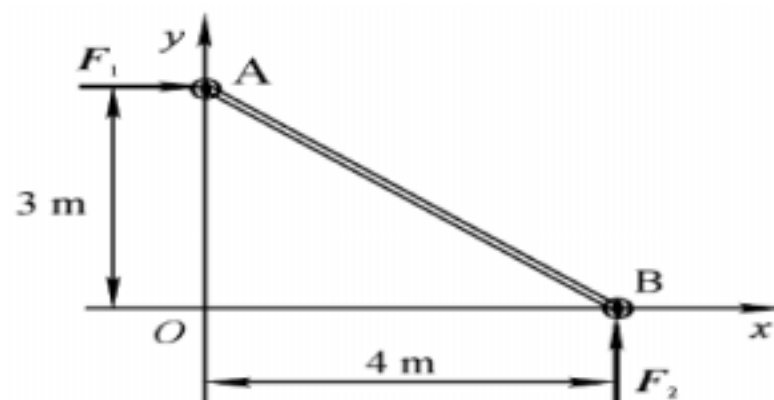
$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + m_3 v_{3x} = 0$$

$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} + m_3 v_{3y} = 0$$

其中 $v_{2x} = v_2 \cos \theta$, $v_{2y} = v_2 \sin \theta$, $\theta = -30^\circ$, 代入后得

$$v_{3x} = -\frac{m_2}{m_3} v_{2x} = -2.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad v_{3y} = \frac{m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y}}{m_3} = -2.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{则 } v_3 = -(2.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \mathbf{i} - (2.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \mathbf{j}$$



题 3-37 图

3-37 分析 两质点被刚性杆连接构成一整体, 其质心坐标可按质心位矢式求出. 虽然两力分别作用在杆端不同质点上, 但对整体而言, 可应用质心运动定律和运动学规律来求解.

解 (1) 选如图所示坐标, 则 $t = 0$ 时, 系统质心的坐标为

$$x_{C0} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} x_{20} = 1.5 \text{ m}$$

$$y_{C0} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} y_{10} = 1.9 \text{ m}$$

对小球与杆整体应用质心运动定律, 得

$$F_x = F_1 = (m_1 + m_2) \frac{dv_x}{dt} \quad (1)$$

$$F_y = F_2 = (m_1 + m_2) \frac{dv_y}{dt} \quad (2)$$

根据初始条件 $t = 0$ 时, $v = 0$, 分别对式 (1)、式 (2) 积分可得质心速度的分量与时间的

函数关系式，有

$$\int_0^t F_1 dt = \int_0^{v_x} (m_1 + m_2) dv_x, \quad v_x = \frac{F_1}{m_1 + m_2} t \quad (3)$$

$$\int_0^t F_2 dt = \int_0^{v_y} (m_1 + m_2) dv_y, \quad v_y = \frac{F_2}{m_1 + m_2} t \quad (4)$$

根据初始条件 $t = 0$ 时, $x = x_{c0}$, $y = y_{c0}$, 对式 (3)、式 (4) 再一次积分可得质心坐标与时间的函数关系式，有

$$\int_{x_{c0}}^{x_c} dx_c = \int_0^t \left(\frac{F_1}{m_1 + m_2} \right) dt$$

$$x_c = x_{c0} + \frac{F_1}{2(m_1 + m_2)} t^2 = 1.5 + 0.25t^2$$

及
$$\int_{y_{c0}}^{y_c} dy_c = \int_0^t \left(\frac{F_2}{m_1 + m_2} \right) dt$$

$$y_c = y_{c0} + \frac{F_2}{2(m_1 + m_2)} t^2 = 1.9 + 0.19t^2$$

(2) 利用动量定理并考虑到系统的初始状态为静止，可得系统总动量与时间的函数关系

$$\mathbf{P} = \mathbf{P} = \int_0^t (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) dt = (8.0t) \mathbf{i} - (6.0t) \mathbf{j}$$

4-1 分析与解 力对轴之力矩通常有三种情况：其中两种情况下力矩为零：一是力的作用线通过转轴，二是力平行于转轴（例如门的重力并不能使门转）。不满足上述情况下的作用力（含题述作用力垂直于转轴的情况）对轴之矩不为零，但同时有两个力作用时，只要满足两力矩大小相等，方向相反，两力矩对同一轴的合外力矩也可以为零，由以上规则可知 (1)(2) 说法是正确。对于 (3)(4) 两种说法，如作用于刚体上的两个力为共点力，当合力为零时，它们对同一轴的合外力矩也一定为零，反之亦然。但如这两个力为非共点力，则以上结论不成立，故 (3)(4) 说法不完全正确。综上所述，应选 (B)。

4-2 分析与解 刚体中相邻质元之间的一对内力属于作用力与反作用力，且作用点相同，故对同一轴的力矩之和必为零，因此可推知刚体中所有内力矩之和为零，因而不会影响刚体的角加速度或角动量等，故 (1)(2) 说法正确。对说法 (3) 来说，题述情况中两个刚体对同一轴的转动惯量因形状、大小不同有可能不同，因而在相同力矩作用下，产生的角加速度不一定相同，因而运动状态未必相同，由此可见应选 (B)。

4-3 分析与解 如图所示，在棒下落过程中，重力对轴之矩是变化的，其大小与棒和水平面的夹角有关。当棒处于水平位置，重力矩最大，当棒处于竖直位置时，重力矩为零。因此棒在下落过程中重力矩由大到小，由转动定律知，棒的角加速亦由大到小，而棒的角速度却由小到大（由机械能守恒亦可判断角速度变化情况），应选 (C)。

4-4 分析与解 对于圆盘—子弹系统来说，并无外力矩作用，故系统对轴 O 的角动量守

恒, 故 L 不变, 此时应有下式成立, 即

$$mvd - mvd_0 + J_0 \omega_0 = J\omega$$

式中 mvd 为子弹对点 O 的角动量, ω_0 为圆盘初始角速度, J 为子弹留在盘中后系统对轴 O 的转动惯量, J_0 为子弹射入前盘对轴 O 的转动惯量. 由于 $J > J_0$, 则 $\omega < \omega_0$. 故选 (C).

4-5 分析与解 由于卫星一直受到万有引力作用, 故其动量不可能守恒, 但由于万有引力一直指向地球中心, 则万有引力对地球中心的力矩为零, 故卫星对地球中心的角动量守恒, 即 $\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{恒量}$, 式中 \mathbf{r} 为地球中心指向卫星的位矢. 当卫星处于椭圆轨道上不同位置时, 由于 $|\mathbf{r}|$ 不同, 由角动量守恒知卫星速率不同, 其中当卫星处于近地点时速率最大, 处于远地点时速率最小, 故卫星动能并不守恒, 但由万有引力为保守力, 则卫星的机械能守恒, 即卫星动能与万有引力势能之和维持不变, 由此可见, 应选 (B).

4-6 分析 这是刚体的运动学问题. 刚体定轴转动的运动学规律与质点的运动学规律有类似的关系, 本题为匀变速转动.

解 (1) 由于角速度 $\omega = 2\pi n$ (n 为单位时间内的转数), 根据角加速度的定义 $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$, 在匀变速转动中角加速度为

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{2\pi(n - n_0)}{t} = 13.1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$$

(2) 发动机曲轴转过的角度为

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 = \frac{\omega - \omega_0}{2} t = \pi(n - n_0)t$$

在 12 s 内曲轴转过的圈数为

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{n + n_0}{2} t = 390$$

4-7 分析 与质点运动学相似, 刚体定轴转动的运动学问题也可分为两类: (1) 由转动的运动方程, 通过求导得到角速度、角加速度; (2) 在确定的初始条件下, 由角速度、角加速度通过积分得到转动的运动方程. 本题由 $\alpha = \alpha_0(1 - e^{-t/\tau})$ 出发, 分别通过求导和积分得到电动机的角加速度和 6.0 s 内转过的圈数.

解 (1) 根据题意中转速随时间的变化关系, 将 $t = 6.0 \text{ s}$ 代入, 即得

$$\alpha = \alpha_0(1 - e^{-t/\tau}) = 0.95 \alpha_0 = 8.6 \text{ s}^{-2}$$

(2) 角速度随时间变化的规律为

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \alpha_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}) = 4.5e^{-t/2} \text{ (rad} \cdot \text{s}^{-2}\text{)}$$

(3) $t = 6.0 \text{ s}$ 时转过的角度为

$$\theta = \int_0^6 \omega dt = \int_0^6 \alpha_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}) dt = 36.9 \text{ rad}$$

则 $t = 6.0 \text{ s}$ 时电动机转过的圈数

$$N = \theta / 2\pi = 5.87 \text{ 圈}$$

4-8 分析 如将原子视为质点, 则水分子中的氧原子对 AA' 轴和 BB' 轴的转动惯量均为零, 因此计算水分子对两个轴的转动惯量时, 只需考虑氢原子即可.

解 由图可得

$$J_{AA'} = 2m_H d^2 \sin^2$$

$$J_{BB'} = 2m_H d^2 \cos^2$$

此二式相加, 可得 $J_{AA'} + J_{BB'} = 2m_H d^2$

$$\text{则 } d = \sqrt{\frac{J_{AA'} + J_{BB'}}{2m_H}} = 9.59 \times 10^{-11} \text{ m}$$

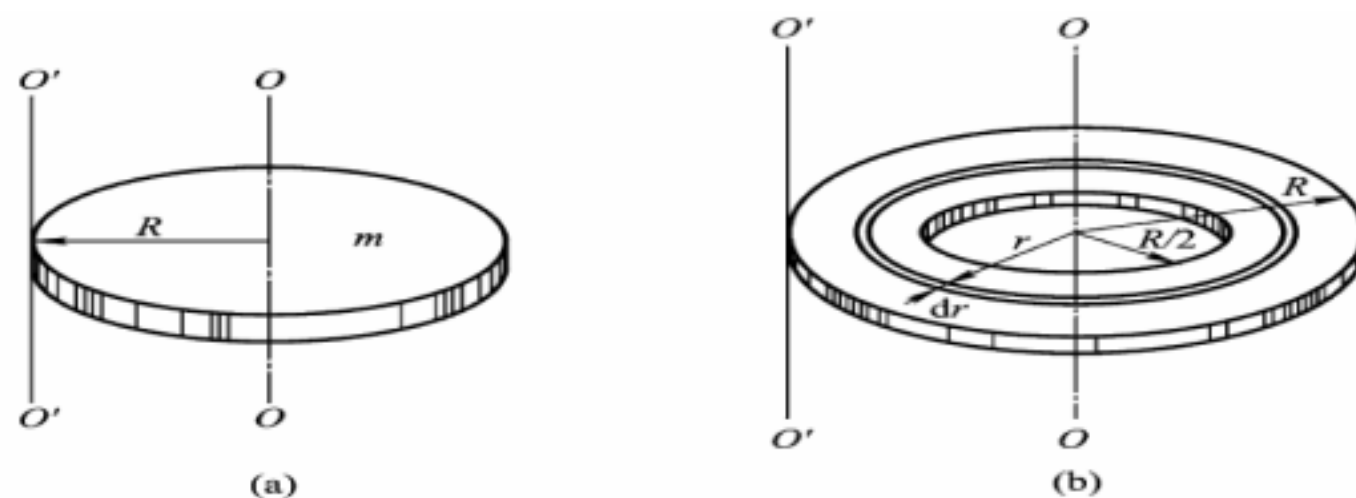
由二式相比, 可得 $J_{AA'} / J_{BB'} = \tan^2$

$$\text{则 } \theta = \arctan \sqrt{\frac{J_{AA'}}{J_{BB'}}} = \arctan \sqrt{\frac{1.93}{1.14}} = 52.3^\circ$$

4-9 分析 根据转动惯量的可叠加性, 飞轮对轴的转动惯量可视为圆盘与两圆柱体对同轴的转动惯量之和; 而匀质圆盘、圆柱体对轴的转动惯量的计算可查书中公式, 或根据转动惯量的定义, 用简单的积分计算得到.

解 根据转动惯量的叠加性, 由匀质圆盘、圆柱体对轴的转动惯量公式可得

$$\begin{aligned} J &= J_1 + J_2 = 2 \times \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{d_1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d_2}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{16} \left(l d_1^4 + \frac{1}{2} a d_2^4 \right) = 0.136 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$



题 4-10 图

4-10 分析 由于转动惯量的可加性, 求解第一问可有两种方法: 一是由定义式

$J = \int r^2 dm$ 计算, 式中 dm 可取半径为 r 、宽度为 dr 窄圆环; 二是用补偿法可将剩余部分的

转动惯量看成是原大圆盘和挖去的小圆盘对同一轴的转动惯量的差值. 至于第二问需用到平行轴定理.

解 挖去后的圆盘如图 (b) 所示.

(1) 解 1 由分析知

$$J_0 = \int r^2 dm = \int_{R/2}^R r^2 \frac{m}{R^2} 2r dr$$

$$= \frac{2m}{R^2} \int_{R/2}^R r^3 dr = \frac{15}{32} mR^2$$

解2 整个圆盘对 OO 轴转动惯量为 $J_1 = \frac{1}{2} mR^2$ ，挖去的小圆盘对 OO 轴转动惯量

$$J_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{m}{R^2} \left(\frac{R}{2} \right)^2 \right] \left(\frac{R}{2} \right)^2 = \frac{1}{32} mR^2$$

，由分析知，剩余部分对 OO 轴的转动惯量为

$$J_0 = J_1 - J_2 = \frac{15}{32} mR^2$$

(2) 由平行轴定理，剩余部分对 OO 轴的转动惯量为

$$J_0' = \frac{15}{32} mR^2 + \left[m - \frac{m}{R^2} \cdot \left(\frac{R}{2} \right)^2 \right] R^2 = \frac{39}{32} mR^2$$

4-11 分析 在运动过程中，飞轮和重物的运动形式是不同的。飞轮作定轴转动，而重物是作落体运动，它们之间有着内在的联系。由于绳子不可伸长，并且质量可以忽略。这样，飞轮的转动惯量，就可根据转动定律和牛顿定律联合来确定，其中重物的加速度，可通过它下落时的匀加速运动规律来确定。

该题也可用功能关系来处理。将飞轮、重物和地球视为系统，绳子张力作用于飞轮、重物的功之和为零，系统的机械能守恒。利用匀加速运动的路程、速度和加速度关系，以及线速度和角速度的关系，代入机械能守恒方程中即可解得。

解1 设绳子的拉力为 F_T ，对飞轮而言，根据转动定律，有

$$F_T R = J \quad (1)$$

而对重物而言，由牛顿定律，有

$$mg - F_T = ma \quad (2)$$

由于绳子不可伸长，因此，有

$$a = R \quad (3)$$

重物作匀加速下落，则有

$$h = \frac{1}{2} at^2 \quad (4)$$

由上述各式可解得飞轮的转动惯量为

$$J = mR^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right)$$

解2 根据系统的机械能守恒定律，有

$$-mgh + \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 = 0 \quad (1)$$

而线速度和角速度的关系为

$$v = R \omega \quad (2)$$

又根据重物作匀加速运动时, 有

$$v = at \quad (3)$$

$$v^2 = 2ah \quad (4)$$

由上述各式可得

$$J = mR^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right)$$

若轴承处存在摩擦, 上述测量转动惯量的方法仍可采用. 这时, 只需通过用两个不同质量的重物做两次测量即可消除摩擦力矩带来的影响.

4-12 分析 由于作用在飞轮上的力矩是恒力矩, 因此, 根据转动定律可知, 飞轮的角加速度是一恒量; 又由匀变速转动中角加速度与时间的关系, 可解出飞轮所经历的时间. 该题还可应用角动量定理直接求解.

解1 在匀变速转动中, 角加速度 $\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}$, 由转动定律 $M = J\alpha$, 可得飞轮所经历的时间

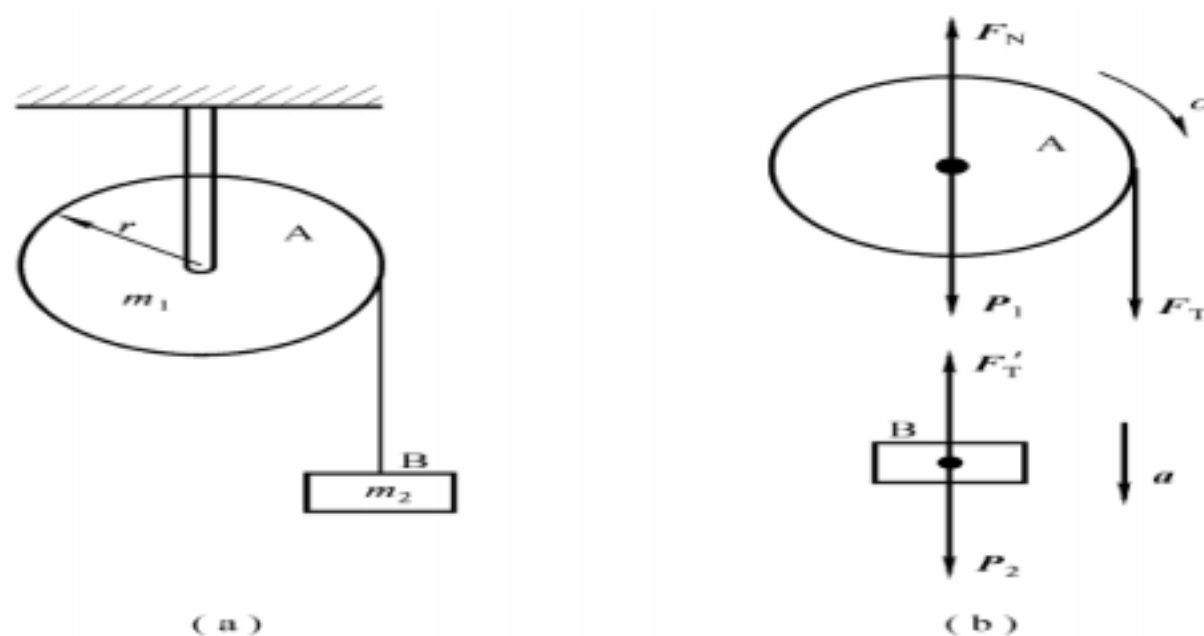
$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{2\pi J}{M} (n - n_0) = 10.8 \text{ s}$$

解2 飞轮在恒外力矩作用下, 根据角动量定理, 有

$$\int_0^t M dt = J(\omega - \omega_0)$$

$$\text{则 } t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{2\pi J}{M} (n - n_0) = 10.8 \text{ s}$$

4-13 分析 该系统的运动包含圆柱体的转动和悬挂物的下落运动 (平动). 两种不同的



题 4-13 图

运动形式应依据不同的动力学方程去求解, 但是, 两物体的运动由柔绳相联系, 它们运动量之间的联系可由角量与线量的关系得到.

解 (1) 分别作两物体的受力分析, 如图 (b). 对实心圆柱体而言, 由转动定律得

$$F_T r = J \alpha = \frac{1}{2} m_1 r^2 \alpha$$

对悬挂物体而言, 依据牛顿定律, 有

$$P_2 - F_T' = m_2 g - F_T' = m_2 a$$

且 $F_T = F_T$. 又由角量与线量之间的关系, 得

$$a = r$$

解上述方程组, 可得物体下落的加速度

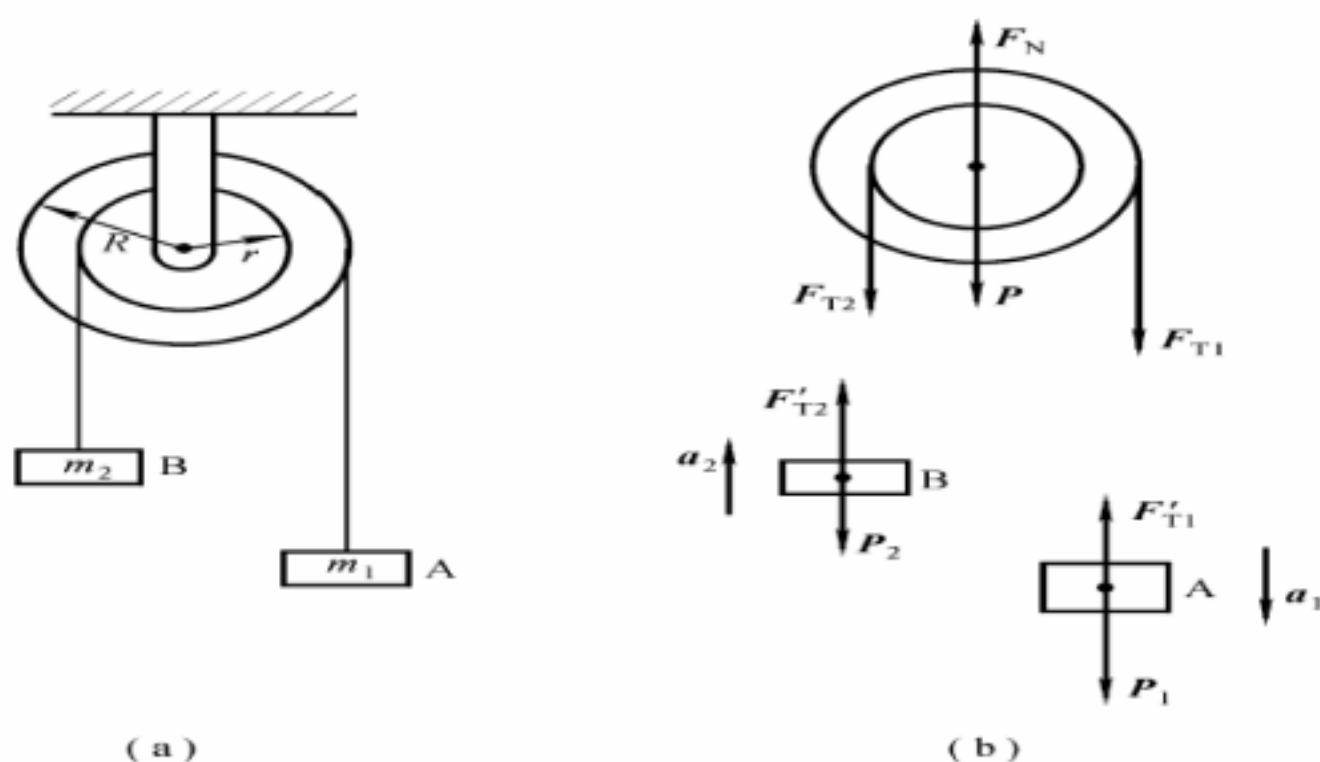
$$a = \frac{2m_2 g}{m_1 + 2m_2}$$

在 $t = 1.0 \text{ s}$ 时, B 下落的距离为

$$s = \frac{1}{2} at^2 = \frac{m_2 gt^2}{m_1 + 2m_2} = 2.45 \text{ m}$$

(2) 由式 (2) 可得绳中的张力为

$$F_T = m(g - a) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + 2m_2} g = 39.2 \text{ N}$$



题 4-14 图

4-14 分析 由于组合轮是一整体, 它的转动惯量是两轮转动惯量之和, 它所受的力矩是两绳索张力矩的矢量和 (注意两力矩的方向不同). 对平动的物体和转动的组合轮分别列出动力学方程, 结合角加速度和线加速度之间的关系即可解得.

解 分别对两物体及组合轮作受力分析, 如图 (b). 根据质点的牛顿定律和刚体的转动定律, 有

$$P_1 - F'_{T1} = m_1 g - F_{T1} = m_1 a_1 \quad (1)$$

$$F'_{T2} - P_2 = F_{T2} - m_2 g = m_2 a_2 \quad (2)$$

$$F_{T1} R - F_{T2} r = (J_1 + J_2) \quad (3)$$

$$F'_{T1} = F_{T1}, F'_{T2} = F_{T2} \quad (4)$$

由角加速度和线加速度之间的关系, 有

$$a_1 = R \quad (5)$$

$$a_2 = r \quad (6)$$

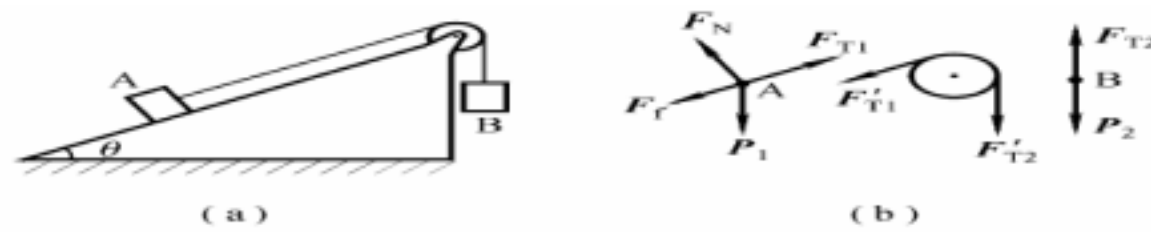
解上述方程组, 可得

$$a_1 = \frac{m_1 R - m_2 r}{J_1 + J_2 + m_1 R^2 + m_2 r^2} gR$$

$$a_2 = \frac{m_1 R - m_2 r}{J_1 + J_2 + m_1 R^2 + m_2 r^2} gr$$

$$F_{T1} = \frac{J_1 + J_2 + m_1 r^2 + m_2 Rr}{J_1 + J_2 + m_1 R^2 + m_2 r^2} m_1 g$$

$$F_{T2} = \frac{J_1 + J_2 + m_1 R^2 + m_1 Rr}{J_1 + J_2 + m_1 R^2 + m_2 r^2} m_2 g$$



题 4-15 图

4-15 分析 这是连接体的动力学问题, 对于这类问题仍采用隔离体的方法, 从受力分析着手, 然后列出各物体在不同运动形式下的动力学方程. 物体 A 和 B 可视为质点, 则运用牛顿定律. 由于绳与滑轮间无滑动, 滑轮两边绳中的张力是不同的, 滑轮在力矩作用下产生定轴转动, 因此, 对滑轮必须运用刚体的定轴转动定律. 列出动力学方程, 并考虑到角量与线量之间的关系, 即能解出结果来.

解 作 A、B 和滑轮的受力分析, 如图 (b). 其中 A 是在张力 F_{T1} 、重力 P_1 , 支持力 F_N 和摩擦力 F_f 的作用下运动, 根据牛顿定律, 沿斜面方向有

$$F_{T1} - m_1 g \sin \theta - \mu m_1 g \cos \theta = m_1 a_1 \quad (1)$$

而 B 则是在张力 F_{T2} 和重力 P_2 的作用下运动, 有

$$m_2 g - F_{T2} = m_2 a_2 \quad (2)$$

由于绳子不能伸长、绳与轮之间无滑动, 则有

$$a_1 = a_2 = r \quad (3)$$

对滑轮而言, 根据定轴转动定律有

$$F'_{T2} r - F'_{T1} r = J \quad (4)$$

$$F'_{T1} = F_{T1}, F'_{T2} = F_{T2} \quad (5)$$

解上述各方程可得

$$a_1 = a_2 = \frac{m_2 g - m_1 g \sin \theta - \mu m_1 g \cos \theta}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}}$$

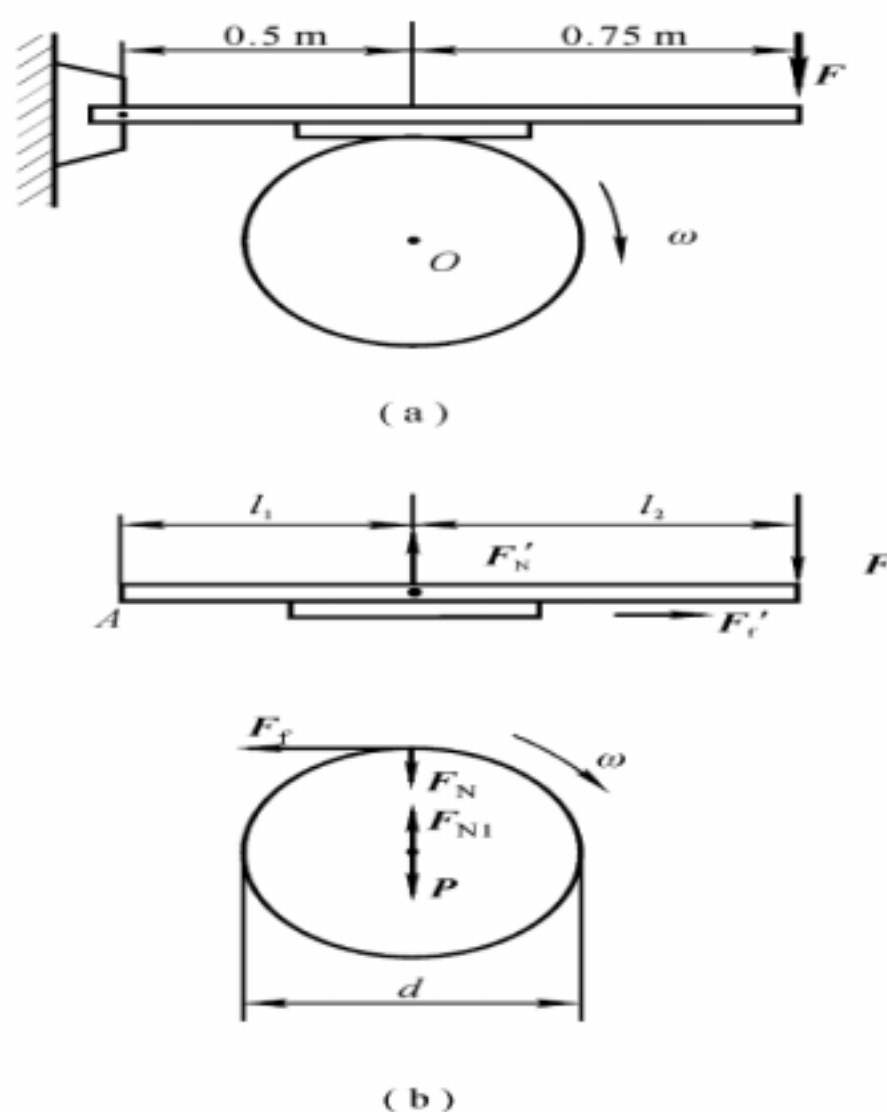
$$F_{T1} = \frac{m_1 m_2 g (1 + \sin \theta + \mu \cos \theta) + (\sin \theta + \mu \cos \theta) m_1 g J / r^2}{m_1 + m_2 + J / r^2}$$

$$F_{T2} = \frac{m_1 m_2 g (1 + \sin \theta + \mu \cos \theta) + m_2 g J / r^2}{m_1 + m_2 + J / r^2}$$

4-16 分析 飞轮的制动是闸瓦对它的摩擦力矩作用的结果, 因此, 由飞轮的转动规律可确定制动时所需的摩擦力矩. 但是, 摩擦力矩的产生与大小, 是由闸瓦与飞轮之间的正压力 F_N 决定的, 而此力又是由制动力 F 通过杠杆作用来实现的. 所以, 制动力可以通过杠杆的力矩平衡来求出.

解 飞轮和闸杆的受力分析, 如图 (b) 所示. 根据闸杆的力矩平衡, 有

$$F(l_1 + l_2) - F'_N l_1 = 0$$



题 4-16 图

而 $F_N = F'_N$, 则闸瓦作用于轮的摩擦力矩为

$$M = F_f \frac{d}{2} = \frac{1}{2} F_N \mu d = \frac{l_1 + l_2}{2l_1} F \mu d \quad (1)$$

摩擦力矩是恒力矩, 飞轮作匀角加速转动, 由转动的运动规律, 有

$$\omega = \frac{\omega_0}{t} = \frac{2\pi n}{t} \quad (2)$$

因飞轮的质量集中于轮缘, 它绕轴的转动惯量 $J = md^2/4$, 根据转动定律 $M = J\alpha$, 由式 (1)、(2) 可得制动力

$$F = \frac{nmdl_1}{\mu(l_1 + l_2)} = 3.14 \times 10^2 \text{ N}$$

4-17 分析 转动圆盘在平板上能逐渐停止下来是由于平板对其摩擦力矩作用的结果.

由于圆盘各部分所受的摩擦力的力臂不同，总的摩擦力矩应是各部分摩擦力矩的积分。为此，可考虑将圆盘分割成许多同心圆环，取半径为 r 、宽为 dr 的圆环为面元，环所受摩擦力 $dF_f = 2r\mu mgdr/R^2$ ，其方向均与环的半径垂直，因此，该圆环的摩擦力矩 $dM = r \times dF_f$ ，其方向沿转动轴，则圆盘所受的总摩擦力矩 $M = \int dM$ 这样，总的摩擦力矩的计算就可通过积分来完成。由于摩擦力矩是恒力矩，则由角动量定理 $Mt = (J\omega_0)$ ，可求得圆盘停止前所经历的时间 t 。当然也可由转动定律求解得。

解 (1) 由分析可知，圆盘上半径为 r 、宽度为 dr 的同心圆环所受的摩擦力矩为

$$dM = r \times dF_f = -(2r^2 \mu mg dr / R^2) k$$

式中 k 为轴向的单位矢量。圆盘所受的总摩擦力矩大小为

$$M = \int dM = \int_0^R \frac{2r^2 \mu mg}{R^2} dr = \frac{2}{3} \mu mg R$$

(2) 由于摩擦力矩是一恒力矩，圆盘的转动惯量 $J = mR^2/2$ 。由角动量定理 $Mt = (J\omega_0)$ ，可得圆盘停止的时间为

$$t = \frac{J}{M} = \frac{3}{4} \frac{R}{\mu g}$$

4-18 分析 由于空气的阻力矩与角速度成正比，由转动定律可知，在变力矩作用下，通风机电机的转动是变角加速转动，因此，在讨论转动的运动学关系时，必须从角加速度和角速度的定义出发，通过积分的方法去解。

解 (1) 通风机电机所受的阻力矩为 $M = -C\omega$ ，由转动定律 $M = J \frac{d\omega}{dt}$ ，可得电机的角加速度为

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{C}{J} \omega \quad (1)$$

根据初始条件对式 (1) 积分，有

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega} = \int_0^t -\frac{C}{J} dt$$

由于 C 和 J 均为常量，得

$$\omega = \omega_0 e^{-Ct/J} \quad (2)$$

当角速度由 ω_0 减至 $\omega_0/2$ 时，转动所需的时间为

$$t = \frac{J}{C} \ln 2$$

(2) 根据初始条件对式 (2) 积分，有

$$\int_0^t \omega dt = \int_0^t \omega_0 e^{-Ct/J} dt$$

$$\theta = \frac{J\omega_0}{2C}$$

在时间 t 内所转过的圈数为

$$N = \frac{J_0}{2} = \frac{J_0}{4C}$$

4-19 分析 由于棒的质量不计, 该系统对 z 轴的角动量即为两小球对 z 轴的角动量之和, 首先可求出系统对 z 轴的转动惯量 (若考虑棒的质量, 其转动惯量为多少, 读者可自己想一想), 系统所受合外力矩既可以运用角动量定理, 也可用转动定律来求解. 相比之下, 前者对本题更直接.

解 (1) 两小球对 z 轴的转动惯量为 $J = 2mr^2 = 2m(l\sin\theta)^2 = 2m(l\sin\theta)^2$, 则系统对 z 轴的角动量为

$$L = J\omega = 2mr^2\omega = 2ml^2\sin^2\theta(1 - e^{-t})$$

此处也可先求出每个小球对 z 轴的角动量后再求和.

(2) 由角动量定理得

$$M = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} [2ml^2\sin^2\theta(1 - e^{-t})] = 2ml^2\sin^2\theta e^{-t}$$

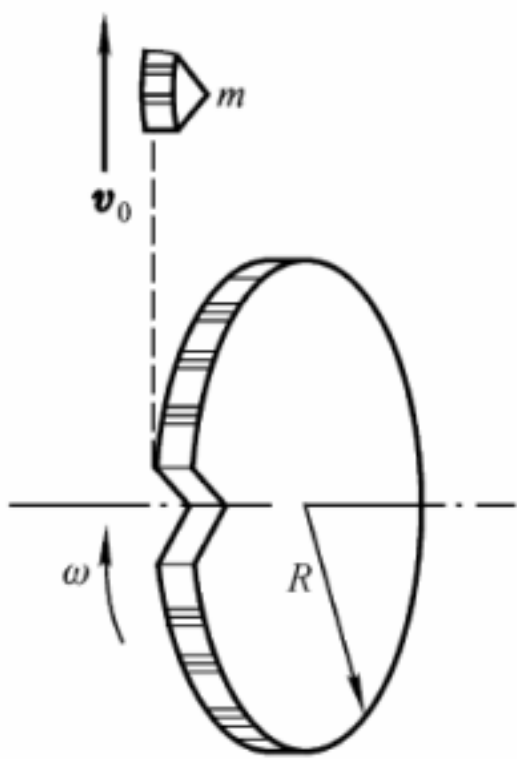
$t = 0$ 时, 合外力矩为

$$M = 2ml^2\sin^2\theta$$

此处也可先求解系统绕 z 轴的角加速度表达式, 即 $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \omega_0 e^{-t}$, 再由 $M = J\alpha$ 求得

M

4-20 分析 盘边缘裂开时, 小碎块以原有的切向速度作上抛运动, 由质点运动学规律可求得上抛的最大高度. 此外, 在碎块与盘分离的过程中, 满足角动量守恒条件, 由角动量守恒定律可计算破裂后盘的角动量.



题 4-20 图

解 (1) 碎块抛出时的初速度为

$$v_0 = R\omega$$

由于碎块竖直上抛运动, 它所能到达的高度为

$$h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{R^2}{2g}$$

(2) 圆盘在裂开的过程中, 其角动量守恒, 故有

$$L = L_0 - L'$$

式中 $L = \frac{1}{2} m' R^2$ 为圆盘未碎时的角动量; $L' = m R^2$ 为碎块被视为质点时, 碎块对轴的角动量; L 为破裂后盘的角动量. 则

$$L = \left(\frac{1}{2} m' - m \right) R^2$$

4-21 分析 子弹与杆相互作用的瞬间, 可将子弹视为绕轴的转动. 这样, 子弹射入杆前的角速度可表示为, 子弹陷入杆后, 它们将一起以角速度转动. 若将子弹和杆视为系统, 因系统不受外力矩作用, 故系统的角动量守恒. 由角动量守恒定律可解得杆的角速度.

解 根据角动量守恒定理

$$J_2 = (J_1 + J_2)'$$

式中 $J_2 = m_2 (l/2)^2$ 为子弹绕轴的转动惯量, J_2 为子弹在陷入杆前的角动量, $= 2v/l$ 为子弹在此刻绕轴的角速度. $J_1 = m_1 l^2 / 12$ 为杆绕轴的转动惯量. 可得杆的角速度为

$$' = \frac{J_2}{J_1 + J_2} = \frac{6m_2 v}{(m_1 + 3m_2)} = 29.1 \text{ s}^{-1}$$

4-22 分析 两伞型轮在啮合过程中存在着相互作用力, 这对力分别作用在两轮上, 并各自产生不同方向的力矩, 对转动的轮而言是阻力矩, 而对原静止的轮则是启动力矩. 由于相互作用的时间很短, 虽然作用力的位置知道, 但作用力大小无法得知, 因此, 力矩是未知的. 但是, 其作用的效果可从轮的转动状态的变化来分析. 对两轮分别应用角动量定理, 并考虑到啮合后它们有相同的线速度, 这样, 啮合后它们各自的角速度就能求出.

解 设相互作用力为 F , 在啮合的短时间 t 内, 根据角动量定理, 对轮、轮分别有

$$-F_{r1} t = J_1 (\omega_1 - \omega_0) \quad (1)$$

$$F_{r2} t = J_2 \omega_2 \quad (2)$$

两轮啮合后应有相同的线速度, 故有

$$r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2 \quad (3)$$

由上述各式可解得啮合后两轮的角速度分别为

$$\omega_1 = \frac{J_1 \omega_0 r_2^2}{J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2}$$

4-23 分析 小孩与转台作为一定轴转动系统, 人与转台之间的相互作用力为内力, 沿竖直轴方向不受外力矩作用, 故系统的角动量守恒. 在应用角动量守恒时, 必须注意人和转台的角速度、 ω_0 都是相对于地面而言的, 而人相对于转台的角速度 ω_1 应满足相对角速度的关系式 $\omega_1 = \omega_0 + \omega_1$.

解 由相对角速度的关系，人相对地面的角速度为

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 = \omega_0 + \frac{v}{R}$$

由于系统初始是静止的，根据系统的角动量守恒定律，有

$$J_0 \omega_0 + J_1 (\omega_0 + \omega_1) = 0$$

式中 J_0 、 $J_1 = mR^2$ 分别为转台、人对转台中心轴的转动惯量。由式(1)、(2)可得转台的角速度为

$$\omega_0 = -\frac{mR^2}{J_0 + mR^2} \frac{v}{R} = -9.52 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$$

式中负号表示转台转动的方向与人对地面的转动方向相反。

4-24 分析 对转动系统而言，随着砂粒的下落，系统的转动惯量发生了改变。但是，砂粒下落对转台不产生力矩的作用，因此，系统在转动过程中的角动量是守恒的。在时间 t 内落至台面的砂粒的质量，可由其流量求出，从而可算出它所引起的附加的转动惯量。这样，转台在不同时刻的角速度就可由角动量守恒定律求出。

解 在时间 $0 \sim 10 \text{ s}$ 内落至台面的砂粒的质量为

$$m = \int_0^{10\text{s}} Q dt = 0.10 \text{ kg}$$

根据系统的角动量守恒定律，有

$$J_0 \omega_0 = (J_0 + mr^2) \omega$$

则 $t = 10 \text{ s}$ 时，转台的角速度

$$\omega = \frac{J_0 \omega_0}{J_0 + mr^2} = 0.80 \text{ s}^{-1}$$

4-25 分析 将飞船与喷出的气体作为研究系统，在喷气过程中，系统不受外力矩作用，其角动量守恒。在列出方程时应注意：(1) 由于喷气质量远小于飞船质量，喷气前、后系统的角动量近似为飞船的角动量 J ；(2) 喷气过程中气流速率 u 远大于飞船侧面的线速度 r ，因此，整个喷气过程中，气流相对于空间的速率仍可近似看作是 u ，这样，排出气体的总角动量 $\int_m (u + r) dm \approx mur$ 。经上述处理后，可使问题大大简化。

解 取飞船和喷出的气体为系统，根据角动量守恒定律，有

$$J - mur = 0 \quad (1)$$

因喷气的流量恒定，故有

$$m = 2Qt \quad (2)$$

由式(1)、(2)可得喷气的喷射时间为

$$t = \frac{J}{2Qur} = 2.67 \text{ s}$$

4-26 分析 对蜘蛛和转台所组成的转动系统而言,在蜘蛛下落至转台面以及慢慢向中心爬移过程中,均未受到外力矩的作用,故系统的角动量守恒. 应该注意的是,蜘蛛爬行过程中,其转动惯量是在不断改变的. 由系统的角动量守恒定律即可求解.

解 (1) 蜘蛛垂直下落至转台边缘时,由系统的角动量守恒定律,有

$$J_0 \omega_a = (J_0 + J_1) \omega_b$$

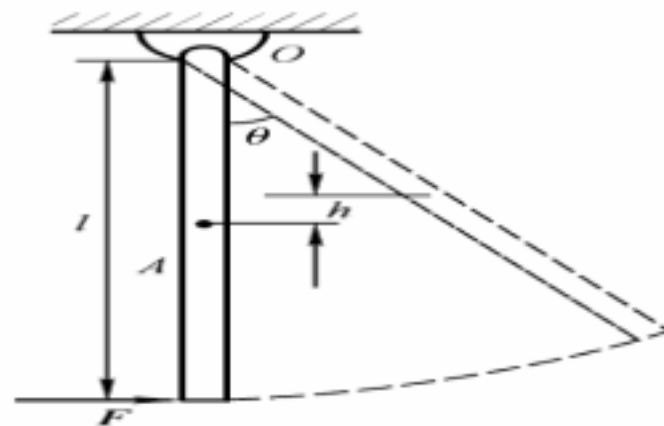
式中 $J_0 = \frac{1}{2} m' R^2$ 为转台对其中心轴的转动惯量, $J_1 = m R^2$ 为蜘蛛刚落至台面边缘时,它对轴的转动惯量. 于是可得

$$\omega_b = \frac{J_0}{J_0 + J_1} \omega_a = \frac{m'}{m' + 2m} \omega_a$$

(2) 在蜘蛛向中心轴处慢慢爬行的过程中,其转动惯量将随半径 r 而改变,即 $J_2 = m r^2$. 在此过程中,由系统角动量守恒,有

$$J_0 \omega_a = (J_0 + J_1) \omega_c$$

4-27 分析 该题属于常见的刚体转动问题,可分为两个过程来讨论: (1) 瞬间的打击过程. 在瞬间外力的打击下,棒受到外力矩的角冲量,根据角动量定理,棒的角动量将发生变化,则获得一定的角速度. (2) 棒的转动过程. 由于棒和地球所组成的系统,除重力 (保守内力) 外无其他外力做功,因此系统的机械能守恒,根据机械能守恒定律,可求得棒的偏转角度.



题 4-27 图

解 (1) 由刚体的角动量定理得

$$L = J_0 \omega = \int M dt = F l t = 2.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 取棒和地球为一系统,并选 O 处为重力势能零点. 在转动过程中,系统的机械能守恒,即

$$\frac{1}{2} J_0 \omega^2 = \frac{1}{2} m g l (1 - \cos \theta)$$

由式 (1)、(2) 可得棒的偏转角度为

$$\theta = \arccos \left(1 - \frac{3 F^2 t^2}{m^2 g l} \right) = 88^\circ 38'$$

4-28 分析 当人造卫星在绕地球的椭圆轨道上运行时,只受到有心力——万有引力的作用. 因此,卫星在运行过程中角动量是守恒的,同时该力对地球和卫星组成的系统而言,又是属于保守内力,因此,系统又满足机械能守恒定律. 根据上述两条守恒定律可求出卫星

在近地点和远地点时的速率 .

解 由于卫星在近地点和远地点处的速度方向与椭圆径矢垂直, 因此, 由角动量守恒定律有

$$mr_1v_1 = mr_2v_2 \quad (1)$$

又因卫星与地球系统的机械能守恒, 故有

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{Gmm_E}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{Gmm_E}{r_2} \quad (2)$$

式中 G 为引力常量, m_E 和 m 分别为地球和卫星的质量, r_1 和 r_2 是卫星在近地点和远地点时离地球中心的距离. 由式 (1)、(2) 可解得卫星在近地点和远地点的速率分别为

$$v_1 = \sqrt{\frac{Gm_E r_2}{r_1(r_1 + r_2)}} = 8.11 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1 = 6.31 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

4-29 分析 由于地球自转一周的时间为 24 小时, 由 $\omega = 2\pi/T$ 可确定地球的自转角速度和地球自转时的转动动能 $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$. 随着自转周期的增加, 相应自转的角速度将减小, 因而转动动能也将减少. 通过对上述两式微分的方法, 可得到动能的减少量 ΔE_k 与周期的变化 ΔT 的关系. 根据动能定理可知, 地球转动动能的减少是潮汐力矩做功的结果, 因此, 由 $W = \overline{M} \Delta\theta = \Delta E_k$, 即可求出潮汐的平均力矩.

解 (1) 地球的质量 $m_E = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$, 半径 $R = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$, 所以, 地球自转的动能

$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2} \times 0.33m_E R^2 / T^2 = 2.12 \times 10^{29} \text{ J}$$

(2) 对式 $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$ 两边微分, 可得

$$dE_k = -\frac{J\omega^3}{T} dT$$

当周期变化一定量时, 有

$$\Delta E_k = -\frac{J\omega^3}{T} \Delta T = -\frac{3}{2} E_k \frac{\Delta T}{T} \quad (1)$$

由于地球自转减慢而引起动能的减少量为

$$\Delta E_k = -\frac{3}{2} E_k \frac{\Delta T}{T} \quad (2)$$

又根据动能定理

$$W = \overline{M} \Delta\theta = \Delta E_k \quad (3)$$

由式 (2)、(3) 可得潮汐的摩擦力矩为

$$|\overline{M}| = \frac{E_k}{2} \frac{T}{n} = 7.47 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}$$

式中 n 为一年中的天数 ($n = 365$), T 为一天中周期的增加量.

4-30 分析 沿轴向的拉力对小球不产生力矩, 因此, 小球在水平面上转动的过程中不受外力矩作用, 其角动量应保持不变. 但是, 外力改变了小球圆周运动的半径, 也改变了小球的转动惯量, 从而改变了小球的角速度. 至于拉力所作的功, 可根据动能定理由小球动能的变化得到.

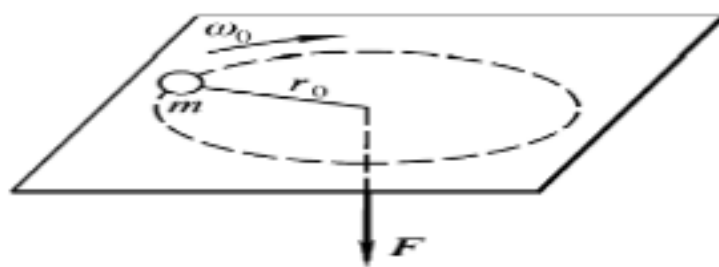
解 (1) 根据分析, 小球在转动的过程中, 角动量保持守恒, 故有式中 J_0 和 J_1 分别是小球在半径为 r_0 和 $1/2 r_0$ 时对轴的转动惯量, 即

$$J_0 \omega_0 = J_1 \omega_1$$

式中 J_0 和 J_1 分别是小球在半径为 r_0 和 $1/2 r_0$ 时对轴的转动惯量, 即 $J_0 = mr_0^2$ 和

$$J_1 = \frac{1}{4} mr_0^2, \text{ 则}$$

$$\omega_1 = \frac{J_0}{J_1} \omega_0 = 4 \omega_0$$



题 4-30 图

(2) 随着小球转动角速度的增加, 其转动动能也增加, 这正是拉力做功的结果. 由转动的动能定理可得拉力的功为

$$W = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 - \frac{1}{2} J_0 \omega_0^2 = \frac{3}{2} mr_0^2 \omega_0^2$$

4-31 分析 转动定律 $M = J \alpha$ 是一瞬时关系式, 为求棒在不同位置的角加速度, 只需确定棒所在位置的力矩就可求得. 由于重力矩 $M(\theta) = mg \frac{l}{2} \cos \theta$ 是变力矩, 角加速度也是变化的, 因此, 在求角速度时, 就必须根据角加速度用积分的方法来计算 (也可根据转动中的动能定理, 通过计算变力矩的功来求). 至于棒下落到竖直位置时的动能和角速度, 可采用系统的机械能守恒定律来解, 这是因为棒与地球所组成的系统中, 只有重力做功 (转轴处的支持力不作功), 因此, 系统的机械能守恒.

解 (1) 棒绕端点的转动惯量 $J = \frac{1}{3} ml^2$ 由转动定律 $M = J \alpha$ 可得棒在 θ 位置时的角加速度为

$$\alpha = \frac{M(\theta)}{J} = \frac{3g \cos \theta}{2l}$$

当 $\theta = 60^\circ$ 时, 棒转动的角加速度

$$\alpha = 18.4 \text{ s}^{-2}$$

由于 $\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\theta}$, 根据初始条件对式 (1) 积分, 有

$$\int_0^{\theta} d = \int_0^{60^\circ} d$$

则角速度为

$$= \sqrt{\frac{3g \sin \theta}{l}} \Big|_0^{60^\circ} = 7.98 \text{ s}^{-1}$$

(2) 根据机械能守恒, 棒下落至竖直位置时的动能为

$$E_k = \frac{1}{2} mgl = 0.98 \text{ J}$$

(3) 由于该动能也就是转动动能, 即 $E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$, 所以, 棒落至竖直位置时的角速度为

$$\omega = \sqrt{\frac{2E_k}{J}} = \sqrt{\frac{3g}{l}} = 8.57 \text{ s}^{-1}$$

4-32 分析 两飞轮在轴方向啮合时, 轴向力不产生转动力矩, 两飞轮系统的角动量守恒, 由此可求得 B 轮的转动惯量. 根据两飞轮在啮合前后转动动能的变化, 即可得到啮合过程中机械能的损失.

解 (1) 取两飞轮为系统, 根据系统的角动量守恒, 有

$$J_1 \omega_1 = (J_1 + J_2) \omega_2$$

则 B 轮的转动惯量为

$$J_2 = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2} J_1 = \frac{n_1 - n_2}{n_2} J_1 = 20.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

(2) 系统在啮合过程中机械能的变化为

$$E = \frac{1}{2} (J_1 + J_2) \omega_2^2 - \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 = -1.32 \times 10^4 \text{ J}$$

式中负号表示啮合过程中机械能减少.

4-33 分析 该题与习题 3-30 的不同之处在于: (1) 子弹与摆锤的相互作用过程不再满足动量守恒, 而应属于角动量守恒, 这是因为细棒和摆锤是一整体, 子弹与摆锤相互作用时, 轴对杆有水平方向的分力作用, 因此, 对子弹与摆组成的系统而言, 不能满足动量守恒的条件. 但是, 轴对杆的作用力和杆所受的重力对转动都不产生力矩, 系统角动量守恒的条件却能满足. (2) 摆在转动过程中, 就地球与摆组成的系统而言, 满足机械能守恒定律. 摆锤恰能通过最高点所需的速度, 可直接应用机械能守恒定律去解. 摆是刚体, 摆锤与轴心之间的距离不可能发生改变. 摆锤开始转动时的动能必须大于或等于转至最高点处所增加的势能.

解 取子弹与摆为系统, 根据系统的角动量守恒, 有

$$J_1 \frac{v}{l} = J_1 \left(\frac{v}{2l} \right) + (J_2 + J_3) \omega \quad (1)$$

式中 $J_1 = ml^2$ 、 $J_2 = ml^2$ 和 $J_3 = \frac{1}{3} ml^2$ 分别为子弹、摆锤和杆对轴的转动惯量。

根据摆在转动过程中机械能守恒，有

$$\frac{1}{2} (J_2 + J_3) \omega_0^2 + \frac{1}{2} m'gl = m'g(2l) + m'g\left(\frac{3}{2}l\right) \quad (2)$$

由式 (1)、(2) 可得子弹速度的最小值为

$$v = \frac{4m'}{n} \sqrt{2gl}$$

4-34 分析 虽然小球在环中作圆周运动，但由于环的转动，使球的运动规律复杂化了。由于应用守恒定律是解决力学问题最直接而又简便的方法，故以环和小球组成的转动系统来分析。在小球下滑的过程中，重力是系统仅有的外力，由于它与转轴平行，不产生外力矩，因此，该系统对轴的角动量守恒。若以小球位于点 A、B 处为初、末两状态，由角动量守恒定律可解得小球在点 B 时环的角速度 ω_B 。在进一步求解小球在点 B 处相对环的速度 v_B 时，如果仍取上述系统，则因重力（属外力）对系统要作功而使系统的机械能不守恒；若改取小球与地球为系统，也因环对小球的作用力在转动过程中作功，而使系统的机械能守恒仍不能成立；只有取环、小球与地球为系统时，系统才不受外力作用，而重力为保守内力，环与球的相互作用力虽不属保守内力，但这一对力所作功的总和为零，因此系统的机械能守恒。根据两守恒定律可解所需的结果。但必须注意：在计算系统的动能时，既有环的转动动能，又有小球

对地的动能（它可视为小球随环一起转动的转动动能 $\frac{1}{2} m r^2 \omega_B^2$ 与小球相对于环运动的动能 $\frac{1}{2} m v_B^2$ 之和）。

解 以环和小球为转动系统，由系统的角动量守恒有

$$J_0 \omega_0 = (J_0 + mR^2) \omega_B \quad (1)$$

取环、小球与地球为系统时，由系统的机械能守恒可得

$$\frac{1}{2} J_0 \omega_0^2 + mgR = \frac{1}{2} (J_0 + mR^2) \omega_B^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 \quad (2)$$

由式 (1)、(2) 可解得小球在 B 点时，环的角速度与小球相对于环的线速度分别为

$$\omega_B = \frac{J_0 \omega_0}{J_0 + mR^2}$$

$$v_B = \sqrt{2gR + \frac{J_0 \omega_0^2 R^2}{J_0 + mR^2}}$$

小球在 C 点时，由于总的转动惯量不变，用同样的方法可得环的角速度和小球相对于环的速度分别为

$$\omega_C = \omega_0$$

$$v_C = \sqrt{4gR}$$

4-35 分析 取飞船及两质点 A、B 为系统，在运行时，系统不受合外力矩作用，该系统的角动量守恒。若在运行过程中通过系统内的相互作用，改变其质量分布，使系统的角动量只存在于两质点上，此时，飞船的角动量为零，即飞船停止了转动。又因为在运行过程中合

外力的功亦为零, 且又无非保守内力做功, 所以, 系统也满足机械能守恒. 当轻线恰好拉直时质点的角速度与飞船停止转动时质点的角速度相等时, 连线的长度也就能求出.

解 飞船绕其中心轴的转动惯量为 $J_1 = \frac{1}{2} m' R^2$, 两质点在起始时和轻线割断瞬间的转动惯量分别为 $J_2 = 2mR^2$ 和 $J_2' = 2m(R+l)^2$. 由于过程中系统的角动量守恒, 为使轻线沿径向拉直时, 飞船转动正好停止, 则有

$$(J_1 + J_2) \omega = 2m(R+l)^2 \omega' \quad (1)$$

又根据过程中系统的机械能守恒, 有

$$\frac{1}{2} (J_1 + J_2) \omega^2 = \frac{1}{2} 2m(R+l)^2 \omega'^2 \quad (2)$$

由上述两式可解得

$$l = R \left(\sqrt{1 + \frac{m'}{4m}} - 1 \right)$$

4-36 分析 该题可分两个过程来分析. (1) 子弹与滑块撞击的过程. 因滑块所系的是轻质弹簧 (质量不计), 因此, 子弹射入滑块可视为质点系的完全非弹性碰撞过程. 沿子弹运动方向上外力的冲量为零, 所以, 系统在撞击过程中满足动量守恒, 由此, 可求出它们碰撞后的速度 v . (2) 子弹与滑块碰后以共同速度运动时, 由于弹簧不断伸长, 滑块在受到指向固定点的弹力的作用下作弧线运动. 对滑块的运动而言, 该弹力为有心力, 不产生力矩, 因而滑块在运动中满足角动量守恒; 与此同时, 对滑块、弹簧所组成的系统也满足机械能守恒. 这样, 当弹簧伸长至 l 时的滑块速度 v 的大小和方向就可通过三条守恒定律求得.

解 子弹射入滑块瞬间, 因属非弹性碰撞, 根据动量守恒定律有

$$mv_0 = (m' + m)v' \quad (1)$$

在弹簧的弹力作用下, 滑块与子弹一起运动的过程中, 若将弹簧包括在系统内, 则系统满足机械能守恒定律, 有

$$\frac{1}{2} (m' + m)v'^2 = \frac{1}{2} (m' + m)v^2 + \frac{1}{2} k(l - l_0)^2 \quad (2)$$

又在滑块绕固定点作弧线运动中, 系统满足角动量守恒定律, 故有

$$(m' + m)v'l_0 = (m' + m)vl \sin \theta \quad (3)$$

式中 θ 为滑块速度方向与弹簧线之间的夹角. 联立解上述三式, 可得

$$v = \sqrt{\left(\frac{m}{m' + m} \right)^2 v_0^2 - \frac{k(l - l_0)^2}{m' + m}}$$

$$\theta = \arcsin \frac{mv_0 l_0}{(m' + m)vl}$$

4-37 分析 这是一个变轴转动问题. 棒的质心在变轴转动中将受到一瞬间力的作用, 它改变了质心的速度; 同时, 该瞬间力对新的转轴又产生力矩作用, 从而改变棒的转动角速度. 根据质心的动量定理和棒的转动定律, 并考虑到角速度与线速度的关系, 即可求得新的角速度. 由棒绕不同轴转动的转动动能, 可计算该过程中的动能变化.

解 (1) 棒的质心的动量定理为

$$\bar{F} t = p = mv_c$$

式中 F 是棒所受的平均力, v_c 为棒质心的速度. 棒在转动过程中受到外力矩作用, 根据角动量定理, 有

$$-\bar{F} \frac{1}{2} l = J' - J$$

式中 J 为棒绕质心的转动惯量 (即 $J = \frac{1}{12} ml^2$).

而根据角量与线量的关系

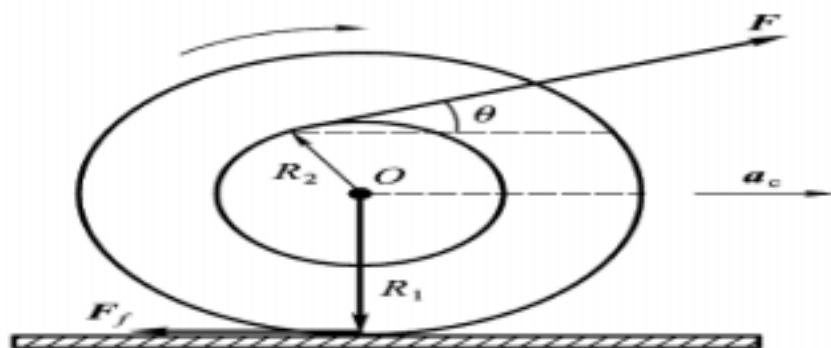
$$x = R \cos$$

可解得

$$\omega' = \frac{J}{J + \frac{1}{4} ml^2} = \frac{1}{4}$$

(2) 在此过程中转动动能的改变为

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega'^2 - \frac{1}{2} J \omega^2 = -\frac{1}{32} ml^2 \omega^2$$



题 4-38 图

4-38 分析 刚体平面平行运动可以被看成: 其刚体质心的平动和绕质心轴转动的叠加, 因此对本题可运用质心运动定律和转动定律进行求解. 由于木轴滚动时与水平面间无相对滑动(又叫纯滚动), 故两者之间的摩擦力应为静摩擦力, 并有 $a_c = R_1 \alpha$ 这一关系式成立.

解 设木轴所受静摩擦力 F_f 如图所示, 则有

$$F \cos \theta - F_f = ma_c \quad (1)$$

$$FR_2 + F_f R_1 = J_C \alpha \quad (2)$$

$$a_c = R_1 \alpha \quad (3)$$

由(1)、(2)、(3)式可得

$$a_c = \frac{R_1^2 \cos \theta + R_1 R_2}{J_C + m R_1^2} F$$

$$= \frac{a_c}{R_1} = \frac{R_1 \cos \theta + R_2}{J_C + m R_1^2} F$$

5-1 分析与解 “无限大” 均匀带电平板激发的电场强度为 $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, 方向沿带电平板法向

向外, 依照电场叠加原理可以求得各区域电场强度的大小和方向. 因而正确答案为 (B).

5-2 分析与解 依照静电场中的高斯定理, 闭合曲面上各点电场强度都为零时, 曲面内电荷的代数和必定为零, 但不能肯定曲面内一定没有电荷; 闭合曲面的电通量为零时, 表示穿入闭合曲面的电场线数等于穿出闭合曲面的电场线数或没有电场线穿过闭合曲面, 不能确定曲面上各点的电场强度必定为零; 同理闭合曲面的电通量不为零, 也不能推断曲面上任意一点的电场强度都不可能为零, 因而正确答案为 (B).

5-3 分析与解 电场强度与电势是描述电场的两个不同物理量, 电场强度为零表示试验电荷在该点受到的电场力为零, 电势为零表示将试验电荷从该点移到参考零电势点时, 电场力做功为零. 电场中一点的电势等于单位正电荷从该点沿任意路径到参考零电势点电场力所做的功; 电场强度等于负电势梯度. 因而正确答案为 (D).

5-4 分析与解 电偶极子在非均匀外电场中, 除了受到力矩作用使得电偶极子指向电场方向外, 还将受到一个指向电场强度增强方向的合力作用, 因而正确答案为 (B).

5-5 分析 考虑到极限情况, 假设电子与质子电量差值的最大范围为 $2 \times 10^{-21} e$, 中子电量为 $10^{-21} e$, 则由一个氧原子所包含的 8 个电子、8 个质子和 8 个中子可求原子所带的最大可能净电荷. 由库仑定律可以估算两个带电氧原子间的库仑力, 并与万有引力作比较.

解 一个氧原子所带的最大可能净电荷为

$$q_{\max} = (1+2) \times 8 \times 10^{-21} e$$

二个氧原子间的库仑力与万有引力之比为

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{q_{\max}^2}{4 \pi \epsilon_0 G m^2} = 2.8 \times 10^{-6} \ll 1$$

显然即使电子、质子、中子等微观粒子带电量存在差异, 其差异在 $\pm 10^{-21} e$ 范围内时, 对于像天体一类电中性物体的运动, 起主要作用的还是万有引力.

5-6 解 由于夸克可视为经典点电荷, 由库仑定律

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{e}_r = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \mathbf{e}_r = (3.78 \text{ N}) \mathbf{e}_r$$

\mathbf{F} 与径向单位矢量 \mathbf{e}_r 方向相同表明它们之间为斥力.

5-7 分析 根据题意将电子作为经典粒子处理. 电子、氢核的大小约为 10^{-15} m , 轨道半径约为 10^{-10} m , 故电子、氢核都可视为点电荷. 点电荷间的库仑引力是维持电子沿圆轨道运动的向心力, 故有

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

由此出发命题可证.

证 由上述分析可得电子的动能为

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{8 \pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

电子旋转角速度为

$$^2 = \frac{e^2}{4 \epsilon_0 m r^3}$$

由上述两式消去 r ，得

$$v^2 = \frac{^2}{4 \epsilon_0^2} = \frac{32 \epsilon_0^2 E_K^3}{m e^4}$$

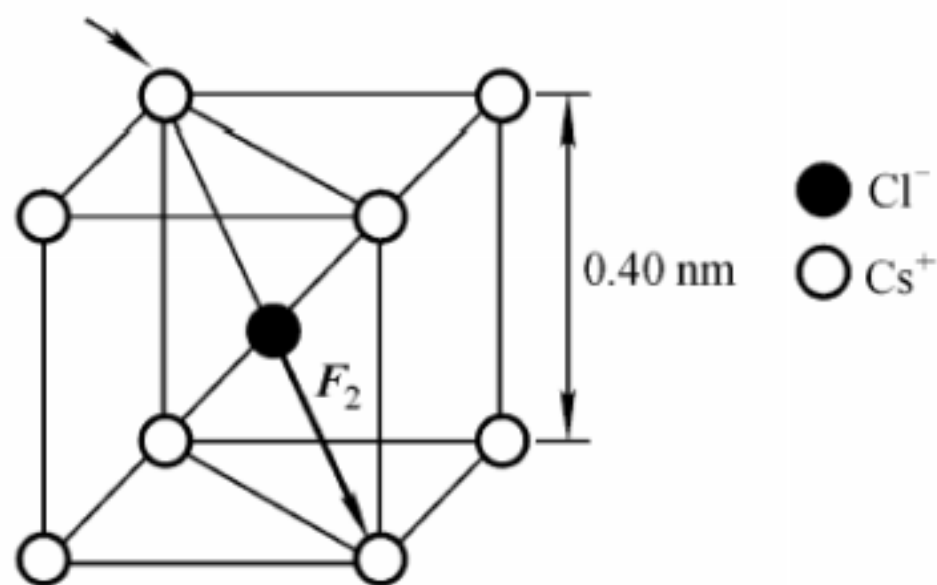
5-8 分析 铯离子和氯离子均可视作点电荷，可直接将晶格顶角铯离子与氯离子之间的库仑力进行矢量叠加。为方便计算可以利用晶格的对称性求氯离子所受的合力。

解 (1) 由对称性，每条对角线上的一对铯离子与氯离子间的作用合力为零，故 $F_1 = 0$ 。

(2) 除了有缺陷的那条对角线外，其它铯离子与氯离子的作用合力为零，所以氯离子所受的合力 F_2 的值为

$$F_2 = \frac{q_1 q_2}{4 \epsilon_0 r^2} = \frac{e^2}{3 \epsilon_0 a^2} = 1.92 \times 10^{-9} \text{ N}$$

F_2 方向如图所示。



题 5-8 图

5-9 分析 这是计算连续分布电荷的电场强度。此时棒的长度不能忽略，因而不能将棒当作点电荷处理。但带电细棒上的电荷可看作均匀分布在一维的长直线上。如图所示，在长直线上任意取一线元 dx ，其电荷为 $dq = Qdx/L$ ，它在点 P 的电场强度为

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4 \epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \mathbf{e}_r$$

整个带电体在点 P 的电场强度

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E}$$

接着针对具体问题来处理这个矢量积分。

(1) 若点 P 在棒的延长线上，带电棒上各电荷元在点 P 的电场强度方向相同，

$$\mathbf{E} = \int_L dE \mathbf{i}$$

(2) 若点 P 在棒的垂直平分线上, 如图 (A) 所示, 则电场强度 E 沿 x 轴方向的分量因对称性叠加为零, 因此, 点 P 的电场强度就是

$$\mathbf{E} = \int dE_y \mathbf{j} = \int \sin \theta dE \mathbf{j}$$

证 (1) 延长线上一点 P 的电场强度 $E = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dq}{2\epsilon_0 r'^2}$, 利用几何关系 $r' = \sqrt{r^2 + x^2}$ 统一积分变量, 则

$$E_P = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{4\epsilon_0 L} \frac{Qdx}{(r-x)^2} = \frac{Q}{4\epsilon_0 L} \left[\frac{1}{r-L/2} - \frac{1}{r+L/2} \right] = \frac{1}{4\epsilon_0} \frac{Q}{r^2 - L^2/4}$$

方向沿 x 轴.

(2) 根据以上分析, 中垂线上一点 P 的电场强度 E 的方向沿 y 轴, 大小为

$$E = \int \frac{\sin \theta}{4\epsilon_0 r'^2} dq dE$$

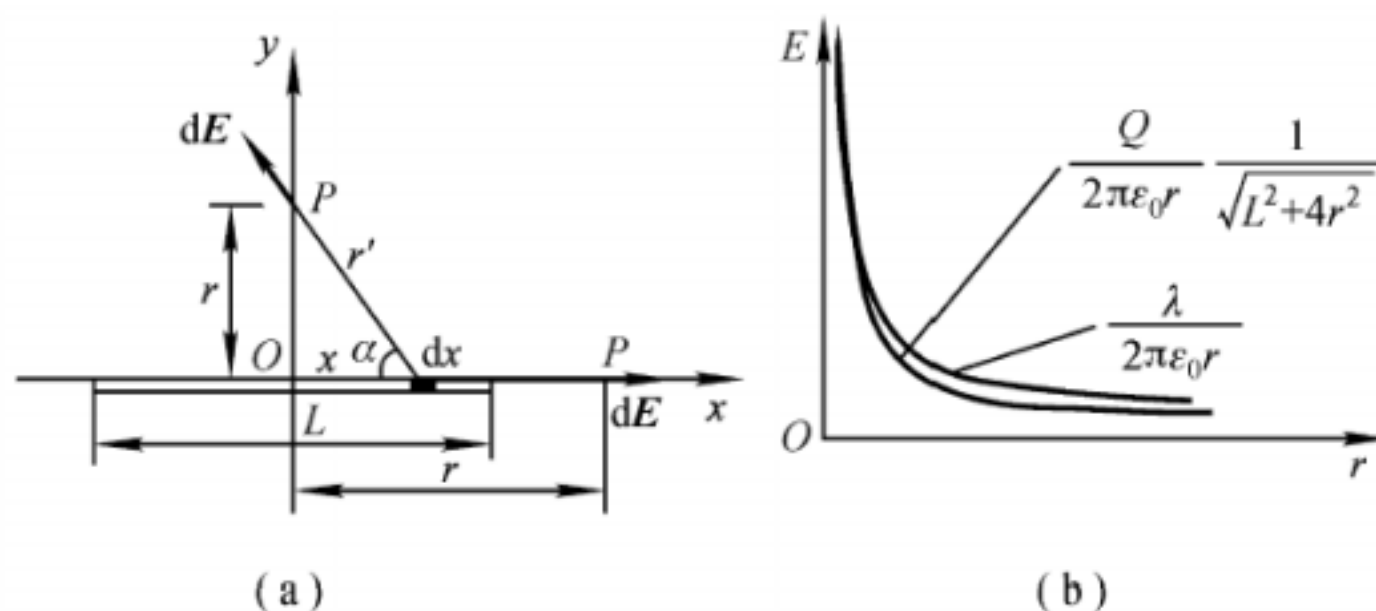
利用几何关系 $\sin \theta = r/r'$, $r' = \sqrt{r^2 + x^2}$ 统一积分变量, 则

$$E = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{4\epsilon_0 L} \frac{rQdx}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{Q}{2\epsilon_0 r} \frac{1}{\sqrt{4r^2 + L^2}}$$

当棒长 $L \rightarrow \infty$ 时, 若棒单位长度所带电荷 λ 为常量, 则 P 点电场强度

$$E = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2\epsilon_0 r} \frac{Q/L}{\sqrt{1 + 4r^2/L^2}} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0 r}$$

此结果与无限长带电直线周围的电场强度分布相同 [图 (B)]. 这说明只要满足 $r^2/L^2 \ll 1$, 带电长直细棒可视为无限长带电直线.



题 5-9 图

5-10 分析 这仍是一个连续带电体问题, 求解的关键在于如何取电荷元. 现将半球壳分割为一组平行的细圆环, 如图所示, 从教材第 5-3 节的例 1 可以看出, 所有平行圆环在轴线上 P 处的电场强度方向都相同, 将所有带电圆环的电场强度积分, 即可求得球心 O 处的电

场强度 .

解 将半球壳分割为一组平行细圆环, 任一个圆环所带电荷元

$dq = dS = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$, 在点 O 激发的电场强度为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x dq}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \mathbf{i}$$

由于平行细圆环在点 O 激发的电场强度方向相同, 利用几何关系 $x = R \cos \theta$, $r = R \sin \theta$ 统一积分变量, 有

$$\begin{aligned} dE &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x dq}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R \cos \theta}{R^3} 2\pi R^2 \sin \theta d\theta \\ &= \frac{\sin \theta \cos \theta}{2\epsilon_0} d\theta \end{aligned}$$

积分得 $E = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta \cos \theta}{2\epsilon_0} d\theta = \frac{1}{4\epsilon_0}$

5-11 分析 水分子的电荷模型等效于两个电偶极子, 它们的电偶极矩大小均为

$P_0 = e r_0$, 而夹角为 2θ . 叠加后水分子的电偶极矩大小为 $P = 2e r_0 \cos \theta$, 方向沿对称轴线, 如图所示. 由于点 O 到场点 A 的距离 $x \gg r_0$, 利用教材第 5 - 3 节中电偶极子在延长线上的电场强度

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{x^3}$$

可求得电场的分布. 也可由点电荷的电场强度叠加, 求电场分布.

解1 水分子的电偶极矩 $P = 2P_0 \cos \theta = 2e r_0 \cos \theta$ 在电偶极矩延长线上

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{x^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4e r_0 \cos \theta}{x^3} = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{e r_0 \cos \theta}{x^3}$$

解2 在对称轴上任取一点 A, 则该点的电场强度

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_- + \mathbf{E}_+$$

$$E = 2E_+ \cos \theta - E_- = \frac{2e r_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{2e}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

由于 $r^2 = x^2 + r_0^2 - 2x r_0 \cos \theta$

$$\cos \theta = \frac{x - r_0 \cos \theta}{r}$$

代入得

$$E = \frac{2e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{x - r_0 \cos \theta}{(x^2 + r_0^2 - 2x r_0 \cos \theta)^{3/2}} - \frac{1}{x^2} \right]$$

测量分子的电场时, 总有 $x \gg r_0$, 因此, 式中

$$(x^2 + r_0^2 - 2xr_0\cos\theta)^{2/3} \approx x^3 \left(1 - \frac{2r_0\cos\theta}{x}\right)^{2/3} \approx x^3 \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{2r_0\cos\theta}{x}\right)$$

将上式化简并略去微小量后, 得

$$E = \frac{1}{2} \frac{r_0 e \cos\theta}{x^3}$$

5-12 分析 (1) 在两导线构成的平面上任一点的电场强度为两导线单独在此所激发的电场的叠加。(2) 由 $F = qE$, 单位长度导线所受的电场力等于另一根导线在该导线处的电场强度乘以单位长度导线所带电量, 即: $F = \lambda E$ 应该注意: 式中的电场强度 E 是另一根带电导线激发的电场强度, 电荷自身建立的电场不会对自身电荷产生作用力。

解 (1) 设点 P 在导线构成的平面上, E_+ 、 E_- 分别表示正、负带电导线在 P 点的电场强度, 则有

$$E = E_- + E_+ = \frac{1}{2} \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{r_0 - x} \mathbf{i}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{r_0}{x(r_0 - x)} \mathbf{i}$$

(2) 设 F_+ 、 F_- 分别表示正、负带电导线单位长度所受的电场力, 则有

$$F_+ = \lambda E_- = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{r_0} \mathbf{i}$$

$$F_- = -\lambda E_+ = -\frac{1}{2} \frac{\lambda}{r_0} \mathbf{i}$$

显然有 $F_+ = F_-$, 相互作用力大小相等, 方向相反, 两导线相互吸引。

5-13 分析 根据点电荷电场的叠加求 P 点的电场强度。

解 由点电荷电场公式, 得

$$E = \frac{1}{4} \frac{2q}{\epsilon_0 z^2} \mathbf{k} + \frac{1}{4} \frac{q}{\epsilon_0 (z-d)^2} \mathbf{k} + \frac{1}{4} \frac{q}{\epsilon_0 (z+d)^2} \mathbf{k}$$

考虑到 $z \gg d$, 简化上式得

$$E = \frac{q}{4} \frac{1}{\epsilon_0} \left\{ -\frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^2} \left[\frac{1}{(1-d/z)^2} + \frac{1}{(1+d/z)^2} \right] \right\} \mathbf{k}$$

$$= \frac{q}{4} \frac{1}{\epsilon_0} \left\{ -\frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^2} \left[1 + \frac{2d}{z} + \frac{3d^2}{z^2} + \dots + 1 - \frac{2d}{z} + \frac{3d^2}{z^2} + \dots \right] \right\} \mathbf{k}$$

$$= \frac{q}{4} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{6qd^2}{z^4} \mathbf{k}$$

通常将 $Q = 2qd^2$ 称作电四极矩, 代入得 P 点的电场强度

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Q}{z^4} \mathbf{k}$$

5-14 分析 方法 1：由电场强度通量的定义，对半球面 S 求积分，即 $\Phi_s = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$

方法 2：作半径为 R 的平面 S' 与半球面 S 一起可构成闭合曲面，由于闭合面内无电荷，由高斯定理

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q = 0$$

这表明穿过闭合曲面的净通量为零，穿入平面 S' 的电场强度通量在数值上等于穿出半球面 S 的电场强度通量。因而

$$\Phi_s = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \oint_{S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

解 1 由于闭合曲面内无电荷分布，根据高斯定理，有

$$\Phi_s = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \oint_{S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

依照约定取闭合曲面的外法线方向为面元 $d\mathbf{S}$ 的方向，

$$\Phi_s = -E \cdot R^2 \cos \theta = R^2 E$$

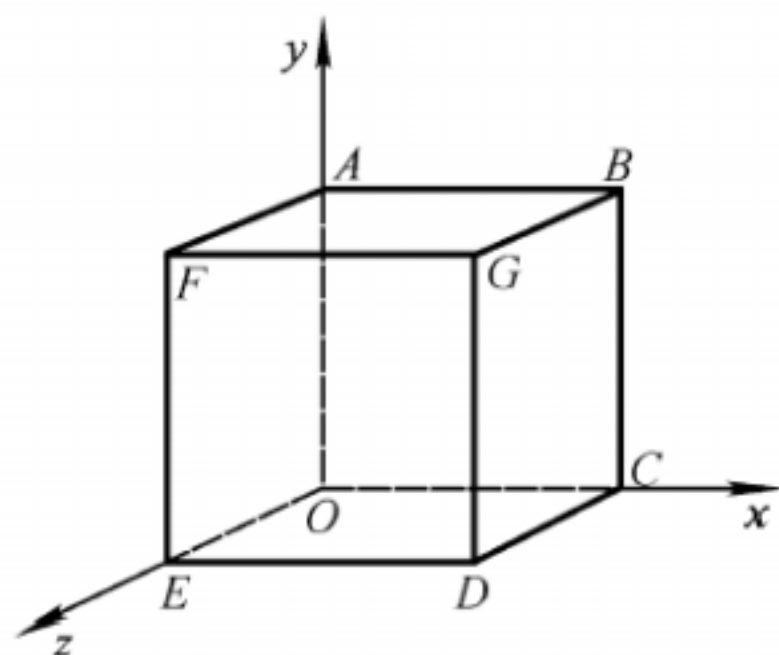
解 2 取球坐标系，电场强度矢量和面元在球坐标系中可表示为

$$\mathbf{E} = E(\cos \theta \mathbf{e}_\theta + \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_\phi + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_\phi)$$

$$d\mathbf{S} = R^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{e}_r$$

$$\begin{aligned} \Phi_s &= \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_S ER^2 \sin^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} ER^2 \sin^2 \theta d\phi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \\ &= R^2 E \end{aligned}$$

5-15 解 如图所示，



题 5-15 图

由题意 E 与 Oxy 面平行, 所以任何相对 Oxy 面平行的立方体表面, 电场强度的通量为零, 即 $\Phi_{OABC} = \Phi_{DEFG} = 0$. 而

$$\Phi_{ABGF} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int [(E_1 + kx)\mathbf{j} + E_2\mathbf{j}] \cdot (dS\mathbf{j}) = E_2 a^2$$

考虑到面 $CDEO$ 与面 $ABGF$ 的外法线方向相反, 且该两面的电场分布相同, 故有

$$\Phi_{CDEO} = -\Phi_{ABGF} = -E_2 a^2$$

同理
$$\Phi_{AOEF} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int [E_1\mathbf{i} + E_2\mathbf{j}] \cdot (-dS\mathbf{i}) = -E_1 a^2$$

$$\Phi_{BCDG} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int [(E_1 + ka)\mathbf{j} + E_2\mathbf{j}] \cdot (dS\mathbf{i}) = (E_1 + ka) a^2$$

因此, 整个立方体表面的电场强度通量

$$= \sum \Phi = ka^3$$

5-16 分析 考虑到地球表面的电场强度指向地球球心, 在大气层中取与地球同心的球面为高斯面, 利用高斯定理可求得高斯面内的净电荷.

解 在大气层临近地球表面处取与地球表面同心的球面为高斯面, 其半径 $R \approx R_E$ (R_E 为地球平均半径). 由高斯定理

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -E 4\pi R_E^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q$$

地球表面电荷面密度

$$= \sum q / 4\pi R_E^2 \approx -\epsilon_0 E = -1.06 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-2}$$

单位面积额外电子数

$$n = \sigma / -e = 6.63 \times 10^5 \text{ cm}^{-2}$$

5-17 分析 通常有两种处理方法: (1) 利用高斯定理求球内外的电场分布. 由题意知电荷呈球对称分布, 因而电场分布也是球对称, 选择与带电球体同心的球面为高斯面, 在球面上

电场强度大小为常量, 且方向垂直于球面, 因而有 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 4\pi r^2$

根据高斯定理 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int dV$, 可解得电场强度的分布 .

(2) 利用带电球壳电场叠加的方法求球内外的电场分布 . 将带电球分割成无数个同心带电球壳, 球壳带电荷为 $dq = 4\pi r'^2 dr'$, 每个带电球壳在壳内激发的电场 $d\mathbf{E} = 0$, 而在球壳外激发的电场

$$d\mathbf{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

由电场叠加可解得带电球体内外的电场分布

$$\mathbf{E}(r) = \int_0^r d\mathbf{E} \quad (0 \leq r \leq R)$$

$$\mathbf{E}(r) = \int_0^R d\mathbf{E} \quad (r > R)$$

解1 因电荷分布和电场分布均为球对称, 球面上各点电场强度的大小为常量, 由高斯

定理 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int dV$ 得球体内 ($0 \leq r \leq R$)

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r 4\pi r'^2 dr' = \frac{k}{\epsilon_0} r^4$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{kr^2}{4\epsilon_0} \mathbf{e}_r$$

球体外 ($r > R$)

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^R 4\pi r'^2 dr' = \frac{k}{\epsilon_0} R^4$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{kR^2}{4\epsilon_0} \mathbf{e}_r$$

解2 将带电球分割成球壳, 球壳带电

$$dq = dV = kr' \cdot 4\pi r'^2 dr'$$

由上述分析, 球体内 ($0 \leq r \leq R$)

$$\mathbf{E}(r) = \int_0^r \frac{1}{4\epsilon_0} \frac{kr' \cdot 4\pi r'^2 dr'}{r^2} \mathbf{e}_r = \frac{kr^2}{4\epsilon_0} \mathbf{e}_r$$

球体外 ($r > R$)

$$\mathbf{E}(r) = \int_0^R \frac{1}{4\epsilon_0} \frac{kr' \cdot 4\pi r'^2 dr'}{r^2} \mathbf{e}_r = \frac{kR^2}{4\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

5-18 分析 用补偿法求解利用高斯定理求解电场强度只适用于几种非常特殊的对称性电场. 本题的电场分布虽然不具有这样的对称性, 但可以利用具有对称性的无限大带电平面

和带电圆盘的电场叠加，求出电场的分布。若把小圆孔看作由等量的正、负电荷重叠而成，挖去圆孔的带电平板等效于一个完整的带电平板和一个带相反电荷（电荷面密度 $= -$ ）的小圆盘。这样中心轴线上的电场强度等效于平板和小圆盘各自独立在该处激发电场的矢量和。

解 由教材中第 5 - 4 节例 4 可知，在无限大带电平面附近

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_n$$

\mathbf{e}_n 为沿平面外法线的单位矢量；圆盘激发的电场

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} \right) \mathbf{e}_n$$

它们的合电场强度为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} \mathbf{e}_n$$

在圆孔中心处 $x = 0$ ，则

$$E = 0$$

在距离圆孔较远时 $x \gg r$ ，则

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1 + r^2/x^2}} \mathbf{e}_n$$

$$\approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_n$$

上述结果表明，在 $x \gg r$ 时，带电平板上小圆孔对电场分布的影响可以忽略不计。

5-19 分析 本题带电体的电荷分布不满足球对称，其电场分布也不是球对称分布，因此无法直接利用高斯定理求电场的分布，但可用补偿法求解。挖去球形空腔的带电球体在电学上等效于一个完整的、电荷体密度为 ρ 的均匀带电球和一个电荷体密度为 $-\rho$ 、球心在 O 的带电小球体（半径等于空腔球体的半径）。大小球体在空腔内 P 点产生的电场强度分别为 E_1 、 E_2 ，则 P 点的电场强度 $E = E_1 + E_2$ 。

证 带电球体内部一点的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}$$

所以

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{E}_2 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

根据几何关系 $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{a}$ ，上式可改写为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{a}$$

5-20 分析 以球心 O 为原点, 球心至场点的距离 r 为半径, 作同心球面为高斯面. 由于电荷呈球对称分布, 电场强度也为球对称分布, 高斯面上电场强度沿径矢方向, 且大小相等.

因而 $\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = E \cdot 4\pi r^2$. 在确定高斯面内的电荷 $\sum q$ 后, 利用高斯定理 $\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \sum q / \epsilon_0$.

即可求出电场强度的分布.

解 取半径为 r 的同心球面为高斯面, 由上述分析

$$E \cdot 4\pi r^2 = \sum q / \epsilon_0$$

$r < R_1$, 该高斯面内无电荷, $\sum q = 0$, 故 $E_1 = 0$

$$R_1 < r < R_2, \text{ 高斯面内电荷 } \sum q = \frac{Q_1(r^3 - R_1^3)}{R_2^3 - R_1^3}$$

$$\text{故 } E_2 = \frac{Q_1(r^3 - R_1^3)}{4\pi\epsilon_0(R_2^3 - R_1^3)r^2}$$

$R_2 < r < R_3$, 高斯面内电荷为 Q_1 , 故

$$E_3 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$r > R_3$, 高斯面内电荷为 $Q_1 + Q_2$, 故

$$E_4 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

电场强度的方向均沿径矢方向, 各区域的电场强度分布曲线如图 (B) 所示. 在带电球面的两侧, 电场强度的左右极限不同, 电场强度不连续, 而在紧贴 $r = R_3$ 的带电球面两侧, 电场强度的跃变量

$$E = E_4 - E_3 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_3^2}$$

这一跃变是将带电球面的厚度抽象为零的必然结果, 且具有普遍性. 实际带电球面应是一定厚度的球壳, 壳层内外的电场强度也是连续变化的, 本题中带电球壳内外的电场, 在球壳的厚度变小时, E 的变化就变陡, 最后当厚度趋于零时, E 的变化成为一跃变.

5-21 分析 电荷分布在无限长同轴圆柱面上, 电场强度也必定沿轴对称分布, 取同轴圆柱面为高斯面, 只有侧面的电场强度通量不为零, 且 $\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = E \cdot 2\pi rL$, 求出不同半径高斯面内的电荷 $\sum q$. 即可解得各区域电场的分布.

解 作同轴圆柱面为高斯面, 根据高斯定理

$$E \cdot 2\pi rL = \sum q / \epsilon_0$$

$r < R_1$, $\sum q = 0$

$$E_1 = 0$$

在带电面附近，电场强度大小不连续，电场强度有一跃变

$$R_1 < r < R_2, \quad \sum q = L$$

$$E_2 = \frac{L}{2\epsilon_0 r}$$

$$r > R_2, \quad \sum q = 0$$

$$E_3 = 0$$

在带电面附近，电场强度大小不连续，电场强度有一跃变

$$E = \frac{L}{2\epsilon_0 r} = \frac{L}{2\epsilon_0 r L} = \frac{1}{2\epsilon_0 r}$$

这与 5 - 20 题分析讨论的结果一致。

5-22 分析 由库仑力的定义，根据 Q_1 、 Q_2 所受合力为零可求得 Q_3 。外力做功 W 应等于电场力做功 W' 的负值，即 $W = -W'$ 求电场力做功的方法有两种：(1) 根据功的定义，电场力作的功为

$$W = \int_0^{\infty} Q_2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

其中 E 是点电荷 Q_1 、 Q_2 产生的合电场强度。

(2) 根据电场力做功与电势能差的关系，有

$$W = Q_2 (V_0 - V_{\infty}) = Q_2 V_0$$

其中 V_0 是 Q_1 、 Q_2 在点 O 产生的电势（取无穷远处为零电势）。

解1 由题意 Q_1 所受的合力为零

$$Q_1 \frac{Q_2}{4\epsilon_0 d^2} + Q_1 \frac{Q_3}{4\epsilon_0 (2d)^2} = 0$$

$$\text{解得} \quad Q_2 = -\frac{1}{4} Q_3 = -\frac{1}{4} Q$$

由点电荷电场的叠加， Q_1 、 Q_2 激发的电场在 y 轴上任意一点的电场强度为

$$E = E_{1y} + E_{2y} = \frac{Q_1}{2\epsilon_0 (d^2 + y^2)^{3/2}}$$

将 Q_2 从点 O 沿 y 轴移到无穷远处，（沿其他路径所作的功相同，请想一想为什么？）外力所作的功为

$$W' = -\int_0^{\infty} Q_2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_0^{\infty} \left[-\frac{1}{4} Q \right] \frac{Q_1}{2\epsilon_0 (d^2 + y^2)^{3/2}} dy = \frac{Q^2}{8\epsilon_0 d}$$

解2 与解1相同，在任一点电荷所受合力均为零时 $Q_2 = -\frac{1}{4} Q$ ，并由电势

的叠加得 Q_1 、 Q_2 在点 O 的电势

$$V_0 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 d}$$

将 Q 从点 O 推到无穷远的过程中, 外力做功

$$W' = -Q_2 V_0 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 d}$$

比较上述两种方法, 显然用功与电势能变化的关系来求解较为简洁. 这是因为在许多实际问题中直接求电场分布困难较大, 而求电势分布要简单得多.

5-23 解 (1) 由于电场力做功与路径无关, 若沿径向积分, 则有

$$U_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

(2) 不能. 严格地讲, 电场强度 $\mathbf{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r$ 只适用于无限长的均匀带电直线, 而此时

电荷分布在无限空间, r 处的电势应与直线上的电势相等.

5-24 解 由点电荷电势的叠加

$$V_P = V_+ + V_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r_-} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$(1) \text{ 若 } \theta = 0^\circ \quad V_P = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 2.23 \times 10^{-3} \text{ V}$$

$$(2) \text{ 若 } \theta = 45^\circ \quad V_P = \frac{p \cos 45^\circ}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 1.58 \times 10^{-3} \text{ V}$$

$$(3) \text{ 若 } \theta = 90^\circ \quad V_P = \frac{p \cos 90^\circ}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0$$

5-25 分析 取无穷远处为零电势参考点, 半径为 R 带电量为 q 的带电球形雨滴表面电势为

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

当两个球形雨滴合并为一个较大雨滴后, 半径增大为 $\sqrt[3]{2}R$, 代入上式后可以求出两雨滴相遇合并后, 雨滴表面的电势.

解 根据已知条件球形雨滴半径 $R = 0.40 \text{ mm}$, 带有电量 $q_1 = 1.6 \text{ pC}$, 可以求得带电球形雨滴表面电势

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R_1} = 36 \text{ V}$$

当两个球形雨滴合并为一个较大雨滴后，雨滴半径 $R_2 = \sqrt[3]{2}R_1$ ，带有电量 $q_2 = 2q_1$ ，雨滴表面电势

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q_1}{\sqrt[3]{2}R_1} = 57 \text{ V}$$

5-26 分析 由于“无限大”均匀带电的平行平板电荷分布在“无限”空间，不能采用点电荷电势叠加的方法求电势分布：应该首先由“无限大”均匀带电平板的电场强度叠加求电场强度的分布，然后依照电势的定义式求电势分布。

解 由“无限大”均匀带电平板的电场强度 $\pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{i}$ ，叠加求得电场强度的分布，

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0 & (x < -a) \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{i} & (-a < x < a) \\ 0 & (x > a) \end{cases}$$

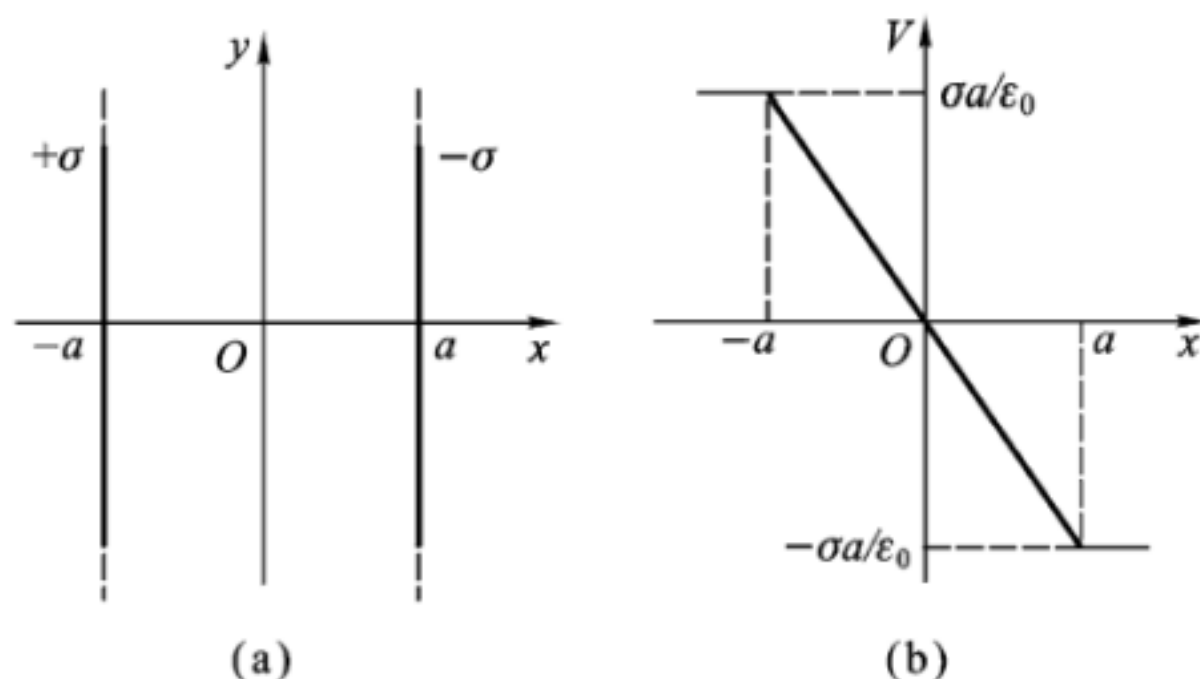
电势等于移动单位正电荷到零电势点电场力所作的功

$$V = \int_x^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} x \quad (-a < x < a)$$

$$V = \int_x^{-a} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{-a}^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} a \quad (x < -a)$$

$$V = \int_x^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_a^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} a \quad (x > a)$$

电势变化曲线如图 (b) 所示。



题 5-26 图

5-27 分析 通常可采用两种方法 (1) 由于电荷均匀分布在球面上，电场分布也具有球对称性，因此，可根据电势与电场强度的积分关系求电势。取同心球面为高斯面，借助高斯

定理可求得各区域的电场强度分布，再由 $V_p = \int_p^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 可求得电势分布。(2) 利用电势叠加原理求电势。一个均匀带电的球面，在球面外产生的电势为

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

在球面内电场强度为零，电势处处相等，等于球面的电势

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

其中 R 是球面的半径。根据上述分析，利用电势叠加原理，将两个球面在各区域产生的电势叠加，可求得电势的分布。

解1 (1) 由高斯定理可求得电场分布

$$\mathbf{E}_1 = 0 \quad (r < R_1)$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$\mathbf{E}_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (r > R_2)$$

由电势 $V = \int_r^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 可求得各区域的电势分布。

当 $r < R_1$ 时，有

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_r^{R_1} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} + \int_{R_2}^{\infty} \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{l} \\ &= 0 + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] + \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \\ &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \end{aligned}$$

当 $R_1 < r < R_2$ 时，有

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_r^{R_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} + \int_{R_2}^{\infty} \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{l} \\ &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right] + \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \\ &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \end{aligned}$$

当 $r > R_2$ 时，有

$$V_3 = \int_r^{\infty} \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

(2) 两个球面间的电势差

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

解2 (1) 由各球面电势的叠加计算电势分布. 若该点位于两个球面内, 即 $r < R_1$, 则

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

若该点位于两个球面之间, 即 $R_1 < r < R_2$, 则

$$V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

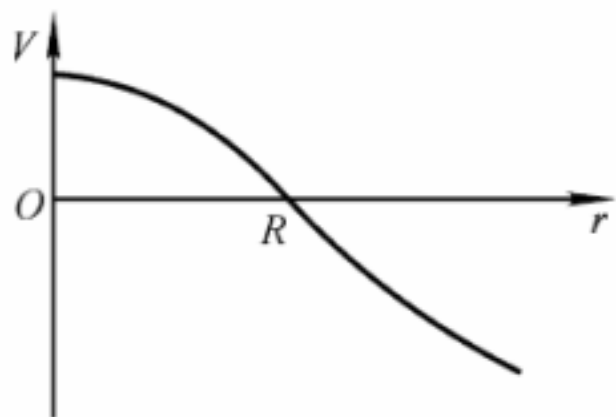
若该点位于两个球面之外, 即 $r > R_2$, 则

$$V_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

(2) 两个球面间的电势差

$$U_{12} = (V_1 - V_2)_{r=R_2} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

5-28 分析



题 5-28 图

无限长均匀带电细棒电荷分布呈轴对称, 其电场和电势的分布也呈轴对称. 选取同轴柱面为高斯面, 利用高斯定理

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

可求得电场分布 $E(r)$, 再根据电势差的定义

$$V_a - V_b = \int_a^b \mathbf{E}(r) \cdot d\mathbf{l}$$

并取棒表面为零电势 ($V_b = 0$), 即可得空间任意点 a 的电势.

解 取高度为 l 、半径为 r 且与带电棒同轴的圆柱面为高斯面, 由高斯定理当 $r < R$ 时

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{r^2 l}{\epsilon_0}$$

得
$$E(r) = \frac{r}{2\epsilon_0}$$

当 $r = R$ 时

$$E(2R) = R^2 / \epsilon_0$$

得
$$E(r) = \frac{R^2}{2\epsilon_0 r}$$

取棒表面为零电势，空间电势的分布有

当 $r = R$ 时

$$V(r) = \int_r^R \frac{r}{2\epsilon_0} dr = \frac{1}{4\epsilon_0} (R^2 - r^2)$$

当 $r = R$ 时

$$V(r) = \int_r^R \frac{R^2}{2\epsilon_0 r} dr = \frac{R^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{R}{r}$$

如图所示是电势 V 随空间位置 r 的分布曲线。

5-29 分析 将圆盘分割为一组不同半径的同心带电细圆环，利用带电细环轴线上一点的电势公式，将不同半径的带电圆环在轴线上一点的电势积分相加，即可求得带电圆盘在轴线上的电势分布，再根据电场强度与电势之间的微分关系式可求得电场强度的分布。

解 (1) 带电圆环激发的电势

$$dV = \frac{1}{4\epsilon_0} \frac{2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

由电势叠加，轴线上任一点 P 的电势的

$$V = \frac{1}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{1}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + x^2} - x) \quad (1)$$

(2) 轴线上任一点的电场强度为

$$\mathbf{E} = -\frac{dV}{dx} \mathbf{i} = \frac{1}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right] \mathbf{i} \quad (2)$$

电场强度方向沿 x 轴方向。

(3) 将场点至盘心的距离 $x = 30.0 \text{ cm}$ 分别代入式 (1) 和式 (2)，得

$$V = 1691 \text{ V}$$

$$E = 5607 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

当 $x \gg R$ 时，圆盘也可以视为点电荷，其电荷为 $q = R^2 = 5.65 \times 10^{-8} \text{ C}$ 。依照点电荷电场中电势和电场强度的计算公式，有

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} = 1695 \text{ V}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} = 5649 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

由此可见, 当 $x \gg R$ 时, 可以忽略圆盘的几何形状, 而将带电的圆盘当作点电荷来处理. 在本题中作这样的近似处理, E 和 V 的误差分别不超过 0.3 % 和 0.8 %, 这已足以满足一般的测量精度.

5-30 解 (1) 由习题 5 - 21 的结果, 可得两圆柱面之间的电场强度为

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 r}$$

根据电势差的定义有

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\text{解得} \quad \sigma = 2\epsilon_0 U_{12} / \ln \frac{R_2}{R_1} = 2.1 \times 10^{-8} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

(2) 解得两圆柱面之间 $r = 0.05\text{m}$ 处的电场强度

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 r} = 7475 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

5-31 分析 作为估算, 可以将质子上的电荷分布看作球对称分布, 因此质子周围的电势分布为

$$V = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$$

将质子作为经典粒子处理, 当另一质子从无穷远处以动能 E_k 飞向该质子时, 势能增加, 动能减少, 如能克服库仑斥力而使两质子相碰, 则质子的初始动能

$$E_{k0} \geq eV_{2R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2R}$$

假设该氢原子核的初始动能就是氢分子热运动的平均动能, 根据分子动理论知:

$$\bar{E}_k = \frac{3}{2} kT$$

由上述分析可估算出质子的动能和此时氢气的温度.

解 (1) 两个质子相接触时势能最大, 根据能量守恒

$$E_{k0} \geq eV_{2R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2R} = 7.2 \times 10^5 \text{ eV}$$

由 $E_{k0} = \frac{1}{2}mv_0^2$ 可估算出质子初始速率 $v_0 = \sqrt{2E_{k0}/m} = 1.2 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 该速度已达到光速的 4% .

(2) 依照上述假设, 质子的初始动能等于氢分子的平均动能

$$E_{k0} = \bar{E}_k = \frac{3}{2}kT$$

得
$$T = \frac{2E_{k0}}{3k} \approx 5.6 \times 10^9 \text{ K}$$

实际上在这么高的温度下, 中性原子已被离解为电子和正离子, 称作等离子态, 高温的等离子体不能用常规的容器来约束, 只能采用磁场来约束 (托卡马克装置)

5-32 解 (1) 若闪电中释放出来的全部能量为冰所吸收, 故可融化冰的质量

$$m = \frac{E}{L} = \frac{qU}{L} = 8.98 \times 10^4 \text{ Kg}$$

即可融化约 90 吨冰 .

(2) 一个家庭一年消耗的能量为

$$E_0 = 3000 \text{ kW} \cdot \text{h} = 1.08 \times 10^{10} \text{ J}$$

$$n = \frac{E}{E_0} = \frac{qU}{E_0} = 2.8$$

一次闪电在极短的时间内释放出来的能量约可维持 3 个家庭一年消耗的电能 .

5-33 分析 参照 5 - 7 节例 1, 带电圆环在轴线上一点的电势为

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2 + (x \pm l/2)^2}}$$

由电势的叠加可以求出两环圆心连线的 x 轴上的电势分布 .

解 (1) 由带电圆环电势的叠加, 两环圆心连线的 x 轴上的电势为

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2 + (x - l/2)^2}} - V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2 + (x + l/2)^2}}$$

(2) 当 $x \gg l, x \gg R$ 时, 化简整理得

$$\begin{aligned} V &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2 + x^2 - lx + l^2/4}} - V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2 + x^2 + lx + l^2/4}} \\ &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - l/x}} - \frac{1}{\sqrt{1 + l/x}} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} \left[\left(1 + \frac{l}{2x} + \dots \right) - \left(1 - \frac{l}{2x} + \dots \right) \right] \\ &= \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 x^2} \end{aligned}$$

在 $x \gg R$ 时带电圆环等效于一对带等量异号的点电荷, 即电偶极子 . 上式就是电偶极子延长线上一点的电势 .

5-34 分析 电势的叠加是标量的叠加, 根据对称性, 带电半球面在 Oxy 平面上各点产生的电势显然就等于带电球面在该点电势的一半. 据此, 可先求出一个完整球面在 A 、 B 间的电势差 U'_{AB} , 再求出半球面时的电势差 U_{AB} . 由于带电球面内等电势, 球面内 A 点电势等于球表面的电势, 故

$$U_{AB} = \frac{1}{2} U'_{AB} = \frac{1}{2} (V'_R - V'_B)$$

其中 V'_R 是带电球表面的电势, V'_B 是带电球面在 B 点的电势.

解 假设将半球面扩展为带有相同电荷面密度的一个完整球面, 此时在 A 、 B 两点的电势分别为

$$V'_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{R}{R} = V'_R$$

$$V'_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{R}{r} = \frac{2}{3} \frac{R}{r}$$

则半球面在 A 、 B 两点的电势差

$$U_{AB} = \frac{1}{2} (V'_R - V'_B) = \frac{R}{6\epsilon_0}$$

5-35 解 (1) 电子在玻尔轨道上作圆周运动时, 它的电势能为

$$E_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

因此, 若把电子从原子中拉出来需要克服电场力作功

$$W' = |E_p| = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = 27.2 \text{ eV}$$

(2) 电子在玻尔轨道上运动时, 静电力提供电子作圆周运动所需的向心力, 即

$e^2 / (4\pi\epsilon_0 r^2) = mv^2 / r$. 此时, 电子的动能为

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

其总能量

$$E = E_k + E_p = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

电子的电离能等于外界把电子从原子中拉出来需要的最低能量

$$E_0 = |E| = 13.6 \text{ eV}$$

由于电子围绕原子核高速旋转具有动能, 使电子脱离原子核的束缚所需的电离能小于在此过程中克服电场力所作的功.

6-1 分析与解 不带电的导体 B 相对无穷远处为零电势。由于带正电的带电体 A 移到不带电的导体 B 附近时，在导体 B 的近端感应负电荷；在远端感应正电荷，不带电导体的电势将高于无穷远处，因而正确答案为 (A)。

6-2 分析与解 导体 N 接地表明导体 N 为零电势，即与无穷远处等电势，这与导体 N 在哪一端接地无关。因而正确答案为 (A)。

6-3 分析与解 达到静电平衡时导体内处处各点电场强度为零。点电荷 q 在导体球表面感应等量异号的感应电荷 $\pm q$ ，导体球表面的感应电荷 $\pm q$ 在球心 O 点激发的电势为零，O 点的电势等于点电荷 q 在该处激发的电势。因而正确答案为 (A)。

6-4 分析与解 电位移矢量沿任意一个闭合曲面的通量积分等于零，表明曲面内自由电荷的代数和等于零；由于电介质会改变自由电荷的空间分布，介质中的电位移矢量与自由电荷与位移电荷的分布有关。因而正确答案为 (E)。

6-5 分析与解 电介质中的电场由自由电荷激发的电场与极化电荷激发的电场迭加而成，由于极化电荷可能会改变电场中导体表面自由电荷的分布，由电介质中的高斯定理，仅当电介质充满整个电场并且自由电荷的分布不发生变化时，在电介质中任意高斯面 S 有

$$\oint_S (1 + \epsilon) \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$$

即 $E = E_0 / \epsilon$ ，因而正确答案为 (A)。

6-6 分析与解 根据导体静电平衡时电荷分布的规律，空腔内点电荷的电场线终止于空腔内表面感应电荷；导体球 A 外表面的感应电荷近似均匀分布，因而近似可看作均匀带电球对点电荷 q_d 的作用力。

$$F_d = \frac{(q_b + q_c) q_d}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$$

点电荷 q_d 与导体球 A 外表面感应电荷在球形空腔内激发的电场为零，点电荷 q_b 、 q_c 处于球形空腔的中心，空腔内表面感应电荷均匀分布，点电荷 q_b 、 q_c 受到的作用力为零。

6-7 分析 (1) 由于半径 $R_1 \ll L$ ，因此可将电极视作无限长圆柱面，阴极和阳极之间的电场具有轴对称性。从阴极射出的电子在电场力作用下从静止开始加速，电子所获得的动能等于电场力所作的功，也即等于电子势能的减少。由此，可求得电子到达阳极时的动能和速率。

(2) 计算阳极表面附近的电场强度，由 $F = qE$ 求出电子在阴极表面所受的电场力。

解 (1) 电子到达阳极时, 势能的减少量为

$$E_{ep} = -eV = -4.8 \times 10^{-17} \text{ J}$$

由于电子的初始速度为零, 故

$$E_{ek} = E_{ek} = -E_{ep} = 4.8 \times 10^{-17} \text{ J}$$

因此电子到达阳极的速率为

$$v = \sqrt{\frac{2E_{ek}}{m}} = \sqrt{\frac{2eV}{m}} = 1.03 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 两极间的电场强度为

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{2\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r$$

两极间的电势差

$$V = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{2\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

负号表示阳极电势高于阴极电势, 阴极表面电场强度

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{2\epsilon_0 R_1} \mathbf{e}_r = \frac{V}{R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}} \mathbf{e}_r$$

电子在阴极表面受力

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E} = 4.37 \times 10^{-14} \mathbf{e}_r \text{ N}$$

这个力尽管很小, 但作用在质量为 $9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ 的电子上, 电子获得的加速度可达重力加速度的 5×10^{15} 倍.

6-8 分析 若 $V_0 = \frac{Q}{4\epsilon_0 R_2}$, 内球电势等于外球壳的电势, 则外球壳内必定为等势体,

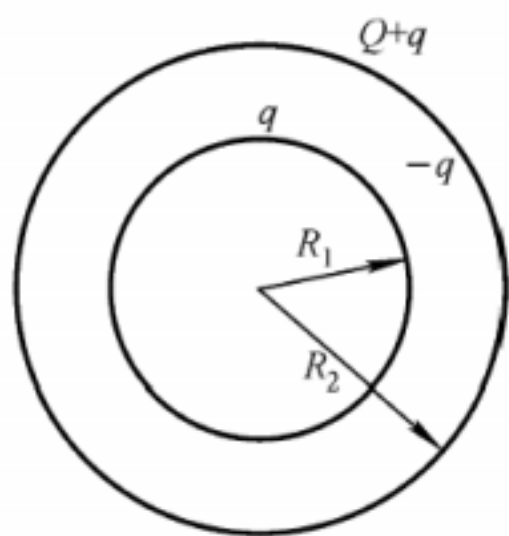
电场强度处处为零, 内球不带电.

若 $V_0 \neq \frac{Q}{4\epsilon_0 R_2}$, 内球电势不等于外球壳电势, 则外球壳内电场强度不为零, 内球带

电. 一般情况下, 假设内导体球带电 q , 导体达到静电平衡时电荷的分布如图所示. 依照电

荷的这一分布, 利用高斯定理可求得电场分布. 并由 $V_p = \int_p^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 或电势叠加求出电势的

分布. 最后将电场强度和电势用已知量 V_0 、 Q 、 R_1 、 R_2 表示.



题 6-8 图

解 根据静电平衡时电荷的分布, 可知电场分布呈球对称. 取同心球面为高斯面, 由高斯定理 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E(r) \cdot 4\pi r^2 = E(r) \cdot \sum q / \epsilon_0$, 根据不同半径的高斯面内的电荷分布, 解得各区域内的电场分布为

$$r < R_1 \text{ 时, } E_1(r) = 0$$

$$R_1 < r < R_2 \text{ 时, } E_2(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$r > R_2 \text{ 时, } E_3(r) = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

由电场强度与电势的积分关系, 可得各相应区域内的电势分布.

$r < R_1$ 时,

$$V_1 = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^{R_1} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} + \int_{R_2}^\infty \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$R_1 < r < R_2$ 时,

$$V_2 = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^{R_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} + \int_{R_2}^\infty \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$r > R_2$ 时,

$$V_3 = \int_r^\infty \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{l} = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

也可以从球面电势的叠加求电势的分布. 在导体球内 ($r < R_1$)

$$V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

在导体球和球壳之间 ($R_1 < r < R_2$)

$$V_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

在球壳外 ($r > R_2$)

$$V_3 = \frac{q + Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

由题意

$$V_1 = V_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

得

$$V_1 = V_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

代入电场、电势的分布得

$r < R_1$ 时 ,

$$E_1 = 0 ; V_1 = V_0$$

$R_1 < r < R_2$ 时 ,

$$E_2 = \frac{R_1 V_0}{r^2} - \frac{R_1 Q}{4\pi\epsilon_0 R_2 r^2} ; V_2 = \frac{R_1 V_0}{r} - \frac{(r - R_1) Q}{4\pi\epsilon_0 R_2 r}$$

$r > R_2$ 时 ,

$$E_3 = \frac{R_1 V_0}{r^2} - \frac{(R_2 - R_1) Q}{4\pi\epsilon_0 R_2 r^2}$$

6-9 分析 (1) 根据静电感应和静电平衡时导体表面电荷分布的规律 , 电荷 Q 均匀分布在球 A 表面 , 球壳 B 内表面带电荷 $-Q$, 外表面带电荷 $Q_2 + Q$, 电荷在导体表面均匀分布 [图 (a)] , 由带电球面电势的叠加可求得球 A 和球壳 B 的电势 . (2) 导体接地 , 表明导体与大地等电势 (大地电势通常取为零) . 球壳 B 接地后 , 外表面的电荷与从大地流入的负电荷中和 , 球壳内表面带电 $-Q$ [图 (b)] . 断开球壳 B 的接地后 , 再将球 A 接地 , 此时球 A 的电势为零 . 电势的变化必将引起电荷的重新分布 , 以保持导体的静电平衡 . 不失一般性可设此时球 A 带电 q_A , 根据静电平衡时导体上电荷的分布规律 , 可知球壳 B 内表面感应 $-q_A$, 外表面带电 $q_A - Q$ [图 (c)] . 此时球 A 的电势可表示为

$$V_A = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q_A}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_A - Q_A}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 0$$

由 $V_A = 0$ 可解出球 A 所带的电荷 q_A , 再由带电球面电势的叠加, 可求出球 A 和球壳 B 的电势.

解 (1) 由分析可知, 球 A 的外表面带电 $3.0 \times 10^{-8} \text{ C}$, 球壳 B 内表面带电 $-3.0 \times 10^{-8} \text{ C}$, 外表面带电 $5.0 \times 10^{-8} \text{ C}$. 由电势的叠加, 球 A 和球壳 B 的电势分别为

$$V_A = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-Q_A}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q_A - Q_A}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 5.6 \times 10^3 \text{ V}$$

$$V_B = \frac{Q_A + Q_B}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 4.5 \times 10^3 \text{ V}$$

(2) 将球壳 B 接地后断开, 再把球 A 接地, 设球 A 带电 q_A , 球 A 和球壳 B 的电势为

$$V_A = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q_A}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{-Q_A + q_A}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 0$$

$$V_B = \frac{-Q_A + q_A}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

解得

$$q_A = \frac{R_1 R_2 Q_A}{R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_1 R_3} = 2.12 \times 10^{-8} \text{ C}$$

即球 A 外表面带电 $2.12 \times 10^{-8} \text{ C}$, 由分析可推得球壳 B 内表面带电 $-2.12 \times 10^{-8} \text{ C}$, 外表面带电 $-0.9 \times 10^{-8} \text{ C}$. 另外球 A 和球壳 B 的电势分别为

$$V_A = 0$$

$$V_B = -7.29 \times 10^2 \text{ V}$$

导体的接地使各导体的电势分布发生变化, 打破了原有的静电平衡, 导体表面的电荷将重新分布, 以建立新的静电平衡.

6-10 分析 导体平板间距 $d \ll S$, 忽略边缘效应, 导体板近似可以当作无限大带电平板处理. 取如图 (b) 所示的圆柱面为高斯面, 高斯面的侧面与电场强度 E 平行, 电场强度通量为零; 高斯面的两个端面在导体内部, 因导体内电场强度为零, 因而电场强度通量也为零, 由高斯定理

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum q / \epsilon_0 = 0$$

得 $\sum q = 0$

上式表明处于静电平衡的平行导体板，相对两个面带等量异号电荷。再利用叠加原理，导体板上四个带电面在导体内任意一点激发的合电场强度必须为零，因而平行导体板外侧两个面带等量同号电荷。

证明 (1) 设两块导体平板表面的电荷面密度分别为 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 、 σ_4 ，取如图 (b) 所示的圆柱面为高斯面，高斯面由侧面 S_1 和两个端面 S_2 、 S_3 构成，由分析可知

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum q / \epsilon_0 = 0$$

得 $\sum q = \sigma_2 S + \sigma_3 S = 0, \quad \sigma_2 + \sigma_3 = 0$

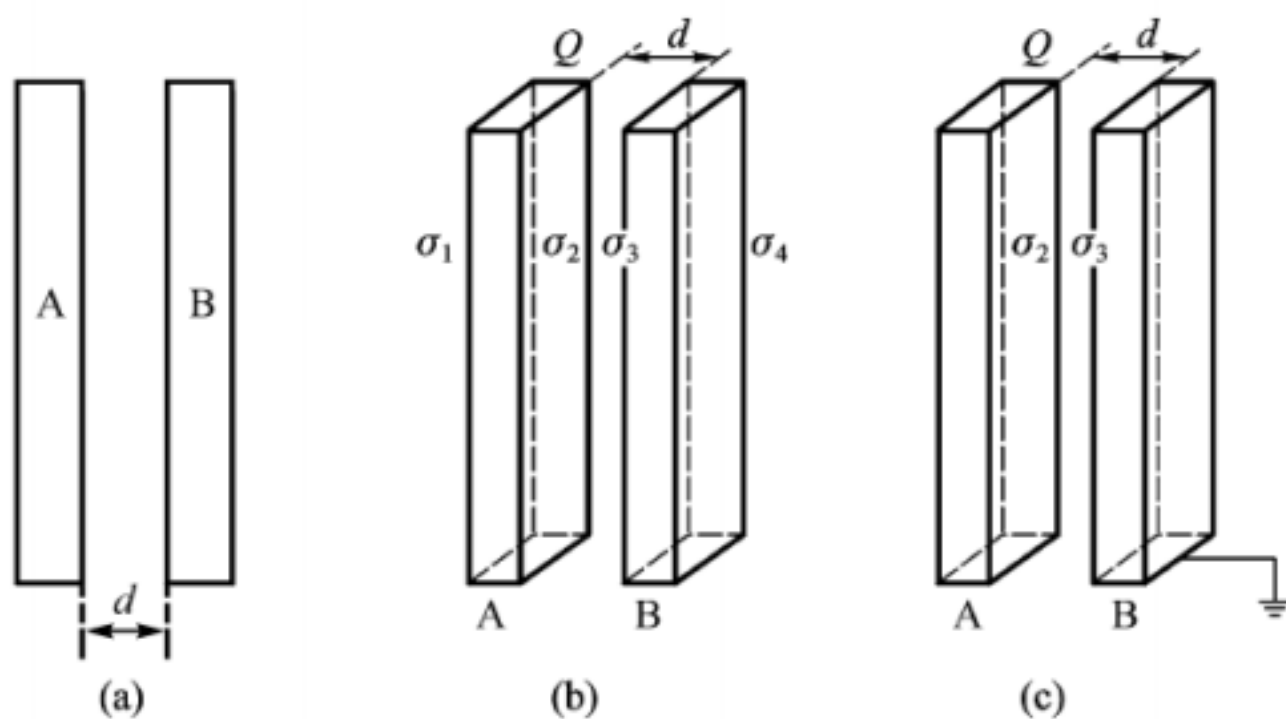
相向的两面电荷面密度大小相等符号相反。

(2) 由电场的叠加原理，取水平向右为参考正方向，导体内 P 点的电场强度为

$$\frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} = 0, \quad \sigma_1 - \sigma_4 = 0$$

相背的两面电荷面密度大小相等符号相同。

6-11 分析 由习题 6 - 10 可



题 6 - 11 图

知,

导体板达到静电平衡时，相对两个面带等量异号电荷；相背两个面带等量同号电荷。再由电荷守恒可以求出导体各表面的电荷分布，进一步求出电场分布和导体间的电势差。

导体板 B 接地后电势为零，B 的外侧表面不带电，根据导体板相背两个面带等量同号电荷可知，A 的外侧表面也不再带电，由电荷守恒可以求出导体各表面的电荷分布，进一步求出电场分布和导体间的电势差。

解 (1) 如图 (b) 所示, 依照题意和导体板达到静电平衡时的电荷分布规律可得

$$(q_1 + q_2)S = Q$$

$$(q_3 + q_4)S = Q$$

$$q_1 - q_4 = 0$$

$$q_2 + q_3 = 0$$

解得

$$q_1 = q_2 = -q_3 = q_4 = \frac{Q}{2S}$$

两导体板间电场强度为 $E = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}$; 方向为 A 指向 B.

两导体板间的电势差为 $U_{AB} = \frac{Qd}{2\epsilon_0 S}$

(2) 如图 (c) 所示, 导体板 B 接地后电势为零.

$$q_1 = q_4 = 0$$

$$q_2 = -q_3 = \frac{Q}{S}$$

两导体板间电场强度为 $E' = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$; 方向为 A 指向 B.

两导体板间的电势差为 $U'_{AB} = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$

6-12 分析 导体球达到静电平衡时, 内表面感应电荷 $-q$, 外表面感应电荷 q ; 内表面感应电荷不均匀分布, 外表面感应电荷均匀分布. 球心 O 点的电势由点电荷 q 、导体表面的感应电荷共同决定. 在带电面上任意取一电荷元, 电荷元在球心产生的电势

$$dV = \frac{dq}{4\epsilon_0 R}$$

由于 R 为常量, 因而无论球面电荷如何分布, 半径为 R 的带电球面在球心产生的电势为

$$V = \iint_S \frac{dq}{4\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\epsilon_0 R}$$

由电势的叠加可以求得球心的电势.

解 导体球内表面感应电荷 $-q$ ，外表面感应电荷 q ；依照分析，球心的电势为

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 b}$$

6-13 分析 金属球为等势体，金属球上任一点的电势 V 等于点电荷 q 和金属球表面感应电荷 q 在球心激发的电势之和。在球面上任意取一电荷元 dq ，电荷元可以视为点电荷，金属球表面的感应电荷在点 O 激发的电势为

$$V' = \int_s \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0 R}$$

点 O 总电势为

$$V_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + V'$$

而接地金属球的电势 $V_0 = 0$ ，由此可解出感应电荷 q 。

解 金属球接地，其球心的电势

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \int_s \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \int_s dq' = 0$$

感应电荷总量

$$q = \int dq' = -\frac{R}{r}q$$

6-14 解 由于地球半径 $R = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$ ；电离层半径 $R_2 = 1.00 \times 10^5 \text{ m} + R = 6.47 \times 10^6 \text{ m}$ ，根据球形电容器的电容公式，可得

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 4.58 \times 10^{-2} \text{ F}$$

6-15 解 由教材第六章 6-4 节例 3 可知两输电线的电势差

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-R}{R}$$

因此，输电线单位长度的电容

$$C = \frac{\lambda}{U} = 2\pi\epsilon_0 / \ln \frac{d-R}{R} \approx 2\pi\epsilon_0 / \ln \frac{d}{R}$$

代入数据 $C = 5.52 \times 10^{-12} \text{ F}$

6-16 分析 按下按键时两金属片之间的距离变小，电容增大，由电容的变化量可以求

得按键按下的最小距离：

解 按下按键时电容的变化量为

$$C = \epsilon_0 S \left[\frac{1}{d} - \frac{1}{d_0} \right]$$

按键按下的最小距离为

$$d_{\min} = d_0 - d = \frac{Cd_0^2}{\epsilon_0 S} = 0.152 \text{ mm}$$

6-17 分析 两极间的电场可以近似认为是无限长同轴带电圆柱体间的电场，由于电荷在圆柱面上均匀分布，电场分布为轴对称。由高斯定理不难求得两极间的电场强度，并利用电场强度与电势差的积分关系 $U = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 求出两极间的电势差。

解 (1) 由上述分析，利用高斯定理可得 $E \cdot 2\pi rL = \frac{1}{\epsilon_0} L$ ，则两极间的电场强度

$$E = \frac{1}{2\epsilon_0 r}$$

导线表面 ($r = R_1$) 的电场强度

$$E_1 = \frac{1}{2\epsilon_0 R_1}$$

两极间的电势差

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2\epsilon_0 r} dr = R_1 E_1 \ln \frac{R_2}{R_1}$$

(2) 当 $E_1 = 2.0 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ ， $R_1 = 0.30 \text{ mm}$ ， $R_2 = 20.0 \text{ mm}$ 时，

$$U = 2.52 \times 10^3 \text{ V}$$

6-18 解 (1) 查表可知二氧化钛的相对电容率 $\epsilon_r = 173$ ，故充满此介质的平板电容器的电容

$$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{d} = 1.53 \times 10^{-9} \text{ F}$$

(2) 电容器加上 $U = 12 \text{ V}$ 的电压时，极板上的电荷

$$Q = CU = 1.84 \times 10^{-8} \text{ C}$$

极板上自由电荷面密度为

$$\sigma_0 = \frac{Q}{S} = 1.84 \times 10^{-8} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

晶片表面极化电荷密度

$$\sigma'_0 = \left[1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right] \sigma_0 = 1.83 \times 10^{-4} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

(3) 晶片内的电场强度为

$$E = \frac{U}{d} = 1.2 \times 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

6-19 分析 带电球上的自由电荷均匀分布在导体球表面，电介质的极化电荷也均匀分布在介质的球形界面上，因而介质中的电场是球对称分布的。任取同心球面为高斯面，电位移矢量 D 的通量与自由电荷分布有关，因此，在高斯面上 D 呈均匀对称分布，由高斯定理 $\oint D \cdot dS = \sum q_0$ 可得 $D(r)$ 。再由 $E = D / \epsilon_0 \epsilon_r$ 可得 $E(r)$ 。

介质内电势的分布，可由电势和电场强度的积分关系 $V = \int_r^\infty E \cdot dl$ 求得，或者由电势叠加原理求得。

极化电荷分布在均匀介质的表面，其极化电荷面密度 $\sigma' = p_a$ 。

解 (1) 取半径为 r 的同心球面为高斯面，由高斯定理得

$$r < R \quad D_1 \cdot 4\pi r^2 = 0$$

$$D_1 = 0; E_1 = 0$$

$$R < r < R + d \quad D_2 \cdot 4\pi r^2 = Q$$

$$D_2 = \frac{Q}{4\pi r^2}; E_2 = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r 4\pi r^2}$$

$$r > R + d \quad D_3 \cdot 4\pi r^2 = Q$$

$$D_3 = \frac{Q}{4\pi r^2}; E_3 = \frac{Q}{\epsilon_0 4\pi r^2}$$

将不同的 r 值代入上述关系式，可得 $r = 5 \text{ cm}$ 、 15 cm 和 25 cm 时的电位移和电场强度的大小，其方向均沿径向朝外。

$r_1 = 5 \text{ cm}$ ，该点在导体球内，则

$$D_{r_1} = 0; E_{r_1} = 0$$

$r_2 = 15 \text{ cm}$, 该点在介质层内, $r = 5.0$, 则

$$D_{r_2} = \frac{Q}{4\pi r_2^2} = 3.5 \times 10^{-8} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2} ; E_{r_2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r_2^2} = 8.0 \times 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

$r_3 = 25 \text{ cm}$, 该点在空气层内, 空气中 ϵ_0 , 则

$$D_{r_3} = \frac{Q}{4\pi r_3^2} = 1.3 \times 10^{-8} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2} ; E_{r_3} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r_3^2} = 1.4 \times 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

(2) 取无穷远处电势为零, 由电势与电场强度的积分关系得

$r_3 = 25 \text{ cm}$,

$$V_3 = \int_{r_1}^{\infty} \vec{E}_3 \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} = 360 \text{ V}$$

$r_2 = 15 \text{ cm}$,

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_{r_2}^{R+d} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} + \int_{R+d}^{\infty} \vec{E}_3 \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r_2} - \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 (R+d)} + \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 (R+d)} \\ &= 480 \text{ V} \end{aligned}$$

$r_1 = 5 \text{ cm}$,

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_{r_1}^{R+d} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} + \int_{R+d}^{\infty} \vec{E}_3 \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r_1} - \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 (R+d)} + \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 (R+d)} \\ &= 540 \text{ V} \end{aligned}$$

(3) 均匀介质的极化电荷分布在介质界面上, 因空气的电容率 ϵ_0 , 极化电荷

可忽略, 故在介质外表面;

$$\begin{aligned} P_n &= (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 E_n = \frac{(\epsilon_r - 1) Q}{4\pi \epsilon_r (R+d)^2} \\ &= P_n = \frac{(\epsilon_r - 1) Q}{4\pi \epsilon_r (R+d)^2} = 1.6 \times 10^{-8} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2} \end{aligned}$$

在介质内表面:

$$P_n = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 E_n = \frac{(\epsilon_r - 1) Q}{4\pi \epsilon_r R^2}$$

$$\sigma' = -P_n = \frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi R^2} = -6.4 \times 10^{-8} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

介质球壳内、外表面的极化电荷面密度虽然不同，但是两表面极化电荷的总量还是等量异号。

6-20 解 (1) 细胞壁内的电场强度 $E = \frac{U}{d} = 9.8 \times 10^6 \text{ V/m}$; 方向指向细胞外。

(2) 细胞壁两表面间的电势差 $U = Ed = 5.1 \times 10^2 \text{ V}$.

6-21 分析 平板电容器极板上自由电荷均匀分布，电场强度和电位移矢量都是常量。充电后断开电源，在介质插入前后，导体板上自由电荷保持不变。取图所示的圆柱面为高斯面，由介质中的高斯定理可求得电位移矢量 D ，再根据

$$E = \frac{D}{\epsilon_0}, \quad P = D - \epsilon_0 E$$

可求得电场强度 E 和电极化强度矢量 P 。

解 由分析可知，介质中的电位移矢量的大小

$$D = \frac{Q}{S} = \epsilon_0 = 4.5 \times 10^{-5} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

介质中的电场强度和极化强度的大小分别为

$$E = \frac{D}{\epsilon_0} = 2.5 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$P = D - \epsilon_0 E = 2.3 \times 10^{-5} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

D 、 P 、 E 方向相同，均由正极板指向负极板（图中垂直向下）。

6-22 分析 将长直带电导线视作无限长，自由电荷均匀分布在导线表面。在绝缘介质层的内、外表面分别出现极化电荷，这些电荷在内外表面呈均匀分布，所以电场是轴对称分布。取同轴柱面为高斯面，由介质中的高斯定理可得电位移矢量 D 的分布。在介质中

$$D = \epsilon_0 \epsilon_r E, \quad P = D - \epsilon_0 E, \text{ 可进一步求得电场强度 } E \text{ 和电极化强度矢量 } P \text{ 的分布。}$$

解 由介质中的高斯定理，有

$$\oint D \cdot dS = D \cdot 2\pi rL = Q$$

得

$$\mathbf{D} = \frac{Q_0}{2\pi r} \mathbf{e}_r$$

在均匀各向同性介质中

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} = \frac{Q_0}{2\pi \epsilon_0 r} \mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \frac{Q_0}{2\pi r} \mathbf{e}_r$$

6-23 分析 由于导体球一半浸在油中，电荷在导体球上已不再是均匀分布，电场分布不再呈球对称，因此，不能简单地由高斯定理求电场和电荷的分布。我们可以将导体球理解为两个分别悬浮在油和空气中的半球形孤立电容器，静电平衡时导体球上的电荷分布使导体成为等势体，故可将导体球等效为两个半球电容并联，其相对无限远处的电势均为 V ，且

$$V = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \quad (1)$$

另外导体球上的电荷总量保持不变，应有

$$Q_1 + Q_2 = Q_0 \quad (2)$$

因而可解得 Q_1 、 Q_2 。

解 将导体球看作两个分别悬浮在油和空气中的半球形孤立电容器，上半球在空气中，电容为

$$C_1 = 2\pi \epsilon_0 R$$

下半球在油中，电容为

$$C_2 = 2\pi \epsilon_r \epsilon_0 R$$

由分析中式 (1) 和式 (2) 可解得

$$Q_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} Q_0 = \frac{1}{\epsilon_r + 1} Q_0 = 0.5 \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$Q_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} Q_0 = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r + 1} Q_0 = 1.5 \times 10^{-6} \text{ C}$$

由于导体球周围部分区域充满介质，球上电荷均匀分布的状态将改变。可以证明，此时介质中的电场强度与真空中的电场强度也不再满足 $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{\epsilon_r}$ 的关系。事实上，只有当电介质

均匀充满整个电场，并且自由电荷分布不变时，才满足 $E = \frac{E_0}{r}$

6-24 分析 薄金属板 A、B 与金属盒一起构成三个电容器，其等效电路图如图 (b) 所示，由于两导体间距离较小，电容器可视为平板电容器，通过分析等效电路图可以求得 A、B 间的电容。

解 (1) 由等效电路图可知

$$C = C_{23} + C_1 = \frac{C_2 \cdot C_3}{C_2 + C_3} + C_1$$

由于电容器可以视作平板电容器，且 $d_1 = 2d_2 = 2d_3$ ，故 $C_2 = C_3 = 2C_1$ ，因此 A、B 间的总电容

$$C = 2C_1$$

(2) 若电容器的一个引脚不慎与金属屏蔽盒相碰，相当于 C_2 (或者 C_3) 极板短接，其电容为零，则总电容

$$C = 3C_1$$

6-25 解 (1) 由电容器的串、并联，有

$$C_{AC} = C_1 + C_2 = 12 \mu F$$

$$C_{CD} = C_3 + C_4 = 8 \mu F$$

$$\frac{1}{C_{AB}} = \frac{1}{C_{AC}} + \frac{1}{C_{CD}} + \frac{1}{C_5}$$

求得等效电容 $C_{AB} = 4 \mu F$ 。

(2) 由于 $Q_{AC} = Q_{CD} = Q_{DB} = Q_{AB}$ ，得

$$U_{AC} = \frac{C_{AB}}{C_{AC}} U_{AB} = 4 V$$

$$U_{CD} = \frac{C_{AB}}{C_{CD}} U_{AB} = 6 V$$

$$U_{DB} = \frac{C_{AB}}{C_{DB}} U_{AB} = 2 V$$

6-26 分析 电源对电容器充电，电容器极板间的电势差等于电源端电压 U 。插入电介质

后，由于介质界面出现极化电荷，极化电荷在介质中激发的电场与原电容器极板上自由电荷激发的电场方向相反，介质内的电场减弱。由于极板间的距离 d 不变，因而与电源相接的导体极板将会从电源获得电荷，以维持电势差不变，并有

$$U = \frac{Q}{\epsilon_0 S} (d -) + \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S}$$

相类似的原因，在平板电容器极板之间，若平行地插入一块导体板，由于极板上的自由电荷和插入导体板上的感应电荷在导体板内激发的电场相互抵消，与电源相接的导体极板将会从电源获得电荷，使间隙中的电场 E 增强，以维持两极板间的电势差不变，并有

$$U = \frac{Q}{\epsilon_0 S} (d -)$$

综上所述，接上电源的平板电容器，插入介质或导体后，极板上的自由电荷均会增加，而电势差保持不变。

解 (1) 空气平板电容器的电容

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

充电后，极板上的电荷和极板间的电场强度为

$$Q_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} U$$

$$E_0 = U / d$$

(2) 插入电介质后，电容器的电容 C_1 为

$$C_1 = Q / \left[\frac{Q}{\epsilon_0 S} (d -) + \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S} \right] = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{+ \epsilon_r (d -)}$$

故有

$$C_1 = C_1 U = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S U}{+ \epsilon_r (d -)}$$

介质内电场强度

$$E_1' = \frac{Q_1}{\epsilon_0 \epsilon_r S} = \frac{U}{+ \epsilon_r (d -)}$$

空气中电场强度

$$E_1 = \frac{Q_1}{\epsilon_0 S} = \frac{\epsilon_r U}{+ \epsilon_r (d -)}$$

(3) 插入导体达到静电平衡后, 导体为等势体, 其电容和极板上的电荷分别为

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{d -}$$

$$Q_2 = \frac{\epsilon_0 S}{d -} U$$

导体中电场强度

$$E_2' = 0$$

空气中电场强度

$$E_2 = \frac{U}{d -}$$

无论是插入介质还是插入导体, 由于电容器的导体极板与电源相连, 在维持电势差不变的同时都从电源获得了电荷, 自由电荷分布的变化同样使得介质内的电场强度不再等于 E_0/ϵ_r .

6-27 分析 导体极板 A、B 和待测物体构成一有介质的平板电容器, 关于电容 C 与材料的厚度的关系, 可参见题 6 - 26 的分析.

解 由分析可知, 该装置的电容为

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d + \epsilon_r (d -)}$$

则介质的厚度为

$$d = \frac{\epsilon_r d_0 C - \epsilon_0 \epsilon_r S}{(\epsilon_r - 1) C} = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r - 1} d_0 - \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{(\epsilon_r - 1) C}$$

如果待测材料是金属导体, 其等效电容为

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d_0 - d}$$

导体材料的厚度

$$d = d_0 - \frac{\epsilon_0 S}{C}$$

实时地测量 A、B 间的电容量 C, 根据上述关系式就可以间接地测出材料的厚度. 通常智能化的仪表可以实时地显示出待测材料的厚度.

6-28 分析 由于 $d, D \ll L$, 导体 A、C 构成圆柱形电容器, 可视为一个长 X (X 为液面高度) 的介质电容器 C_1 和一个长 $L - X$ 的空气电容器 C_2 的并联, 它们的电容值均随 X 而改变. 因此其等效电容 $C = C_1 + C_2$ 也是 X 的函数. 由于 $Q = CU$, 在电压一定时, 电荷 Q 仅随 C 而变化, 求出 Q 与液面高度 X 的函数关系, 即可得证

证 由分析知, 导体 A、C 构成一组柱形电容器, 它们的电容分别为

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r X}{\ln \frac{D}{d}}$$

$$C_2 = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r (L-X)}{\ln \frac{D}{d}}$$

其总电容

$$C = C_1 + C_2 = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r X}{\ln \frac{D}{d}} + \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r (L-X)}{\ln \frac{D}{d}} + X$$

其中

$$= \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{D}{d}}; \quad = \frac{2\pi\epsilon_0 (r-L)}{\ln \frac{D}{d}}$$

$$Q = CU = aU + UX$$

即导体管上所带电荷 Q 与液面高度 X 成正比, 油罐与电容器联通. 两液面等高, 测出电荷 Q 即可确定油罐的液面高度.

6-29 分析 通过查表可知聚四氟乙烯的击穿电场强度 $E_b = 1.9 \times 10^7 \text{ V/m}$, 电容器中的电场强度 $E \leq E_b$, 由此可以求得电容器的最大电势差和电容器存贮的最大能量.

解 (1) 电容器两极板间的电势差

$$U_{\max} = E_b d = 190 \text{ V}$$

(2) 电容器存贮的最大能量

$$W_e = \frac{1}{2} CU_{\max}^2 = 9.03 \times 10^{-3} \text{ J}$$

6-30 分析 如果设长直导线上单位长度所带电荷为 λ , 导线表面附近的电场强度

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

查表可以得知空气的击穿电场强度 $E_b = 3.0 \times 10^6 \text{ (V/m)}$, 只有当空气中的电场强度 $E \leq E_b$ 空气才不会被击穿, 由于在导线表面附近电场强度最大, 因而可以求出 λ 的极限值. 再求得电场能量密度, 并通过同轴圆柱形体元内电场能量的积分求得单位长度的最大电场强度.

解 (1) 导线表面最大电荷面密度

$$\sigma_{\max} = \epsilon_0 E_b = 2.66 \times 10^{-5} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

显然导线表面最大电荷面密度与导线半径无关。

(2) 由上述分析得 $\sigma_{\max} = 2 \epsilon_0 R_1 E_b$ ，此时导线与圆筒之间各点的电场强度为

$$E_m = \frac{\sigma_{\max}}{2 \epsilon_0 r} = \frac{R_1}{r} E_b \quad (R_2 < r < R_1)$$

$$E = 0 \quad (\text{其他})$$

$$w_m = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_m^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{R_1^2 E_b^2}{r^2}$$

沿轴线单位长度的最大电场能量

$$W_m = \int_{R_1}^{R_2} w_m \cdot 2\pi r dr = \epsilon_0 R_1^2 E_b^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr$$

$$W_m = \epsilon_0 R_1^2 E_b^2 \ln \frac{R_2}{R_1} = 5.76 \times 10^{-4} \text{ J} \cdot \text{m}^{-1}$$

6-31 分析 在未插入玻璃板时，不难求出空气中的电场强度小于空气的击穿电场强度，电容器不会被击穿。插入玻璃后，由习题 6 - 26 可知，若电容器与电源相连，则极板间的电势差维持不变，电容器将会从电源获取电荷。此时空气间隙中的电场强度将会增大。若它大于空气的击穿电场强度，则电容器的空气层将首先被击穿。此时 40 kV 电压全部加在玻璃板两侧，玻璃内的电场强度如也大于玻璃击穿电场强度的值，则玻璃也将被击穿。整个电容器被击穿。

解 未插入玻璃时，电容器内的电场强度为

$$E = U / d = 2.7 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

因空气的击穿电场强度 $E_b = 3.0 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ ， $E < E_b$ ，故电容器不会被击穿。

插入玻璃后，由习题 6 - 26 可知，空气间隙中的电场强度

$$E = \frac{U}{\frac{r}{\epsilon_0} (d - \frac{r}{\epsilon_0}) + \frac{r}{\epsilon_0}} = 3.2 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

此时，因 $E > E_b$ ，空气层被击穿，击穿后 40 kV 电压全部加在玻璃板两侧，此时玻璃板内的电场强度

$$E = U / d = 1.3 \times 10^7 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

由于玻璃的击穿电场强度 $E_b' = 10 \text{ M V} \cdot \text{m}^{-1}$, $E > E_b'$, 故玻璃也将相继被击穿, 电容器完全被击穿。

6-32 解 介质内电场强度

$$E \leq E_b = 18 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

电容耐压 $U_m = 4.0 \text{ kV}$, 因而电容器极板间最小距离

$$d = U_m / E_b = 2.22 \times 10^{-4} \text{ m}$$

要制作电容为 $0.047 \text{ } \mu\text{F}$ 的平板电容器, 其极板面积

$$S = \frac{Cd}{\epsilon_0} = 0.42 \text{ m}^2$$

显然, 这么大的面积平铺开来所占据的空间太大了, 通常将平板电容器卷叠成筒状后再封装。

6-33 分析 在将电容器两极板拉开的过程中, 由于导体极板上的电荷保持不变, 极板间的电场强度亦不变, 但电场所占有的空间增大, 系统总的电场能量增加了。根据功能原理, 所增加的能量应该等于拉开过程中外力克服两极板间的静电引力所作的功。

解 (1) 极板间的电场为均匀场, 且电场强度保持不变, 因此, 电场的能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{Q^2}{2 \epsilon_0 S^2}$$

在外力作用下极板间距从 d 被拉开到 $2d$, 电场占有空间的体积, 也由 V 增加到 $2V$, 此时电场能量增加

$$W_e = w_e V = \frac{Q^2 d}{2 \epsilon_0 S}$$

(2) 两导体极板带等量异号电荷, 外力 F 将其缓缓拉开时, 应有 $F = -F_e$, 则外力所作的功为

$$A = -F_e \cdot r = QEd = \frac{Q^2 d}{2 \epsilon_0 S}$$

外力克服静电引力所作的功等于静电场能量的增加。

7-1 分析与解 在两根通过电流相同的螺线管中, 磁感强度大小与螺线管线圈单位长度的匝数成正比。根据题意, 用两根长度相同的细导线绕成的线圈单位长度的匝数之比

$$\frac{n_R}{n_r} = \frac{r}{R} = \frac{1}{2}$$

因而正确答案为 (C)。

7-2 分析与解 作半径为 r 的圆 S 与半球面构成一闭合曲面, 根据磁场的高斯定理, 磁感线是闭合曲线, 闭合曲面的磁通量为零, 即穿进半球面 S 的磁通量等于穿出圆面 S 的磁通量; $\Phi_m = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$ 。因而正确答案为 (D)。

7-3 分析与解 由磁场中的安培环路定律, 磁感强度沿闭合回路的积分为零时, 回路上各点的磁感强度不一定为零; 闭合回路上各点磁感强度为零时, 穿过回路的电流代数和必定为零。因而正确答案为 (B)。

7-4 分析与解 由磁场中的安培环路定律, 积分回路外的电流不会影响磁感强度沿回路的积分; 但同样会改变回路上各点的磁场分布。因而正确答案为 (C)。

7-5 分析与解 利用安培环路定理可先求出磁介质中的磁场强度, 再由 $M = (\mu_r - 1)H$ 求得磁介质内的磁化强度, 因而正确答案为 (B)

7-6 分析 一个电子绕存储环近似以光速运动时, 对电流的贡献为 $I = \frac{e}{l/c}$, 因而由 $I = \frac{Nec}{l}$, 可解出环中的电子数。

解 通过分析结果可得环中的电子数

$$N = \frac{Il}{ec} = 4 \times 10^{10}$$

7-7 分析 一个铜原子的质量 $m = M / N_A$, 其中 N_A 为阿伏伽德罗常数, 由铜的密度可以推算出铜的原子数密度

$$n = \rho / m$$

根据假设, 每个铜原子贡献出一个自由电子, 其电荷为 e , 电流密度 $j_m = nev_d$ 。从而可解得电子的漂移速率 v_d 。

将电子气视为理想气体, 根据气体动理论, 电子热运动的平均速率

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{m_e}}$$

其中 k 为玻耳兹曼常量, m_e 为电子质量。从而可解得电子的平均速率与漂移速率的关系。

解 (1) 铜导线单位体积的原子数为

$$n = N_A / M$$

电流密度为 j_m 时铜线内电子的漂移速率

$$v_d = j_m / ne = j_m M / N_A e = 4.46 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$$

(2) 室温下 ($T = 300 \text{ K}$) 电子热运动的平均速率与电子漂移速率之比为

$$\frac{v}{v_d} = \frac{1}{v_d} \sqrt{\frac{8kT}{m_e}} \approx 2.42 \times 10^8$$

室温下电子热运动的平均速率远大于电子在恒定电场中的定向漂移速率。电子实际的运动是无规热运动和沿电场相反方向的漂移运动的叠加。考虑到电子的漂移速率很小，电信号的信息载体显然不会是定向漂移的电子。实验证明电信号是通过电磁波以光速传递的。

7-8 分析 如图所示是同轴柱面的横截面，电流密度 j 对中心轴对称分布。根据恒定电流的连续性，在两个同轴导体之间的任意一个半径为 r 的同轴圆柱面上流过的电流 I 都相等，因此可得

$$j = I / 2 \pi r l$$

解 由分析可知，在半径 $r = 6.0 \text{ mm}$ 的圆柱面上的电流密度

$$j = I / 2 \pi r l = 13.3 \text{ mA} \cdot \text{m}^{-2}$$

7-9 解 设赤道电流为 I ，则由教材第 7 - 4 节例 2 知，圆电流轴线上北极点的磁感强度

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}R}$$

因此赤道上的等效圆电流为

$$I = \frac{4\sqrt{2}RB}{\mu_0} = 1.73 \times 10^9 \text{ A}$$

由于在地球地磁场的 N 极在地理南极，根据右手螺旋法则可判断赤道圆电流应该是由东向西流，与地球自转方向相反。

7-10 分析 根据叠加原理，点 O 的磁感强度可视作由 ef 、 be 、 fa 三段直线以及 acb 、 adb 两段圆弧电流共同激发。由于电源距环较远， $B_{ef} = 0$ 。而 be 、 fa 两段直线的延长线通过点 O ，由于 $Idl \times r = 0$ ，由毕 - 萨定律知 $B_{be} = B_{fa} = 0$ 。流过圆弧的电流 I_1 、 I_2 的方向如图所示，两圆弧在点 O 激发的磁场分别为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1 l_1}{4 r^2}, B_2 = \frac{\mu_0 I_2 l_2}{4 r^2}$$

其中 l_1 、 l_2 分别是圆弧 acb、adb 的弧长，由于导线电阻 R 与弧长 l 成正比，而圆弧 acb、adb 又构成并联电路，故有

$$I_1 l_1 = I_2 l_2$$

将 B_1 、 B_2 叠加可得点 O 的磁感强度 B 。

解 由上述分析可知，点 O 的合磁感强度

$$B = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0 I_1 l_1}{4 r^2} - \frac{\mu_0 I_2 l_2}{4 r^2} = 0$$

7-11 分析 应用磁场叠加原理求解。将不同形状的载流导线分解成长直部分和圆弧部分，它们各自在点 O 处所激发的磁感强度较容易求得，则总的磁感强度 $B_0 = \sum B_i$

解 (a) 长直电流对点 O 而言，有 $Id\mathbf{l} \times \mathbf{r} = 0$ ，因此它在点 O 产生的磁场为零，则点 O 处总的磁感强度为 $1/4$ 圆弧电流所激发，故有

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{8R}$$

B_0 的方向垂直纸面向外。

(b) 将载流导线看作圆电流和长直电流，由叠加原理可得

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R} - \frac{\mu_0 I}{2R}$$

B_0 的方向垂直纸面向里。

(c) 将载流导线看作 $1/2$ 圆电流和两段半无限长直电流，由叠加原理可得

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4R} + \frac{\mu_0 I}{4R} + \frac{\mu_0 I}{4R} = \frac{\mu_0 I}{2R} + \frac{\mu_0 I}{4R}$$

B_0 的方向垂直纸面向外。

7-12 分析 由教材 7 - 4 节例题可知，圆弧载流导线在圆心激发的磁感强度

$$B = \frac{\mu_0 I}{4 R} \theta, \text{ 其中 } \theta \text{ 为圆弧载流导线所张的圆心角，磁感强度的方向依照右手定则确定；半}$$

无限长载流导线在圆心点 O 激发的磁感强度 $B = \frac{\mu_0 I}{4 R}$ ，磁感强度的方向依照右手定则确定。

点 O 的磁感强度 B_0 可以视为由圆弧载流导线、半无限长载流导线等激发的磁场在空间点 O 的叠加。

解 根据磁场的叠加

在图 (a) 中，

$$\mathbf{B}_0 = -\frac{\mu_0 I}{4R} \mathbf{i} - \frac{\mu_0 I}{4R} \mathbf{k} - \frac{\mu_0 I}{4R} \mathbf{k} = -\frac{\mu_0 I}{4R} \mathbf{i} - \frac{\mu_0 I}{2R} \mathbf{k}$$

在图 (b) 中,

$$\mathbf{B}_0 = -\frac{\mu_0 I}{4R} \mathbf{i} - \frac{\mu_0 I}{4R} \mathbf{i} - \frac{\mu_0 I}{4R} \mathbf{k} = -\frac{\mu_0 I}{4R} \left(-1 + 1 \right) \mathbf{i} - \frac{\mu_0 I}{4R} \mathbf{k}$$

在图 (c) 中,

$$\mathbf{B}_0 = -\frac{3\mu_0 I}{8R} \mathbf{i} - \frac{\mu_0 I}{4R} \mathbf{j} - \frac{\mu_0 I}{4R} \mathbf{k}$$

7-13 分析 毕 - 萨定理只能用于求线电流的磁场分布, 对于本题的半圆柱形面电流,

可将半圆柱面分割成宽度 $dl = Rd$ 的细电流, 细电流与轴线 OO 平行, 将细电流在轴线上产生的磁感强度叠加, 即可求得半圆柱面轴线上的磁感强度.

解 根据分析, 由于长直细线中的电流 $dI = I dl / R$, 它在轴线上一点激发的磁感强度的大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{2R} dI$$

其方向在 Oxy 平面内, 且与由 dI 引向点 O 的半径垂直, 如图 7-13(b) 所示. 由对称性可知, 半圆柱面上细电流在轴线 OO 上产生的磁感强度叠加后, 得

$$B_y = \int dB \sin \theta = 0$$

$$B_x = \int_0^{\pi} dB \sin \theta = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0}{2R} \frac{I}{R} Rd \sin \theta = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

则轴线上总的磁感强度大小

$$B = B_x = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

B 的方向指向 Ox 轴负向.

7-14 分析 设磁感强度在 Ox 轴线上的分布为 $B(x)$ (可由两个圆电流线圈在轴线上磁场的叠加而得), 如在轴线上某点处 $\frac{dB}{dx} = 0$, 这表明在该点附近的磁感强度有三种可能,

即有极大值 ($\frac{d^2 B}{dx^2} < 0$)、极小值 ($\frac{d^2 B}{dx^2} > 0$) 或均匀 ($\frac{d^2 B}{dx^2} = 0$). 据此可得获得均匀磁场的

条件.

证 取两线圈中心连线的中点为坐标原点 O , 两线圈中心轴线为 x 轴, 在 x 轴上任一点的磁感强度

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2[R^2 + (d/2 - x)^2]^{3/2}} - \frac{\mu_0 I R^2}{2[R^2 + (d/2 + x)^2]^{3/2}}$$

则当

$$\frac{dB(x)}{dx} = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left\{ \frac{3(d/2 - x)}{[R^2 + (d/2 - x)^2]^{3/2}} - \frac{3(d/2 + x)}{[R^2 + (d/2 + x)^2]^{3/2}} \right\} = 0$$

$$\frac{d^2 B(x)}{dx^2} = \frac{3\mu_0 I R^2}{2} \left\{ \frac{4(d/2 - x)^2}{[R^2 + (d/2 - x)^2]^{5/2}} - \frac{4(d/2 + x)^2}{[R^2 + (d/2 + x)^2]^{5/2}} \right\} = 0$$

时, 磁感强度在该点附近小区域内是均匀的, 该小区域的磁场为均匀场。

由 $\frac{dB}{dx} = 0$, 解得 $x = 0$

由 $\frac{d^2 B}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0$, 解得 $d = R$

将磁感强度 B 在两线圈中点附近用泰勒级数展开, 则

$$B(x) = B(0) + \frac{dB(0)}{dx} x + \frac{1}{2} \frac{d^2 B(0)}{dx^2} x^2 + \dots$$

若 $x \ll 1$; 且 $\frac{dB(0)}{dx} = 0$; $\frac{d^2 B(0)}{dx^2} = 0$. 则磁感强度 $B(x)$ 在中点 O 附近近似为常量,

场为均匀场。

这表明在 $d = R$ 时, 中点 ($x = 0$) 附近区域的磁场可视为均匀磁场。

7-15 分析 由于矩形平面上各点的磁感强度不同, 故磁通量 Φ_B . 为此, 可在矩形平面上取一矩形面元 $dS = l dx$ [图 (b)], 载流长直导线的磁场穿过该面元的磁通量为

$$d\Phi_B = B dS = \frac{\mu_0 I}{2x} l dx$$

矩形平面的总磁通量

$$\Phi_B = \int d\Phi_B$$

解 由上述分析可得矩形平面的总磁通量

$$\Phi_B = \int_{d_1}^{d_2} \frac{\mu_0 I}{2x} l dx = \frac{\mu_0 I l}{2} \ln \frac{d_2}{d_1}$$

7-16 分析 可将导线视作长直圆柱体, 电流沿轴向均匀流过导体, 故其磁场必然呈轴对称分布, 即在与导线同轴的圆柱面上的各点, B 大小相等. 方向与电流成右手螺旋关系. 为此, 可利用安培环路定理, 求出导线表面的磁感强度。

解 (1) 围绕轴线取同心圆为环路 L , 取其绕向与电流成右手螺旋关系, 根据安培环路定理, 有

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I$$

在导线内 $r < R$, $\sum I = \frac{I}{R^2} r^2 = \frac{r^2}{R^2} I$, 因而

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2 R^2}$$

在导线外 $r > R$, $\sum I = I$, 因而

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 r}$$

磁感强度分布曲线如图所示.

(2) 在导线表面磁感强度连续, 由 $I = 50 \text{ A}$, $R = \sqrt{s/\pi} = 1.78 \times 10^{-3} \text{ m}$, 得

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 R} = 5.6 \times 10^{-3} \text{ T}$$



(a)



(b)

题 7-17 图

7-17 分析

同轴电缆导体内的电流均匀分布, 其磁场呈轴对称, 取半径为 r 的同心圆为积分路径,

$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r$, 利用安培环路定理 $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I$, 可解得各区域的磁感强度.

解 由上述分析得

$$r < R_1$$

$$B_1 \cdot 2\pi r = \mu_0 \frac{1}{R_1^2} r^2 I$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2 R_1^2}$$

$$R_1 < r < R_2$$

$$B_2 \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

$$R_2 < r < R_3$$

$$B_3 \cdot 2r = \mu_0 \left[I - \frac{(r^2 - R_2^2)}{(R_3^2 - R_2^2)} I \right]$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{2r} \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

$$r > R_3$$

$$B_4 \cdot 2r = \mu_0 (I - I) = 0$$

$$B_4 = 0$$

磁感强度 $B(r)$ 的分布曲线如图 (b) 。

7-18 分析 根据右手螺旋法则，螺线管内磁感强度的方向与螺线管中心轴线构成同心圆，若取半径为 r 的圆周为积分环路，由于磁感强度在每一环路上为常量，因而

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r$$

依照安培环路定理 $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I$ ，可以解得螺线管内磁感强度的分布。

解 依照上述分析，有

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I$$

$$r < R_1$$

$$B_1 \cdot 2\pi r = 0$$

$$B_1 = 0$$

$$R_2 > r > R_1$$

$$B_2 \cdot 2\pi r = \mu_0 NI$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

$$r > R_3$$

$$B_3 \cdot 2\pi r = 0$$

$$B_3 = 0$$

在螺线管内磁感强度 B 沿圆周, 与电流成右手螺旋. 若 $R_2 - R_1 \ll R_1$ 和 R_2 , 则环内的磁场可以近似视作均匀分布, 设螺线环的平均半径 $R = \frac{1}{2}(R_2 + R_1)$, 则环内的磁感强度近似为

$$B \approx \frac{\mu_0 NI}{2R}$$

7-19 分析 由题 7 - 16 可得导线内部距轴线为 r 处的磁感强度

$$B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2R^2}$$

在剖面上磁感强度分布不均匀, 因此, 需从磁通量的定义 $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ 来求解. 沿轴线方向在剖面上取面元 $dS = l dr$, 考虑到面元上各点 B 相同, 故穿过面元的磁通量 $d\Phi = B dS$, 通过积分, 可得单位长度导线内的磁通量

$$\Phi = \int_S B dr$$

解 由分析可得单位长度导线内的磁通量

$$\Phi = \int_0^R \frac{\mu_0 I r}{2R^2} dr = \frac{\mu_0 I}{4}$$

7-20 分析 依照右手螺旋定则, 磁感强度 B 和电流 j 相互垂直, 同时由对称性分析, 无限大导电平面两侧的磁感强度大小相同, 方向反向平行. 如图所示, 在垂直导电平面的平面上对称地取矩形回路 $abcd$, 回路所在平面与导电平面相交于 OO' , 且使 $ab \parallel cd \parallel OO'$, $ad \perp OO'$, $cd \perp OO'$, $ab = cd = L$, 根据磁场的面对称分布和安培环路定理可解得磁感强度 B 的分布.

解 在如图所示的矩形回路 $abcd$ 中, 磁感强度沿回路的环路积分

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{ab} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{cd} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{bc} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{da} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

由于对称性 $B_1 = B_3 = B$, B_2 、 B_4 与积分路径正交, 因而

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2Bl \quad (1)$$

回路 $abcd$ 内包围的电流 $I = jL$, 根据安培环路定理, 有

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2Bl = \mu_0 jL \quad (2)$$

由式 (1) 和式 (2) 可得导电板两侧磁感强度的大小为

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 j$$

磁感强度的方向由右手螺旋关系确定.

7-21 解 由上题计算的结果, 单块无限大载流平面在两侧的磁感强度大小为 $\frac{1}{2}\mu_0 j$, 方向如图所示, 根据磁场的叠加原理可得

(1) 取垂直于纸面向里为 x 轴正向, 合磁场为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 j}{2} \mathbf{i} + \frac{\mu_0 j}{2} \mathbf{i} = \mu_0 j \mathbf{i}$$

(2) 两导体载流平面之外, 合磁场的磁感强度

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 j}{2} \mathbf{i} - \frac{\mu_0 j}{2} \mathbf{i} = 0$$

7-22 解 (1) 依照 $\mathbf{F}_L = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 可知洛伦兹力 \mathbf{F}_L 的方向为 $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$ 的方向, 如图所示.

(2) 因 $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$, 质子所受的洛伦兹力

$$\mathbf{F}_L = qv\mathbf{B} = 3.2 \times 10^{-16} \text{ N}$$

在地球表面质子所受的万有引力

$$\mathbf{G} = m_p g = 1.64 \times 10^{-16} \text{ N}$$

因而, 有 $F_L / G = 1.95 \times 10^{10}$, 即质子所受的洛伦兹力远大于重力.

7-23 解 (1) 如图所示, 由洛伦兹力

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

电子带负电, $q < 0$, 因而可以判断电子束将偏向东侧.

(2) 在如图所示的坐标中, 电子在洛伦兹力作用下, 沿圆周运动, 其轨道半径 R (参见教材第 7 - 7 节) 为

$$R = \frac{mv}{eB} = \frac{\sqrt{2mE_k}}{eB} = 6.71 \text{ m}$$

由题知 $y = 20 \text{ cm}$, 并由图中的几何关系可得电子束偏向东侧的距离

$$x = R - \sqrt{R^2 - y^2} = 2.98 \times 10^{-3} \text{ m} \text{ 即显示屏上的图像将整体向东平移近 } 3 \text{ mm. 这种平移}$$

并不会影响整幅图像的质量.

7-24 分析 在导体内部, 稳恒电场推动导体中的载流子定向运动形成电流, 由欧姆定律的微分形式, 稳恒电场强度与电流密度应满足

$$\mathbf{E}_c = \rho \mathbf{j}$$

其中 ρ 是导体的电阻率. 当电流流过位于稳恒磁场中的导体时, 载流子受到洛伦兹力

的作用，导体侧面出现电荷积累，形成霍耳电场，其电场强度为

$$\mathbf{E}_H = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

其中 v 是载流子定向运动速率，根据导体内电流密度

$$\mathbf{j} = nev$$

由上述关系可得要证明的结果。

证 由分析知，在导体内稳恒电场强度为

$$\mathbf{E}_C = \mathbf{j} = nev$$

由霍耳效应，霍耳电场强度

$$\mathbf{E}_H = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

因载流子定向运动方向与磁感强度正交，故 $E_H = vB$ ，因而

$$E_H / E_C = vB / \neq vB / \quad /v = B/ne$$

7-25 分析 血流稳定时，有

$$qvB = qE_H$$

由上式可以解得血流的速度。

解 依照分析

$$v = \frac{E_H}{B} = \frac{U_H}{dB} = 0.63 \text{ m/s}$$

7-26 解 (1) 由题意电流垂直流过管内导电液体，磁场中的导电液体受到安培力的

作用，在管道方向产生一压力差

$$p = \frac{F}{S} = \frac{IBl}{S} = JBl$$

$$(2) \quad J = \frac{p}{Bl} = 3.38 \times 10^6 \text{ A/m}^2$$

7-27 解 根据带电粒子回转半径与粒子运动速率的关系有

$$p = mv = ReB = 1.12 \times 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$E_k = \frac{p^2}{2m} = 2.35 \text{ keV}$$

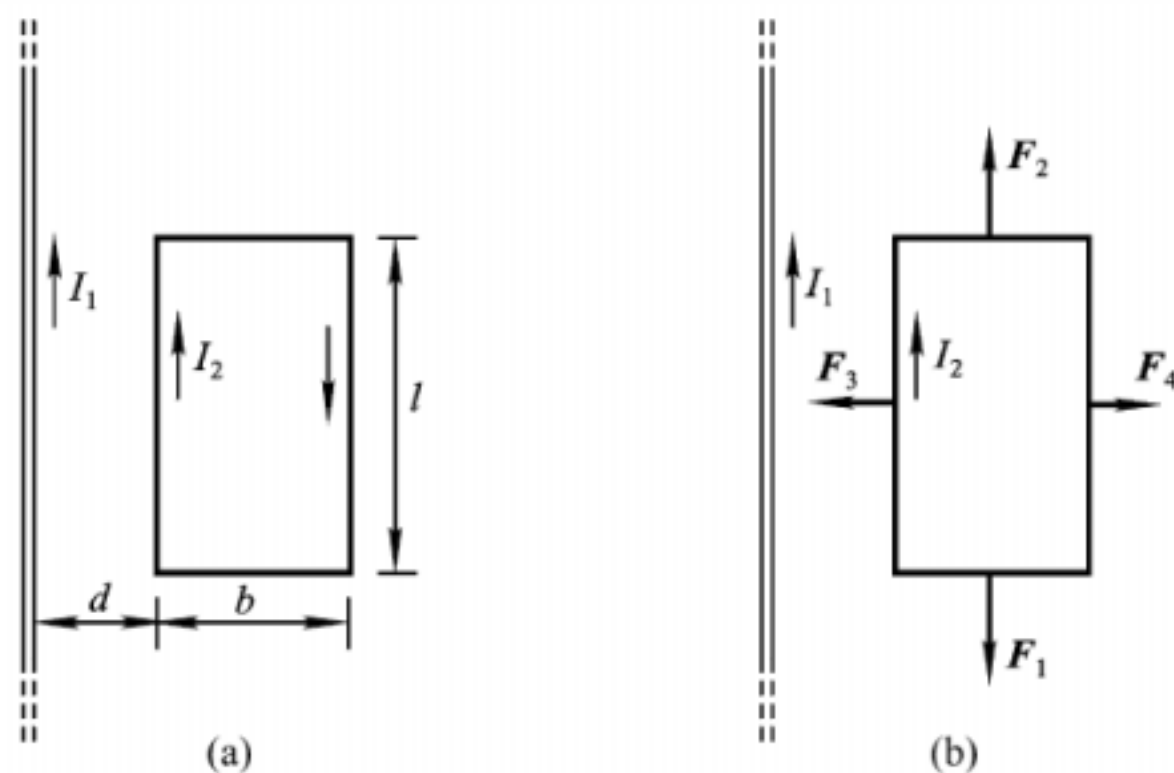
7-28 解 由带电粒子在磁场中运动的回转半径高层范艾伦辐射带中的回转半径

$$R_1 = \frac{mv}{eB_1} = 1.1 \times 10^3 \text{ m}$$

地磁北极附近的回转半径

$$R_2 = \frac{mv}{eB_2} = 23 \text{ m}$$

7-29 分析



题 7 - 29 图

矩形上、下两段导线受安培力 F_1 和 F_2 的大小相等，方向相反，对不变形的矩形回路来说，两力的矢量和为零。而矩形的左右两段导线，由于载流导线所在处磁感强度不等，所受安培力 F_3 和 F_4 大小不同，且方向相反，因此线框所受的力为这两个力的合力。

解 由分析可知，线框所受总的安培力 F 为左、右两边安培力 F_3 和 F_4 之矢量和，如图 (b) 所示，它们的大小分别为

$$F_3 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2 d}$$

$$F_4 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2 (d + b)}$$

故合力的大小为

$$F = F_3 - F_4 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2 d} - \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2 (d + b)} = 1.28 \times 10^{-3} \text{ N}$$

合力的方向朝左，指向直导线。

7-30 分析 当平行输电线中的电流相反时，它们之间存在相互排斥的安培力，其大小

可由安培定律确定。若两导线间距离为 d ，一导线在另一导线位置激发的磁感强度 $B = \frac{\mu_0 I}{2d}$ ，

导线单位长度所受安培力的大小 $F_B = BI$ 。将这两条导线看作带等量异号电荷的导体，因两

导线间单位长度电容 C 和电压 U 已知，则单位长度导线所带电荷 $Q = CU$ ，一导线在另一导线

位置所激发的电场强度 $E = \frac{Q}{2\epsilon_0 d}$ ，两导线间单位长度所受的静电吸引力 $F_E = EQ$ 。依照

题意，导线间的静电力和安培力正好抵消，即

$$F_B + F_E = 0$$

从中可解得输电线中的电流。

解 (1) 由分析知单位长度导线所受的安培力和静电力分别为

$$F_B = BI = \frac{\mu_0 I^2}{2d}$$

$$F_E = EQ = \frac{C^2 U^2}{2\epsilon_0 d}$$

由 $f_B + f_E = 0$ 可得

$$\frac{\mu_0 I^2}{2d} = \frac{C^2 U^2}{2\epsilon_0 d}$$

解得

$$I = \frac{CU}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 4.5 \times 10^3 \text{ A}$$

(2) 输出功率

$$N = IU = 2.25 \times 10^9 \text{ W}$$

7-31 分析 依照题 7 - 20 的分析，无限大载流平面两侧为均匀磁场，磁感强度大小为 $\frac{1}{2} \mu_0 j$ ，依照右手螺旋定则可知，它们的方向反向平行，并与原有磁感强度 B_0 的均匀外磁场叠加，则有

$$B_1 = B_0 - \frac{1}{2} \mu_0 j$$

$$B_2 = B_0 + \frac{1}{2} \mu_0 j$$

从而可解得原均匀磁场的磁感强度 B_0 和电流面密度 j 。载流平面在均匀外磁场中受到安培力的作用，由于载流平面自身激发的磁场不会对自身的电流产生作用力，因此作用在 d S

面积上的安培力

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}_0$$

由此可求得单位面积载流平面所受的安培力 .

解 由分析可得

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_0 - \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{j} \quad (1)$$

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_0 + \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{j} \quad (2)$$

由式 (1)、(2) 解得

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{2} (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)$$

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)$$

外磁场 \mathbf{B}_0 作用在单位面积载流平面上的安培力

$$\frac{d\mathbf{F}}{dS} = \frac{j dx dy \mathbf{B}_0}{dx dy} = j \mathbf{B}_0 = \frac{1}{2 \mu_0} (\mathbf{B}_2^2 - \mathbf{B}_1^2)$$

依照右手定则可知磁场力的方向为水平指向左侧 .

7-32 解 (1) 因为所有电子的磁矩方向相同, 则圆盘的磁矩

$$m = N \mu_B = 1.56 \times 10^{-2} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

(2) 由磁矩的定义, 可得圆盘边缘等效电流

$$I = m / S = 2.0 \times 10^{-3} \text{ A}$$

7-33 分析 根据电子绕核运动的角动量

$$L = m v a_0 = h / 2$$

可求得电子绕核运动的速率 v . 如认为电子绕核作圆周运动, 其等效圆电流

$$i = \frac{e}{T} = \frac{e}{2 a_0 / v}$$

在圆心处, 即质子所在处的磁感强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2 a_0}$$

解 由分析可得, 电子绕核运动的速率

$$v = \frac{h}{2 m a_0}$$

其等效圆电流

$$i = \frac{e}{2 m a_0} = \frac{he}{4 \pi m a_0^2}$$

该圆电流在圆心处产生的磁感强度

$$B = \frac{\mu_0 i}{2 a_0} = \frac{\mu_0 h e}{8 \pi m a_0^2} = 12.5 \text{ T}$$

7-34 分析 旋转的带电圆盘可等效为一组同心圆电流，在盘面上割取细圆环（如图所
示），其等效圆电流

$$dl = \frac{2 \pi r dr}{T} = \sigma \omega r dr$$

此圆电流在轴线上点 P 处激发的磁感强度的大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{r^2 dl}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

所有圆电流在轴线上激发的磁场均沿 Ox 轴，因而点 P 处的合磁场为 $B = \int dB$ 。由磁矩

的定义，等效圆电流的磁矩 $dm = r^2 dl$ ，方向沿 Ox 轴正向，将不同半径的等效圆电流磁矩
叠加可以得到旋转圆片的磁矩

$$m = \int r^2 dl$$

解 由上述分析可知，轴线上 x 处的磁感强度大小为

$$B = \int_0^R \frac{\mu_0}{2} \frac{r^3 dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2} \left[\frac{R^2 + 2x^2}{\sqrt{x^2 + R^2}} - 2x \right]$$

$$B = \int_0^R \frac{\mu_0}{2} \frac{r^3 \sigma \omega dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left[\frac{R^2 + 2x^2}{\sqrt{x^2 + R^2}} - 2x \right]$$

圆片的磁矩 m 的大小为

$$m = \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{4} R^4$$

磁感强度 B 和磁矩 m 的方向都沿 Ox 轴正向。

7-35 分析 电流分布呈轴对称，依照右手定则，磁感线是以电缆对称轴线为中心的一
组同心圆。选取任一同心圆为积分路径，应有 $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H 2 \pi r$ ，利用安培环路定理

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_f$$

求出环路内的传导电流，并由 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ， $\mathbf{M} = (\mu - 1)\mathbf{H}$ ，可求出磁感强度和磁化强度。再由磁化电流的电流面密度与磁化强度的关系求出磁化电流。

解 (1) 取与电缆轴同心的圆为积分路径，根据磁介质中的安培环路定理，有

$$H_2 r = \sum I_f$$

对 $r < R_1$

$$\sum I_f = \frac{I}{R_1^2} r^2$$

得

$$H_1 = \frac{I r}{2 R_1^2}$$

忽略导体的磁化 (即导体相对磁导率 $\mu_r = 1$)，有

$$M_1 = 0, \quad B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2 R_1^2}$$

对 $R_1 > r > R_2$

$$\sum I_f = I$$

得

$$H_2 = \frac{I}{2 r}$$

填充的磁介质相对磁导率为 μ_r ，有

$$M_2 = (\mu_r - 1) \frac{I}{2 r}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2 r}$$

对 $R_2 > r > R_3$

$$\sum I_f = I - \frac{I}{(R_3^2 - R_2^2)} \cdot (r^2 - R_2^2)$$

得

$$H_3 = \frac{I (R_3^2 - r^2)}{2 r (R_3^2 - R_2^2)}$$

同样忽略导体的磁化，有

$$M_3 = 0, \quad B_3 = \frac{\mu I (R_3^2 - r^2)}{2 r (R_3^2 - R_2^2)}$$

对 $r > R_3$

$$\sum I_f = I - I = 0$$

得

$$H_4 = 0, \quad M_4 = 0, \quad B_4 = 0$$

(2) 由 $I_s = M \cdot 2r$, 磁介质内、外表面磁化电流的大小为

$$I_{si} = M_2 (R_1) \cdot 2 R_1 = (\mu - 1) I$$

$$I_{se} = M_2 (R_2) \cdot 2 R_2 = (\mu - 1) I$$

对抗磁质 ($\mu_r < 1$), 在磁介质内表面 ($r = R_1$), 磁化电流与内导体传导电流方向相反; 在磁介质外表面 ($r = R_2$), 磁化电流与外导体传导电流方向相反. 顺磁质的情况与抗磁质相反. $H(r)$ 和 $B(r)$ 分布曲线分别如图 (b) 和 (c).

7-36 分析 (1) 根据铁棒的体积和密度求得铁棒的质量, 再根据铁的摩尔质量求得棒内的铁原子数 N , 即

$$N = \frac{V}{M_0} N_A$$

其中 N_A 为阿伏伽德罗常量. 维持铁棒内铁原子磁偶极矩同方向排列, 因而棒的磁偶极矩

$$m = Nm_0$$

(2) 将铁棒视为一个磁偶极子, 其与磁场正交时所需力矩

$$M = m \cdot B_0$$

解 (1) 由分析知, 铁棒内的铁原子数为

$$N = \frac{SL}{M_0} N_A$$

故铁棒的磁偶极矩为

$$m = Nm_0 = \frac{SL}{M_0} N_A m_0 = 7.85 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$$

(2) 维持铁棒与磁场正交所需力矩等于该位置上磁矩所受的磁力矩

$$M = m \cdot B_0 = 11.4 \text{ N} \cdot \text{m}$$

7-37 分析 根据右手定则, 磁感线与电流相互环连, 磁场沿环型螺线管分布, 当

环形螺线管中通以电流 I 时, 由安培环路定理得磁介质内部的磁场强度为

$$H = \frac{NI}{L}$$

由题意可知, 环内部的磁感强度 $B = \mu H$, 而 $B = \mu_0 \mu_r H$, 故有

$$\mu_r = B / \mu_0 H$$

解 磁介质内部的磁场强度和磁感强度分别为 NI / L 和 B , 因而

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 NI} = 4.78 \times 10^3$$

8-1 分析与解 由右手定则可以判断, 在矩形线圈附近磁场垂直纸面朝里, 磁场是非均匀场, 距离长直载流导线越远, 磁场越弱. 因而当矩形线圈朝下运动时, 在线圈中产生感应电流, 感应电流方向由法拉第电磁感应定律可以判定. 因而正确答案为 (B)

8-2 分析与解 根据法拉第电磁感应定律, 铜环、木环中的感应电场大小相等,

但在木环中不会形成电流. 因而正确答案为 (A).

8-3 分析与解 教材中已经证明 $M_{21} = M_{12}$, 电磁感应定律 $\mathcal{E}_{21} = M_{21} \left| \frac{di_1}{dt} \right|$;

$\mathcal{E}_{12} = M_{12} \left| \frac{di_2}{dt} \right|$. 因而正确答案为 (D).

8-4 分析与解 位移电流的实质是变化的电场. 变化的电场激发磁场, 在这一点位移电流等效于传导电流, 但是位移电流不是走向运动的电荷, 也就不服从焦耳热效应、安培力等定律. 因而正确答案为 (A)

8-5 分析与解 对照感应电场的性质, 感应电场的电场线是一组闭合曲线. 因而

正确答案为 (B).

8-6 分析 由于线圈有 N 匝相同回路, 线圈中的感应电动势等于各匝回路的感应电动势的代数和, 在此情况下, 法拉第电磁感应定律通常写成 $\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}$, 其中 $\Psi = N\Phi$ 称为磁链.

解 线圈中总的感应电动势

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi}{dt} = (2.51) \cos(100t) \text{ V}$$

当 $t = 1.0 \times 10^{-2} \text{ s}$ 时, $\mathcal{E} = 2.51 \text{ V}$.

8-7 分析 本题仍可用法拉第电磁感应定律 $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$ 来求解。由于回路处在非均匀磁场中，磁通量就需用 $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ 来计算（其中 \mathbf{B} 为两无限长直电流单独存在时产生的磁感强度 B_1 与 B_2 之和）。

为了积分的需要，建立如图所示的坐标系。由于 B 仅与 x 有关，即 $B = B(x)$ ，故取一个平行于长直导线的宽为 d 、长为 l 的面元 dS ，如图中阴影部分所示，则 $dS = dxdx$ ，所以，总磁通量可通过线积分求得（若取面元 $dS = dxdy$ ，则上述积分实际上为二重积分）。本题在工程技术中又称为互感现象，也可用公式 $\mathcal{E}_M = -M \frac{dI}{dt}$ 求解。

解1 穿过面元 dS 的磁通量为

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B_1 dS + B_2 dS = \frac{\mu_0 I}{2(x+d)} dxdx - \frac{\mu_0 I}{2x} dxdx$$

因此穿过线圈的磁通量为

$$\Phi = \int d\Phi = \int_d^{2d} \frac{\mu_0 I d}{2(x+d)} dx - \int_d^{2d} \frac{\mu_0 I d}{2x} dx = \frac{\mu_0 I d}{2} \ln \frac{3}{4}$$

再由法拉第电磁感应定律，有

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\left(\frac{\mu_0 d}{2} \ln \frac{3}{4}\right) \frac{dI}{dt}$$

解2 当两长直导线有电流 I 通过时，穿过线圈的磁通量为

$$\Phi = \frac{\mu_0 d I}{2} \ln \frac{3}{4}$$

线圈与两长直导线间的互感为

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 d}{2} \ln \frac{3}{4}$$

当电流以 $\frac{dI}{dt}$ 变化时，线圈中的互感电动势为

$$\mathcal{E} = -M \frac{dI}{dt} = -\left(\frac{\mu_0 d}{2} \ln \frac{3}{4}\right) \frac{dI}{dt}$$

试想：如线圈又以速率 v 沿水平向右运动，如何用法拉第电磁感应定律求图示位置的电动势呢？此时线圈中既有动生电动势，又有感生电动势。设时刻 t ，线圈左端距右侧直导线的距离为 x ，则穿过回路的磁通量 $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = f(I, x)$ ，它表现为变量 I 和 x 的二元函数，

将 $\frac{d}{dt}$ 代入 $E = -\frac{d}{dt}$ 即可求解, 求解时应按复合函数求导, 注意, 其中 $\frac{d}{dt} = v$, 再令 $\frac{d}{dt} =$ d 即可求得图示位置处回路中的总电动势. 最终结果为两项, 其中一项为动生电动势, 另一项为感生电动势.

8-8 分析 在电磁感应现象中, 闭合回路中的感应电动势和感应电流与磁通量变化的快慢有关, 而在一段时间内, 通过导体截面的感应电量只与磁通量变化的大小有关, 与磁通量变化的快慢无关. 工程中常通过感应电量的测定来确定磁场的强弱.

解 在线圈转过 90° 角时, 通过线圈平面磁通量的变化量为

$$= \Phi_2 - \Phi_1 = NBS - 0 = NBS$$

因此, 流过导体截面的电量为 $q = \frac{NBS}{R + R_i} = \frac{NBS}{R + R_i}$

则 $B = \frac{q(R + R_i)}{NS} = 0.050 \text{ T}$

8-9 分析 虽然线圈处于非均匀磁场中, 但由于线圈的面积很小, 可近似认为穿过线圈平面的磁场是均匀的, 因而可近似用 $\Phi = NBS$ 来计算线圈在始、末两个位置的磁链.

解 (1) 在始、末状态, 通过线圈的磁链分别为

$$\Phi_1 = NB_1 S = \frac{N \mu_0 I S}{2 r_1}, \quad \Phi_2 = NB_2 S = \frac{N \mu_0 I S}{2 r_2}$$

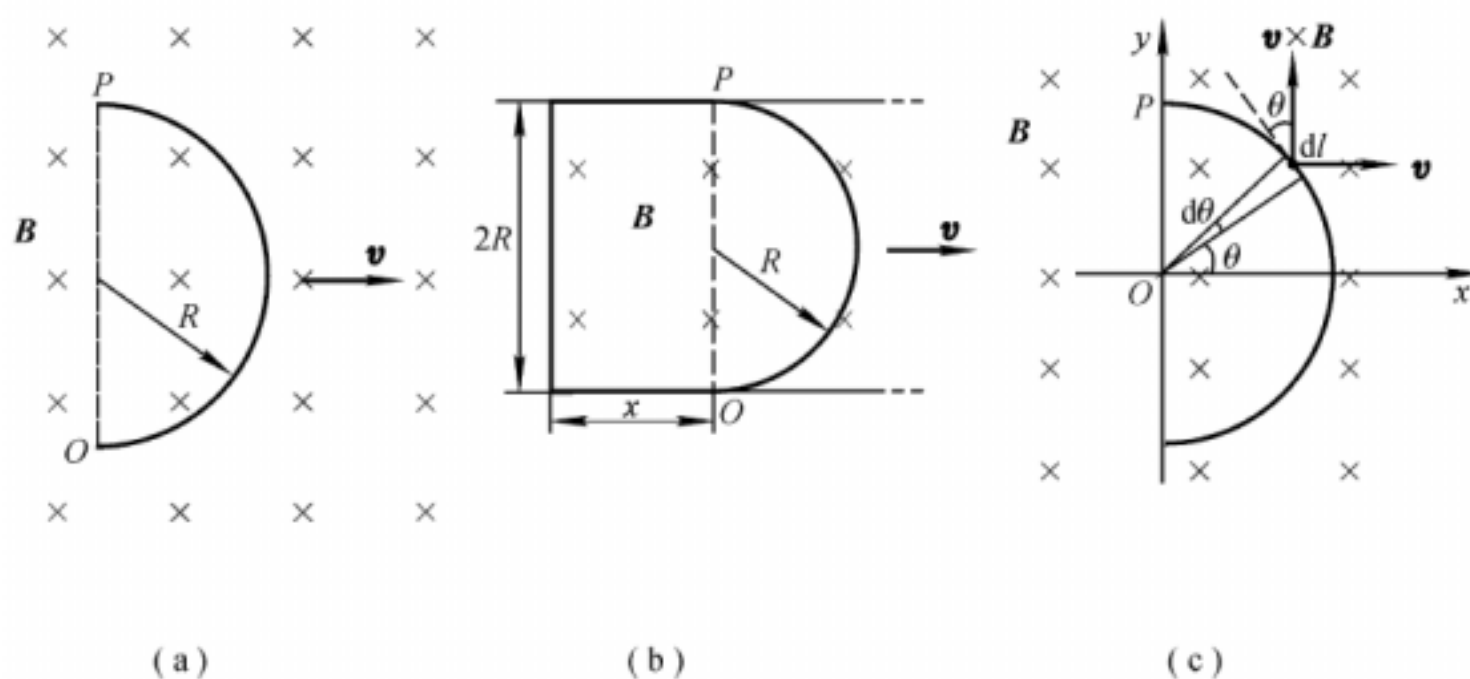
则线圈中的平均感应电动势为

$$|\bar{E}| = \left| \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{t} \right| = \frac{N \mu_0 I S}{2 t} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = 1.11 \times 10^{-8} \text{ V}$$

电动势的指向为顺时针方向.

(2) 通过线圈导线横截面的感应电荷为

$$E = -\frac{d}{dt}$$



题 8-10 图

8-10 分析 本题及后面几题中的电动势均为动生电动势，除仍可由 $E = -\frac{d}{dt}$ 求解外

(必须设法构造一个闭合回路)，还可直接用公式 $E = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ 求解。

在用后一种方法求解时，应注意导体上任一导线元 $d\mathbf{l}$ 上的动生电动势

$dE = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ 。在一般情况下，上述各量可能是 $d\mathbf{l}$ 所在位置的函数。矢量 $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 的方向就是导线中电势升高的方向。

解1 如图(b)所示，假想半圆形导线 OP 在宽为 $2R$ 的静止形导轨上滑动，两者之间形成一个闭合回路。设顺时针方向为回路正向，任一时刻端点 O 或

端点 P 距形导轨左侧距离为 x ，则

$$= \left(2Rx + \frac{1}{2} R^2 \right) B$$

即

$$E = -\frac{d}{dt} = -2RB \frac{dx}{dt} = -2RvB$$

由于静止的形导轨上的电动势为零，则 $E = -2RvB$ 。式中负号表示电动势的方向为逆时针，对 OP 段来说端点 P 的电势较高。

解2 建立如图(c)所示的坐标系，在导体上任意处取导体元 $d\mathbf{l}$ ，则

$$dE = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = vB \sin 90^\circ \cos \theta dl = vB \cos \theta R d\theta$$

$$E = \int dE = vBR \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = 2RvB$$

由矢量 $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 的指向可知，端点 P 的电势较高。

解3 连接 OP 使导线构成一个闭合回路。由于磁场是均匀的，在任意时刻，穿过回路的

磁通量 $\Phi = BS = \text{常数}$. 由法拉第电磁感应定律 $E = -\frac{d\Phi}{dt}$ 可知, $E = 0$

又因 $E = E_{OP} + E_{PO}$

即 $E_{OP} = -E_{PO} = 2RvB$

由上述结果可知, 在均匀磁场中, 任意闭合导体回路平动所产生的动生电动势为零; 而任意曲线形导体上的动生电动势就等于其两端所连直线形导体上的动生电动势. 上述求解方法是叠加思想的逆运用, 即补偿的方法.

8-11 分析 应该注意棒两端的电势差与棒上的动生电动势是两个不同的概念, 如同电源的端电压与电源电动势的不同. 在开路时, 两者大小相等, 方向相反 (电动势的方向是电势升高的方向, 而电势差的正方向是电势降落的方向). 本题可直接用积分法求解棒上的电动势, 亦可以将整个棒的电动势看作是 OA 棒与 OB 棒上电动势的代数和, 如图 (b) 所示. 而 E_{OA} 和 E_{OB} 则可以直接利用第 8 - 2 节例 1 给出的结果.

解1 如图 (a) 所示, 在棒上距点 O 为 l 处取导体元 dl , 则

$$E_{AB} = \int_{AB} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{-r}^{L-r} -IB dl = -\frac{1}{2} IB(L - 2r)$$

因此棒两端的电势差为

$$U_{AB} = E_{AB} = -\frac{1}{2} IB(L - 2r)$$

当 $L > 2r$ 时, 端点 A 处的电势较高

解2 将 AB 棒上的电动势看作是 OA 棒和 OB 棒上电动势的代数和, 如图 (b) 所示. 其中

$$|E_{OA}| = \frac{1}{2} B r^2, \quad |E_{OB}| = \frac{1}{2} B (L - r)^2$$

则

$$E_{AB} = |E_{OA}| - |E_{OB}| = -\frac{1}{2} BL(L - 2r)$$

8-12 分析 如前所述, 本题既可以用法拉第电磁感应定律 $E = -\frac{d\Phi}{dt}$ 计算 (此时必须构造一个包含 OP 导体在内的闭合回路, 如直角三角形导体回路 OPQO, 也可用

$E = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ 来计算. 由于对称性, 导体 OP 旋转至任何位置时产生的电动势与图示位置是相同的.

解1 由上分析, 得

$$E_{OP} = \int_{OP} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

$$\begin{aligned}
&= \int v B \sin 90^\circ \cos \theta \, dl \\
&= \int (l \sin \theta) B \cos(90^\circ - \theta) \, dl \\
&= B \sin^2 \theta \int_0^L l \, dl = \frac{1}{2} B (L \sin \theta)^2
\end{aligned}$$

由矢量 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的方向可知端点 P 的电势较高。

解2 设想导体 OP 为直角三角形导体回路 OPQO 中的一部分，任一时刻穿过回路的磁通量 为零，则回路的总电动势

$$E = -\frac{d}{dt} = 0 = E_{OP} + E_{PQ} + E_{QO}$$

显然， $E_{QO} = 0$ ，所以

$$E_{OP} = -E_{PQ} = E_{QO} = \frac{1}{2} B (PQ)^2$$

由上可知，导体棒 OP 旋转时，在单位时间内切割的磁感线数与导体棒 QP 等效。后者是垂直切割的情况。

8-13 分析 本题可用两种方法求解。（1）用公式 $E = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ 求解，建立图（a）

所示的坐标系，所取导体元 $dl = dx$ ，该处的磁感强度 $B = \frac{\mu_0 I}{2x}$ 。（2）用法拉第电磁感应

定律求解，需构造一个包含杆 AB 在内的闭合回路。为此可设想杆 AB 在一个静止的形导轨上

滑动，如图（b）所示。设时刻 t，杆 AB 距导轨下端 CD 的距离为 y，先用公式 $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ 求

得穿过该回路的磁通量，再代入公式 $E = -\frac{d}{dt}$ ，即可求得回路的电动势，亦即本题杆中的电动势。

解1 根据分析，杆中的感应电动势为

$$E_{AB} = \int_{AB} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = dxl = -\int_{0.1m}^{1.1m} \frac{\mu_0 I}{2x} v dx = -\frac{\mu_0 I v}{2} \ln 11 = -3.84 \times 10^{-5} \text{ V}$$

式中负号表示电动势方向由 B 指向 A，故点 A 电势较高。

解2 设顺时针方向为回路 ABCD 的正向，根据分析，在距直导线 x 处，取宽为 dx、长为 y 的面元 dS，则穿过面元的磁通量为

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 I}{2x} y dx$$

穿过回路的磁通量为

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_{0.1m}^{1.1m} \frac{\mu_0 I}{2x} y dx = -\frac{\mu_0 I y}{2} \ln 11$$

回路的电动势为

$$E = -\frac{d}{dt} = -\frac{\mu_0 I}{2x} \ln 11 \frac{dy}{dt} = -\frac{\mu_0 I y}{2} = -3.84 \times 10^{-5} \text{ V}$$

由于静止的形导轨上电动势为零，所以

$$E_{AB} = E = -3.84 \times 10^{-5} \text{ V}$$

式中负号说明回路电动势方向为逆时针，对 AB 导体来说，电动势方向应由 B 指向 A，故点 A 电势较高。

8-14 分析 本题亦可用两种方法求解。其中应注意下列两点：1. 当闭合导体线框在磁场中运动时，线框中的总电动势就等于框上各段导体中的动生电动势的代数和。如图 (a)

所示，导体 eh 段和 fg 段上的电动势为零 [此两段导体上处处满足 $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = 0$]，因而线框中的总电动势为

$$E = \int_{ef} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} + \int_{gh} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{ef} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} - \int_{hg} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = E_{ef} - E_{hg}$$
 其等效电路如图 (b) 所示。

2. 用公式 $E = -\frac{d}{dt}$ 求解，式中 Φ 是线框运动至任意位置处时，穿过线框的磁通量。为此设时刻 t 时，线框左边距导线的距离为 x，如图 (c) 所示，显然 x 是时间 t 的函数，且有 $\frac{dx}{dt} = v$ 。在求得线框在任意位置处的电动势 E(x) 后，再令 $x = d$ ，即可得线框在题目所给位置处的电动势。

解1 根据分析，线框中的电动势为

$$\begin{aligned} E &= E_{ef} - E_{hg} \\ &= \int_{ef} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} - \int_{hg} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \\ &= \frac{\mu_0 I v}{2d} \int_0^{l_2} dl - \frac{\mu_0 I v}{2(d+l_1)} \int_0^{l_2} dl \\ &= \frac{\mu_0 I v l_1 l_2}{2(d+l_1)} \end{aligned}$$

由 $E_{ef} > E_{hg}$ 可知，线框中的电动势方向为 efgh。

解2 设顺时针方向为线框回路的正向。根据分析，在任意位置处，穿过线框的磁通量为

$$\Phi = \int_0^{l_1} \frac{\mu_0 I l_2}{2(x+x_0)} dx = \frac{\mu_0 I l_2}{2(x+x_0)} \ln \frac{x+l_1}{x}$$

相应电动势为

$$E = -\frac{d}{dt} = \frac{\mu_0 I_2 l_1}{2(d + l_1)}$$

令 $x = d$ ，得线框在图示位置处的电动势为

$$E = \frac{\mu_0 I_2 l_1}{2(d + l_1)}$$

由 $E > 0$ 可知，线框中电动势方向为顺时针方向。

8-15 分析 设线框刚进入磁场 (t_1 时刻) 和全部进入磁场 (t_2 时刻) 的瞬间，其速度分别为 v_{10} 和 v_{20} 。在情况 (1) 和 (3) 中，线框中无感应电流，线框仅在重力作用下作落体运动，其速度与时间的关系分别为 $v = gt$ ($t < t_1$) 和 $v = v_{20} + g(t - t_2)$ ($t > t_2$)。而在 $t_1 < t < t_2$ 这段时间内，线框运动较为复杂，由于穿过线框回路的磁通量变化，使得回路中有感应电流存在，从而使线框除受重力外，还受到一个向上的安培力 F_A ，其大小与速度有关，即 $F_A = F_A(v)$ 。根据牛顿运动定律，此时线框的运动微分方程为 $mg - F_A(v) = m \frac{dv}{dt}$ ，解此微分方程可得 $t_1 < t < t_2$ 时间内线框的速度与时间的关系式。

解 (1) 根据分析，在 $t \leq t_1$ 时间内，线框为自由落体运动，于是

$$v_1 = gt \quad (t \leq t_1) \quad \text{其中 } t = t_1 \text{ 时, } v_1 = v_{10} = \sqrt{2gh}$$

(2) 线框进入磁场后，受到向上的安培力为

$$F_A = IIB = \frac{B^2 l^2}{R} v$$

根据牛顿运动定律，可得线框运动的微分方程

$$mg - \frac{B^2 l^2}{R} v = m \frac{dv}{dt}$$

令 $K = \frac{B^2 l^2}{mR}$ ，整理上式并分离变量积分，有

$$\int_{v_{10}}^v \frac{dv}{g - Kv} = \int_{t_1}^t dt$$

积分后将 $v_{10} = \sqrt{2gh}$ 代入，可得

$$v_2 = \frac{1}{K} [g - (g - K\sqrt{2gh}) e^{-K(t-t_1)}]$$

(3) 线框全部进入磁场后 ($t > t_2$), 作初速为 v_{20} 的落体运动, 故有

$$v_3 = v_{20} + g(t - t_2) = \frac{1}{K} [g - (g - K\sqrt{2gh})e^{-K(t-t_1)}] + g(t - t_2)$$

8-16 解 圆形回路导线长为 $2\pi R$, 导线截面积为 πr^2 , 其电阻 R 为

$$R' = \frac{l}{S} = \frac{2R}{r^2}$$

在均匀磁场中, 穿过该回路的磁通量为 $\Phi = BS$, 由法拉第电磁感应定律可得回路中的感应电流为

$$I = \frac{E}{R'} = \frac{1}{R'} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{R'} R^2 \frac{dB}{dt} = \frac{Rr^2}{2} \frac{dB}{dt}$$

而 $m = \mu_0 \frac{1}{2} R r^2$, 即 $Rr^2 = \frac{m}{\mu_0}$, 代入上式可得

$$I = \frac{m}{4} \frac{dB}{dt}$$

8-17 分析 变化磁场可以在空间激发感生电场, 感生电场的空间分布与场源——变

化的磁场 (包括磁场的空间分布以及磁场的变化率 $\frac{dB}{dt}$ 等) 密切相关, 即

$$\oint_S \mathbf{E}_k d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}.$$

在一般情况下, 求解感生电场的分布是困难的. 但对于本题这种特

殊情况, 则可以利用场的对称性进行求解. 可以设想, 无限长直螺线管内磁场具有柱对称性, 其横截面的磁场分布如图所示. 由其激发的感生电场也一定有相应的对称性, 考虑到感生电场的电场线为闭合曲线, 因而本题中感生电场的电场线一定是一系列以螺线管中心轴为圆心的同心圆. 同一圆周上各点的电场强度 E_k 的大小相等, 方向沿圆周的切线方向. 图中虚线表示 $r < R$ 和 $r > R$ 两个区域的电场线. 电场线绕向取决于磁场的变化情况, 由楞次定律可知, 当 $\frac{dB}{dt} < 0$ 时, 电场线绕向与 \mathbf{B} 方向满足右螺旋关系; 当 $\frac{dB}{dt} > 0$ 时, 电场线绕向与前者相反.

解 如图所示, 分别在 $r < R$ 和 $r > R$ 的两个区域内任取一电场线为闭合回路 l (半径为 r 的圆), 依照右手定则, 不妨设顺时针方向为回路正向.

$$(1) \quad r < R, \quad E = \oint_l \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = E_k \cdot 2\pi r = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = - \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

$$E_k = - \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

$$r > R, \quad E = \oint_l \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = E_k \cdot 2\pi r = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = - \pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

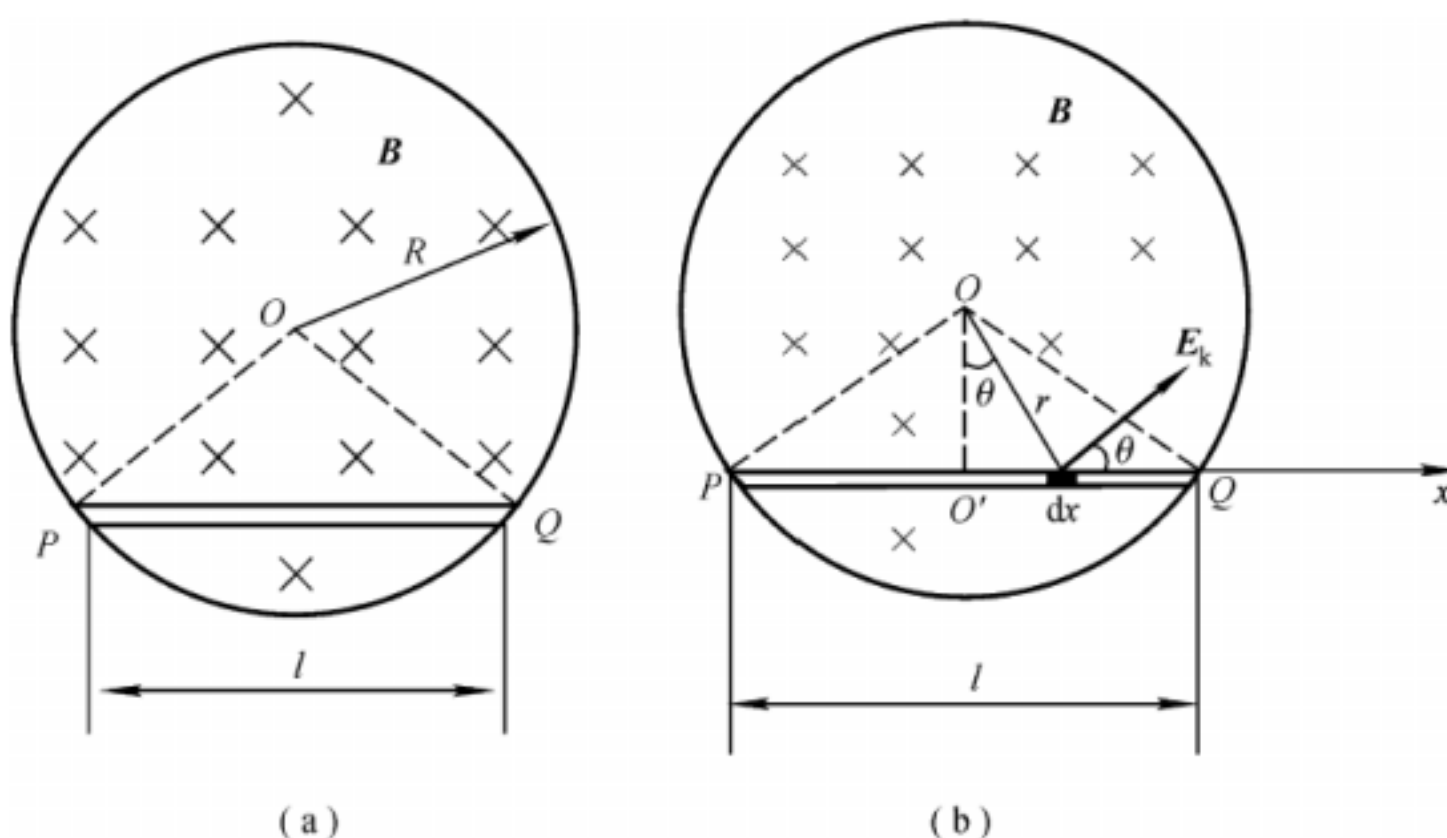
$$E_k = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$$

由于 $\frac{dB}{dt} > 0$ ，故电场线的绕向为逆时针。

(2) 由于 $r > R$ ，所求点在螺线管外，因此

$$E_k = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$$

将 r 、 R 、 $\frac{dB}{dt}$ 的数值代入，可得 $E_k = -4.0 \times 10^{-5} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ ，式中负号表示 E_k 的方向是逆时针的。



题 8-18 图

8-18 分析 变化磁场在其周围激发感生电场，把导体置于感生电场中，导体中的自由电子就会在电场力的作用下移动，在棒内两端形成正负电荷的积累，从而产生感生电动势。由于本题的感生电场分布与上题所述情况完全相同，故可利用上题结果，由 $E = \int \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l}$ 计算棒上感生电动势。此外，还可连接 OR、OQ 设想 PQOP 构成一个闭合导体回路，用法拉第电磁感应定律求解，由于 OR、OQ 沿半径方向，与通过该处的感生电场强度 E_k 处处垂直，故 $\mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = 0$ ，OR、OQ 两段均无电动势，这样，由法拉第电磁感应定律求出的闭合回路的总电动势，就是导体棒 PQ 上的电动势。

证 1 由法拉第电磁感应定律，有

$$E_{PQ} = E = \left| -\frac{d}{dt} \right| S \frac{dB}{dt} = \frac{dB}{dt} \frac{l}{2} \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} \right)^2}$$

证2 由题8 - 17可知, 在 $r < R$ 区域, 感生电场强度的大小 $E_k = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$

设PQ上线元 dx 处, E_k 的方向如图(b)所示, 则金属杆 PQ 上的电动势为

$$\begin{aligned} E_{PQ} &= \int E_k \cos \theta dx = \int_0^l \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \frac{\sqrt{R^2 - (l/2)^2}}{r} dx \\ &= \frac{dB}{dt} \frac{l}{2} \sqrt{R^2 - (l/2)^2} \end{aligned}$$

讨论 假如金属棒 PQ 有一段在圆外, 则圆外一段导体上有无电动势? 该如何求解?

8-19 分析 如同电容一样, 自感和互感都是与回路系统自身性质(如形状、匝数、介质等)有关的量. 求自感 L 的方法有两种: 1. 设有电流 I 通过线圈, 计算磁场穿过自身回路的总磁通量, 再用公式 $L = \frac{\Phi}{I}$ 计算 L . 2. 让回路中通以变化率已知的电流, 测出回路中的

感应电动势 E_L , 由公式 $L = \left| \frac{E_L}{dI/dt} \right|$ 计算 L . 式中 E_L 和 $\frac{dI}{dt}$ 都较容易通过实验测定, 所以此

方法一般适合于工程中. 此外, 还可通过计算能量的方法求解.

解 用方法1求解, 设有电流 I 通过线圈, 线圈回路呈长方形, 如图(b)所示, 由安培环路定理可求得在 $R_1 < r < R_2$ 范围内的磁场分布为

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

由于线圈由 N 匝相同的回路构成, 所以穿过自身回路的磁链为

$$\Phi = N \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = N \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} h dx = \frac{\mu_0 N^2 h I}{2} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

则

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

若管中充满均匀同种磁介质, 其相对磁导率为 μ_r , 则自感将增大 μ_r 倍.

8-20 分析 本题求解时应注意磁介质的存在对磁场的影响. 在无介质时, 通电螺线管内的磁场是均匀的, 磁感强度为 B_0 , 由于磁介质的存在, 在不同磁介质中磁感强度分别为 $\mu_1 B_0$ 和 $\mu_2 B_0$. 通过线圈横截面的总磁通量是截面积分别为 S_1 和 S_2 的两部分磁通量之和. 由自感的定义可解得结果.

解 设有电流 I 通过螺线管, 则管中两介质中磁感强度分别为

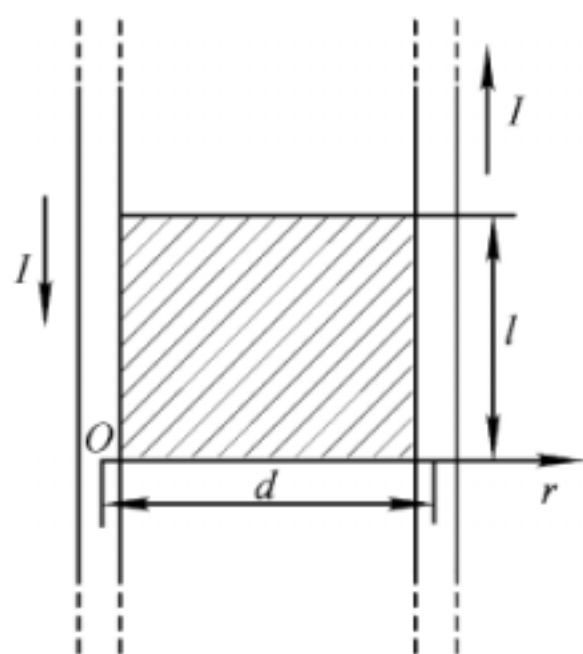
$$B_1 = \mu_1 n I = \mu_1 \frac{N}{L} I, \quad B_2 = \mu_2 n I = \mu_2 \frac{N}{L} I$$

通过 N 匝回路的磁链为

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = NB_1S_1 + NB_2S_2$$

则自感

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N^2}{l} (\mu_1 S_1 + \mu_2 S_2)$$



题 8-21 图

8-21 分析 两平行长直导线可以看成无限长但宽为 d 的矩形回路的一部分。设在矩形回路中通有逆时针方向电流 I ，然后计算图中阴影部分（宽为 d 、长为 l ）的磁通量。该区域内磁场可以看成两无限长直载流导线分别在该区域产生的磁场的叠加。

解 在如图所示的坐标中，当两导线中通有图示的电流 I 时，两平行导线间的磁感强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r} + \frac{\mu_0 I}{2(d-r)}$$

穿过图中阴影部分的磁通量为

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_a^{d-a} B l dr = \frac{\mu_0 I l}{a} \ln \frac{d-a}{a}$$

则长为 l 的一对导线的自感为

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{a} \ln \frac{d-a}{a}$$

如导线内部磁通量不能忽略，则一对导线的自感为 $L = L_1 + 2L_2$ ， L_1 称为外自感，即

本题已求出的 L ， L_2 称为一根导线的内自感。长为 l 的导线的内自感 $L_2 = \frac{\mu_0 l}{8}$ ，有兴趣的读

者可自行求解。

8-22 分析 无论线圈 AB 和 A'B' 作哪种方式连接，均可看成一个大线圈回路的两个部分，故仍可从自感系数的定义出发求解。求解过程中可利用磁通量叠加的方法，如每一组载流线圈单独存在时穿过自身回路的磁通量为 Φ_1 ，则穿过两线圈回路的磁通量为 $2\Phi_1$ ；而当两组线圈按 (1) 或 (2) 方式连接后，则穿过大线圈回路的总磁通量为 $2\Phi_1 \pm 2\Phi_1$ ，“ \pm ”取决于电流在两组线圈中的流向是相同或是相反。

解 (1) 当 A 和 A' 连接时，AB 和 A'B' 线圈中电流流向相反，通过回路的磁通量亦相反，故总通量为

$$\Phi_2 = 2\Phi_1 - 2\Phi_1 = 0,$$

故 $L_1 = 0$ 。

(2) 当 A 和 B 连接时，AB 和 A'B' 线圈中电流流向相同，通过回路的磁通量亦相同，故总通量为

$$\Phi_2 = 2\Phi_1 + 2\Phi_1 = 4\Phi_1,$$

$$\text{故 } L_2 = \frac{\Phi_2}{I} = \frac{4\Phi_1}{I} = 4L_1.$$

本题结果在工程实际中有实用意义，如按题 (1) 方式连接，则可构造出一个无自感的线圈。

8-23 分析 设回路 1 中通有电流 I_1 ，穿过回路 2 的磁通量为 Φ_{21} ，则互感 $M = M_{21} =$

$$\Phi_{21}/I_1；也可设回路 2 通有电流 I_2 ，穿过回路 1 的磁通量为 Φ_{12} ，则 $M = M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2}$ 。$$

虽然两种途径所得结果相同，但在很多情况下，不同途径所涉及的计算难易程度会有很大的不同。以本题为例，如设线圈 B 中有电流 I 通过，则在线圈 A 中心处的磁感强度很易求得，由于线圈 A 很小，其所在处的磁场可视为均匀的，因而穿过线圈 A 的磁通量 $\Phi_A = B_0 S_A$ 。反之，如设线圈 A 通有电流 I ，其周围的磁场分布是变化的，且难以计算，因而穿过线圈 B 的磁通量也就很难求得，由此可见，计算互感一定要善于选择方便的途径。

解 (1) 设线圈 B 有电流 I 通过，它在圆心处产生的磁感强度 $B_0 = N_B \frac{\mu_0 I}{2R}$ 穿过小线圈 A 的磁链近似为

$$\Phi_A = N_A B_0 S_A = N_A N_B \frac{\mu_0 I}{2R} S_A \text{ 则两线圈的互感为}$$

$$M = \frac{\Phi_A}{I} = N_A N_B \frac{\mu S_A}{2R} = 6.28 \times 10^{-6} \text{ H}$$

$$(2) \quad E_A = -M \frac{dI}{dt} = 3.14 \times 10^{-4} \text{ V}$$

互感电动势的方向和线圈 B 中的电流方向相同。

8-24 解 设线圈 A 中有电流 I 通过, 它在线圈 C 所包围的平面内各点产生的磁感强度近似为

$$B = \frac{\mu I R^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}} \quad \text{穿过线圈 C 的磁通为} \quad \Phi_C = BS_C = \frac{\mu I R^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}} r^2$$

则两线圈的互感为

$$M = \frac{\Phi_C}{I} = \frac{\mu r^2 R^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}}$$

若线圈 C 的匝数为 N 匝, 则互感为上述值的 N 倍。

8-25 分析 本题与题 8-8 相似, 均是利用冲击电流计测量电磁感应现象中通过回路的电荷的方法来计算磁场的磁感强度。线圈 C 的磁通变化是与环形螺线管中的电流变化相联系的。

解 当螺绕环中通以电流 I_1 时, 在环内产生的磁感强度 $B = \mu \mu_0 n_1 I_1$

则通过线圈 C 的磁链为 $\Phi_C = N_2 BS = N_2 \mu \mu_0 n_1 I_1 S$

设断开电源过程中, 通过 C 的感应电荷为 q_C , 则有

$$q_C = -\frac{1}{R} \Delta \Phi_C = -\frac{1}{R} (0 - \Phi_C) = \frac{N_2 \mu \mu_0 n_1 I_1 S}{R} \quad \text{由此得}$$

$$B = \mu \mu_0 n_1 I_1 = \frac{R q_C}{N_2 S} = 0.10 \text{ T} \quad \text{相对磁导率} \quad \mu = \frac{R q_C}{N_2 S \mu_0 n_1 I_1} = 199$$

8-26 分析 单一载流回路所具有的磁能, 通常可用两种方法计算: (1) 如回路自感为 L (已知或很容易求得), 则该回路通有电流 I 时所储存的磁能 $W_m = \frac{1}{2} LI^2$, 通常称为自感磁能。(2) 由于载流回路可在空间激发磁场, 磁能实际是储存于磁场之中, 因而载流回路所具有的能量又可看作磁场能量, 即 $W_m = \int_V w_m dV$, 式中 w_m 为磁场能量密度, 积分遍及磁场存在的空间。由于 $w_m = \frac{B^2}{2\mu}$, 因而采用这种方法时应首先求载流回路在空间产生的磁感强度 B 的分布。上述两种方法还为我们提供了计算自感的另一种途径, 即运用

$$\frac{1}{2} LI^2 = \int_V w_m dV \text{ 求解 } L.$$

解 (1) 密绕长直螺线管在忽略端部效应时, 其自感 $L = \frac{N^2 S}{l}$, 电流稳定后, 线圈

中电流 $I = \frac{E}{R}$, 则线圈中所储存的磁能为 $W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{\mu_0 N^2 S E^2}{2 l R^2} = 3.28 \times 10^{-5} \text{ J}$

在忽略端部效应时, 该电流回路所产生的磁场可近似认为仅存在于螺线管

中, 并为均匀磁场, 故磁能密度 w_m 处处相等, $w_m = \frac{W_m}{Sl} = 4.17 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$

(2) 自感为 L , 电阻为 R 的线圈接到电动势为 E 的电源上, 其电流变化规律

$$I = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right), \text{ 当电流稳定后, 其最大值 } I_m = \frac{E}{R}$$

按题意 $\frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} LI_m^2 \right]$, 则 $I = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{E}{R}$, 将其代入 $I = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right)$ 中, 得

$$t = -\frac{L}{R} \ln \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = \frac{L}{R} \ln (2 + \sqrt{2}) = 1.56 \times 10^{-4} \text{ s}$$

8-27 分析 本题中电流激发的磁场不但存在于导体内部当 $r < R$ 时, $B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2 R^2}$, 而且

存在于导体外当 $r > R$ 时, $B_2 = \frac{\mu_0 I}{2 r}$. 由于本题仅要求单位长度导体内部所储存的磁能, 故

用公式 $W_m = \int_V w_m dV$ 计算为宜, 因本题中 B 呈柱对称性, 取单位长度, 半径为 r , 厚为 dr

的薄柱壳 (壳层内 w_m 处处相同) 为体元 dV , 则该体元内储存的能量

$$dW_m = \left[\frac{1}{2 \mu_0} \left[\frac{\mu_0 I r}{2 R^2} \right]^2 \right] 2 \pi r dr, \text{ 积分即可求得磁能.}$$

证 根据以上分析单位长度导线内贮存的磁能为

$$W_m = \int dW_m = \int_0^R \left[\frac{\mu_0 I^2}{8 R^4} r^2 \right] 2 \pi r dr = \frac{\mu_0 I^2}{16}$$

上述结果仅为单位长度载流导线内所具有的磁场能量, 它是总磁场能量的一部分, 总能量还应包括导线外磁场所储存的磁能.

8-28 解 由磁感强度与磁场能量间的关系可得

$$V = \frac{W_m}{B^2 / 2 \mu_0} = 9.0 \text{ m}^3 \text{ 所需线圈的自感系数为 } L = \frac{2 W_m}{I^2} = 29 \text{ H}$$

8-29 解 由磁场能量密度 $w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = 3.98 \times 10^{21} \text{ (J/m}^3\text{)}$

8-30 解 $w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$, $w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$, 按题意, 当 $w_e = w_m$ 时, 有 $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}$, 则

$$E = \frac{B}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 1.51 \times 10^8 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

8-31 分析 尽管变化电场与传导电流二者形成的机理不同, 但都能在空间激发磁场. 从这个意义来说, 变化电场可视为一种“广义电流”, 即位移电流. 在本题中, 导线内存在着传导电流 I_c , 而在平行板电容器间存在着位移电流 I_d , 它们使电路中的电流连续, 即 $I_d = I_c$.

解 忽略电容器的边缘效应, 电容器内电场的空间分布是均匀的, 因此板间位移电流

$$I_d = \int_S \mathbf{j}_d \cdot d\mathbf{S} = j_d R^2, \text{ 由此得位移电流密度的大小}$$

$$j_d = \frac{I_d}{R^2} = \frac{I_c}{R^2} = 15.9 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$$