2016 考研数学（一）真题

（线性代数）

一、选择题.

（5）设$\mathbf{A},\mathbf{B}$是可逆矩阵，且$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$相似，则下列结论错误的是　　（　　）

（A）$\mathbf{A}^T$与$\mathbf{B}^T$相似　　（B）$\mathbf{A}^{-1}$与$\mathbf{B}^{-1}$相似

（C）$\mathbf{A}+\mathbf{A}^T$与$\mathbf{B}+\mathbf{B}^T$相似

（D）$\mathbf{A}+\mathbf{A}^{-1}$与$\mathbf{B}+\mathbf{B}^{-1}$相似

（6）设二次型

$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，

则$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2$在空间直角坐标下表示的二次曲面为　　（　　）

（A）单叶双曲面　　（B）双叶双曲面

（C）椭球面　　（C）柱面

二、填空题.

（13）行列式$\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=$__________.

三、解答题.

（20）（本题满分 11 分）

设矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & a & 1\\ -1 & 1 & a\end{pmatrix},\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & a\\ -a-1 & -2\end{pmatrix}$，当$a$为何值时，方程$\mathbf{AX}=\mathbf{B}$无解、有唯一解、有无穷多解？在有解时，求解此方程.

（21）（本题满分 11 分）

已知矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

（I）求$\mathbf{A}^{99}$

（II）设 3 阶矩阵$\mathbf{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$满足$\mathbf{B}^2=\mathbf{BA}$，记$\mathbf{B}^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$将$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$分别表示为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的线性组合.

2016 考研数学（一）真题解析

（线性代数）

一、选择题：

（5）【答案】（D）

【解析】本题考查矩阵的相似性，由于是选错误答案，因此先排除正确答案.

$\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似，故存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{B}$. 于是

$$\mathbf{B}^T=\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}\right)^T=\mathbf{P}^T\mathbf{A}^T(\mathbf{P}^{-1})^T=\mathbf{P}^T\mathbf{A}^T(\mathbf{P}^T)^{-1}$$

$$\mathbf{B}^{-1}=\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}\right)^{-1}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{P}^{-1})^{-1}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}$$

$$\mathbf{B}+\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}+\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}=\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^{-1})\mathbf{P}$$

故（A），（B），（D）都正确.

对于（C）来说， 一般地 $P^{-1}\neq P^T$，因此不能直接合起来用分配律得出. 具体结果可以用一个实例加以解释.

$$\mathbf{A}^T=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix},\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix},\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\begin{pmatrix}1&-2\\1&3\end{pmatrix}=\mathbf{B},\mathbf{B}^T=\begin{pmatrix}1&1\\-2&3\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}+\mathbf{B}^T=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&6\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}=\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T)\mathbf{U},\forall\mathbf{U}$$

可以发现，答案（C）错误.

（6）【答案】（B）

【解析】本题考查二次型化为规范形，同时涉及到解析几何中的二次曲面.

此二次型的矩阵为$\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$， 其特征值分别为 $5,-1,-1$，于是其规范形为 $z_1{}^2-z_2{}^2-z_3{}^2$. 从而方程 $z_1{}^2-z_2{}^2-z_3{}^2=2$ 的标准方程为

$$\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{z_3}{\sqrt{2}}\right)^2=1$$

由空间解析几何二次曲面的知识，可知上述方程对应的曲面为双叶双曲面.

二、填空题：

（13）【答案】 $\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$

【解析】本题考查行列式计算的方法.

方法（一）按行或列展开的方法，此题连续按列展开：

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$=\lambda\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}+4(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix}$$

$$=\lambda\left[\lambda\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}+3(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix}\right]+4$$

$$=\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4.$$

方法（二）根据行列式性质进行反复的倍加运算：

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & \lambda^2+\lambda+2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & \lambda^3+\lambda^2+2\lambda+3 & \lambda^2+\lambda+2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4 & \lambda^3+\lambda^2+2\lambda+3 & \lambda^2+\lambda+2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4.$$

三、解答题：

（20）【解析】本题考查利用系数矩阵和增广矩阵的秩判定线性方程组的解. 注意到所给的矩阵方程相当于两个线性方程组.

直接模仿线性方程组增广矩阵的知识进行讨论.

$$(\mathbf{A}\ \ \mathbf{B})=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 2 & 2\\ 2 & a & 1 & 1 & a\\ -1 & 1 & a & -1-a & -2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & a+2 & 3 & -3 & a-4\\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0\end{pmatrix}$$

（I）当$|\mathbf{A}|\neq 0$，即$a\neq 1,a\neq -2$时，方程有唯一解. 此时，继续对增广矩阵做行初等变换可得

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & a+2 & 3 & -3 & a-4\\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 3a/(a+2)\\ 0 & 1 & 0 & 0 & (a-4)/(a+2)\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

故唯一解$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1 & 3a/(a+2)\\ 0 & (a-4)/(a+2)\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

（II）当$|\mathbf{A}|=0$时，即$a=1$或$a=-2$，分别讨论

若$a=1$，则$r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A}\ \ \mathbf{B})=2<3$，有无穷多组解，此时

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & 3 & 3 & -3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

可知解$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ k_1-1 & k_2-1\\ -k_1 & -k_2\end{pmatrix}$（$k_1$和$k_2$为任意常数）.

若$a=-2$，则$r(\mathbf{A})=2<r(\mathbf{A}\ \ \mathbf{B})=3$，无解.

（21）【解析】本题考查利用特征值进行矩阵对角化的方法，以及在计算矩阵幂中的应用.

（I）需要将矩阵**A**对角化，由于

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -1\\ -2 & \lambda+3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2),$$

从而有三个不同的特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$，对应的特征向量分别为

$$\eta_1=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

令 $P=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{pmatrix},\eta_1=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$，于是

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 2 & -1 & -2\\ -1 & 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}0 & & \\ & -1 & \\ & & -2\end{pmatrix},$$

从而

$$A^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}=\begin{pmatrix}-2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98}\\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

（II）由 $B^2=BA$ 可知

$$B^{100}=B^{98}BA=B^{97}B^2A=B^{97}BAA=\cdots=BA^{99}.$$

因此

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98}\\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

所以

$$\beta_1=(-2+2^{99})\alpha_1+\left(-2+2^{100}\right)\alpha_2,$$

$$\beta_2=(1-2^{99})\alpha_1+\left(1-2^{100}\right)\alpha_2,$$

$$\beta_3=(2-2^{98})\alpha_1+\left(2-2^{99}\right)\alpha_2.$$