2010/12/27

线性代数历年考研真题及详解

2011/01/21 版

填空题难度不大，计算量也不会太大，主要考查考生对基本概念、定义、公式、基本定理、基本性质和基本方法的识记、理解、掌握和简单运用.同时考查快捷准确运算能力和简单推理能力.鉴于此考生在复习时要注重基础，对基本运算要正确熟练.要提高运算能力，不能华而不实，浮燥.

选择题主要用于考查考生对数学基本概念、基本方法的掌握程度以及比较、判别能力.还可以用于鉴别考生易于出现的方法和概念性错误.只有平时重视对概念的复习，多从不同的角度不同的侧面进行思考，接口切入点多了做题才能顺手.

解答题主要考查考生对数学的基本原理、方法、公式掌握和熟练运用的程度，证明题主要考查考生对数学主要定理、原理的理解和掌握程度.概念性强，有一定的综合性与灵活性因此复习时要注意对概念的理解，对方法的把握，注意知识的内在联系，要确保基本计算准确熟练.

与其它学科相比，数学成绩的方差历来较大，学数学要靠积累、消化、循序渐进，愿有志者抓紧抓细抓早.

矩阵的运算

[2011,1,2,3] 设 A 为三阶矩阵，将 A 的第二列加到第一列得矩阵 B，再交换 B 的第二行与第三行得单位矩阵.记 $P_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$,则 $A=($ $)$.

（A）P_1P_2 （B）$P_1^{-1}P_2$

（C）P_2P_1 （D）$P_2P_1^{-1}$

【答案】 D

【解析】$\because AP_1=B, P_2B=E \quad \therefore P_2AP_1=E \qquad \therefore A=P_2^{-1}P_1^{-1}=P_2P_1^{-1}$.

[2009,2,3] 设 A,P 均为 3 阶矩阵，P^T 为 P 的转置矩阵，且 $P^TAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，若

$P=(a_1,a_2,a_3), Q=(a_1+a_2,a_2,a_3)$，则 Q^TAQ 为

$(A).\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　$(B).\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

$(C).\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　$(D).\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

【答案】 A

【解析】$Q=(a_1+a_2,a_2,a_3)=(a_1,a_2,a_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=(a_1,a_2,a_3)E_{12}(1)$，即：

$$Q=PE_{12}(1)$$

$$Q^TAQ=[PE_{12}(1)]^TA[PE_{12}(1)]=E_{12}^T(1)[P^TAP]E_{12}(1)$$

$$=E_{21}(1)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}E_{12}(1)$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

[2006,1,2,3,4] 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B，再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 C，记 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 (　　).

（A）$C=P^{-1}AP$.　　（B）$C=PAP^{-1}$.

（C）$C=P^{\mathrm{T}}AP$.　　（D）$C=PAP^{\mathrm{T}}$.

【分析】 利用矩阵的初等变换与初等矩阵的关系以及初等矩阵的性质可得.

【详解】 由题设可得

$$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A,\qquad C=B\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

而 $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则有 $C=PAP^{-1}$.故应选（B）.

[2006,4] 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，$E$ 为 2 阶单位矩阵，矩阵 B 满足 $BA=B+2E$，则 $B=$____ .

【分析】 将矩阵方程改写为 $AX=B或XA=B或AXB=C$ 的形式，其中 X 是待求矩阵，再通过左乘或右乘可逆阵，解出待求矩阵即可.

【详解】 由题设，有 $B(A-E)=2E$

于是有 $B=2(A-E)^{-1}=2\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=2\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

[2005,1,2] 设 A 为 n（$n\ge 2$）阶可逆矩阵，交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B, A^*,B^*

分别为 A,B 的伴随矩阵，则（ ）.

(A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 B^*. (B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 B^*.

(C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$. (D) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$.

【分析】 本题考查初等变换的概念与初等矩阵的性质，只需利用初等变换与初等矩阵的关系以及伴随矩阵的性质进行分析即可.

【详解】由题设，存在初等矩阵 E_{12}（交换 n 阶单位矩阵的第 1 行与第 2 行所得），使得 $E_{12}A=B$，

于是 $B^*=(E_{12}A)^*=A^*E^*_{12}=A^*|E_{12}|\cdot E_{12}^{-1}=-A^*E_{12}$，即

$A^*E_{12}=-B^*$,可见应选(C).

[2005,3] 设矩阵 A=$(a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $A^*=A^T$，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵，A^T 为 A 的转置矩阵.

若 a_{11},a_{12},a_{13} 为三个相等的正数，则 a_{11} 为（ ）.

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. (B) 3. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\sqrt{3}$.

【分析】 题设与 A 的伴随矩阵有关，一般联想到用行列展开定理和相应公式：

$$AA^*=A^*A=|A|E..$$

【详解】 由 $A^*=A^T$ 及 $AA^*=A^*A=|A|E$，有 $a_{ij}=A_{ij},i,j=1,2,3$，其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，

且 $AA^T=|A|E\Rightarrow|A|^2=|A|^3\Rightarrow|A|=0$ 或 $|A|=1$

而 $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 3a_{11}^2 \neq 0$，于是 $|A| = 1$，且 $a_{11} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 故正确选项为(A).

[2005,4] 设 A,B,C 均为 n 阶矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，若 B=E+AB,C=A+CA，则 B-C 为 ( ).

(A) E.　（B）-E.　（C）A.　(D) -A

【分析】 利用矩阵运算进行分析即可.

【详解】 由 B=E+AB,C=A+CA，知　(E-A)B=E,　C(E-A)=A,

可见，E-A 与 B 互为逆矩阵，于是有　B(E-A)=E.

从而有　(B-C)(E-A)=E-A, 而 E-A 可逆，故 B-C=E.

应选(A).

[2004,1,2] 设 A 是 3 阶方阵，将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B,再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C,

则满足 AQ=C 的可逆矩阵 Q 为 ( ).

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.　(B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.　(C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.　(D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

【分析】 本题考查初等矩阵的的概念与性质，对 A 作两次初等列变换，相当于右乘两个相应的初等矩阵，而 Q 即为此两个初等矩阵的乘积.

【详解】由题设，有

$$A\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B,\quad B\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C,$$

于是，
$$A\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C.$$

可见，应选(D).

【评注】 涉及到初等变换的问题，应掌握初等矩阵的定义、初等矩阵的性质以及与初等变换的关系.

[2004,3,4] 设 n 阶矩阵 A 与 B 等价, 则必有 ( ).

(A) 当 $|A| = a(a \neq 0)$ 时, $|B| = a$.　(B) 当 $|A| = a(a \neq 0)$ 时, $|B| = -a$.

(C) 当 $|A| \neq 0$ 时, $|B| = 0$.　(D) 当 $|A| = 0$ 时, $|B| = 0$.

【分析】 利用矩阵 A 与 B 等价的充要条件: $r(A) = r(B)$ 立即可得.

【详解】因为当$|A|=0$时，$r(A)<n$，又 A与B等价，故$r(B)<n$， 即$|B|=0$，故选(D).

【评注】本题是对矩阵等价、行列式的考查，属基本题型.

[2004,4] 设$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，$B=P^{-1}AP$，其中$P$为三阶可逆矩阵， 则$B^{2004}-2A^2=$____.

【分析】 将$\boldsymbol{B}$的幂次转化为$\boldsymbol{A}$的幂次，并注意到$\boldsymbol{A}^2$为对角矩阵即得答案.

【详解】因为

$$A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad B^{2004}=P^{-1}A^{2004}P.$$

故

$$B^{2004}=P^{-1}(A^2)^{1002}P=P^{-1}EP=E,$$

$$B^{2004}-2A^2=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

【评注】本题是对矩阵高次幂运算的考查.

[2003,3] 设n维向量$\alpha=(a,0,\cdots,0,a)^T,a<0$；$E$为$n$阶单位矩阵，矩阵

$$A=E-\alpha\alpha^T,\quad B=E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T,$$

其中A的逆矩阵为B，则$a=$____-1____ .

【分析】 这里$\alpha\alpha^T$为n阶矩阵，而$\alpha^T\alpha=2a^2$为数，直接通过$AB=E$进行计算并注意利用乘法的结合律即可.

【详解】 由题设，有

$$\begin{aligned}AB&=(E-\alpha\alpha^T)(E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T)\\
&=E-\alpha\alpha^T+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T-\frac{1}{a}\alpha\alpha^T\cdot\alpha\alpha^T\\
&=E-\alpha\alpha^T+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T-\frac{1}{a}\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T\\
&=E-\alpha\alpha^T+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T-2a\alpha\alpha^T\\
&=E+(-1-2a+\frac{1}{a})\alpha\alpha^T=E,\end{aligned}$$

于是有 $-1-2a+\frac{1}{a}=0$，即 $2a^2+a-1=0$，解得 $a=\frac{1}{2}, a=-1$. 由于 A<0 ,故 a = -1.

[2003,4] 设 A,B 均为三阶矩阵，E 是三阶单位矩阵. 已知 AB=2A+B,B=$\begin{bmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{bmatrix}$,则

$(A-E)^{-1}=$ ______ .

【分析】 应先化简，从 AB=2A+B 中确定 $(A-E)^{-1}$.

【详解】 由 AB=2A+B, 知

AB-B=2A-2E+2E,

即有 $(A-E)B-2(A-E)=2E$，

$(A-E)(B-2E)=2E$， $(A-E)\cdot\frac{1}{2}(B-2E)=E$，

可见 $(A-E)^{-1}=\frac{1}{2}(B-2E)=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$.

【评注】 本题实质上是已知矩阵等式求逆的问题，应先分解出因式 A-E，写成逆矩阵的定义形式，从而确定(A-E) 的逆矩阵.

[2003,4] 设 n 维向量 $\alpha=(a,0,\cdots,0,a)^T, a<0$；E 为 n 阶单位矩阵，矩阵

$$A=E-\alpha\alpha^T, \quad B=E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T,$$

其中 A 的逆矩阵为 B，则 $a=$ ________ .

【分析】 这里 $\alpha\alpha^T$ 为 n 阶矩阵，而 $\alpha^T\alpha=2a^2$ 为数，直接通过 $AB=E$ 进行计算并注意利用乘法的结合律即可.

【详解】 由题设，有

$$\begin{aligned}AB&=(E-\alpha\alpha^T)(E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T)\\&=E-\alpha\alpha^T+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T-\frac{1}{a}\alpha\alpha^T\cdot\alpha\alpha^T\\&=E-\alpha\alpha^T+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T-\frac{1}{a}\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T\\&=E-\alpha\alpha^T+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T-2a\alpha\alpha^T\\&=E+(-1-2a+\frac{1}{a})\alpha\alpha^T=E,\end{aligned}$$

于是有 $-1-2a+\dfrac{1}{a}=0$，即 $2a^2+a-1=0$，解得 $a=\dfrac{1}{2},a=-1$. 由于 A<0 ,故 $a=-1$.

[2002,2] 已知 A, B 为 3 阶矩阵, 且满足 $2A^{-1}B=B-4E$, 其中 E 是 3 阶单位矩阵.

(1) 证明: 矩阵 $A-2E$ 可逆;

(2) 若 $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, 求矩阵 A.

解: (1) 由 $2A^{-1}B=B-4E$ 知 $AB-2B-4A=O$.

得 $(A-2E)(B-4E)=8E$, 即 $(A-2E)\cdot\dfrac{1}{8}(B-4E)=E$.

所以 $A-2E$ 可逆, 且 $(A-2E)^{-1}=\dfrac{1}{8}(B-4E)$. 可逆

(2) 由(1)知 $A=2E+8(B-4E)^{-1}$.

$$8(B-4E)^{-1}=8\begin{pmatrix}-3 & -2 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ -1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}.$$

$$A=2E+\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ -1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

[2001,2] 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, 且矩阵 X 满足 AXA + BXB = AXB + BXA + E, 其中 E 是三阶单位矩阵, 求 X .

解: 由 AXA + BXB = AXB + BXA + E, 得 AXA + BXB – AXB – BXA = E.

得 AX(A – B) – BX(A – B) = E. 得 (A – B)X(A – B) = E.

$\because$ $|A-B|=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0.$ $\therefore$ A – B 可逆.

所以有 $X=(A-B)^{-2}$.

$$(A-B,E)=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=(E,(A-B)^{-1}).$$

$$\therefore X=(A-B)^{-2}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

[2001,3,4] 设 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11}\\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21}\\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31}\\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41}\end{pmatrix}, P_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$

$P_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, 其中 A 可逆, 则 $B^{-1}=$_______.

$(A)A^{-1}P_1P_2$　　$(B)P_1A^{-1}P_2$　　$(C)P_1P_2A^{-1}$　　$(D)P_2A^{-1}P_1$

解: **Q** $AP_2P_1=B$　　$\therefore B^{-1}=P_1^{-1}P_2^{-1}A^{-1}=P_1P_2A^{-1}$

故 (C) 正确.

[2000,1] 设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 8\end{pmatrix}$, 且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$, 其中 E 为 4 阶单位矩阵, 求矩阵 B.

解: 等式 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$ 两边左乘 A^* 右乘 A 得

$$A^*AB=A^*B+3A^*A$$

由 $AA^*=A^*A=|A|E$, $|A|^3=|A^*|=8$, $\therefore |A|=2.$ $2B=A^*B+6E.$

$$\therefore\ B=6(2E-A^*)^{-1}=6\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -6\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0 & 0\\ 6 & 0 & 6 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

[1999,2] 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$**, 矩阵 X 满足 $A^*X=A^{-1}+2X$,其中 A^*是 A 的伴随矩阵，求矩阵 X.**

【详解】 在已知矩阵等式两边同时左乘 A, 得 $AA^*X=AA^{-1}+2AX$,

利用公式 $AA^*=|A|E$，上式可化为 $|A|X=E+2AX$, 即 $(|A|E-2A)X=E$,

从而 $X=(|A|E-2A)^{-1}$.

由 $|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}=4$. 得 $|A|E-2A=2\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&1&0&0\\1&1&-1&0&1&0\\-1&1&1&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&1&0&0\\0&2&-2&-1&1&0\\0&2&0&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad X=(|A|E-2A)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

[1999,3,4] 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$**, 而 $n\ge 2$ 为整数,则** $A^n-2A^{n-1}=$ ______

解: $\because A^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=2A$

$\therefore A^n-2A^{n-1}=A^{n-2}(A^2-2A)=O.$

[2009,4] 已知 $AB-B=A$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则 **A =______ .**

解: 由 $AB-B=A$ 得 $A(B-E)=B$.

$$\therefore A=B(B-E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2&0\\2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

[1998,2] 设 A 是任一 $n(n\ge 3)$阶方阵， A^* 是其伴随矩阵，又 k 为常数，且 $k\ne 0,\pm 1$，则必有

$(kA)^*=$________.

(A) kA^* (B) $k^{n-1}A^*$ (C) k^nA^* (D) $k^{-1}A^*$

解法 1: 设 A_{ij} 是 A 中 (i,j) 位置元素的代数余子式, 则 $k^{n-1}A_{ij}$ 是 kA 中(i,j)位置元素的代数余子式.

所以 $(kA)^*=k^{n-1}A^*$. 正确选择为 (B).

解法 2: 加条件法. 在 A 可逆的条件下有 $A^*=|A|A^{-1}$.

所以有 $(kA)^*=|kA|(kA)^{-1}=k^n|A|k^{-1}A^{-1}=k^{n-1}|A|A^{-1}=k^{n-1}A^*$.

[1998,2] 设 $(2E-C^{-1}B)A^T=C^{-1}$，其中 **E 是 4 阶单位矩阵, AT 是 4 阶矩阵 A 的转置矩阵.**

$$B=\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$ 求 A.

解: $\because$ $(2E-C^{-1}B)A^T=C^{-1}$. $\therefore$ $C(2E-C^{-1}B)A^T=E$. 即 $(2C-B)A^T=E$.

$$\therefore \quad A^T=(2C-B)^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

$$\therefore \quad A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}.$$

[1998,3,4] 设矩阵 A,B 满足 $A^*BA=2BA-8E$ ，其中 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, E 为单位矩阵， A^*为 A 的伴随矩阵，则 B =_____.

解: $\because |A|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{vmatrix}=-2$　　$\therefore$ A 可逆.

在等式 $A^*BA=2BA-8E$ 两边左乘 A, 右乘 A^{-1}, 得 $-2BA=2AB-8E$.

化简得 $(A+E)B=4E$.

$$\therefore \quad B=4(A+E)^{-1}=4\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}^{-1}=4\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&-1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

[1997,1] 设 A 是 n 阶可逆方阵，将 A 的第 i 行和第 j 行对换后得到的矩阵为 B.

(1) 证明 B 可逆;　 (2) 求 AB^{-1}.

【详解】

(1) 记 $E(i,j)$是由 n 阶单位矩阵的第 i 行和第 j 行对换后得到的初等矩阵.

则 $B=E(i,j)A$, 于是有 $|B|=|E(i,j)A|=-|A|\neq 0$. 故 B 可逆.

(2) $AB^{-1}=A[E(i,j)A]^{-1}=AA^{-1}E^{-1}(i,j)=E(i,j)$.

[1997,2] **已知** $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$**，且** $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ **,其中** $\boldsymbol{E}$ **是三阶单位矩阵，求矩阵** $\boldsymbol{B}$**.**

【详解】 因 $|A|\neq 0$, 在 $A^2-AB=E$ 两边左乘 A^{-1} ，得 $A-B=A^{-1}$.

$\therefore\quad B=A-A^{-1}$. 计算出 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

$$\therefore\quad B=A-A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

[1997,3] **设** $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ **为同阶可逆矩阵，则（　　）.**

(A) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$
(B)存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$
(C)存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$
(D)存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$, 使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$
【答】 应选(D).
【详解】由题设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆，若取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B},\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{A}^{-1}$,则 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{BAA}^{-1}=\boldsymbol{B}$,即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，可见(D).成立
矩阵乘法不满足交换律，故(A)不成立；任意两个同阶可逆矩阵，不一定是相似的或合同的，因此(B)、(C)均不成立.

[1990,5]

2.18(1990 年数学五)　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵, $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 则(　　)

(A) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$;　　(B) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|$;

(C) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^n$;　　(D) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}^{-1}|$.

答案是：(A).

[1991,1,2]

2.19(1991 年数学一、二)　设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足关系式 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位阵, 则必有(　　).

(A) $\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$;　(B) $\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$;　(C) $\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$;　(D) $\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$.

答案是：(D).

[1991,5]

2.20(1991 年数学五) 设 A,B 为 n 阶方阵,满足等式 $AB=O$,则必有( ).

(A) $A=O$ 或 $B=O$; (B) $A+B=O$;

(C) $|A|=0$ 或 $|B|=0$; (D) $|A|+|B|=0$.

答案是:(C).

[1992,5]

2.21(1992 年数学五) 设 $A,B,A+B,A^{-1}+B^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵,则 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$ 等于( ).

(A) $A^{-1}+B^{-1}$; (B) $A+B$;

(C) $A(A+B)^{-1}B$; (D) $(A+B)^{-1}$.

答案是:(C).

分析
$$\begin{aligned}A(A+B)^{-1}B(A^{-1}+B^{-1}) &= A(A+B)^{-1}(BA^{-1}+BB^{-1})\\ &= A(A+B)^{-1}(BA^{-1}+E)=A(A+B)^{-1}(BA^{-1}+AA^{-1})\\ &= A(A+B)^{-1}(B+A)A^{-1}=AA^{-1}=E.\end{aligned}$$

故
$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B.$$

[1995,1,2]

2.22(1995 年数学一、二) 设

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{bmatrix},$$

$$P_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},$$

则必有( ).

(A) $AP_1P_2=B$; (B) $AP_2P_1=B$;

(C) $P_1P_2A=B$; (D) $P_2P_1A=B$.

答案是:(C).

[1995,5]

2.23(1995 年数学五) 设 n 维行向量 $\alpha=\left(\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2}\right)$,矩阵

$$A=E-\alpha^{T}\alpha,\quad B=E+2\alpha^{T}\alpha.$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 等于(　　).

(A) $\boldsymbol{O}$;　　(B) $-\boldsymbol{E}$;　　(C) $\boldsymbol{E}$;　　(D) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

答案是：(C).

[1996,4,5]

2.24(1996 年数学四、五)　设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异($n\geqslant 2$)，$\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则(　　).

(A) $(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{A}$;　　(B) $(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n+1}\boldsymbol{A}$;

(C) $(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$;　　(D) $(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n+2}\boldsymbol{A}$.

答案是：(C).

[1988,1,2]

2.29(1988 年数学一、二)　已知 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$，其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{bmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^5$.

分析　$|\boldsymbol{P}|=-1\neq 0$，故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{PB}^5\boldsymbol{P}^{-1}$.

[1988,5]

2.30(1988 年数学五)　已知 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足矩阵方程

$$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 给定，而 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵，证明 $\boldsymbol{A}$ 可逆，并求出逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

分析　根据逆矩阵定义.

证　由 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，得 $\boldsymbol{A}\dfrac{(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})}{2}=\boldsymbol{E}$.

根据逆矩阵定义得 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}}{2}$.

[1990,4]

2.31(1990 年数学四)　已知对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，存在自然数 k，使得 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，试证明矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，并写出其逆矩阵的表达式.

分析　注意到

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^k=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}).$$

[1993,5]

2.32(1993 年数学五) 已知

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{bmatrix},$$

求$(A^*)^{-1}$.

[1992,5]

2.33(1992 年数学五) 已知实矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足条件：

(1) $a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,3)$，其中 A_{ij} 为a_{ij} 的代数余子式.

(2) $a_{11}\neq 0$.

计算行列式 $|A|$.

[1995,1,2]

2.34(1995 年数学一、二) 设 A 是n 阶矩阵，满足 $AA'=E$(E 是n 阶单位矩阵，A' 是A 的转置矩阵)，$|A|<0$，求 $|A+E|$.

[1994,1,2]

2.35(1994 年数学一、二) 设 A 为n 阶非零实方阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，A' 是A 的转置矩阵，当 $A^*=A'$ 时，证明 $|A|\neq 0$.

分析 因为 $A^*=A'$，故 $AA^*=AA'$. 即 $|A|E=AA'$，于是可得

$$\sum_{j=1}^{n}a_{1j}^2=\sum_{j=1}^{n}a_{2j}^2=\cdots=\sum_{j=1}^{n}a_{nj}^2=|A|.$$

[1996,1,2]

2.36(1996 年数学一、二) 设 $A=E-\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$，其中 E 是n 阶单位矩阵，α 是n 维非零列向量，α^{T} 是 α 的转置，证明：

(1) $A^2=A$ 的充要条件是$\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=1$;

(2) 当 $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=1$ 时，A 是不可逆矩阵.

分析 注意到 $\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 是 n 阶方阵，$\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$ 是常数.

[1987,1]

2.39(1987 年数学一) 设 A 和 B 满足关系式 $AB = A + 2B$,其中

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

求矩阵 B.

分析 由 $AB = A + 2B$ 得

$$(A - 2E)B = A, \quad B = (A - 2E)^{-1}A.$$

[1989,3,4]

2.40(1989 年数学三、四) 已知 $X = AX + B$,其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

求矩阵 X.

[1990,12]

2.41(1990 年数学一、二) 设四阶矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

且矩阵 A 满足关系式

$$A(E - C^{-1}B)'C' = E.$$

将上述关系式化简,并求 A.

分析 $A(E - C^{-1}B)'C' = A[C(E - C^{-1}B)]' = A(C - B)' = E$

[1992,5]

2.42(1992 年数学五)　设 $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵, $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$. 方阵 $\boldsymbol{X}$ 满足

$$\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{X},$$

求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

分析　由 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{X}$ 得

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}).$$

若 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|\neq 0$ 得 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$.

[1991,5]

2.43(1991 年数学五)　设 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵, n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$.

(1) 证明 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 为可逆矩阵;

(2) 已知 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-3&0\\2&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

分析　由 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$ 可得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$.

[1995,5]

2.50(1995 年数学五)　设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

$$\boldsymbol{A\alpha}_i=i\boldsymbol{\alpha}_i\quad(i=1,2,3),$$

其中列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(2,-2,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(-2,-1,2)^{\mathrm{T}}.$$

试求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

分析　设

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\quad |\boldsymbol{P}|=-27\neq 0,$$

$$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{\Lambda}.$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(1,2,3)$, 故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$.

[题] 设

矩阵的秩

[常用结论]

1. $r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$.

2. $r(A_{m\times n}) \le \min\{m,n\}$.

3. $r(A_{m\times n}) < n \quad \Leftrightarrow \quad AX = O$ 有非零解.

4. $r(A_{n\times n}) < n \quad \Leftrightarrow \quad |A| = 0.$

5. 若 $A_{m\times n}B_{n\times s} = 0$，则 $r(A) + r(B) \le n$.

[2010,1] 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, B 为 $n\times m$ 矩阵, A 为 m 阶单位矩阵, 若 AB =E , 则

(A) 秩 $r(A) = m$，秩 $r(B) = m$.　(B) 秩 $r(A) = m$，秩 $r(B) = n$.

(C) 秩 $r(A) = n$，秩 $r(B) = m$.　(D) 秩 $r(A) = n$，秩 $r(B) = n$.　【　】

【答案】应选(A) .

【详解】由 $AB = E$ 有 $r(AB) = r(E) = m$.

由 $r(AB) \le min\{r(A), r(B)\}$，知 $r(A) \ge m$, $r(B) \ge m$,

又 A 为 $m\times n$ 矩阵, B 为 $n\times m$ 矩阵, 因此 $r(A) \le m$, $r(B) \le m$.

故秩 $r(A) = m$，秩 $r(B) = m$，应选(A) .

【评注】矩阵乘积的秩不超过每一个矩阵的秩.

[2008,1] 设 a, b 为 3 维列向量，矩阵 $A = aa^T + bb^T$，其中 a^T, b^T 分别是 a, b 的转置．证明：

（I）　秩 $r(A)$ £ 2；

（II）　若 a, b 线性相关，则秩 $r(A) < 2$.

【详解】（I）【证法 1】$r(A) = r(aa^T + bb^T)$ £ $r(aa^T) + r(bb^T)$ £ $r(a) + r(b)$ £ 2.

【证法 2】因为 $A = aa^T + bb^T$，A 为 3 ´ 3 矩阵，所以 $r(A)$ £ 3.

因为 a, b 为 3 维列向量，所以存在向量 x ¹ 0，使得

$$a^T x = 0, \quad b^T x = 0$$

于是 $$Ax = aa^Tx + bb^Tx = \mathbf{0}$$

所以 $Ax = \mathbf{0}$ 有非零解，从而 $r(A) \le 2$.

【证法 3】因为 $A = aa^T + bb^T$，所以 A 为 3×3 矩阵.

又因为 $A = aa^T + bb^T = \begin{pmatrix} a & b & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^T \\ b^T \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$,

所以 $|A| = |a \quad b \quad \mathbf{0}|\begin{vmatrix} a^T \\ b^T \\ \mathbf{0} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$

故 $r(A) \le 2$.

(II) 由 a, b 线性相关，不妨设 $a = kb$. 于是

$$r(A) = r(aa^T + bb^T) = r\left((1+k^2)bb^T\right) \le r(b) \le 1 < 2.$$

[2007,1,2,3,4] 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$**，则** A^3 **的秩为(　　).**

【答案】1.

【详解】依矩阵乘法直接计算得 $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，故 $r(A^3)$=1.

【评注】本题为基础题型.

[2003,3] 设三阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$，若 A 的伴随矩阵的秩为 1，则必有

(A) $a = b$ 或 $a + 2b = 0$.　　(B) $a = b$ 或 $a + 2b \neq 0$.

(C) $a \neq b$ 且 $a + 2b = 0$.　　(D) $a \neq b$ 且 $a + 2b \neq 0$.

【分析】 A 的伴随矩阵的秩为 1，说明 A 的秩为 2，由此可确定 a, b 应满足的条件.

【详解】 根据 A 与其伴随矩阵 A*秩之间的关系知，秩(A)=2，故有

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = (a+2b)(a-b)^2 = 0$$，即有 $a+2b=0$ 或 a=b.

但当 $a=b$ 时，显然秩(A)$\neq 2$，故必有 $a\neq b$ 且 $a+2b=0$. 应选(C).

【评注】 n（$n\geq 2$）阶矩阵 A 与其伴随矩阵 A*的秩之间有下列关系：

$$r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n, \\ 1, & r(A)=n-1, \\ 0, & r(A)<n-1. \end{cases}$$

[2001,3,4] 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$，且秩(A) = 3，则 k = ______ .

解：因为 r(A) = 3，所以有 $|A|=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}=(k+3)(k-1)^3=0.$

所以 $k=1$ 或 $k=-3$.

当 $k=1$ 时，显然 r(A) = 1，不合题意，因此必有 $k=-3$.

[1999,1] 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，则

（A）当 $m>n$ 时，必有行列式 $|AB|\neq 0$ （B）当 $m>n$ 时，必有行列式 $|AB|=0$

（C）当 $n>m$ 时，必有行列式 $|AB|\neq 0$ （D）当 $n>m$ 时，必有行列式 $|AB|=0$

【详解】因为 AB 为m 阶方阵，且

$$r(AB)\leq \min\{r(A),r(B)\}\leq \min\{m,n\}$$

当 $m>n$ 时，由上式可知，$r(AB)\leq n<m$，即AB不是满秩的，故有行列式 $|AB|=0$.

因此，正确选项为（B）.

[1998,1] 设矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ 是满秩的，则直线 $\dfrac{x-a_3}{a_1-a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_1-b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与直线

$$\frac{x-a_1}{a_2-a_3}=\frac{y-b_1}{b_2-b_3}=\frac{z-c_1}{c_2-c_3}$$

（A）相交于一点.（B）重合.
（C）平行但不重合.（C）异面.
【答】 应选（A）.

【详解】因矩阵$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$是满秩的，所以通过行初等变换后得矩阵$\begin{pmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$

仍是满秩的，于是两直线的方向向量 $\begin{matrix} S_1=\{a_1-a_2,b_1-b_2,c_1-c_2\} \\ S_2=\{a_2-a_3,b_2-b_3,c_2-c_3\} \end{matrix}$ 线性无关，可见此两直线既不平行，

又不重合. 又$(a_1,b_1,c_1),(a_3,b_3,c_3)$分别为两直线上的点，其连线向量为: $S_3=\{a_3-a_1,b_3-b_1,c_3-c_1\}$，

满足$S_3=S_1+S_2$. 可见三向量S_1,S_2,S_3共面，因此S_1,S_2必相交.

[1998,3] 设 n ($n\geq 3$)阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，若矩阵 A 的秩为 $n-1$，则 a 必为(　　).

(A) 1　　(B) $\dfrac{1}{n-1}$　　(C) –1　　(D) $\dfrac{1}{1-n}$

解: $|A|=\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}=[(n-1)a+1]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & 1 & a & \cdots & a \\ 1 & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

$$=[(n-1)a+1]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & 1-a & a & \cdots & a \\ 0 & 0 & 1-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a \end{vmatrix}=[(n-1)a+1](1-a)^{n-1}.$$

因为矩阵 A 的秩为 $n-1$，所以 $|A|=0$.

所以 $a=1$ 或 $a=\dfrac{1}{1-n}$.

若 $a=1$，则 $r(A)=1$. 与 $r(A)=n-1\geq 2$ 矛盾. 所以答案为(D).

[注] 因题对 $n\geq 3$ 的一切正整数 n 选项恒惟一确定，故对 $n=3$ 时的正确选项即为所求.

[1997,2] 已知向量组 $a_1=(1,2,-1,1)^T, a_2=(2,0,t,0)^T, a_3=(0,-4,5,-2)$ 的秩为 2, 则 t = ______ .

【答】 3.

【详解】方法一：

由于 $r(a_1,a_2,a_3)=2$，则矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & t & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ 的任一个 3 阶子式等于零.

所以 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & t \\ 0 & -4 & 5 \end{vmatrix}=4t-12=0$，得 $t=3$.

方法二：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & t & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & t+2 & -2 \\ 0 & -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & t+2 & -2 \\ 0 & 0 & -t+3 & 0 \end{pmatrix}$.

由 $r(a_1,a_2,a_3)=2$ 知 $-t+3=0$，得 $t=3$.

[题 1] 设

[题 1] 设

[题 1] 设

矩阵的逆

[2008,1,2,3,4] 设 A 为 n 阶非零矩阵，E 为 n 阶单位矩阵. 若 $A^3=0$，则【　　】

则下列结论正确的是：

(A) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 不可逆.　　**(B) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 可逆.**

(C) $E-A$ 可逆，$E+A$ 可逆.　　**(D) $E-A$ 可逆，$E+A$ 不可逆.**

【答案】应选(C).

【详解】故应选(C).

$(E-A)(E+A+A^2)=E-A^3=E$，$(E+A)(E-A+A^2)=E+A^3=E$.

故 $E-A$，$E+A$ 均可逆．故应选(C).

[2002,4] 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}$, $B=A^2-3A+2E$, **则** $B^{-1}=$ _________ **.**

【答案】$\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\-1&-1\end{pmatrix}$

【详解】 $B=A^2-3A+2E=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}+2E$

$$=\begin{pmatrix}-1&-4\\8&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&3\\-6&-9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-1\\2&0\end{pmatrix}.$$

$$\therefore |B|=\begin{vmatrix}-2&-1\\2&0\end{vmatrix}=2,\quad B^{-1}=\frac{1}{|B|}\begin{pmatrix}0&1\\-2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\-1&-1\end{pmatrix}.$$

[2001,1] 设矩阵 A 满足 $A^2+A-4E=O$, 其中 E 为单位矩阵，则 $(A-E)^{-1}=$ ________ **.**

解: 由题设 $A^2+A-4E=O$. 得 $A^2-A+2A-2E=2E$.

所以 $(A-E)(A+2E)=2E$. 所以 $(A-E)^{-1}=\frac{1}{2}(A+2E)$.

[2000,2] 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{pmatrix}$，**E** 为 **4** 阶单位矩阵，且 $B=(E+A)^{-1}(E-A)$，则 $(B+E)^{-1}=$ ______ **.**

解: $\because$ $B=(E+A)^{-1}(E-A)$ $\therefore$ $(E+A)B=(E-A)$

$\therefore$ $AB+A+B=E$ $\therefore$ $A(B+E)+(B+E)=2E$

$\therefore \quad (A+E)(B+E)=2E \qquad \therefore \quad \frac{1}{2}(A+E)(B+E)=E$

$$\therefore \quad (B+E)^{-1}=\frac{1}{2}(A+E)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

[1988,4,5]

2.3(1988 年数学四、五) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} =$ ________.

[1989,1,2]

2.4(1989 年数学一、二) 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

则逆矩阵$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=$ ________.

答案是：$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

[1991,1,2]

2.5(1991 年数学一、二) 设四阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ ________.

[1994,4,5]

2.6(1994 年数学四、五) 设

$$A=\begin{bmatrix}0 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix},$$

其中 $a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n$, 则 $A^{-1}=$ ______.

[题] 设

方阵的 *n* 次幂

[常用的三种方法]

1. 二项式定理法: 将 A 表示成 B+C, 则 $A^n=(B+C)^n$, 利用二项式定理展开.

   适用于 BC = CB 且存在较小的正整数 k 有 $C^k = O$.

2. 将 A 分解为列向量与行向量的乘积的形式. 适用于 r(A) = 1.
3. 特征值法

如 $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 4 & -6\\ 3 & 6 & -9\end{pmatrix}, A^n=(-4)^{n-1}A, \begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$

[1994,1,2] 已知 $\alpha=(1,2,3), \beta=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$. 设 $A=\alpha'\beta$, 其中 α' 是 α 的转置, 则 $A^n=$______.

解: $\beta\alpha'=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=3$.

$$A^n=(a'b)(a'b)\cdots(a'b)=a'(ba')(b\cdots a')b=3^{n-1}a'b=3^{n-1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}.$$

[题 1] 设

分块矩阵

[2009, 1,2,3] 设 A, B 均为 2 阶矩阵，A^*,B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵，若 $|A|=2,|B|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为

$(A)\begin{pmatrix}O&3B^*\\2A^*&O\end{pmatrix}$.　　$(B)\begin{pmatrix}O&2B^*\\3A^*&O\end{pmatrix}$.

$(C)\begin{pmatrix}O&3A^*\\2B^*&O\end{pmatrix}$.　　$(D)\begin{pmatrix}O&2A^*\\3B^*&O\end{pmatrix}$.

【答案】B

【解析】根据 $CC^*=|C|E$，若 $C^*=|C|C^{-1},C^{-1}=\dfrac{1}{|C|}C^*$

分块矩阵 $\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}$ 的行列式 $\begin{vmatrix}0&A\\B&0\end{vmatrix}=(-1)^{2\times2}|A||B|=2\times3=6$，即分块矩阵可逆

$$\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}^*=\begin{vmatrix}0&A\\B&0\end{vmatrix}\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}^{-1}=6\begin{pmatrix}0&B^{-1}\\A^{-1}&0\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}0&\frac{1}{|B|}B^*\\\frac{1}{|A|}A^*&0\end{pmatrix}$$

$$=6\begin{pmatrix}0&\frac{1}{3}B^*\\\frac{1}{2}A^*&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2B^*\\3A^*&0\end{pmatrix}$$

故答案为 B。

[2002,4] 设 A, B 为 n 阶矩阵，A^*, B^* 分别为 A, B 对应的伴随矩阵. 分块矩阵 $C=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$, 则 C 的伴随矩阵 $C^*=$ (　　).

(A) $\begin{pmatrix} |A|A^* & O \\ O & |B|B^* \end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix} |B|B^* & O \\ O & |A|A^* \end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix} |A|B^* & O \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$

解: 由关系式 $DD^*=D^*D=|D|E$, $|C|=\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}=|A||B|$.

因为 $C\begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |B|AA^* & O \\ O & |A|BB^* \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} |B||A|E & O \\ O & |A||B|E \end{pmatrix}=|A||B|E$

所以 $C^*=\begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$.

[1997,3,4] 设 A 为 n 阶非奇异矩阵，a 为 n 维列向量，b 为常数，记分块矩阵

$P=\begin{pmatrix} E & O \\ -a^TA^* & |A| \end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix} A & a \\ a^T & b \end{pmatrix}$, 其中 A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵, E 是 n 阶单位矩阵.

(a) 计算并化简 PQ;　(b) 证明: 矩阵 Q 可逆的充要条件是 $a^TA^{-1}a^T\neq b$.

解: (a) 由已知 A 非奇异矩阵, 且 $A^*A=AA^*=|A|E$, 故有 $A^*=|A|A^{-1}$.

$$PQ=\begin{pmatrix} E & O \\ -a^TA^* & |A| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & a \\ a^T & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & a \\ -a^TA^*A+|A|a^T & -a^TA^*a+b|A| \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A & a \\ -|A|a^T+|A|a^T & -|A|a^TA^{-1}a+b|A| \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & a \\ 0 & |A|(b-a^TA^{-1}a) \end{pmatrix}$$

(b) 由 (a) 可得

$|P||Q|=|PQ|=|A|^2(b-a^TA^{-1}a)$, 而 $|P|=\begin{vmatrix} E & O \\ -a^TA^* & |A| \end{vmatrix}=|E||A|=|A|\neq 0$,

所以 $|Q|=|A|(b-a^TA^{-1}a)$. 由 $|A|\neq 0$,

所以 Q 可逆 $\Leftrightarrow$ $|Q| \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $b - a^T A^{-1} a \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $a^T A^{-1} a \neq b$.

[1991,4] 设

2.13(1991 年数学四) 设 A 和 B 为可逆矩阵，$X = \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$ 为分块矩阵，则 $X^{-1} =$ ________.

答案是：$\begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$.

[题] 设

行列式

[2010,2,3] 设 A, B 为 3 阶矩阵，且 $|A| = 3$, $|B| = 2$, $|A^{-1}+B| = 2$, 则 $|A+B^{-1}| =$ ________. 【 】

【答案】应填 3 .

【分析】本题考查矩阵的运算、行列式的性质.

【详解】由于 $|A+B^{-1}| = |(AB+E)B^{-1}| = |(AB+AA^{-1})B^{-1}| = |A(B+A^{-1})B^{-1}| = |A|\cdot|A^{-1}+B|\cdot|B^{-1}| = 3\cdot 2\cdot 2^{-1} = 3$.

因此应填 3 .

[2006,1,2,3] 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，$E$ 为 2 阶单位矩阵，矩阵 B 满足 $BA = B + 2E$，则

$|B| =$ __2__.

【分析】 将矩阵方程改写为 $AX = B$ 或 $XA = B$ 或 $AXB = C$ 的形式，再用方阵相乘的行列式性质进行计算即可.

【详解】 由题设，有 $B(A-E) = 2E$

于是有 $|B||A-E| = 4$，而 $|A-E| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$，所以 $|B| = 2$.

[2006,4] 已知 a_1, a_2 为 2 维列向量，矩阵 $A = (2a_1 + a_2, a_1 - a_2)$，$B = (a_1, a_2)$.若行列式

$|A| = 6$，则 $|B| = \underline{-2}$.

【分析】利用矩阵乘积的行列式运算$|AB|=|A||B|$即可.

【详解】$A=(2a_1+a_2,a_1-a_2)=(a_1,a_2)\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}$,

所以 $|A|=|B|\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}=-3|B|$，而$|A|=6$，

故 $|B|=-2$.

[2005,1,2,4] 设a_1,a_2,a_3均为3维列向量，记矩阵 $A=(a_1,a_2,a_3)$，

$$B=(a_1+a_2+a_3,a_1+2a_2+4a_3,a_1+3a_2+9a_3)，$$

如果$|A|=1$，那么$|B|=$______.

【分析】 将B写成用A右乘另一矩阵的形式，再用方阵相乘的行列式性质进行计算即可.

【详解】 由题设，有

$$B=(a_1+a_2+a_3,a_1+2a_2+4a_3,a_1+3a_2+9a_3)=(a_1,a_2,a_3)\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{bmatrix},$$

于是有 $|B|=|A|\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=1\times2=2.$

[2004,1,2] 设矩阵$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，矩阵B满足$ABA^*=2BA^*+E$，其中$A^*$为A的伴随矩阵，

E是单位矩阵，则$|B|=$ ________ .

【分析】 可先用公式$A^*A=|A|E$进行化简

【详解】 已知等式两边同时右乘A，得

$$ABA^*A=2BA^*A+A，\quad 而|A|=3，于是有$$

$$3AB=6B+A，\quad 即\quad (3A-6E)B=A，$$

再两边取行列式，有 $|3A-6E||B|=|A|=3$，

而 $|3A-6E|=27$，故所求行列式为$|B|=\frac{1}{9}$.

【评注】 先化简再计算是此类问题求解的特点，而题设含有伴随矩阵 A^*，一般均应先利用公式 $A^*A=AA^*=|A|E$ 进行化简.

[2003,2] 设三阶方阵 A,B 满足 $A^2B-A-B=E$，其中 E 为三阶单位矩阵，若 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$，

则$|B|=$ ________ .

【分析】 先化简分解出矩阵 B，再取行列式即可.

【详解】 由 $A^2B-A-B=E$ 知，

$(A^2-E)B=A+E$，即 $(A+E)(A-E)B=A+E$，

易知矩阵 A+E 可逆，于是有 $(A-E)B=E.$

再两边取行列式，得 $|A-E||B|=1$，

因为 $|A-E|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-2&0&0\end{vmatrix}=2$，所以 $|B|=\frac{1}{2}$.

【评注】 本题属基本题型，综合考查了矩阵运算与方阵的行列式，此类问题一般都应先化简再计算.

[2001,4] 设行列式 $D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix}$**，则第四行各元素余子式之和的值为 ______ .**

解: $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}=-28.$

[2000,4] 设 $\alpha=(1,0,-1)^T$，矩阵 $A=\alpha\alpha^T$，n 为正整数，则 $\left|aE-A^n\right|=$______ .

解: $\because A=\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}(1,0,-1)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$, $\quad \alpha^T\alpha=(1,0,-1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=2.$

$$\therefore A^n=(\alpha\alpha^T)(\alpha\alpha^T)\cdots(\alpha\alpha^T)=\alpha(\alpha^T\alpha)^{n-1}\alpha^T=2^{n-1}A=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&-2^{n-1}\\0&0&0\\-2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}.$$

$$\therefore \left|aE-A^n\right|=\begin{vmatrix}a-2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&a&0\\2^{n-1}&0&a-2^{n-1}\end{vmatrix}=a^2(a-2^n).$$

另解: A 是实对称矩阵，且秩为 1, $tr(A)=2=$ 特征值之和. 所以 A 的特征值为 0, 0, 2.

所以 $aE-A^n$ 的特征值为 $a, a, a-2^n$. $\therefore \left|aE-A^n\right|=a^2(a-2^n).$

[1999,2] 记行列式 $\begin{vmatrix}x-2&x-1&x-2&x-3\\2x-2&2x-1&2x-2&2x-3\\3x-3&3x-2&4x-5&3x-5\\4x&4x-3&5x-7&4x-3\end{vmatrix}$ 为 $f(x)$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为(　　).

（A）1.　（B）2　（C）3.　（D）4

解: $f(x)=\begin{vmatrix}x-2&x-1&x-2&x-3\\2x-2&2x-1&2x-2&2x-3\\3x-3&3x-2&4x-5&3x-5\\4x&4x-3&5x-7&4x-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-2&1&0&-1\\2x-2&1&0&-1\\3x-3&1&x-2&-2\\4x&-3&x-7&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-2&1&0&0\\2x-2&1&0&0\\3x-3&1&x-2&-1\\4x&-3&x-7&-6\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}x-2&1\\2x-2&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x-2&-1\\x-7&-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-2&1\\x&0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x-2&-1\\-5&-7\end{vmatrix}.$$

所以, $f(x)=0$ 的根的个数为 2. 答案为 B.

[1998,4] 设 A, B 均为 n 阶矩阵, $|A|=2$, $|B|=-3$, 则 $|2A^*B^{-1}|=$_______ .

解: $\left|2A^*B^{-1}\right|=2^n\left|A^*\right|\left|B^{-1}\right|=2^n\times 2^{n-1}\times\dfrac{1}{-3}=-\dfrac{2^{2n-1}}{3}.$

[1997,4] 设 n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$**, 则** $|A|=$______.

【答】 $(-1)^{n-1}(n-1)$.

【详解】各列对应元素相加后相等,把第 2,3,…,n 列加到第一列,有

$$|A|=(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1).$$

[1996,4] 四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ **的值等于 (　　).**

(A) $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$　　　　(B) $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$

(C) $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$　　　　(C) $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$

答案: (D).

[1990,5] 设

1.13(1990 年数学五,4 分)　设 $\boldsymbol{A}$ 为 10×10 矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 10^{10} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

计算行列式 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为十阶单位阵,λ 为常数.

[1988,4,5] 设

1.14(1988 年数学四、五,6 分)　设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵, $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}| = \frac{1}{2}$, 求行列式

$$D = |(3\boldsymbol{A})^{-1} - 2\boldsymbol{A}^*|.$$

[1993,5] 设

1.10(1993 年数学五)　若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 都是四维列向量,且四阶行列式

$$|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1| = m, \quad |\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_3| = n,$$

则四阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1, (\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2)|$ 等于(　　).

(A) $m + n$;　　(B) $-(m + n)$;　　(C) $n - m$;　　(D) $m - n$.

答案是:(C).

[1987,1,2]

2.17(1987 年数学一、二)　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,且 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}| = a \neq 0$, 而 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 则 $|\boldsymbol{A}^*|$ 等于(　　).

(A) a;　　(B) $\frac{1}{a}$;　　(C) a^{n-1};　　(D) a^n.

答案是:(C).

[题] 设

线性相关性

[常用的三种方法]

1. 定义法.
2. 对应的齐次线性方程组有无非零解.
3. 反证法

[2010,2,3] 设向量组 I: $a_1, a_2, \cdots, a_r$ **可由向量组 II:** $b_1, b_2, \cdots, b_s$ **线性表示，则下列命题正确的是**

(A) 若向量组 I 线性无关，则 $r \le s$.　(B) 若向量组 I 线性相关，则 $r > s$.

(C) 若向量组 II 线性无关，则 $r\le s$. (D) 若向量组 II 线性相关，则 $r>s$. 【 】

【答案】应选(A) .

【详解】由定理4.12，因向量组I能由向量组II线性表示，所以r（I）$\le r$（II），即

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\le r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\le s.$$

又若向量组 I 线性无关，则 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=r$，所以 $r\le s$. 故应选(A).

[2007,1,2,3,4] 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列向量组线性相关的是 ( ).

(A) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$. (B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$.

(C) $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$. (D) $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$. [**A**]

【分析】本题考查由线性无关的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 构造的另一向量组 β_1,β_2,β_3 的线性相关性. 一般令 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$，若$|A|=0$，则 β_1,β_2,β_3 线性相关；若$|A|\ne 0$，则 β_1,β_2,β_3 线性无关. 但考虑到本题备选项的特征，可通过简单的线性运算得到正确选项.

【LRY】 参第二章(B)第 4 题

【详解】用定义进行判定:令 $x_1(\alpha_1-\alpha_2)+x_2(\alpha_2-\alpha_3)+x_3(\alpha_3-\alpha_1)=0$，

得 $$(x_1-x_3)\alpha_1+(-x_1+x_2)\alpha_2+(-x_2+x_3)\alpha_3=0.$$

因$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，所以 $$\begin{cases}x_1 - x_3=0,\\ -x_1+x_2=0,\\ -x_2+x_3=0.\end{cases}$$

又 $$\begin{vmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{vmatrix}=0,$$

故上述齐次线性方程组有非零解，即$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$线性相关. 类似可得(B), (C), (D)中的向量组都是线性无关的.

【LRY】$\because(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_1)=0$，所以 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$线性相关.

[2006,1,2,3,4] 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$均为$n$维列向量，$A$为$m\times n$矩阵，下列选项正确的是 ( ).

(B) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性相关.

(C)　若$a_1, a_2, \mathbf{L}, a_s$线性相关，则$Aa_1, Aa_2, \mathbf{L}, Aa_s$线性无关.

(C)　若$a_1, a_2, \mathbf{L}, a_s$线性无关，则$Aa_1, Aa_2, \mathbf{L}, Aa_s$线性相关.

(D) 若$a_1, a_2, \mathbf{L}, a_s$线性无关，则$Aa_1, Aa_2, \mathbf{L}, Aa_s$线性无关.

【分析】 本题考查向量组的线性相关性问题，利用定义或性质进行判定.

【详解】 记$B = (a_1, a_2, \mathbf{L}, a_s)$，则$(Aa_1, Aa_2, \mathbf{L}, Aa_s) = AB$.

所以，若向量组$a_1, a_2, \mathbf{L}, a_s$线性相关，则$r(B) < s$，从而$r(AB) \le r(B) < s$，向量组$Aa_1, Aa_2, \mathbf{L}, Aa_s$也线性相关，故应选(A).

[2006,3,4] 设 4 维向量组$a_1 = (1+a, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}, a_2 = (2, 2+a, 2, 2)^{\mathrm{T}}, a_3 = (3, 3, 3+a, 3)^{\mathrm{T}}$,

$a_4 = (4, 4, 4, 4+a)^{\mathrm{T}}$，问$a$为何值时$a_1, a_2, a_3, a_4$线性相关?当$a_1, a_2, a_3, a_4$线性相关时,求其一个极大线性无关组,并将其余向量用该极大线性无关组线性表出.

【分析】因为向量组中的向量个数和向量维数相同，所以用以向量为列向量的矩阵的行列式为零来确定参数a；用初等变换求极大线性无关组.

【详解】记以a_1, a_2, a_3, a_4为列向量的矩阵为A，则

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix} = (10+a)a^3.$$

于是当$|A| = 0$,即$a = 0$或$a = -10$时，a_1, a_2, a_3, a_4线性相关.

当$a = 0$时，显然a_1是一个极大线性无关组，且$a_2 = 2a_1, a_3 = 3a_1, a_4 = 4a_1$；

当$a = -10$时，

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} -9 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -8 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}, \end{array}$$

由于此时A有三阶非零行列式$\begin{vmatrix} -9 & 2 & 3 \\ 1 & -8 & 3 \\ 1 & 2 & -7 \end{vmatrix} = -400 \ne 0$，所以$a_1, a_2, a_3$为极大线性无关组，且

$a_1+a_2+a_3+a_4=0$，即 $a_4=-a_1-a_2-a_3$.

【LRY】 $A=\begin{pmatrix}-9&2&3&4\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\1&2&3&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-10&0&0&10\\0&-10&0&10\\0&0&-10&10\\1&2&3&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\1&2&3&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

$\therefore r(A)=3$，a_1,a_2,a_3 为极大线性无关组，且 $a_4=-a_1-a_2-a_3$.

[2005,2] 确定常数 a,使向量组 $a_1=(1,1,a)^T$, $a_2=(1,a,1)^T$, $a_3=(a,1,1)^T$ 可由向量组

$b_1=(1,1,a)^T$， $b_2=(-2,a,4)^T$， $b_3=(-2,a,a)^T$ **线性表示，但向量组 b_1,b_2,b_3 不能由向量组 a_1,a_2,a_3 线性表示.**

【分析】 向量组 a_1,a_2,a_3 可由向量组 b_1,b_2,b_3 线性表示，相当于方程组：

$$a_i=x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3,i=1,2,3.$$

均有解，问题转化为 $r(b_1,b_2,b_3)=r(b_1,b_2,b_3\vdots a_i),i=1,2,3$ 是否均成立？这通过初等变换化解体形讨论即可. 而向量组 b_1,b_2,b_3 不能由向量组 a_1,a_2,a_3 线性表示，相当于至少有一个向量 $b_j(j=1,2,3)$ 不能由 a_1,a_2,a_3 表示，即至少有一方程组

$b_j=x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3,j=1,2,3$，无解.

【详解】 对矩阵 $\overline{A}=(b_1,b_2,b_3\vdots a_1,a_2,a_3)$ 作初等行变换，有

$$\overline{A}=(b_1,b_2,b_3\vdots a_1,a_2,a_3)=\begin{bmatrix}1&-2&-2&\vdots&1&1&a\\1&a&a&\vdots&1&a&1\\a&4&a&\vdots&a&1&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&-2&-2&\vdots&1&1&a\\0&a+2&a+2&\vdots&0&a-1&0\\0&4+2a&3a&\vdots&0&1-a&1-a\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&-2&-2&\vdots&1&1&a\\0&a+2&a+2&\vdots&0&a-1&0\\0&0&a-4&\vdots&0&3(1-a)&1-a\end{bmatrix},$$

当 a=-2 时，$\overline{A} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & \vdots & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$，显然 a_2 不能由 b_1, b_2, b_3 线性表示，因此 $a \neq -2$；

当 a=4 时，

$$\overline{A} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 6 & \vdots & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -9 & -3 \end{bmatrix}$$，然 a_2, a_3 均不能由 b_1, b_2, b_3 线性表示，因此 $a \neq 4$.

而当 $a \neq -2$ 且 $a \neq 4$ 时，秩 $r(b_1, b_2, b_3) = 3$，此时向量组 a_1, a_2, a_3 可由向量组 b_1, b_2, b_3 线性表示.

又 $\overline{B} = (a_1, a_2, a_3 \vdots b_1, b_2, b_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2 \\ 1 & a & 1 & \vdots & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & \vdots & a & 4 & a \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 0 & a+2 & a+2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & \vdots & 0 & 4+2a & 3a \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 0 & a+2 & a+2 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & \vdots & 0 & 6+3a & 4a+2 \end{bmatrix},$$

由题设向量组 b_1, b_2, b_3 不能由向量组 a_1, a_2, a_3 线性表示，必有 $a-1=0$ 或 $2-a-a^2=0$，即 a=1 或 $a=-2$.

综上所述，满足题设条件的 a 只能是：a=1.

[2005,3,4] 设行向量组 $(2,1,1,1)$，$(2,1,a,a)$，$(3,2,1,a)$，$(4,3,2,1)$ 线性相关，且 $a \neq 1$，

则 $a =$ ________ .

【分析】 四个 4 维向量线性相关，必有其对应行列式为零，由此即可确定 a.

【详解】 由题设，有 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 3 & 2 & 1 & a \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)(2a-1) = 0$，得 $a = 1, a = \frac{1}{2}$，

但题设 $a \neq 1$，故 $a = \frac{1}{2}$.

[2004,1,2] 设 A,B 为满足 AB=O 的任意两个非零矩阵，则必有（　　）.

(A)　A 的列向量组线性相关，B 的行向量组线性相关.

(B)　A 的列向量组线性相关，B 的列向量组线性相关.
(C)　A 的行向量组线性相关，B 的行向量组线性相关.
(D)　A 的行向量组线性相关，B 的列向量组线性相关.

【分析】A,B 的行列向量组是否线性相关，可从 A,B 是否行（或列）满秩或 Ax=0（Bx=0）是否有非零解进行分析讨论.

【详解 1】 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times s$ 矩阵，则由 AB=O 知，

$$r(A)+r(B)<n.$$

又 A,B 为非零矩阵，必有 r(A)>0,r(B)>0. 可见 r(A)<n, r(B)<n, 即 A 的列向量组线性相关，B 的行向量组线性相关，故应选(A).

【详解 2】 由 AB=O 知，B 的每一列均为 Ax=0 的解，而 B 为非零矩阵，即 Ax=0 存在非零解，可见 A 的列向量组线性相关.

同理，由 AB=O 知，$B^TA^T=O$，于是有 B^T 的列向量组，从而 B 的行向量组线性相关，故应选(A).

【评注】 AB=O 是常考关系式，一般来说，与此相关的两个结论是应记住的：

(1)　AB=O$\Rightarrow r(A)+r(B)<n$;

(2)　AB=O$\Rightarrow$B 的每列均为 Ax=0 的解.

[2003,1,2] 设向量组 I：$a_1,a_2,\cdots,a_r$ 可由向量组 II：$b_1,b_2,\cdots,b_s$ 线性表示，则 (　　).

(A) 当 $r<s$ 时，向量组 II 必线性相关.　(B) 当 $r>s$ 时，向量组 II 必线性相关.
(C) 当 $r<s$ 时，向量组 I 必线性相关.　(D) 当 $r>s$ 时，向量组 I 必线性相关.

【分析】 本题为一般教材上均有的比较两组向量个数的定理：若向量组 I：$a_1,a_2,\cdots,a_r$ 可由向量组 II：$b_1,b_2,\cdots,b_s$ 线性表示，则当 $r>s$ 时，向量组 I 必线性相关. 或其逆否命题：若向量组 I：$a_1,a_2,\cdots,a_r$ 可由向量组 II：$b_1,b_2,\cdots,b_s$ 线性表示，且向量组 I 线性无关，则必有 $r\le s$. 可见正确选项为(D). 本题也可通过举反例用排除法找到答案.

【详解】 用排除法：如 $a_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},b_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，则 $a_1=0\cdot b_1+0\cdot b_2$，但 b_1,b_2 线性无关，排除(A)；$a_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},b_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，则 a_1,a_2 可由 b_1 线性表示，但 b_1 线性无关，排除(B)；$a_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},b_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，$a_1$ 可由 b_1,b_2 线性表示，但 a_1 线性无关，排除(C). 故正确选项为(D).

【评注】 本题将一已知定理改造成选择题，如果考生熟知此定理应该可直接找到答案，若记不清楚，也可通过构造适当的反例找到正确选项。

[2003,3] 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$均为 n 维向量，下列结论不正确的是（　　）.

(A) 若对于任意一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，都有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\neq 0$，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关.

(B) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则对于任意一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，都有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$.

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关的充分必要条件是此向量组的秩为 s.

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关的必要条件是其中任意两个向量线性无关.

【分析】 本题涉及到线性相关、线性无关概念的理解，以及线性相关、线性无关的等价表现形式. 应注意是寻找不正确的命题.

【详解】(A): 若对于任意一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\neq 0$，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$必线性无关，因为若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$，矛盾. 可见（A）成立.

(B): 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则存在一组，而不是对任意一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，都有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$. (B)不成立.

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关,则此向量组的秩为 s；反过来，若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩为 s，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，因此(C)成立.

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关,则其任一部分组线性无关，当然其中任意两个向量线性无关，可见(D)也成立.

综上所述，应选(B).

【评注】 原命题与其逆否命题是等价的. 例如，原命题：若**存在**一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$成立，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关. 其逆否命题为：若对于任意一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，都有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\neq 0$，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关. 在平时的学习过程中，应经常注意这种原命题与其逆否命题的等价性.

[2003,4] 设有向量组（I）：$a_1=(1,0,2)^T$，$a_2=(1,1,3)^T$，$a_3=(1,-1,a+2)^T$ 和向量组（II）：

$b_1=(1,2,a+3)^T$，$b_2=(2,1,a+6)^T$，$b_3=(2,1,a+4)^T$. 试问：当 a 为何值时，向量组（I）与（II）等价？当 a 为何值时，向量组（I）与（II）不等价？

【分析】 两个向量组等价也即两个向量组可以相互线性表示，而两个向量组不等价，只需其中一组有一个向量不能由另一组线性表示即可. 而线性表示问题又可转化为对应非齐次线性方程组是否有解的问题，这可通过化增广矩阵为阶梯形来判断. 一个向量 b_1 是否可由 a_1,a_2,a_3 线性表示，只需用初等行变换化增广矩阵（$a_1,a_2,a_3|b_1$）为阶梯形讨论，而一组向量 b_1,b_2,b_3 是否可由 a_1,a_2,a_3 线性表示，则可结合起来对矩阵（$a_1,a_2,a_3|b_1,b_2,b_3$）同时作初等行变换化阶梯形，然后类似地进行讨论即可.

【详解】 作初等行变换，有

$$(a_1,a_2,a_3\vdots b_1,b_2,b_3)=\begin{bmatrix}1&1&1&\vdots&1&2&2\\0&1&-1&\vdots&2&1&1\\2&3&a+2&\vdots&a+3&a+6&a+4\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&2&\vdots&-1&1&1\\0&1&-1&\vdots&2&1&1\\0&0&a+1&\vdots&a-1&a+1&a-1\end{bmatrix}.$$

(1) 当 $a\neq-1$ 时，有行列式 $|[a_1\quad a_2\quad a_3]|=a+1\neq0$，秩（$a_1,a_2,a_3)=3$，故线性方程组 $x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3=b_i(i=1,2,3)$ 均有唯一解. 所以，b_1,b_2,b_3 可由向量组（I）线性表示.

同样，行列式 $|[b_1\quad b_2\quad b_3]|=6\neq0$，秩（$b_1,b_2,b_3)=3$，故 a_1,a_2,a_3 可由向量组（II）线性表示. 因此向量组（I）与（II）等价.

(2) 当 $a=-1$ 时，有

$$(a_1,a_2,a_3\vdots b_1,b_2,b_3)\to\begin{bmatrix}1&0&2&\vdots&-1&1&1\\0&1&-1&\vdots&2&1&1\\0&0&0&\vdots&-2&0&-2\end{bmatrix}.$$

由于秩（a_1,a_2,a_3）$\neq$ 秩（$a_1,a_2,a_3\vdots\quad b_1)$，线性方程组 $x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3=b_1$ 无解，故向量 b_1 不能由 a_1,a_2,a_3 线性表示. 因此，向量组（I）与（II）不等价.

【评注 1】 涉及到参数讨论时，一般联想到利用行列式判断，因此，本题也可这样分析：因为行列式 $|a_1,a_2,a_3|=a+1$，$|b_1,b_2,b_3|=6\neq0$，可见

(1) 当 $a\neq-1$ 时，秩 $r(a_1,a_2,a_3)=r(b_1,b_2,b_3)=3$，因此三维列向量组 a_1,a_2,a_3 与 b_1,b_2,b_3 等

价，即向量组（I）与（II）等价.

(2) 当 $a=-1$ 时，秩 $r(a_1,a_2,a_3)=2$，而行列式 $|a_2,a_3,b_1|=4\neq 0$，可见 $r(a_1,a_2,a_3)=2\neq$ r（$a_1,a_2,a_3,b_1)$=3, 因此线性方程组 $x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3=b_1$ 无解，故向量 b_1 不能由 a_1,a_2,a_3 线性表示. 即向量组（I）与（II）不等价.

【评注 2】向量组(I)与(II)等价，相当于 a_1,a_2,a_3 与 b_1,b_2,b_3 均为整个向量组 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 的一个极大线性无关组，问题转化为求向量组 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 的极大线性无关组，这可通过初等行变换化阶梯形进行讨论.

[2002,2] 设向量组 a_1,a_2,a_3 线性无关，向量 b_1 可由 a_1,a_2,a_3 线性表示，而向量 b_2 不能由 a_1,a_2,a_3 线性表示，则对于任意常数 *k*，必有（　　）.

(A) a_1,a_2,a_3,kb_1+b_2 线性无关.　　(B) a_1,a_2,a_3,kb_1+b_2 线性相关.

(C) a_1,a_2,a_3,b_1+kb_2 线性无关.　　(D) a_1,a_2,a_3,b_1+kb_2 线性相关.

【答案】A.

【分析】因为 a_1,a_2,a_3 线性无关，所以 a_1,a_2,a_3,b 的线性相关性由 b 是否可由 a_1,a_2,a_3 线性表示决定.

【详解】因为 b_1 可由 a_1,a_2,a_3 线性表示，而向量 b_2 不能由 a_1,a_2,a_3 线性表示，所以 kb_1+b_2 不能由 a_1,a_2,a_3 线性表示，所以(A)正确，相应(B)不对.

由 k 的任意性, k = 0 时(C)不对, k = 1 时(D)不对.

[2002,3] 设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}$，三维列向量 $a=(a,1,1)^T$. 已知 Aa 与 a 线性相关，则 *a* =____ .

【答案】-1.

【分析】两个向量线性相关的充要条件是对应分量成比例.

【详解】$\because\ Aa=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\2a+3\\3a+4\end{pmatrix}$. 由 Aa 与 a 线性相关,

$\therefore\ \dfrac{a}{a}=\dfrac{2a+3}{1}=\dfrac{3a+4}{1}$.　得 $a=-1$.

[2002,4] 设向量组 $\alpha_1=(a,0,c)^T,\alpha_2=(b,c,0)^T,\alpha_3=(0,a,b)^T$ 线性无关，则 a,b,c 必满足关系式______.

【答案】 $abc\neq 0$

【详解】 $\because \left|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right|=\begin{vmatrix} a & b & 0\\ 0 & c & a\\ c & 0 & b\end{vmatrix}=2abc.$ 而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的充要条件是 $\left|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right|\neq 0$

$\therefore$ 答案是 $abc\neq 0$.

[2001,4] 设 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^T\quad(i=1,2,\cdots,r;\ r<n)$ 是 n 维实向量，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关. 已知 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 是线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0.\end{cases}$ 的非零解向量. 试判断向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 的线性相关性.

解: 设有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_r,k$ 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r+k\beta=0$.

由已知, $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 是线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0.\end{cases}$ 的非零解向量,

所以 $\beta^T\alpha_i=0\quad(i=1,2,\cdots,r)$.

所以 $k_1\beta^T\alpha_1+k_2\beta^T\alpha_2+\cdots+k_r\beta^T\alpha_r+k\beta^T\beta=0$.

所以 $k\beta^T\beta=0$. 由 $\beta\neq 0$, 得 $k=0$.

所以 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$.

又因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关, 所以 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$.

即有 $k_1=k_2=\cdots=k_r=k=0$.

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性无关.

[2000,1] 设 n 维列向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ ($m<n$) 线性无关，则 n 维列向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性无关的充分必要条件为

(A) 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性表示.

(B) 向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 可由向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性表示.

(C) 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 与向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 等价.

(D) 矩阵 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 与矩阵 $B=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$ 等价.

解: (A,C)充分但非必要 (B)非充分且非必要

矩阵 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 与矩阵 $B=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$ 等价 $\Leftrightarrow r(A)=r(B)$

$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=r(\beta_1,\cdots,\beta_m)=m$，即 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性无关.

[1999,2] 设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\-3\\5\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\\p+2\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-2\\-6\\10\\p\end{pmatrix}$.

（1）p 为何值时，该向量组线性无关？并在此时将向量 $\alpha=(4,1,6,10)^T$ 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出；

（2） p 为何值时，该向量组线性相关？并在此时求出它的秩和一个极大线性无关组.

【详解】由于行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4|=\begin{vmatrix}1&-1&3&-2\\1&-3&2&-6\\1&5&-1&10\\3&1&p+2&p\end{vmatrix}=2(2-p).$

所以

(1) $p\neq 2$ 时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关.

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha)=\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\1&-3&2&-6&1\\1&5&-1&10&6\\3&1&p+2&p&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&6&-4&12&2\\0&4&p-7&p+6&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&0&-7&0&-7\\0&0&p-9&p-2&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&0&1&0&1\\0&0&0&p-2&1-p\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&2\\0&1&0&2&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&p-2&1-p\end{pmatrix}.$$

得 $x_1=2,x_2=\dfrac{3p-4}{p-2},x_3=1,x_4=\dfrac{1-p}{p-2}$.

即 $a=2a_1+\dfrac{3p-4}{p-2}a_2+a_3+\dfrac{1-p}{p-2}a_4$.

(2) $p=2$ 时 a_1,a_2,a_3,a_4 线性相关，其秩为 3，a_1,a_2,a_3 是其一个极大线性无关组.

[1999,3,4] 设向量 b 可由向量组 $a_1,a_2,\mathbf{L},a_m$ 线性表示，但不能由向量组(I): $a_1,a_2,\mathbf{L},a_{m-1}$ 线性表示.

记向量组(II): $a_1,a_2,\mathbf{L},a_{m-1},b$. 则

(A) a_m 不能由(I)线性表示，也不能由(II)线性表示

(B) a_m 不能由(I)线性表示，但可由(II)线性表示

(C) a_m 可由(I)线性表示，也可由(II)线性表示

(D) a_m 可由(I)线性表示，但不能由(II)线性表示

解：由已知，向量 b 可由向量组 $a_1,a_2,\mathbf{L},a_m$ 线性表示，故存在一组数 $k_1,k_2,\mathbf{L},k_m$ 使得

$$k_1a_1+k_2a_2+\mathbf{L}+k_ma_m=b.$$

又由已知 b 不能由向量组 $a_1,a_2,\mathbf{L},a_{m-1}$ 线性表示，故 $k_m\neq 0$.

$\therefore a_m=b-\dfrac{k_1}{k_m}a_1-\dfrac{k_2}{k_m}a_2-\mathbf{L}-\dfrac{k_{m-1}}{k_m}a_{m-1}$，即 a_m 可由(II)线性表示. (可排除 A, C)

又由 b 不能由向量组 $a_1,a_2,\mathbf{L},a_{m-1}$ 线性表示，故 a_m 不能由(I)线性表示. 否则，b 由向量组 $a_1,a_2,\mathbf{L},a_m$ 线性表示后，代入 a_m 的(I)的线性表示，即得 b 能由向量组 $a_1,a_2,\mathbf{L},a_{m-1}$ 线性表示，矛盾.

故正确答案是 B.

[1998,1] 设 A 是 n 阶矩阵，若存在正整数 k,使线性方程组 $A^k x = 0$ 有解向量 a ，且 $A^{k-1}a \neq 0$.

证明：向量组 $a, Aa, \mathbf{L}, A^{k-1}a$ 是线性无关的.

【详解】设有常数 $l_0, l_1, \mathbf{L}, l_{k-1}$ 使得 $l_0 a + l_1 Aa + \mathbf{L} + l_{k-1}A^{k-1}a = 0$.

则 $A^{k-1}(l_0 a + l_1 Aa + \mathbf{L} + l_{k-1}A^{k-1}a) = 0.$

由已知 $A^k a = 0$，得 $l_0 A^{k-1}a = 0$.

再由已知 $A^{k-1}a \neq 0$，得 $l_0 = 0.$

同现可得 $l_1 = \mathbf{L} = l_{k-1} = 0.$ 所以向量组 $a, Aa, \mathbf{L}, A^{k-1}a$ 线性无关.

[1998,4] 若向量组 a, b, g 线性无关; a, b, d 线性相关, 则

(A) a 必可由 b, g, d 线性表示.　(B) b 必不可由 a, g, d 线性表示

(C) d 必可由 a, b, g 线性表示　(D) d 必不可由 a, b, g 线性表示

解: 由 a, b, g 线性无关, 得 a, b 线性无关. 又由 a, b, d 线性相关, 得 d 可由 a, b 线性表示.

所以 d 必可由 a, b, g 线性表示. (C)正确.

[1997,1] 设 $a_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, 则三条直线 $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,\ \ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0,$

$a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$ (其中 $a_i^2 + b_i^2 \neq 0, i = 1,2,3$) 交于一点的充要条件是

(A) a_1, a_2, a_3 线性相关.　(B) a_1, a_2, a_3 线性无关.

(C) $r(a_1, a_2, a_3) = r(a_1, a_2)$.　(D) a_1, a_2, a_3 线性相关, a_1, a_2 线性无关.

【答】 应选(D).

【详解】由题设，三条直线相交于一点，即线性方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3=0 \end{cases}$ 有唯一解,

其充要条件为 $r(a_1,a_2,a_3)=r(a_1,a_2)=2$, 所以 a_1,a_2,a_3线性相关, a_1,a_2线性无关.

[1997,3,4] 设向量a_1,a_2,a_3线性无关, 则下列向量组中, 线性无关的是

(A) a_1+a_2,a_2+a_3,a_3-a_1

(B) $a_1+a_2,a_2+a_3,a_1+2a_2+a_3$

(C) $a_1+2a_2,2a_2+3a_3,3a_3+a_1$

(D) $a_1+a_2+a_3,2a_1-3a_2+22a_3,3a_1+5a_2-5a_3$

【答】 应选(C)

【详解】(A): $(a_1+a_2)-(a_2+a_3)+(a_3-a_1)=0$

(B): $(a_1+a_2)+(a_2+a_3)-(a_1+2a_2+a_3)=0$

(C): $(a_1+2a_2,2a_2+3a_3,3a_3+a_3)=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$

$\mathbf{Q}\begin{vmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{vmatrix}=6+2=12\neq 0$. $\therefore\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$可逆, 所以向量组线性无关.

(D): $(a_1+a_2+a_3,2a_1-3a_2+22a_3,3a_1+5a_2-5a_3)=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}1&2&3\\1&-3&5\\1&22&-5\end{pmatrix}$.

$\mathbf{Q}\begin{vmatrix}1&2&3\\1&-3&5\\1&22&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-5&2\\0&20&-8\end{vmatrix}=0$. $\therefore\begin{pmatrix}1&2&3\\1&-3&5\\1&22&-5\end{pmatrix}$不可逆, 所以向量组线性相关.

[1997,4] 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中未知数的个数为 $\boldsymbol{n}$,方程个数为 $\boldsymbol{m}$,系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $\boldsymbol{r}$,则( ).

(A) $r=m$ 时,方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解.
(B) $r=n$ 时, 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

(C) $m = n$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解

(D) $r < n$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解.

【答】 应选(A)

【详解】 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解的充要条件为: $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}, b)$. 已知 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，若 $r(\boldsymbol{A}) = m$，相当于 A 的 m 个行向量线性无关，因此添加一个分量后得$(\boldsymbol{A},b)$的 m 个行向量仍线性无关，即有 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A},b)$. 所以 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解. 故(A)成立. 对于(B),(C),(D)均不能保证 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A},b)$. 既不能保证有解，更谈不上有唯一解或无穷多解.

[题]

线性表示

[2011,1,2] 设向量组 $a_1=(1,0,1)^T, a_2=(0,1,1)^T, a_3=(1,3,5)^T$ **不能由** $b_1=(1,1,1)^T, b_2=(1,2,3)^T$,

$b_3=(3,4,a)^T$ **线性表出。**

(1) 求 a**；　(2) 将** b_1,b_2,b_3 **由** a_1,a_2a_3 **线性表出。**

解: (1) $\because |a_1,a_2,a_3| = \begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&0&1\end{vmatrix} = 1\neq 0$.

$\therefore a_1,a_2,a_3$ 线性无关.

由已知 a_1,a_2,a_3 不能由 b_1,b_2,b_3 线性表示，所以 $r(b_1,b_2,b_3)\le 2$.

$\therefore |b_1,b_2,b_3| = 0$.

而 $|b_1,b_2,b_3| = \begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&3\\0&1&1\\0&1&a-4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&3\\0&1&1\\0&0&a-5\end{vmatrix} = a-5$.

所以 $a = 5$.

(2) $$(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3) = \begin{pmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&1&4&0&2&2\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&0&1&-1&0&-2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{pmatrix}$$

所以有 $b_1 = 2a_1 + 4a_2 - a_3, b_2 = a_1 + 2a_2 + 0a_3, b_3 = 5a_1 + 10a_2 - 2a_3$.

[2011,3] 设向量组 $a_1 = (1,0,1)^T, a_2 = (0,1,1)^T, a_3 = (1,3,5)^T$ **不能由** $b_1 = (1,a,1)^T, b_2 = (1,2,3)^T$,

$b_3 = (1,3,5)^T$ **线性表出。**

(1) 求 a**；　(2) 将** b_1, b_2, b_3 **由** $a_1, a_2 a_3$ **线性表出。**

解: (1) $\mathbf{Q} \left| a_1, a_2, a_3 \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

$\therefore a_1, a_2, a_3$ 线性无关.

由已知 a_1, a_2, a_3 不能由 b_1, b_2, b_3 线性表示, 所以 $r(b_1, b_2, b_3) \leq 2$.

$\therefore \left| b_1, b_2, b_3 \right| = 0$.

而 $\left| b_1, b_2, b_3 \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3-a \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = a - 1$.

所以 $a = 1$.

(2) $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

所以有 $b_1 = 2a_1 + 4a_2 - a_3, b_2 = a_1 + 2a_2 + 0a_3, b_3 = 0a_1 + 0a_2 + a_3$.

[1998,2] 已知 $a_1 = (1,4,0,2)^T, a_2 = (2,7,1,3)^T, a_3 = (0,1,-1,a)^T, b = (3,10,b,4)^T$**，问**

(1) a, b 取何值时，b 不能由 a_1, a_2, a_3 线性表示？

(2) a, b 取何值时，b 能由 a_1, a_2, a_3 线性表示？并写出其表达式.

解：$(a_1,a_2,a_3,b)=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&1&-1&b\\0&-1&a&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&0&b-2\\0&0&a-1&0\end{pmatrix}$.

所以，$b\neq 2$时，方程组 $(a_1,a_2,a_3,b)X=0$无解，即b不能由 a_1,a_2,a_3 线性表示.

当$b=2,a\neq 1$时，方程组 $(a_1,a_2,a_3,b)X=0$有唯一解，

$$(a_1,a_2,a_3,b)=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

解为 $x=(-1,2,0)^T$， 即 $b=-a_1+2a_2$.

当$b=2,a=1$时，方程组 $(a_1,a_2,a_3,b)X=0$有无穷多解，

$$(a_1,a_2,a_3,b)\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

解为 $x=(-1,2,0)^T+c(-2,1,1)^T=(-1-2c,2+c,c)$.

此时有 $b=-(1+2c)a_1+(2+c)a_2+ca_3$, c 为任意常数.

[题]

向量组与矩阵的秩

[2010,1] 设$a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\a\end{pmatrix}$，若由$a_1,a_2,a_3$形成的向量组的秩为 2，则 $a=$________ .

【答案】应填6.

【分析】本题考查向量之间的线性关系，是最基础的题.

【详解】由 a_1,a_2,a_3 形成的向量组的秩为2，即 $r(a_1,a_2,a_3)=2$，从而向量组线性相关. 对 (a_1,a_2,a_3) 作初等行变换有：

$$(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\-1&0&1\\0&2&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&-3\\0&1&3\\0&2&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&a-6\\0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 a =6. 故应填 6 .

[2000,2] 已知向量组 $b_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix}$ **与向量组** $a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}9\\6\\-7\end{pmatrix}$ **具有相同的秩，且** b_3 **可由** a_1,a_2,a_3 **线性表示，求** a,b **的值.**

解：由 b_3 可由 a_1,a_2,a_3 线性表示，线性方程组 $(a_1,a_2,a_3)X=b_3$ 有解.

$$(a_1,a_2,a_3,b_3)=\begin{pmatrix}1&3&9&b\\2&0&6&1\\-3&1&-7&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&9&b\\2&0&6&1\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}0&4&8&b+1\\0&2&4&3\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0&b-5\\0&2&4&3\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}.$$

所以有 $b=5$. 且 $r(a_1,a_2,a_3)=2$.

又由已知 $r(b_1,b_2,b_3)=r(a_1,a_2,a_3)=2$.

所以 $0=\left|b_1,b_2,b_3\right|=\begin{vmatrix}0&a&5\\1&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&a&5\\0&3&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=a-15$.

所以 $a=15$.

[1988,4]

（一）填空题(3.1 ~ 3.10)

3.1(1988年数学四)　若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶非零方阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})$ ____ n.

[1990,1]

3.2(1990 年数学一、二) 已知向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4),\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4,5),$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,5,6),\quad \boldsymbol{\alpha}_4=(4,5,6,7),$$

则该向量组的秩是________.

答案是：2.

[1992,1,2]

3.3(1992 年数学一、二) 设 $a_i\neq 0, b_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$，矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix},$$

则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=$ ________.

[1996,1,2]

3.4(1996 年数学一、二) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×3 矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$，而 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，则 $r(\boldsymbol{AB})=$ ________.

答案是：2.

[1993,4]

3.5(1993 年数学四) 设四阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，则其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩为________.

答案是：0.

[1987,1,2]

3.9(1987 年数学一、二) 已知三维线性空间的一组基底为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}},$$

则向量 $\boldsymbol{\beta}=(2,0,0)^{\mathrm{T}}$ 在上述基底下的坐标是________.

答案是：$(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

[1993,1,2]

3.11(1993 年数学一、二)　已知

$$Q=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{P}$ 为三阶非零矩阵,且满足 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$,则(　　).

(A) $t=6$ 时,$\boldsymbol{P}$ 的秩必为 1;　　(B) $t=6$ 时,$\boldsymbol{P}$ 的秩必为 2;

(C) $t\neq 6$ 时,$\boldsymbol{P}$ 的秩必为 1;　　(D) $t\neq 6$ 时,$\boldsymbol{P}$ 的秩必为 2.

答案是:(C).

分析　对 Q 作初等行变换得:

$$Q=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&t-6\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

容易看到,当 $t=6$ 时,Q 的秩为 1;当 $t\neq 6$ 时,Q 的秩为 2. 由于 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$,所以

$$秩(\boldsymbol{P})+秩(\boldsymbol{Q})\leqslant 3$$

[1994,5]

3.12(1994 年数学五)　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶非零矩阵,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的秩(　　).

(A) 必有一个等于零;　　(B) 都小于 n;

(C) 一个小于 n,一个等于 n;　　(D) 都等于 n.

答案是:(B).

[1995,4]

3.13(1995 年数学四)　设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的秩为 $r(\boldsymbol{A})=m<n$,$\boldsymbol{E}_m$ 为单位矩阵,下述结论正确的是(　　).

(A) $\boldsymbol{A}$ 的任意 m 个列向量必线性无关;

(B) $\boldsymbol{A}$ 的任意 m 阶子式不等于零;

(C) 若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$;

(D) $\boldsymbol{A}$ 通过初等行变换,必可化为 $(\boldsymbol{E}_m\ \boldsymbol{O})$ 的形式.

答案是:(C).

[1988,1,2]

3.14(1988 年数学一、二)　n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(3\leqslant s\leqslant n)$ 线性无关的充分必要条件是(　　).

(A) 存在一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\boldsymbol{O}$；

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量都线性无关；

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中存在一个向量，它不能用其余向量线性表示；

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表示.

答案是：(D).

[1992,5]

3.15(1992 年数学五)　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 均为 n 维向量，那么下列结论正确的是(　　).

(A) 若 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关；

(B) 若对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\neq\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关；

(C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{O}$；

(D) 若 $0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

答案是：(B).

[1996,4,5]

3.16(1996 年数学四、五)　设有任意两个 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$. 若存在两组不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 和 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使

$$(\lambda_1+k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_2+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(\lambda_m+k_m)\boldsymbol{\alpha}_m+(\lambda_1-k_1)\boldsymbol{\beta}_1+(\lambda_2-k_2)\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+(\lambda_m-k_m)\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{O},$$

则(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 都线性相关；

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 都线性无关；

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关；

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关.

答案是：(D).

分析　取

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,0),\quad\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,0,0),$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(0,0,1,0),\quad\boldsymbol{\beta}_2=(0,0,0,1),$$

若 $\lambda_1=k_1=0,\lambda_2=k_2=1$. 则

$$(\lambda_1+k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(\lambda_1-k_1)\boldsymbol{\beta}_1+(\lambda_2-k_2)\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{O}.$$

显然，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，故(A)，(B) 不正确.

[1989,1,2]

3.21(1989 年数学一、二)　设 A 是四阶矩阵，且 A 的行列式 $|A|=0$，则 A 中(　　).
(A) 必有一列元素全为 0；

(B) 必有两列元素对应成比例；
(C) 必有一列向量是其余列向量的线性组合；
(D) 任一列向量是其余列向量的线性组合.
答案是：(C).

[1989,4]

3.22(1989 年数学四)　设 A 是 n 阶方阵，且 $|A|=0$，则(　　).
(A) A 中必有两行(列)的元素对应成比例；
(B) A 中任意一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合；
(C) A 中必有一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合；
(D) A 中至少有一行(列)向量的元素全为 0.
答案是：(C).

[1987,4,5]

3.23(1987 年数学四、五)　假设 A 是 n 阶方阵，其秩 $r<n$，那么在 A 的 n 个行向量中(　　).
(A) 必有 r 个行向量线性无关；
(B) 任意 r 个行向量线性无关；
(C) 任意 r 个行向量都构成极大线性无关向量组；
(D) 任意一个行向量都可以由其他 r 个行向量线性表出.

答案是：(A).

[1995,5]

3.24(1995 年数学五)　设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的秩为 $r(A)=m<n$，E_m 为 m 阶单位矩阵，下述结论中正确的是(　　).
(A) A 的任意 m 个列向量必线性无关；
(B) A 的任意一个 m 阶子式不等于零；
(C) A 通过初等行变换必可化为 $(E_m\ O)$ 的形式；
(D) 若非齐次线性方程组 $AX=b$ 有解，则一定有无穷多组解.
答案是：(D).

[1994,4]

3.25(1994 年数学四)　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{C}$ 是 n 阶可逆矩阵．矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AC}$ 的秩为 r_1，则(　　)．

(A) $r>r_1$;　　(B) $r<r_1$;

(C) $r=r_1$;　　(D) r 与 r_1 的关系依 $\boldsymbol{C}$ 而定．

答案是：(C)．

[1994,5]

3.26(1994 年数学五)　设有向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4),\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2),\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14),$$
$$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-2,2,0),\quad \boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,10),$$

则该向量组的极大线性无关组是(　　)．

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$;　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$;

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5$;　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$.

答案是：(B)．

[1994,1,2]

3.28(1994 年数学一、二)　已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，则向量组(　　)．

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关；

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关；

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关；

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关．

答案是：(C)．

[1989,4,5]

3.33(1989 年数学四、五)　设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1),\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3),\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,t).$$

问：(1) 当 t 为何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关？

(2) 当 t 为何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关？

(3) 当向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关时，将 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 表为 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合．

[1991,4,5]

3.34(1991 年数学四、五) 设有三维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1+\lambda\\1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1+\lambda\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1+\lambda\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{bmatrix}.$$

问 λ 取何值时：

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表达式惟一？

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表达式不惟一？

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？

[1991,1,2]

3.35(1991 年数学一、二) 已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,3),\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,5),\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2,1),$$
$$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,4,a+8)\quad 及\quad \boldsymbol{\beta}=(1,1,b+3,5).$$

(1) a,b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合？

(2) a,b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 有 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的惟一线性表示式？并写出该表示式.

[1992,1,2]

3.40(1992 年数学一、二) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，问：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？证明你的结论.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？证明你的结论.

[1991,4]

3.41(1991 年数学四) 试证明 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是

$$D=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_n\end{vmatrix}\neq 0.$$

分析 设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充要条件是满足这一方程的 $k_1,\cdots,k_n$ 只能全为零.

证 **方法一** 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{O},$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm T},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm T},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm T}$ 分别左乘上式两端得 n 个方程

$$\begin{cases} k_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{O}, \\ k_1\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{O}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_1\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{O}. \end{cases}$$

方法二 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，即 $|\boldsymbol{A}|^2 \neq 0$，

$$|\boldsymbol{A}|^2 = |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}| = \left| \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} [\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_n] \right|$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \end{vmatrix} \neq 0.$$

3.42(1988 年数学四、五) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s (s \geqslant 2)$ 线性无关，设

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{\beta}_{s-1} = \boldsymbol{\alpha}_{s-1} + \boldsymbol{\alpha}_s, \quad \boldsymbol{\beta}_s = \boldsymbol{\alpha}_s + \boldsymbol{\alpha}_1,$$

讨论向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 的线性相关性.

[1995,4]

3.44(1995 年数学四) 已知向量组(Ⅰ) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$；(Ⅱ) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$；(Ⅲ) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_5$. 如果向量组的秩分别为 $r(\text{Ⅰ}) = r(\text{Ⅱ}) = 3, r(\text{Ⅲ}) = 4$. 求证向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_5 - \boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 4.

分析 根据 $r(\text{Ⅰ}) = r(\text{Ⅱ}) = 3$ 知 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示. 根据 $r(\text{Ⅲ}) = 4$ 知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关，然后可证 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_5 - \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

[1993,1,2]

3.45(1993 年数学一、二) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n \times m$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $m \times n$ 矩阵，其中 $n < m$，$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵，若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$. 证明：$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.

分析 根据 $n = \text{秩}(\boldsymbol{E}) \leqslant \min\{\text{秩}(\boldsymbol{A}), \text{秩}(\boldsymbol{B})\}$ 容易证明；也可以根据定义证明.

证 **方法一** 由 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$ 得

$$n = \text{秩}(\boldsymbol{E}) \leqslant \min\{\text{秩}(\boldsymbol{A}), \text{秩}(\boldsymbol{B})\} \leqslant \text{秩}(\boldsymbol{B}),$$

因为 $n < m$，故秩$(\boldsymbol{B}) = n$. 因此，$\boldsymbol{B}$ 的 n 个列向量组线性无关.

[1994,5]

3.46(1994 年数学五) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵, $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵 $(m>n)$. 已知 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$, 试判断 $\boldsymbol{A}$ 的列向量是否线性相关? 为什么?

解: A 的列向量组线性无关

由于 $n=r(E)=r(BA)\le r(A)\le n$, 所以 r(A) = n.

所以 A 的列向量组的秩是 n. 而 A 的列数为 n, 故 A 的列向量组线性无关.

[1993,2]

3.47(1993 年数学二) 已知 $\boldsymbol{R}^3$ 是两个基为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix}.$$

求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵.

分析 按过渡矩阵的定义式就可求得.

解 设 $\boldsymbol{R}^3$ 中由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$. 此即

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P},$$

[题]

线性方程组

[2011,1,2] 设 $A=(a_1,a_2,a_3,a_4)$, 若 $(1,0,1,0)^T$ 是方程 **AX=0** 的一个基础解系, 则 $A^*X=0$ 的基础解系可表示为 **( ).**

$(A)a_1,a_2\quad (B)a_1,a_3\quad (C)a_1,a_2,a_3\quad (D)a_2,a_3,a_4$

答案: (D).

详解: 由 $(1,0,1,0)^T$ 是方程 AX=0 的一个基础解系知 r(A) = 3. 所以 $r(A^*)=1,\quad |A|=0.$

所以 $A^*X=0$ 的基础解系含 3 个解向量，且 $A^*A=|A|E=0$.

所以 A 的列向量组 a_1,a_2,a_3,a_4 是 $A^*X=0$ 的解.

再由 $(1,0,1,0)^T$ 是方程 AX=0 的解得 $a_1+a_3=0$.

所以 a_2,a_3,a_4 线性无关，是 $A^*X=0$ 的基础解系．故选(D).

[2011,3] A **为** 4×3 **矩阵，** h_1,h_2,h_3 **是非齐次线性方程组** $Ax=b$ **的 3 个线性无关的解，** k_1,k_2 **为任意常数，则** $Ax=b$ **的通解为（　　）.**

（A）$\dfrac{h_2+h_3}{2}+k_1(h_2-h_1)$　　（B）$\dfrac{h_2-h_3}{2}+k_2(h_2-h_1)$

（C）$\dfrac{h_2+h_3}{2}+k_1(h_3-h_1)+k_2(h_2-h_1)$　　（D）$\dfrac{h_2-h_3}{2}+k_2(h_2-h_1)+k_3(h_3-h_1)$

【答案】C

【详解】非齐次线性方程组的解的线性组合的解仍是其解的充要条件是组合系数之和等于 1.

(非齐次线性方程组的解的线性组合的解是其导出组的解的充要条件是组合系数之和等于 0.)

非齐次线性方程组的解的差是其导出组的解.

易知，h_3-h_1,h_2-h_1 线性无关．故 C 正确.

[2010,1,2,3] **设** $A=\begin{pmatrix} l & 1 & 1\\ 0 & l-1 & 0\\ 1 & 1 & l\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix} a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$**,已知线性方程组** $Ax=b$ **存在 2 个不同解,**

(I)　求 λ,a **；　(II) 求方程组** $Ax=b$ **的通解.**

【分析】本题考查方程组解的判定与通解的求法．由非齐次线性方程组存在2个不同解知对应齐次线性方程组有非零解，而且非齐次线性方程组有无穷多解.

【详解】(I) $\bar{A}=\begin{pmatrix} l & 1 & 1 & a\\ 0 & l-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & l & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & l & 1\\ 0 & l-1 & 0 & 1\\ 0 & 1-l & 1-l^2 & a-l\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & l & 1\\ 0 & l-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1-l^2 & 1+a-l\end{pmatrix}$.

由已知线性方程组 Ax = b 存在 2 个不同解，故方程组有无穷多解，此时 $r(A)=r(\bar{A})<3$.

故 $l=-1$ 且 $a=-2$.

(II) $\bar{A} \to \mathbf{L} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

故方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解: $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, k 为任意常数.

[2009,1,2,3] 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$，$x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(I) 求满足 $Ax_2 = x_1, A^2x_3 = x_1$ 的所有向量 x_2, x_3，

(II) 对 (I) 中的任一向量 x_2, x_3，证明：x_1, x_2, x_3 线性无关。

【解析】 (I) 解方程 $Ax_2 = x_1$

$$\left(A, x_1\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 2$ 故有一个自由变量，令 $x_3 = 2$，由 $Ax = 0$ 解得，$x_2 = -1, x_1 = 1$

求特解，令 $x_1 = x_2 = 0$，得 $x_3 = 1$. 故 $x_2 = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 k_1 为任意常数.

解方程 $A^2x_3 = x_1$，$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left(A^2,x_1\right)=\begin{pmatrix}2&2&0&-1\\-2&-2&0&1\\4&4&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&\frac{-1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故有两个自由变量，令 $x_2=-1,x_3=0$，由 $A^2x=0$ 得 $x_1=1$

令 $x_2=0,x_3=1$，由 $A^2x=0$ 得 $x_1=0$

求特解 $h_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$ 故 $x_3=k_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$，其中 k_2,k_3 为任意常数

(II) 证明：由于

$$\begin{vmatrix}-1&k_1&k_2-\frac{1}{2}\\1&-k_1&-k_2\\-2&2k_1+1&k_3\end{vmatrix}=k_1k_3+2k_1k_2+(2k_1+1)(k_2-\frac{1}{2})-2k_1(k_2-\frac{1}{2})-k_2(2k_1+1)-k_1k_3=-\frac{1}{2}\neq 0$$

故 x_1,x_2,x_3 线性无关.

[2008,1,2,3,4] 设 n 元线性方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix}2a&1&&&&\\a^2&2a&1&&&\\&a^2&2a&1&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&a^2&2a&1\\&&&&a^2&2a\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

（I）证明行列式 $|A|=(n+1)a^n$；

（II）当 a 为何值时，该方程组有惟一解，并求 x_1.

（III）当 a 为何值时，该方程组有无穷多解，并求其通解.

【详解】(I)【证法 1】数学归纳法. 记 $D_n=|A|=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n$

以下用数学归纳法证明 $D_n=(n+1)a^n$.

当 $n=1$ 时, $D_1=2a$, 结论成立.

当 $n=2$ 时, $D_2=\begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix}=3a^2$, 结论成立.

假设结论对小于 n 的情况成立. 将 D_n 按第一行展开得

$$D_n=2aD_{n-1}-\begin{vmatrix} a^2 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n-1} \quad =2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}$$

$$=2ana^{n-1}-a^2(n-1)a^{n-2} \quad =(n+1)a^n$$

故 $|A|=(n+1)a^n$.

【注】本题(1)也可用递推法. 由 $D_n=\cdots=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}$ 得,

$D_n-aD_{n-1}=a(D_{n-1}-aD_{n-2})=\cdots=a^{n-2}(D_2-a^{n-2}D_1)=a^n$. 于是 $D_n=(n+1)a^n$

(I)【证法 2】消元法. 记 $|A|=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n \xlongequal{r_2-\frac{1}{2}ar_1} \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n$

$$\xlongequal{r_3-\frac{2}{3}ar_2}\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & & & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & 1 & & & \\ & & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n = \cdots\cdots$$

$$\xlongequal{r_n-\frac{n-1}{n}ar_{n-1}}\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \frac{n}{n-1}a & 1 \\ & & & & 0 & \frac{n+1}{n}a \end{vmatrix}_n = (n+1)a^n .$$

（II）【详解】当 $a \neq 0$ 时，方程组系数行列式 $D_n \neq 0$，故方程组有惟一解．由克莱姆法则，将 D_n 得第一列换成 b，得行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n-1} = D_{n-1} = na^{n-1}$$

所以，$x_1 = \dfrac{D_{n-1}}{D_n} = \dfrac{a}{(n+1)a}$.

（III）【详解】 当 $a = 0$ 时，方程组为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

此时方程组系数矩阵得秩和增广矩阵得秩均为 $n-1$，所以方程组有无穷多组解，其通解为

$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T + k\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T$，其中 k 为任意常数.

[2007,1,2,3,4] 设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+ax_3=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$ ①

与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ ②

有公共解，求 a 的值及所有公共解.

【分析】 两个方程有公共解就是①与②联立起来的非齐次线性方程组有解.

【详解】 将①与②联立得非齐次线性方程组:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+ax_3=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0, \\ x_1+2x_2+x_3=a-1. \end{cases} \quad ③$$

若此非齐次线性方程组有解，则①与②有公共解，且③的解即为所求全部公共解. 对③的增广矩阵 $\overline{A}$ 作初等行变换得:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-2)(a-1) & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}.$$

于是 1° 当 a=1 时，有 $r(A)=r(\overline{A})$=2<3，方程组③有解，即①与②有公共解，其全部公共解即为③的通解，此时

$$\overline{A}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此时方程组③为齐次线性方程组，其基础解系为: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

所以①与②的全部公共解为 $k\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$k$ 为任意常数.

2° 当 a =2 时，有 $r(A)=r(\overline{A})$=3，方程组③有唯一解，此时

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$，故方程组③的解为: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

即①与②有唯一公共解: 为 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

【LRY】当 $a \neq 1$ 且 $a \neq 2$ 时，有 $r(A) = 3, r(\overline{A}) = 4$ =3，方程组③无解.

【评注】本题为基础题型，考查非齐次线性方程组解的判定和结构.

[2006,1,2] 已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$ **有 3 个线性无关的解.**

（Ⅰ）证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$；

（Ⅱ）求 a, b 的值及方程组的通解.

【分析】(I)根据系数矩阵的秩与基础解系的关系证明;(II)利用初等变换求矩阵 A 的秩确定参数 a, b，然后解方程组.

【详解】 (I) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是方程组 $Ax = \beta$ 的 3 个线性无关的解，其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \\ a & 1 & 3 & b \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

则有 $A(\alpha_1 - \alpha_2) = 0, A(\alpha_1 - \alpha_3) = 0$.

则 $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3$ 是对应齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解，且线性无关.（否则，易推出 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，矛盾）.

所以 $n - r(A) \geq 2$，即 $4 - r(A) \geq 2 \Rightarrow r(A) \leq 2$.

又矩阵 A 中有一个 2 阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$，所以 $r(A) \leq 2$.

因此 $r(A) = 2$.

(II) 因为

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\4&3&5&-1\\a&1&3&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&1&-5\\0&1-a&3-a&b-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&1&-5\\0&0&4-2a&b+4a-5\end{pmatrix}.$$

又 $r(A)=2$，则

$$\begin{cases}4-2a=0\\b+4a-5=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=-3\end{cases}.$$

对原方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 施行初等行变换，

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\2&1&3&-3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-4&2\\0&1&-1&5&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故原方程组与下面的方程组同解.

$$\begin{cases}x_1=-2x_3+4x_4+2\\x_2=x_3-5x_4-3\end{cases}.$$

选 x_3,x_4 为自由变量，则

$$\begin{cases}x_1=-2x_3+4x_4+2\\x_2=x_3-5x_4-3\\x_3=x_3\\x_4=x_4\end{cases}.$$

故所求通解为

$$x=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\end{pmatrix},\quad k_1,k_2\text{为任意常数}.$$

[2005,1,2] 已知 3 阶矩阵 A 的第一行是 $(a,b,c),a,b,c$ 不全为零，矩阵 $B=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{bmatrix}$

（k 为常数），且 AB=O, 求线性方程组 Ax=0 的通解.

【分析】 AB=O, 相当于告之 B 的每一列均为 Ax=0 的解，关键问题是 Ax=0 的基础解系所含解向量的个数为多少，而这又转化为确定系数矩阵 A 的秩.

【详解】 由 AB=O 知，B 的每一列均为 Ax=0 的解，且 $r(A)+r(B)\le 3$.

(1)若 $k\neq 9$, 则 r(B)=2, 于是 $r(A)\le 1$, 显然 $r(A)\ge 1$, 故 r(A)=1. 可见此时 Ax=0 的基础解系所含解向量的个数为 3-r(A)=2, 矩阵 B 的第一、第三列线性无关，可作为其基础解系，故 Ax=0 的通解为：

$$x = k_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}3\\6\\k\end{pmatrix}, k_1, k_2 \text{为任意常数.}$$

(2) 若 k=9，则 r(B)=1, 从而 $1 \le r(A) \le 2$.

1） 若 r(A)=2, 则 Ax=0 的通解为： $x = k_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, k_1$ 为任意常数.

2） 若 r(A)=1, 则 Ax=0 的同解方程组为： $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$，不妨设 $a \ne 0$，则其通解为

$$x = k_1\begin{pmatrix}-\frac{b}{a}\\1\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\0\\1\end{pmatrix}, k_1, k_2 \text{为任意常数.}$$

[2005,3,4] 已知齐次线性方程组 (I) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0, \end{cases}$ **和 (II)** $\begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \\ 2x_1 + b^2 x_2 + (c+1)x_3 = 0, \end{cases}$

同解，求 a,b,c 的值.

【分析】 方程组（ii）显然有无穷多解，于是方程组（i）也有无穷多解，从而可确定 a，这样先求出（i）的通解，再代入方程组（ii）确定 b,c 即可.

【详解】 方程组（ii）的未知量个数大于方程个数，故方程组方程组（ii）有无穷多解.因为方程组（i）与（ii）同解，所以方程组（i）的系数矩阵的秩小于 3.

对方程组（i）的系数矩阵施以初等行变换

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&a\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a-2\end{bmatrix},$$

从而 a=2. 此时，方程组（i）的系数矩阵可化为

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

故 $(-1,-1,1)^T$ 是方程组（i）的一个基础解系.

将 $x_1 = -1, x_2 = -1, x_3 = 1$ 代入方程组（ii）可得

$$b = 1, c = 2 \text{ 或 } b = 0, c = 1.$$

当 $b=1,c=2$ 时，对方程组（ii）的系数矩阵施以初等行变换，有

$$\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix},$$

显然此时方程组（i）与（ii）同解.

当 $b=0,c=1$ 时，对方程组（ii）的系数矩阵施以初等行变换，有

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\2&0&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

显然此时方程组（i）与（ii）的解不相同.

综上所述，当 a=2,b=1,c=2 时，方程组（i）与（ii）同解.

[2004,1] 设有齐次线性方程组 $\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\mathbf{L}+x_n=0,\\2x_1+(2+a)x_2+\mathbf{L}+2x_n=0,\\\qquad\mathbf{L\ L\ L\ L\ L\ L}\\nx_1+nx_2+\mathbf{L}+(n+a)x_n=0,\end{cases}\quad(n\ge 2)$

试问 a 取何值时，该方程组有非零解，并求出其通解.

【分析】 本题是方程的个数与未知量的个数相同的齐次线性方程组，可考虑对系数矩阵直接用初等行变换化为阶梯形，再讨论其秩是否小于 n，进而判断是否有非零解；或直接计算系数矩阵的行列式，根据题设行列式的值必为零，由此对参数 a 的可能取值进行讨论即可.

【详解 1】 对方程组的系数矩阵 A 作初等行变换，有

$$A=\begin{bmatrix}1+a&1&1&\mathbf{L}&1\\2&2+a&2&\mathbf{L}&2\\\mathbf{L}&\mathbf{L}&\mathbf{L}&\mathbf{L}&\mathbf{L}\\n&n&n&\mathbf{L}&n+a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1+a&1&1&\mathbf{L}&1\\-2a&a&0&\mathbf{L}&0\\\mathbf{L}&\mathbf{L}&\mathbf{L}&\mathbf{L}&\mathbf{L}\\-na&0&0&\mathbf{L}&a\end{bmatrix}=B.$$

当 a=0 时， r(A)=1<n，故方程组有非零解，其同解方程组为

$$x_1+x_2+\mathbf{L}+x_n=0,$$

由此得基础解系为

$$h_1=(-1,1,0,\mathbf{L},0)^T,\ h_2=(-1,0,1,\mathbf{L},0)^T,\ \mathbf{L},h_{n-1}=(-1,0,0,\mathbf{L},1)^T,$$

于是方程组的通解为

$x=k_1h_1+\mathbf{L}+k_{n-1}h_{n-1}$，其中 $k_1,\mathbf{L},k_{n-1}$ 为任意常数.

当 $a\neq 0$ 时，对矩阵 B 作初等行变换，有

$$B \to \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \mathbf{L} & 1 \\ -2 & 1 & 0 & \mathbf{L} & 0 \\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} \\ -n & 0 & 0 & \mathbf{L} & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a+\frac{n(n+1)}{2} & 0 & 0 & \mathbf{L} & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \mathbf{L} & 0 \\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} \\ -n & 0 & 0 & \mathbf{L} & 1 \end{bmatrix}.$$

可知 $a=-\frac{n(n+1)}{2}$ 时，$r(A)=n-1<n$，故方程组也有非零解，其同解方程组为

$$\begin{cases} -2x_1+x_2=0, \\ -3x_1+x_3=0, \\ \quad \mathbf{L}\,\mathbf{L}\,\mathbf{L} \\ -nx_1+x_n=0, \end{cases}$$

由此得基础解系为

$$h=(1,2,\mathbf{L},n)^T,$$

于是方程组的通解为

$x=kh$，其中 k 为任意常数.

【详解 2】 方程组的系数行列式为

$$|A|=\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & \mathbf{L} & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \mathbf{L} & 2 \\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} \\ n & n & n & \mathbf{L} & n+a \end{vmatrix}=(a+\frac{n(n+1)}{2})a^{n-1}.$$

当 $|A|=0$，即 $a=0$ 或 $a=-\frac{n(n+1)}{2}$ 时，方程组有非零解.

当 $a=0$ 时，对系数矩阵 A 作初等行变换，有

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{L} & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \mathbf{L} & 2 \\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} \\ n & n & n & \mathbf{L} & n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{L} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{L} & 0 \\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

故方程组的同解方程组为

$$x_1+x_2+\mathbf{L}+x_n=0,$$

由此得基础解系为

$$h_1=(-1,1,0,\mathbf{L},0)^T,\ h_2=(-1,0,1,\mathbf{L},0)^T,\ \mathbf{L},h_{n-1}=(-1,0,0,\mathbf{L},1)^T,$$

于是方程组的通解为

$x=k_1h_1+\mathbf{L}+k_{n-1}h_{n-1}$，其中 $k_1,\mathbf{L},k_{n-1}$ 为任意常数.

当 $a=-\frac{n(n+1)}{2}$ 时，对系数矩阵 A 作初等行变换，有

$$A=\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \mathbf{L} & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \mathbf{L} & 2\\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L}\\ n & n & n & \mathbf{L} & n+a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \mathbf{L} & 1\\ -2a & a & 0 & \mathbf{L} & 0\\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L}\\ -na & 0 & 0 & \mathbf{L} & a\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \mathbf{L} & 1\\ -2 & 1 & 0 & \mathbf{L} & 0\\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L}\\ -n & 0 & 0 & \mathbf{L} & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \mathbf{L} & 0\\ -2 & 1 & 0 & \mathbf{L} & 0\\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L}\\ -n & 0 & 0 & \mathbf{L} & 1\end{bmatrix},$$

故方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}-2x_1+x_2=0,\\ -3x_1+x_3=0,\\ \quad\mathbf{L\,L\,L}\\ -nx_1+x_n=0,\end{cases}$$

由此得基础解系为

$$h=(1,2,\mathbf{L},n)^T,$$

于是方程组的通解为

$x=kh$，其中 k 为任意常数.

【评注】 矩阵 A 的行列式$|A|$也可这样计算：

$$A=\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \mathbf{L} & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \mathbf{L} & 2\\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L}\\ n & n & n & \mathbf{L} & n+a\end{bmatrix}=aE+\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \mathbf{L} & 1\\ 2 & 2 & 2 & \mathbf{L} & 2\\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L}\\ n & n & n & \mathbf{L} & n\end{bmatrix}$$，矩阵$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \mathbf{L} & 1\\ 2 & 2 & 2 & \mathbf{L} & 2\\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L}\\ n & n & n & \mathbf{L} & n\end{bmatrix}$的特征值为$0,\mathbf{L},0,\dfrac{n(n+1)}{2}$，从而 A 的特征值为$a,a,\mathbf{L},a+\dfrac{n(n+1)}{2}$，故行列式$|A|=(a+\dfrac{n(n+1)}{2})a^{n-1}$.

[2004,2] 设有齐次线性方程组$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+2x_3+2x_4=0,\\ 3x_1+3x_2+(3+a)x_3+3x_4=0,\\ 4x_1+4x_2+4x_3+(4+a)x_4=0,\end{cases}$ **试问a取何值时，该方程组有非零解，并求出其通解.**

【分析】此题为求含参数齐次线性方程组的解.由系数行列式为 0 确定参数的取值,进而求方程组的非零解.

【详解 1】对方程组的系数矩阵A作初等行变换，有

$$\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4+a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ -2a & a & 0 & 0 \\ -3a & 0 & a & 0 \\ -4a & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = B$$

当 $a=0$ 时，$r(A)=1<4$，故方程组有非零解，其同解方程组为

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0.$$

由此得基础解系为

$$h_1=(-1,1,0,0)^T,\ h_2=(-1,0,1,0)^T,\ h_3=(-1,0,0,1)^T,$$

于是所求方程组的通解为

$$x=k_1h_1+k_2h_2+k_3h_3，其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.$$

当 $a\neq 0$ 时，

$$B \to \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+10 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

当 $a=-10$ 时，$r(A)=3<4$，故方程组也有非零解，其同解方程组为

$$\begin{cases} -2x_1+x_2=0, \\ -3x_1+x_3=0, \\ -4x_1+x_4=0, \end{cases}$$

由此得基础解系为

$$h=(1,2,3,4)^T,$$

所以所求方程组的通解为

$$x=kh，其中 k 为任意常数.$$

【详解 2】方程组的系数行列式

$$|A|=\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4+a \end{pmatrix}=(a+10)a^3.$$

当 $|A|=0$，即 $a=0$ 或 $a=-10$ 时，方程组有非零解.

当 $a=0$ 时，对系数矩阵 A 作初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&2&2&2\\3&3&3&3\\4&4&4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故方程组的同解方程组为

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0.$$

其基础解系为

$$h_1=(-1,1,0,0)^T,\ h_2=(-1,0,1,0)^T,\ h_3=(-1,0,0,1)^T,$$

于是所求方程组的通解为

$$x=k_1h_1+k_2h_2+k_3h_3,\text{ 其中 }k_1,k_2,k_3\text{ 为任意常数.}$$

当 $a=-10$ 时，对 A 作初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix}-9&1&1&1\\2&-8&2&2\\3&3&-7&3\\4&4&4&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-9&1&1&1\\20&-10&0&0\\30&0&-10&0\\40&0&0&-10\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}-9&1&1&1\\-2&1&0&0\\-3&0&1&0\\-4&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-2&1&0&0\\-3&0&1&0\\-4&0&0&1\end{pmatrix}$$

故方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}x_2=2x_1,\\x_3=3x_1,\\x_4=4x_1,\end{cases}$$

其基础解系为 $h=(1,2,3,4)^T$,

所以所求方程组的通解为 $x=kh$，其中 k 为任意常数

【评注】解此题的方法是先根据齐次方程有非零解的条件确定方程组中的参数,再对求得的参数对应的方程组求解.

[2004,3] 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*\neq 0$，若 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的

互不相等的解，则对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系 (　　).

(A) 不存在.　　(B) 仅含一个非零解向量.

(C) 含有两个线性无关的解向量.　　(D) 含有三个线性无关的解向量.

【分析】 要确定基础解系含向量的个数，实际上只要确定未知数的个数和系数矩阵的秩.

【详解】 因为基础解系含向量的个数$=n-r(A)$，而且

$$r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n, \\ 1, & r(A)=n-1, \\ 0, & r(A)<n-1. \end{cases}$$

根据已知条件 $A^*\neq 0$, 于是$r(A)$等于n或$n-1$. 又$Ax=b$有互不相等的解,

即解不惟一，故$r(A)=n-1$. 从而基础解系仅含一个解向量，即选(B).

【评注】本题是对矩阵A与其伴随矩阵A^*的秩之间的关系、线性方程组解的结构等多个知识点的综合考查.

[2004,3] 设$\alpha_1=(1,2,0)^T$，$\alpha_2=(1,\alpha+2,-3\alpha)^T$，$\alpha_3=(-1,-b-2,\alpha+2b)^T$，$\beta=(1,3,-3)^T$，

试讨论当a,b为何值时,

(Ⅰ) β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示;

(Ⅱ) β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一地线性表示，并求出表示式;

(Ⅲ) β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式.

【分析】将β可否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示的问题转化为线性方程组$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\beta$

是否有解的问题即易求解.

【详解】 设有数k_1,k_2,k_3, 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\beta. \qquad (*)$$

记$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$. 对矩阵$(A,\beta)$施以初等行变换，有

$$(A,\beta)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -b-2 & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{bmatrix}.$$

(Ⅰ) 当$a=0$时，有

$$(A,\beta)\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

可知$r(A)\neq r(A,\beta)$. 故方程组(*)无解，β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

(Ⅱ) 当$a \neq 0$，且$a \neq b$时，有

$$(A,\beta) \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$r(A) = r(A,\beta) = 3$， 方程组(*)有唯一解：

$$k_1 = 1 - \frac{1}{a},\quad k_2 = \frac{1}{a},\quad k_3 = 0.$$

此时β可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$唯一地线性表示，其表示式为

$$\beta = (1-\frac{1}{a})\alpha_1 + \frac{1}{a}\alpha_2.$$

(Ⅲ) 当$a = b \neq 0$时，对矩阵(A,β)施以初等行变换，有

$$(A,\beta) \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$r(A) = r(A,\beta) = 2$， 方程组(*)有无穷多解， 其全部解为

$$k_1 = 1 - \frac{1}{a},\quad k_2 = \frac{1}{a} + c,\quad k_3 = c, \quad \text{其中}c\text{为任意常数}.$$

β 可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示，但表示式不唯一， 其表示式为

$$\beta = (1-\frac{1}{a})\alpha_1 + (\frac{1}{a} + c)\alpha_2 + c\alpha_3.$$

【评注】本题属于常规题型，曾考过两次(1991, 2000).

[2004,4] 设线性方程组 $\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + (2+\lambda)x_2 + (4+\mu)x_3 + 4x_4 = 1, \end{cases}$

已知$(1,-1,1,-1)^T$是该方程组的一个解，试求

(Ⅰ) 方程组的全部解，并用对应的齐次线性方程组的基础解系表示全部解；

(Ⅱ) 该方程组满足$x_2 = x_3$的全部解.

【分析】 含未知参数的线性方程组的求解，当系数矩阵为非方阵时一般用初等行变换法化增广矩阵为阶梯形，然后对参数进行讨论. 由于本题已知了方程组的一个解，于是可先由它来(部分)确定未知参数.

【详解】 将 $(1,-1,1,-1)^T$ 代入方程组，得 $\lambda=\mu$．对方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 施以初等行变换，得

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&\lambda&\lambda&1&0\\2&1&1&2&0\\3&2+\lambda&2+\lambda&4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2\lambda&1-\lambda&-\lambda\\0&1&3&1&1\\0&0&2(2\lambda-1)&2\lambda-1&2\lambda-1\end{pmatrix},$$

(Ⅰ) 当 $\lambda\neq\dfrac{1}{2}$ 时，有 $\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&-\dfrac{1}{2}&-\dfrac{1}{2}\\0&0&1&\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$,

$r(A)=r(\overline{A})=3<4$，故方程组有无穷多解，且 $\xi_0=(0,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0)^T$ 为其一个特解，

对应的齐次线性方程组的基础解系为 $\eta=(-2,1,-1,2)^T$，故方程组的全部解为

$$\xi=\xi_0+k\eta=(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)^T+k(-2,1,-1,2)^T\qquad(k\text{ 为任意常数}).$$

当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，有

$$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&3&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$r(A)=r(\overline{A})=2<4$，故方程组有无穷多解，且 $\xi_0=(-\dfrac{1}{2},1,0,0)^T$ 为其一个特解，

对应的齐次线性方程组的基础解系为 $\eta_1=(1,-3,1,0)^T$，$\eta_2=(-1,-2,0,2)^T$，

故方程组的全部解为

$$\xi=\xi_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2=(-\frac{1}{2},1,0,0)^T+k_1(1,-3,1,0)^T+k_2(-1,-2,0,2)^T$$

$$(k_1,k_2\text{ 为任意常数}).$$

(Ⅱ) 当 $\lambda\neq\dfrac{1}{2}$ 时，由于 $x_2=x_3$，即

$$-\frac{1}{2}+k=\frac{1}{2}-k,$$

解得 $k=\dfrac{1}{2}$，　故方程组的解为

$$\xi=(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)^T+\frac{1}{2}(-2,1,-1,2)^T=(-1,0,0,1)^T\ .$$

当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，　由于 $x_2=x_3$，即

$$1-3k_1-2k_2=k_1,$$

解得 $k_1=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}k_2$，故方程组的全部解为

$$\xi=(-\frac{1}{2},1,0,0)^T+(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}k_2)(1,-3,1,0)^T+k_2(-1,-2,0,2)^T$$
$$=(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},0)^T+k_2(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},2)^T,\quad (k_2\text{为任意常数}).$$

【评注】：(1) 含未知参数的线性方程组的求解是历年考试的重点，几乎年年考，务必很好掌握.

(2) 对于题(Ⅱ)，实际上就是在原来方程组中增加一个方程，此时新的方程组当 $\lambda\neq\frac{1}{2}$ 时有惟一解，当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时有无穷多解.

(3) 在题(Ⅱ)中，当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，解得 $k_2=\frac{1}{2}-2k_1$，方程组的全部解也可以表示为

$$\xi=(-1,0,0,1)^T+k_1(3,1,1,-4)^T,\quad (k_1\text{为任意常数}).$$

[2003,1] 设有齐次线性方程组 Ax=0 和 Bx=0, 其中 A,B 均为 $m\times n$ 矩阵，现有 4 个命题：

① 若 Ax=0 的解均是 Bx=0 的解，则秩(A)≥秩(B)；
② 若秩(A)≥秩(B)，则 Ax=0 的解均是 Bx=0 的解；
③ 若 Ax=0 与 Bx=0 同解，则秩(A)=秩(B)；
④ 若秩(A)=秩(B)， 则 Ax=0 与 Bx=0 同解.
以上命题中正确的是 (   ) .

(A) ① ②.　　(B) ① ③.
(C) ② ④.　　(D) ③ ④.

【分析】 本题也可找反例用排除法进行分析，但① ②两个命题的反例比较复杂一些，关键是抓住③与 ④，迅速排除不正确的选项.

【详解】 若 Ax=0 与 Bx=0 同解，则 n-秩(A)=n - 秩(B), 即秩(A)=秩(B)，命题③成立，可排除(A),(C)；但反过来，若秩(A)=秩(B)， 则不能推出 Ax=0 与 Bx=0 同解，如 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$，则秩(A)=秩(B)=1，但 Ax=0 与 Bx=0 不同解，可见命题④不成立，排除(D),故正确选项为(B).

【例】 齐次线性方程组 Ax=0 与 Bx=0 同解的充要条件

(A) r(A)=r(B).　　(B) A,B 为相似矩阵.
(C) A, B 的行向量组等价.　　(D) A,B 的列向量组等价.　　[C]

有此例题为基础，相信考生能迅速找到答案.

[2003,1,2] 已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1:\quad ax+2by+3c=0,$$

l_2： $bx+2cy+3a=0$，

l_3： $cx+2ay+3b=0$.

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0.$

【分析】 三条直线相交于一点，相当于对应线性方程组有唯一解，进而转化为系数矩阵与增广矩阵的秩均为 2.

【详解】 方法一：必要性

设三条直线 l_1,l_2,l_3 交于一点，则线性方程组 $\begin{cases} ax+2by=-3c, \\ bx+2cy=-3a, \\ cx+2ay=-3b, \end{cases}$ (*)

有唯一解，故系数矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & 2c \\ c & 2a \end{bmatrix}$ 与增广矩阵 $\overline{A}=\begin{bmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{bmatrix}$ 的秩均为 2，于是 $\left|\overline{A}\right|=0.$

由于 $\left|\overline{A}\right|=\begin{vmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{vmatrix}=6(a+b+c)[a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc]$

$=3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$,

但根据题设 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$，故

$a+b+c=0.$

充分性：由 $a+b+c=0$，则从必要性的证明可知，$\left|\overline{A}\right|=0$，故秩 $(\overline{A})<3.$

由于

$$\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix}=2(ac-b^2)=-2[a(a+b)+b^2]$$

$$=-2[(a+\frac{1}{2}b)^2+\frac{3}{4}b^2]\neq 0,$$

故秩(A)=2. 于是，

秩(A)=秩 $(\overline{A})$ =2.

因此方程组(*)有唯一解，即三直线 l_1,l_2,l_3 交于一点.

方法二：必要性

设三直线交于一点 (x_0,y_0)，则 $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 为 Ax=0 的非零解，其中

$$A=\begin{bmatrix} a & 2b & 3c \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{bmatrix}.$$

于是 $|A|=0$.

而 $$|A|=\begin{vmatrix} a & 2b & 3c \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{vmatrix}=-6(a+b+c)[a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc]$$

$$=-3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2],$$

但根据题设 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$，故

$$a+b+c=0.$$

充分性：考虑线性方程组

$$\begin{cases} ax+2by=-3c, \\ bx+2cy=-3a, \\ cx+2ay=-3b, \end{cases} \qquad (*)$$

将方程组(*)的三个方程相加，并由 a+b+c=0 可知，方程组(*)等价于方程组

$$\begin{cases} ax+2by=-3c, \\ bx+2cy=-3a. \end{cases} \qquad (**)$$

因为 $$\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix}=2(ac-b^2)=-2[a(a+b)+b^2]$$

$$=-[a^2+b^2+(a+b)^2]\neq 0,$$

故方程组(* *)有唯一解，所以方程组(*)有唯一解，即三直线 l_1,l_2,l_3 交于一点.

【评注】本题将三条直线的位置关系转化为方程组的解的判定，而解的判定问题又可转化为矩阵的秩计算，进而转化为行列式的计算，综合考查了多个知识点.

[2003,3] 已知齐次线性方程组 $$\begin{cases} (a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0, \\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0, \\ a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n=0, \end{cases}$$

其中 $\sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0$. 试讨论 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 b 满足何种关系时，

(1) 方程组仅有零解；

(2) 方程组有非零解. 在有非零解时，求此方程组的一个基础解系.

【分析】方程的个数与未知量的个数相同，问题转化为系数矩阵行列式是否为零，而系数行列式的计算具有明显的特征：所有列对应元素相加后相等. 可先将所有列对应元素相加，然后提出公因式，再将第一行的（-1）倍加到其余各行，即可计算出行列式的值.

【详解】 方程组的系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

$$=b^{n-1}(b+\sum_{i=1}^{n}a_i).$$

(1) 当 $b\neq 0$ 时且 $b+\sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0$ 时，秩(A)=n，方程组仅有零解.

(2) 当 b=0 时，原方程组的同解方程组为

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0.$$

由 $\sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0$ 可知，$a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 不全为零. 不妨设 $a_1\neq 0$，得原方程组的一个基础解系为

$$a_1=(-\frac{a_2}{a_1},1,0,\cdots,0)^T,\quad a_2=(-\frac{a_3}{a_1},0,1,\cdots,0)^T,\quad \cdots,a_n=(-\frac{a_n}{a_1},0,0,\cdots,1)^T.$$

当 $b=-\sum_{i=1}^{n}a_i$ 时，有 $b\neq 0$，原方程组的系数矩阵可化为

$$\begin{bmatrix} a_1-\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-\sum_{i=1}^{n}a_i & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3-\sum_{i=1}^{n}a_i & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n-\sum_{i=1}^{n}a_i \end{bmatrix}$$

（将第 1 行的-1 倍加到其余各行，再从第 2 行到第 n 行同乘以 $-\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n}a_i}$ 倍）

$$\to \begin{bmatrix} a_1-\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

（将第 n 行 $-a_n$ 倍到第 2 行的 $-a_2$ 倍加到第 1 行，再将第 1 行移到最后一行）

$$\to \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

由此得原方程组的同解方程组为

$$x_2 = x_1，\ x_3 = x_1，\ \cdots, x_n = x_1\ .$$

原方程组的一个基础解系为

$$\alpha = (1,1,\cdots,1)^T.$$

【评注】 本题的难点在 $b=-\sum_{i=1}^{n}a_i$ 时的讨论，事实上也可这样分析：此时系数矩阵的秩为 n-1(存在 n-1 阶子式不为零)，且显然 $\alpha = (1,1,\cdots,1)^T$ 为方程组的一个非零解，即可作为基础解系.

完全类似问题 2002 年已考过，见 2002 年数学三第九题.

[2002,1,2] 已知 4 阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为 4 维列向量, 其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2-\alpha_3$. 如果 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

解: $\because$ $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2-\alpha_3$

$\therefore$ $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的极大无关组.

即 $r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$. 所以 $Ax=0$ 的基础解系只含一个向量.

又由 $\alpha_1 = 2\alpha_2-\alpha_3$, 即 $\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0$, 故 $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是 $Ax=0$ 的基础解系.

由 $b = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 知 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ 是 $Ax = b$ 的特解.

所以 $Ax = b$ 的通解为: $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$, k 为任意常数.

[2002,3] 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times m$ 矩阵, 则线性方程组 $(AB)x = O$ ( ) .

(A) 当 $n > m$ 时仅有零解.　　(B) 当 $n > m$ 时必有非零解.
(C) 当 $m > n$ 时仅有零解.　　(D) 当 $m > n$ 时必有非零解.

【分析】齐次线性方程组 $(AB)x = O$ 仅有零解的充要条件是 r(AB) = m.

齐次线性方程组 $(AB)x = O$ 有非零解的充要条件是 r(AB) < m.

因为没有别的已知条件, 只能考虑何时有 r(AB) < m.

【详解】 $\because$ $r(AB) \le r(A) \le \min\{m,n\}$

$\therefore$ 当 $m > n$ 时, $r(AB) \le n < m$, 此时 $(AB)x = O$ 有非零解.

所以 D 正确.

[2002,3] 设齐次线性方程组 $\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0, \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0, \\ \quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + ax_n = 0. \end{cases}$ **其中** $a \ne 0, b \ne 0, n \ge 2$. **试讨论 a, b 为何值时, 方程组仅有零解、有无穷多解? 在有无穷多解时, 求出全部解, 并用基础解系表示全部解.**

解: $|A| = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}.$

(1) 当 $a \ne b$ 且 $a \ne (1-n)b$ 时, 方程组仅有零解.

(2) 当 $a = b$ 时.

$$\because\quad A=\begin{pmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ a & a & a & \cdots & a \\ a & a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\because a\neq 0} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ AX = 0 的基础解系为 $\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\cdots,\alpha_{n-1}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

方程组的全部解是 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}$，$k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$为任意常数.

(3) 当 $a=(1-n)b$ 时.

$$A=\begin{pmatrix} (1-n)b & b & b & \cdots & b \\ b & (1-n)b & b & \cdots & b \\ b & b & (1-n)b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & (1-n)b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_i-r_n \\ i=2,3,\cdots,n}]{r_1+r_2+\cdots+r_n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -n & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & -n & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & -n & \cdots & 0 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\therefore$ AX = 0 的基础解系为 $\beta=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

方程组的全部解是 $k\beta$，k 为任意常数.

2002,4] 设四元齐次线性方程组(I)为 $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=0, \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=0. \end{cases}$ **且已知另一四元齐次线性方程组(II)的一个基础解系为**

$$a_1=(2,-1,a+2,1)^T, a_2=(-1,2,4,a+8)^T.$$

(1) 求方程组(I)的一个基础解系;

(2) 当 a 为何值时, 方程组(I)与(II)有非零公共解? 在有非零公共解时, 救出全部非零公共解.

解: (1) 设方程组(I)的系数矩阵为 A.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

得方程组(I)的基础解系为 $b_1=(1,0,2,3)^T$, $b_2=(0,1,3,5)^T$.

(2) 设方程组(I)与(II)的公共解为h, 则有数 k_1,k_2,k_3,k_4 满足

$$h=k_1b_1+k_2b_2=k_3a_1+k_4a_2.$$

得线性方程组(III) $k_1b_1+k_2b_2-k_3a_1-k_4a_2=0.$

$$(b_1,b_2,-_3a_1,-a_2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -a-2 & -4 \\ 3 & 5 & -1 & -a-8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -a+2 & -6 \\ 0 & 5 & 5 & -a-11 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}.$$

当 $a\neq 1$ 时, 方程组(III)仅有零解, 即方程组(I)与(II)没有公共解.

所以 $a=1$ 时方程组(I)与(II)有非零公共解.

此时, 方程组(III)的同解方程组为 $\begin{cases} k_1=2k_3-k_4, \\ k_2=-k_3+2k_4. \end{cases}$

令 $k_3=c_1$, $k_4=c_2$, 得方程组(I)与(II)的所有非零公共解为

$$h=k_3a_1+k_4a_2=c_1(2,-1,1,1)^T+c_2(-1,2,4,7)^T,$$ c_1,c_2 为不全为零的任意常数.

[2001,1] **设** $a_1,a_2,\cdots,a_s$ **为线性方程组** $Ax=\mathbf{0}$ **的一个基础解系，** $b_1=t_1a_1+t_2a_2$，$b_2=t_1a_2+t_2a_3,\cdots$，$b_s=t_1a_s+t_2a_1$**，其中** t_1,t_2 **满足什么关系时，** $b_1,b_2,\cdots,b_s$ **也是** $Ax=\mathbf{0}$ **的一个基础解系.**

解: 因为 $b_1,b_2,\cdots,b_s$ 都是 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 的线性组合，所以 $b_1,b_2,\cdots,b_s$ 都是 $Ax=0$ 的解.

因为两个向量组所含向量的个数都是 s，所以只要 $b_1,b_2,\cdots,b_s$ 线性无关，它即是 $Ax=0$ 的一个基础解系.

$$\because (b_1,b_2,\cdots,b_s)=(a_1,a_2,\cdots,a_s)\begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & \cdots & t_2 \\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_1 \end{pmatrix}.$$

而 $$\begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & \cdots & t_2 \\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_1 \end{vmatrix}=t_1^s+(-1)^{s-1}t_2^s.$$

$\therefore$ $t_1^s\neq(-1)^s t_2^s$ 时 $b_1,b_2,\cdots,b_s$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系.

即 s 为偶数时 $t_1\neq\pm t_2$，s 为奇数时 $t_1\neq -t_2$ 时，$b_1,b_2,\cdots,b_s$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系.

[2001,2] **设方程** $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ **有无穷多个解，则** $a=$ ______ **.**

解: $$\bar{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 1-a & 1-a^2 & 1+2a \\ 0 & a-1 & 1-a & 3 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 3 \\ 0 & 0 & (1-a)(2+a) & 2(2+a) \end{pmatrix}.$$

当 $a=-2$ 时 $r(A)=r(\bar{A})=2<3$，方程组有无穷多解.

[2001,2] 已知a_1,a_2,a_3,a_4是线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，若$b_1=a_1+ta_2$，$b_2=a_2+ta_3$，$b_3=a_3+ta_4$，$b_4=a_4+ta_1$，讨论实数 t 满足什么关系时，b_1,b_2,b_3,b_4也是 $Ax=0$ 的一个基础解系.

解: $\because$ b_1,b_2,b_3,b_4 都是a_1,a_2,a_3,a_4的线性组合，$\therefore b_1,b_2,b_3,b_4$ 都是 $AX=0$ 的解.

$\therefore$ 只要 b_1,b_2,b_3,b_4 线性无关即可.

$$\because \quad (b_1,b_2,b_3,b_4)=(a_1,a_2,a_3,a_4)\begin{pmatrix}1&0&0&t\\t&1&0&0\\0&t&1&0\\0&0&t&1\end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix}1&0&0&t\\t&1&0&0\\0&t&1&0\\0&0&t&1\end{vmatrix}=1+(-1)^{t\,(4123)}t^4=1-t^4\neq 0.$$

$\therefore \quad t^4\neq 1$ 即 $t\neq \pm 1.$

[2001,3] 设 A 是 n 阶矩阵，a 是 n 维列向量. 若秩$\begin{pmatrix}A&a\\a^T&0\end{pmatrix}=$ 秩(A)，则线性方程组

(A) $AX=a$ 必有无穷多解 (B) $AX=a$ 必有唯一解

(C) $\begin{pmatrix}A&a\\a^T&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\y\end{pmatrix}=0$ 仅有零解 (D) $\begin{pmatrix}A&a\\a^T&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\y\end{pmatrix}=0$ 必有非零解

解: $\because \quad r\begin{pmatrix}A&a\\a^T&0\end{pmatrix}=r(A)\leq n<n+1$

$\therefore \quad \begin{pmatrix}A&a\\a^T&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\y\end{pmatrix}=0$ 有非零解. (D)正确.

[2000,1] 已知方程组 $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$无解，则 $a=$ ______ .

解: 化增广矩阵为阶梯形

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&a-2&-3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&0&(a-3)(a+1)&a-3\end{pmatrix}.$$

当 $a=1$ 时，$r(A)=2,r(\overline{A})=3$，方程组无解.

注: 当 $a=3$ 时，$r(A)=2,r(\overline{A})=2$，方程组有无穷多解.

[2000,1] 某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工得人数统计，然后将 $\frac{1}{6}$ 熟练工支援其他生产部门，其缺额由招收新的非熟练工补齐，新、老非熟练工经过培训及之间实践至年终考核有 $\frac{2}{5}$ 成为熟练工. 设第 n 年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n 和 y_n ,记为向量 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ 的关系式并写成矩阵形式: $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$;

(2) 验证 $h_1=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix},h_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ 是 A 的两个线性无关的特征向量，并求出相应的特征值;

(3) 当 $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 时，求 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$.

解: (1) 由题意，得 $\begin{cases}x_{n+1}=\frac{5}{6}x_n+\frac{2}{5}(\frac{1}{6}x_n+y_n)\\y_{n+1}=\frac{3}{5}(\frac{1}{6}x_n+y_n)\end{cases}$. 化简 $\begin{cases}x_{n+1}=\frac{9}{10}x_n+\frac{2}{5}y_n\\y_{n+1}=\frac{1}{10}x_n+\frac{3}{5}y_n\end{cases}$.

所以 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{10}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{10}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$. 即 $A=\begin{pmatrix}\frac{9}{10}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{10}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}$.

(2) **Q** $|h_1,h_2|=\begin{vmatrix}4&-1\\1&1\end{vmatrix}=5\neq 0.$ $\therefore h_1,h_2$ 线性无关.

$\mathbf{Q}\ Ah_1=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=h_1$, $\therefore h_1$ 是 A 的特征向量，且相应的特征值 $l_1=1$.

$\mathbf{Q}\ Ah_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}h_2$, $\therefore h_2$ 是 A 的特征向量，且相应的特征值 $l_2=\frac{1}{2}$.

(3) 由 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{pmatrix}=\mathbf{L}=A^n\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

只需计算 A^n .

令 $P=(h_1,h_2)=\begin{pmatrix}4&-1\\1&1\end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}l_1&0\\0&l_2\end{pmatrix}$.

$\therefore\quad A=P\begin{pmatrix}l_1&0\\0&l_2\end{pmatrix}P^{-1}$

$$\therefore\quad A^n=P\begin{pmatrix}l_1&0\\0&l_2\end{pmatrix}^nP^{-1}=\begin{pmatrix}4&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-1\\1&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4+\frac{1}{2^n}&4-\frac{1}{2^n}\\1-\frac{1}{2^n}&1+\frac{1}{2^n}\end{pmatrix}.$$

$$\therefore\quad \begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}8-\frac{3}{2^n}\\2+\frac{3}{2^n}\end{pmatrix}.$$

[2000,2] 设 $a=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\0\end{pmatrix},g=\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$, $A=ab^T,B=b^Ta$ **，其中** b^T **是** b **的转置，求解方程**

$2B^2A^2x=A^4x+B^4x+g$.

解: $A=ab^T=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}(1,\frac{1}{2},0)=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\2&1&0\\1&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$, $B=b^Ta=(1,\frac{1}{2},0)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2.$

$$A^2=ab^Tab^T=a(b^Ta)b^T=2ab^T=2A,\quad A^4=(A^2)^2=(2A)^2=4A^2=8A.$$

代入原方程, 得 $8(A-2E)x=g$. 对增广矩阵作初等行变换:

$$(8(A-2E),g)=\begin{pmatrix}-8&4&0&0\\16&-8&0&0\\8&4&-16&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&1&0&0\\0&0&0&0\\2&1&-4&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&1&0&0\\0&0&0&0\\-1&0&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

方程组的通解为: $\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, k 为任意常数.

[2000,3,4] 设 a_1,a_2,a_3 是四元非齐次线形方程组 $AX=b$ 的三个解向量，且秩(A)=3.

$a_1=(1,2,3,4)^T,a_2+a_3=(0,1,2,3)^T$,c 表示任意常数，则线形方程组 $AX=b$ 得通解 $X=($ $)$.

$(A)\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ $(B)\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$ $(C)\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$ $(D)\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$

解: 由题设, r (A)=3, 可见对应齐次线性方程组的基础解系所包含的解向量的个数为 4 - 3=1, 即其任一非零解均可作为基础解系. 又根据解的性质知

$2a_1-(a_2+a_3)=2\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$是导出组的非零解. 所以(C)正确.

[2000,3] 设 A 为 n 阶实矩阵，A^T 是 A 的转置矩阵，则对于线性方程组 (I)$Ax=0$ 和 (II) $A^TAx=0$, 必有

(A) (II)的解都是(I)的解, (I)的解也是(II)的解.

(B) (II)的解都是(I)的解，但(I)的解不是(II)的解.
(C) (I)的解不是(II)的解, (II)的解不是(I)的解.
(D) (I)的解是(II)的解,但 (II)的解不是(I)的解.
解：若 $Ax=0$，则必有 $A^TAx=0$，即 (I)的解是(II)的解.
若 $A^TAx=0$，则 $x^TA^TAx=0$，则 $(Ax)^TAx=0$. 因为 A 是实矩阵，所以 $Ax=0$. 即(II)的解是(I)的解.
所以(A)正确.

[2000,3,4] 设向量组 $a_1=\begin{pmatrix}a\\2\\10\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\b\\c\end{pmatrix}$**，试问：当 *a, b, c* 满足什么条件时，**

(1) b 可由 a_1,a_2,a_3 线性表出，且表示唯一？

(2) b 不可由 a_1,a_2,a_3 线性表出？

(3) b 可由 a_1,a_2,a_3 线性表出，但表示不唯一？并求出一般表达式.

解：$(a_1,a_2,a_3,b)=\begin{pmatrix}a&-2&-1&1\\2&1&1&b\\10&5&4&c\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a+2&-1&0&1+b\\2&1&1&b\\2&1&0&c-4b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a+4&0&0&1-3b+c\\0&0&1&5b-c\\2&1&0&c-4b\end{pmatrix}$

当 $a\neq-4$ 时，$r(A)=r(\bar{A})=3$，b 可由 a_1,a_2,a_3 线性表出，且表示唯一.

$$(a_1,a_2,a_3,b)\to\mathbf{L}\to\begin{pmatrix}0&0&0&1-3b+c\\0&0&1&5b-c\\2&1&0&c-4b\end{pmatrix}$$

当 $a=-4$ 且 $3b-c\neq1$ 时，$r(A)=2\neq r(\bar{A})=3$，b 不可由 a_1,a_2,a_3 线性表出.

当 $a=-4$ 且 $3b-c=1$ 时，$r(A)=r(\bar{A})=2<3$，b 可由 a_1,a_2,a_3 线性表出，且表示不唯一.

$$(a_1,a_2,a_3,b)\to\mathbf{L}\to\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&2b+1\\2&1&0&-b-1\end{pmatrix}$$

令 $x_1=k$ 得 $b=ca_1-(2c+b+1)a_2+(2b+1)a_3$.

[1999,4] 已知线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ax_1+bx_2+cx_3=0\\a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3=0\end{cases}$

(1) a、b、c 满足何种关系时，方程组仅有零解？

(2) a、b、c 满足何种关系时,方程组有无穷多解，并用基础解系表示全部解.

【详解】系数行列式 $|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$.

所以 (1) 当 a,b,c 两两不同时，系数行列式不等于零，此时方程组仅有零解.

(2) 分四种情况讨论

①当 $a=b\neq c$ 时，$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&a&c\\a^2&a^2&c^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&c-a\\0&0&c(c-a)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

全部解为: $k_1(-1,1,0)^T$， k_1 为任意常数.

②当 $a=c\neq b$ 时，$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&a\\a^2&b^2&a^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&b-a&0\\0&b(b-a)&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

全部解为: $k_2(-1,0,1)^T$， k_2 为任意常数.

③当 $b=c\neq a$ 时，$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&b\\a^2&b^2&b^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\a-b&0&0\\a(a-b)&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

全部解为: $k_3(0,-1,1)^T$， k_3 为任意常数.

④当 $a=b=c$ 时，$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&a&a\\a^2&a^2&a^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

全部解为: $k_4(-1,1,0)^T+k_5(-1,0,1)^T$， k_4,k_5 为任意常数.

[1998,1] 已知线性方程组 (I) $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\mathbf{L}+a_{1,2n}x_{2n}=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\mathbf{L}+a_{2,2n}x_{2n}=0\\ \\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\mathbf{L}+a_{n,2n}x_{2n}=0\end{cases}$

的一个基础解系为 $(b_{11},b_{12},\mathbf{L},b_{1,2n})^T,(b_{21},b_{22},\mathbf{L},b_{2,2n})^T,\mathbf{L},(b_{n1},b_{n2},\mathbf{L},b_{n,2n})^T$ **.**

试写出线性方程组 (II) $\begin{cases} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1,2n}x_{2n}=0 \\ b_{21}x_1+b_{22}x_2+\cdots+b_{2,2n}x_{2n}=0 \\ \\ b_{n1}x_1+b_{n2}x_2+\cdots+b_{n,2n}x_{2n}=0 \end{cases}$ **的通解，并说明理由.**

【详解】 (II) 的通解为 $c_1(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1,2n})^T+c_2(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2,2n})^T+\cdots+c_n(a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{n,2n})^T$，

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为任意常数.

理由: 方程组（I）、（II）的系数矩阵分别记为 A, B.

由题设可知 $AB^T=O$, 于是 $BA^T=(AB^T)^T=O$, 可见 A 的 n 个行向量的转置为（II）的 n 个解向量.

由于 B 的秩为 n, 故（II）的解空间维数为 $2n-r(B)=2n-n=n$.

又 A 的秩为 $2n$ 与（I）的解空间维数之差，即为 n, 故 A 的 n 个行向量线性无关，从而它们的转置向量构成（II）的一个基础解系，于是得到（II）的上述通解.

[1998,3] 齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+\lambda x_3=0 \end{cases}$ **的系数矩阵记为 A，若存在三阶矩阵 $B\neq O$,使得 $AB=O$, 则**

(A) $\lambda=-2$ 且 $|B|=0$.　　(B) $\lambda=-2$ 且 $|B|\neq 0$.

(C) $\lambda=1$ 且 $|B|=0$.　　(D) $\lambda=1$ 且 $|B|\neq 0$.

【答】 应选(C)

【详解 1】由题设条件： $\boldsymbol{AB=O}$,且 $\boldsymbol{B\neq O}$ 知方程组 $\boldsymbol{Ax=O}$,存在非零解，于是 $|\boldsymbol{A}|=0$,

即 $$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=-(1-\lambda)^2=0.\quad 得\ \lambda=1.$$

再由 $AB=O$, 得 $B^TA^T=O$, 所以 $B^Tx=O$,有非零解, 故 $|B|=|B^T|=0$.

[1998,4] 已知下列非齐次线性方程组(I)、(II)

$$\text{(I)}\ \begin{cases} x_1+x_2\qquad -2x_4=-6, \\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1, \\ 3x_1-x_2-x_3\qquad =3, \end{cases}\qquad \text{(II)}\ \begin{cases} x_1+mx_2-x_3-x_4=-5, \\ \qquad nx_2-x_3-2x_4=-11, \\ \qquad\qquad x_3-2x_4=-t+1. \end{cases}$$

(1)求解方程组(I), 用其导出组的基础解系表示通解;

(2) 当方程组(II)中的参数 m, n, t 为何值时, 方程组(I)与(II)同解.

【详解】

(1) 设方程组(I)的系数矩阵为 A_1，增广矩阵为 $\overline{A}_1$，对 $\overline{A}_1$ 作初等行变换，得

$$\overline{A}_1=\begin{pmatrix}1&1&0&-2&-6\\4&-1&-1&-1&1\\3&-1&-1&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0&-1&-4\\1&0&0&-1&-2\\0&0&1&-2&-5\end{pmatrix}$$

得方程组(I)的通解为: $\begin{pmatrix}-2\\-4\\-5\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$, k 为任意常数.

(2) 由方程组(I)与(II)同解, 所以(I)的解都是(II)的解.

将(I)的特解分别代入(II)中的三个方程得:

$-2-4m+5=-5$, 解得 $m=2$.

$-4n+5=-11$, 解得 $n=4$.

$5=-t+1$, 解得 $t=6$.

此时方程组(II)化为 $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3-x_4=-5,\\ \quad 4x_2-x_3-2x_4=-11,\\ \qquad x_3-2x_4=-5.\end{cases}$ 对其增广矩阵作初等行变换:

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&-1&-5\\0&4&-1&-2&-11\\0&0&1&-2&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&-3&-10\\0&4&0&-4&-16\\0&0&1&-2&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1&-2\\0&1&0&-1&-4\\0&0&1&-2&-5\end{pmatrix}.$$

得方程组(II)的通解为: $\begin{pmatrix}-2\\-4\\-5\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$, k 为任意常数.

显然,方程组(I)与(II)的解完全相同,即方程组(I)与(II)同解.

[1997,1] 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$, B 为三阶非零矩阵，且 $AB=0$, 则 $t=$_______.

【答】 -3.

【详解】由于 B 为三阶非零矩阵，且 $AB=0$,，可见线性方程组 $Ax=0$ 存在非零解，故 $|A|=0$, 得 $t=-3$.

[1997,2] l **取何值时，方程组** $\begin{cases} 2x_1 + l x_2 - x_3 = 1 \\ l x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$ **无解，有唯一解或有无穷多解？并在有无穷多解时写出方程组得通解.**

【详解】方法一：计算方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & l & -1 \\ l & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 5l^2 - l - 4 = (l-1)(5l+4).$$

所以当 $l \neq 1$ 且 $l \neq -\dfrac{4}{5}$ 时, 方程组有唯一解.

当 $l = 1$ 时, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & -9 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

此时有无穷多解: $(1,-1,0)^T + k(0,1,1)^T$, k 为任意实数.

当 $l = -\dfrac{4}{5}$ 时, $\begin{pmatrix} 2 & -\dfrac{4}{5} & -1 & 1 \\ -\dfrac{4}{5} & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 10 & -4 & -5 & 5 \\ 4 & 5 & -5 & -10 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 10 & -4 & -5 & 5 \\ 4 & 5 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

此时方程组无解.

方法二：对原方程组的增广矩阵施行初等行变换：

$$\begin{pmatrix} 2 & l & -1 & 1 \\ l & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & l & -1 & 1 \\ l+2 & l-1 & 0 & 3 \\ -6 & -5l+5 & 0 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & l & -1 & 1 \\ l+2 & l-1 & 0 & 3 \\ 5l+4 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

所以当 $l = -\dfrac{4}{5}$ 时, 方程组无解.

当 $l \neq -\dfrac{4}{5}$ 且 $l \neq 1$ 时, 方程组有唯一解.

当 $l = 1$ 时, 方程组有无穷解. $\begin{pmatrix} 2 & l & -1 & 1 \\ l & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

通解为: $(1,-1,0)^T + k(0,1,1)^T$, k 为任意实数.

[1989,4]

4.1(1989 年数学四) 齐次线性方程

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

只有零解,则 λ 应满足的条件是______.

答案是: $\lambda \neq 1$.

[1996,4]

4.2(1996 年数学四) 设

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

其中 $a_i \neq a_j (i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n)$,则线性方程组

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}$$

的解是______.

答案是: $(1,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$.

[1990,4,5]

4.3(1990 年数学四、五) 若线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a_1, \\ x_2 + x_3 = a_2, \\ x_3 + x_4 = -a_3, \\ x_1 + x_4 = a_4 \end{cases}$$

有解,则常数 a_1, a_2, a_3, a_4 应满足条件______.

答案是: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$.

[1993,1,2]

4.4(1993 年数学一、二) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为零,且 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$,则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的通解为______.

答案是:$k(1,1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

[1989,5]

4.7(1989 年数学五) 设 n 元齐次线性方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$$

的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 有非零解的充分必要条件是( ).

(A) $r=n$; (B) $r<n$; (C) $r\geqslant n$; (D) $r>n$.

答案是:(B).

[1990,1,2]

4.8(1990 年数学一、二) 已知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是非齐次线性方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$$

的两个不同的解,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应齐次线性方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$$

的基础解系,k_1,k_2 为任意常数,则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解(一般解)必是( ).

(A) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$; (B) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$;

(C) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)-\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$; (D) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

答案是:(B).

[1991,5]

4.9(1991 年数学五) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 所对应的齐次线性方程组,则下列结论正确的是( ).

(A) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 仅有零解,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有惟一解;

(B) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 有非零解,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解;

(C) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 仅有零解;

(D) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 有非零解.

答案是:(D).

[1992,1,2]

4.10(1992 年数学一、二)　要使 $\xi_1=(1,0,2)^T$, $\xi_2=(0,1,-1)^T$ 都是线性方程组 $Ax=O$ 的解，只要系数矩阵 A 为(　　).

(A) $[-2,1,1]$;　　(B) $\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$;

(C) $\begin{bmatrix}-1&0&2\\0&1&-1\end{bmatrix}$;　　(D) $\begin{bmatrix}0&1&-1\\4&-2&-2\\0&1&1\end{bmatrix}$.

答案是：(A).

[1992,4]

4.11(1992 年数学四)　设 A 为 $m\times n$ 矩阵，齐次线性方程组 $Ax=O$ 仅有零解的充分条件是(　　).

(A) A 的列向量线性无关;　　(B) A 的列向量线性相关;

(C) A 的行向量线性无关;　　(D) A 的行向量线性相关.

答案是：(A).

[1987,1,2]

4.18(1987 年数学一、二)　问 a,b 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ x_2+2x_3+2x_4=1,\\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b,\\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1\end{cases}$$

有惟一解、无解、有无穷多解？并求出有无穷多组解时的通解.

[1989,1,2]

4.19(1989 年数学一、二)　问 λ 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_3=\lambda,\\ 4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2,\\ 6x_1+x_2+4x_3=2\lambda+3\end{cases}$$

有解？并求出解的一般形式.

[1992,4]

4.20(1992 年数学四) 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O}$，且 $\boldsymbol{B}$ 的每一个列向量都是以下方程组的解

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

(1) 求 λ 的值；

(2) 证明 $|\boldsymbol{B}| = 0$.

[1993,4]

4.21(1993 年数学四) k 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4, \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

有惟一解、无解、有无穷多组解？在有解的情况下，求出其全部解.

[1994,4]

4.22(1994 年数学四) 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + a_1x_2 + a_1^2x_3 = a_1^3, \\ x_1 + a_2x_2 + a_2^2x_3 = a_2^3, \\ x_1 + a_3x_2 + a_3^2x_3 = a_3^3, \\ x_1 + a_4x_2 + a_4^2x_3 = a_4^3. \end{cases}$$

(1) 证明：若 a_1, a_2, a_3, a_4 两两不相等，则此线性方程级无解；

(2) 设 $a_1 = a_3 = k, a_2 = a_4 = -k(k \neq 0)$，且已知 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 是该方程组的两个解. 其中

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

写出此方程组的通解.

[1994,5]

4.23(1994 年数学五) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{O}$ 的一个基础解系，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$ 也是该方程组的一个基础解系.

[1994,1,2]

4.24(1994 年数学一、二)　设四元线性齐次方程组(Ⅰ)为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \end{cases}$$

又已知某线性齐次方程组(Ⅱ)的通解为

$$k_1(0,1,1,0) + k_2(-1,2,2,1).$$

(1) 求线性方程组(Ⅰ)的基础解系.

(2) 问线性方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)是否有非零公共解?若有则求出所有的非零公共解.若没有,则说明理由.

[1995,2]

4.25(1995 年数学二)　设

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 + ax_3 - ax_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

问 a 为何值时方程组有解?并在有解时,求出方程组的通解.

[1995,5]

4.26(1995 年数学五)　对于线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2. \end{cases}$$

讨论 λ 取何值时,方程组无解、有惟一解和有无穷多组解?在方程组有无穷多组解时,试用其导

[1996,5]

4.27(1996 年数学五)　已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + px_3 + 7x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = t. \end{cases}$$

讨论参数 p, t 取何值时,方程组有解、无解;当有解时,试用其导出组的基础解系表示全部解.

[1996,4]

4.28(1996 年数学四)　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的一个基础解系，向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的解，即 $\boldsymbol{A\beta}\neq 0$，试证明：向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关.

证　设

$$k_0\boldsymbol{\beta}+k_1(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+k_t(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t)=\boldsymbol{O}.$$

整理得
$$(k_0+k_1+\cdots+k_t)\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t=\boldsymbol{O}.$$

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘上式两端得

$$(k_0+k_1+\cdots+k_t)\boldsymbol{A\beta}+k_1\boldsymbol{A\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A\alpha}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{A\alpha}_t=\boldsymbol{O}.$$

由于 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{O},\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{O},\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_t=\boldsymbol{O}$，且 $\boldsymbol{A\beta}\neq 0$. 所以式(3) 变为

$$k_0+k_1+\cdots+k_t=0.$$

[1996,2]

4.29(1996 年数学二)　求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_5=0, \\ x_1+x_2-x_3=0, \\ x_3+x_4+x_5=0 \end{cases}$$

的基础解系.

[题]

向量空间

[2009,1] 设 a_1,a_2,a_3 是 3 维向量空间 R^3 的一组基，则由基 $a_1,\frac{1}{2}a_2,\frac{1}{3}a_3$ 到基 a_1+a_2,a_2+a_3,a_3+a_1 的过渡矩阵为

$(A)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$.　　$(B)\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&3\\1&0&3\end{pmatrix}$.

$$(C)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}. \qquad (D)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

【答案】A

【解析】因为$(h_1,h_2,\mathbf{L},h_n)=(a_1,a_2,\mathbf{L},a_n)A$，则$A$称为基$a_1,a_2,\mathbf{L},a_n$到$h_1,h_2,\mathbf{L},h_n$的过渡矩阵。

则由基$a_1,\frac{1}{2}a_2,\frac{1}{3}a_3$到$a_1+a_2,a_2+a_3,a_3+a_1$的过渡矩阵$M$满足

$$(a_1+a_2,a_2+a_3,a_3+a_1)=\left(a_1,\frac{1}{2}a_2,\frac{1}{3}a_3\right)M=\left(a_1,\frac{1}{2}a_2,\frac{1}{3}a_3\right)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$$

所以此题选(A)。

[2003,1] 从R^2的基$a_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$到基$b_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$的过渡矩阵为______.

【分析】 n 维向量空间中，从基$a_1,a_2,\mathbf{L},a_n$到基$b_1,b_2,\mathbf{L},b_n$的过渡矩阵 P 满足

$[b_1,b_2,\mathbf{L},b_n]$=$[a_1,a_2,\mathbf{L},a_n]$P，因此过渡矩阵 P 为：P=$[a_1,a_2,\mathbf{L},a_n]^{-1}[b_1,b_2,\mathbf{L},b_n]$.

【详解】根据定义，从R^2的基$a_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$到基$b_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$的过渡矩阵为

$$P=[a_1,a_2]^{-1}[b_1,b_2]=\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}.$$

$$=\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\-1&-2\end{bmatrix}.$$

【评注】 本题属基本题型。

[2003,2] 设α 为 3 维列向量，α^T 是α 的转置. 若$\alpha\alpha^T=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$，则$\alpha^T\alpha$ =______ .

【分析】 本题的关键是矩阵$\alpha\alpha^T$ 的秩为 1，必可分解为一列乘一行的形式，而行向量一般可选第一行（或任一非零行），列向量的元素则为各行与选定行的倍数构成.

【详解】 由$\alpha\alpha^T=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\end{bmatrix}$，知$\alpha=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$，于是

$$\alpha^T\alpha=\begin{bmatrix}1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}=3.$$

【评注】 一般地，若 n 阶矩阵 A 的秩为 1，则必有$A=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1&b_2&\cdots&b_n\end{bmatrix}$.

[1997,1] 设 B 是秩为 2 的 5×4 矩阵，$\alpha_1=(1,1,2,3)^T,\alpha_2=(-1,1,4,-1)^T,\alpha_3=(5,-1,-8,9)^T$ 是齐次方程组 $Bx=0$ 的解向量，求 $Bx=0$ 的解空间的一个标准正交基.

【详解】因秩 $r(B)=2$，故解空间的维数为：$4-r(B)=4-2=2$，

又α_1,α_2线性无关，可见α_1,α_2是解空间的基. 先将其正交化，令：

$$b_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix},b_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,b_1)}{(b_1,b_1)}b_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{10}{3}\\-2\end{pmatrix}.$$

单位化得：$g_1=\frac{b_1}{\|b_1\|}=\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix},g_2=\frac{b_2}{\|b_2\|}=\frac{1}{\sqrt{39}}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\\-3\end{pmatrix}$，即为所求的一个标准正交基.

[题] 设

正交矩阵

[2004,4] 设 $A=\left(a_{ij}\right)_{3\times 3}$ 是实正交矩阵，且 $a_{11}=1$，$b=(1,0,0)^T$，则线性方程组 $Ax=b$ 的解是____ .

【分析】利用正交矩阵的性质即可得结果.

【详解】因为 $x=A^{-1}b$，而且 $A=\left(a_{ij}\right)_{3\times 3}$ 是实正交矩阵，于是 $A^T=A^{-1}$，A 的每一个行(列)向量均为单位向量，所以

$$x=A^{-1}b=A^Tb=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{12}\\a_{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

【评注】本题主要考查正交矩阵的性质和矩阵的运算.

[题] 设

特征值与特征向量

[2011,1,2,3] 设 A 为三阶实对称矩阵，$R(A)=2$，且 $A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$.

（1）求 A 的特征值与特征向量 （2）求 A

解: $\because A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$ $\therefore A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

所以 A 有特征值–1 和 1，对应的特征向量分别为 $k_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. k_1,k_2 为任意非零常数.

因为 r(A) = 2, 所以 0 是 A 的特征值. 又因为 A 是实对称矩阵, 所以属于特征值 0 的特征向量与属于特征值–1 和 1 的特征向量正交, 即满足

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}. \quad 其基础解系为 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

令矩阵 $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$, 则 P 是正交矩阵,且满足 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

所以 $A = P\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}P^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

[2010,1,2,3] 设 A 为 4 阶实对称矩阵, 且 $A^2+A=O$, 若 A 的秩为 3, 则 A 相似于【 】

(A) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

【答案】应选 (D) .

【详解】设λ为A的特征值，由$A^2+A=O$，知特征方程为: $\lambda^2+\lambda=0$ ，所以 $\lambda=-1$或0 .

由于A为实对称矩阵，故A可相似对角化，即$A\sim\Lambda$ ，r（A）= r（Λ）=3，因此

$$A\sim\Lambda=\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \text{应选 (D)}.$$

【评注】(1)若A可对角化，则 r（A）=A的非零特征值的个数.

(2)本题由 $A^2+A=O$ 即可得到 A 可对角化，因此题设条件 A 为实对称矩阵可去掉.

[2010,2,3] **设** $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$**,正交矩阵** Q **使得** Q^TAQ **为对角矩阵，若** Q **的一列为** $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$**,求** a, Q**.**

【分析】本题考查实对称矩阵的正交对角化问题. 由Q的列向量都是特征向量可得a的值以及对应的特征值，然后由A可求出其另外两个线性无关的特征向量，于是最终求出Q.

【详解】记 $a_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$,由 $Aa_1=l_1a_1$，即 $\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=l_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

得 $a=-1, \lambda=2$，因此 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & -1\\ 4 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

由 $|A-lE|=\begin{vmatrix}-l & -1 & 4\\ -1 & 3-l & -1\\ 4 & -1 & -l\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-l-4 & -1 & 4\\ 0 & 3-l & -1\\ l+4 & -1 & -l\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-l-4 & -1 & 4\\ 0 & 3-l & -1\\ 0 & -2 & -l+4\end{vmatrix}$

$$=(2-l)(-4-l)(5-l).$$

得A的特征值为 $l_1=2, l_2=-4, l_3=5$，且对应于 $l_1=2$ 的特征向量为 $a_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$.

当 $l_2=-4$ 时，$A+4E=\begin{pmatrix}4 & -1 & 4\\ -1 & 7 & -1\\ 4 & -1 & 7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

得属于 $l_2=-4$ 的线性无关的特征向量：$a_2=(-1,0,1)^T$.

当 $l_3=5$ 时，$A-5E=\begin{pmatrix}-5 & -1 & 4\\ -1 & -2 & -1\\ 4 & -1 & -5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 9 & 9\\ -1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

得属于 $l_3=5$ 的线性无关的特征向量：$a_3=(1,-1,1)^T$.

将 a_1,a_2,a_3 单位化得：$b_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$, $b_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T$, $b_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T$.

$$\therefore\ \ Q=(b_1,b_2,b_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

[2009,1] 设若 3 维列向量 a,b 满足 $a^Tb=2$，其中 a^T 为 a 的转置，则矩阵 ba^T 的非零特征值为____________。

【答案】2

【解析】**Q** $a^Tb=2$

$\therefore ba^Tb=b\left(a^Tb\right)=2\cdot b$,　　　　$\therefore ba^T$ 的非零特征值为 2.

【LRY】 **Q** $\left|ba^T\right|=0, tr(ba^T)=(a,b)=2$ ，　$\therefore\ l_1l_2l_3=0,\ \ l_1+l_2+l_3=2$.

而由　$l_1=2$ ，故　$l_2=l_3=0$.

[2009,2] 设 a，b 为 3 维列向量，b^{T} 为 b 的转置，若矩阵 ab^{T} 相似于 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $b^{\mathrm{T}}a=$__________

【答案】2

【解析】因为 ab^T 相似于 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，根据相似矩阵有相同的特征值，得到 ab^T 的特征值是 $2,0,0$，而 $b^{\mathrm{T}}a$ 是一个常数，是矩阵 ab^T 的对角元素之和，则 $b^{\mathrm{T}}a=2+0+0=2$ 。

[2009,3] 设 $a=(1,1,1)^T, b=(1,0,k)^T$，若矩阵 ab^T 相似于 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $k=$________.

【答案】2

【解析】$\alpha\beta^T$ 相似于$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，根据相似矩阵有相同的特征值，得到$\alpha\beta^T$ 的特征值为

3，0，0。而$\alpha^T\beta$ 为矩阵$\alpha\beta^T$ 的对角元素之和，$\therefore 1+k=3+0+0$，$\therefore k=2$ 。

[2008,1] 设 A 为 2 阶矩阵，α_1,α_2 为线性无关的 2 维列向量，$A\alpha_1=\mathbf{0}$，$A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$.

则 A 的非零特征值为__________.

【答案】应填 1.

【详解】根据题设条件，得 $A(\alpha_1,\alpha_2)=(A\alpha_1,A\alpha_2)=(\mathbf{0},2\alpha_1+\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.

记 $P=(\alpha_1,\alpha_2)$，因 α_1,α_2 线性无关，故 $P=(\alpha_1,\alpha_2)$ 是可逆矩阵. 因此

$AP=P\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$，从而 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$. 记 $B=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$，则 A 与 B 相似，从而有相同的特征值.

因为$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix} \lambda & -\mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \lambda-\mathbf{1} \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-\mathbf{1})$，$\lambda=\mathbf{0}$，$\lambda=\mathbf{1}$. 故 A 的非零特征值为 1.

[2008,2] 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $2,3,\lambda$. 若行列式 $|2A|=-48$，则 $\lambda=$__________.

【答案】应填-1.

【详解】由已知, 2A 的特征值分别为: 4,6,2λ，且$\left|2A\right|=4\times6\times2\lambda=48\lambda$. 故 $\lambda=-1$.

[2008,2,3,4] 设 A 为 3 阶矩阵，α_1,α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量，向量 α_3 满足 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，

(I)证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

(II)令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，求 $P^{-1}AP$.

【详解】(I)【证明】设有一组数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\mathbf{0}$. ①

用 A 左乘上式，得 $k_1(A\alpha_1)+k_2(A\alpha_2)+k_3(A\alpha_3)=\mathbf{0}$.

因为　$A\alpha_1=-\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_2$，$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，

所以 $-k_1\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3=\mathbf{0}$，②

① – ② 得 $2k_1\alpha_1-k_3\alpha_2=\mathbf{0}$.

由于α_1,α_2是属于不同特征值得特征向量，所以线性无关，因此

$k_1=k_3=\mathbf{0}$，从而有$k_2=\mathbf{0}$.

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

（II）由题意，$AP=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. 而由（I）知，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，从而$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$可逆．故

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

[2008,3] 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 1,2,2, E 为单位矩阵, 则 $\left|4A^{-1}-E\right|=$______ .

【答案】应填 3.

【详解】由 A 的特征值为 1,2,2, 得 A^{-1} 的特征值为 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}$， $4A^{-1}$ 的特征值为 4,2,2.

$4A^{-1}-E$ 的特征值为 3,1,1. 所以$\left|4A^{-1}-E\right|=3\times1\times1=3$.

[2008,4] 设 3 阶矩阵 A 的特征值互不相同, 若行列式 |A| = 0, 则 A 的秩为______.

【答案】应填 2.
【详解】由 A 的特征值互不相同, 故 A 与对角矩阵相似. 由|A|=0 知 A 有一个特征值为零.

故 $A\sim\begin{pmatrix}0&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}$， $\lambda_2\lambda_3\neq0$，所以 r(A) = 2.

[2007,1,2,3] 设 3 阶对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$, $\alpha_1=(1,-1,1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征

向量, 记$B=A^5-4A^3+E$ 其中E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证α_1是矩阵 B 的特征向量，并求 B 的全部特征值与特征向量.

(II) 求矩阵 B.

【分析】 根据特征值的性质可立即得 B 的特征值，然后由 B 也是对称矩阵可求出其另外两个线性无关的特征向量.

【详解】 (I) 由 $A\alpha_1=\alpha_1$ 得 $A^2\alpha_1=A\alpha_1=\alpha_1$，

进一步有 $A^3\alpha_1=\alpha_1$，　$A^5\alpha_1=\alpha_1$，

故 $B\alpha_1=(A^5-4A^3+E)\alpha_1=A^5\alpha_1-4A^3\alpha_1+\alpha_1=\alpha_1-4\alpha_1+\alpha_1=-2\alpha_1$，

从而 α_1 是矩阵 B 的属于特征值−2 的特征向量.

因 $B=A^5-4A^3+E$，及 A 的 3 个特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$，得

B 的 3 个特征值为 $\mu_1=-2,\mu_2=1,\mu_3=1$.

设 α_2,α_3 为 B 的属于 $\mu_2=\mu_3=1$ 的两个线性无关的特征向量，又

A 为对称矩阵，得 B 也是对称矩阵，因此 α_1 与 α_2,α_3 正交，即

$$\alpha_1^T\alpha_2=0,\qquad \alpha_1^T\alpha_3=0$$

所以 α_2,α_3 可取为下列齐次线性方程组两个线性无关的解：$(1,-1,1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，

其基础解系为：$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，故可取 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

即 B 的全部特征值的特征向量为：$k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$k_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，其中 $k_1\neq 0$，是不为零的任意常数，k_2,k_3 是不同时为零的任意常数.

(II) 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}BP=\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$，

得 $$B=P\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\2&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}.$$

[LRY] $(P,E)=\begin{pmatrix}1&1&-1&1&0&0\\-1&1&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&-2&1&0&-1\\0&1&1&0&1&1\\1&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&-3&1&-1&-2\\0&1&1&0&1&1\\1&0&1&0&0&1\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&1\\0&1&1&0&1&1\\0&0&1&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&1&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&1&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}=(E,P^{-1})$$

【评注】本题主要考查求抽象矩阵的特征值和特征向量，此类问题一般用定义求解，要想方设法将题设条件转化为 $Ax=\lambda x$ 的形式. 请记住以下结论：

（1）设 λ 是方阵 A 的特征值，则 $kA,aA+bE,A^2,f(A),A^{-1},A^*$ 分别有特征值

$k\lambda,a\lambda+b,\lambda^2,f(\lambda),\frac{1}{\lambda},\frac{|A|}{\lambda}$（$A$ 可逆），且对应的特征向量是相同的.

（2）对实对称矩阵来讲，不同特征值所对应的特征向量一定是正交的

[2006,1,2,3,4] 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3,向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$

是线性方程组 $Ax=0$ 的两个解.

(Ⅰ) 求 A 的特征值与特征向量;

(Ⅱ) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ,使得 $Q^TAQ=\Lambda$.

（Ⅲ）求 A 及 $\left(A-\frac{3}{2}E\right)^6$，其中 E 为 3 阶单位矩阵. [2006,3,4]

【分析】 由矩阵 A 的各行元素之和均为 3 及矩阵乘法可得矩阵 A 的一个特征值和对应的特征向量；由齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解可知 A 必有零特征值，其非零解是 0 特征值所对应的特征向量.将 A 的线性无关的特征向量正交化可得正交矩阵 Q.

【详解】 (Ⅰ) 因为矩阵 A 的各行元素之和均为 3，所以

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

则由特征值和特征向量的定义知，$l=3$ 是矩阵 A 的特征值，$a=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是对应的特征向量.对应 $l=3$ 的全部特征向量为 ka ，其中 k 为不为零的常数.

又由题设知 $Aa_1=0, Aa_2=0$，即 $Aa_1=0\cdot a_1, Aa_2=0\cdot a_2$，而且 a_1,a_2 线性无关，所以 $l=0$ 是矩阵 A 的二重特征值，a_1,a_2 是其对应的特征向量，对应 $l=0$ 的全部特征向量为 $k_1a_1+k_2a_2$，其中 k_1,k_2 为不全为零的常数.

(Ⅱ) 因为 A 是实对称矩阵，所以 a 与 a_1,a_2 正交，所以只需将 a_1,a_2 正交.

取 $b_1=a_1$，

$$b_2=a_2-\frac{(a_2,b_1)}{(b_1,b_1)}b_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}-\frac{-3}{6}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

再将 a, b_1, b_2 单位化，得

$$h_1=\frac{a}{|a|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},h_2=\frac{b_1}{|b_1|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},h_3=\frac{b_2}{|b_2|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

令 $Q=[h_1,h_2,h_3]$，则 $Q^{-1}=Q^{\mathrm{T}}$，由 A 是实对称矩阵必可相似对角化，得

$$Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{bmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}=\Lambda .$$

(Ⅲ) 由(Ⅱ)知 $Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{bmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}=\Lambda$，所以

$$A=Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{2}{\sqrt6}&0\\\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{2}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

$$Q^{\mathrm{T}}\left(A-\frac{3}{2}E\right)^6Q=\left[Q^{\mathrm{T}}\left(A-\frac{3}{2}E\right)Q\right]^6=\left(Q^{\mathrm{T}}AQ-\frac{3}{2}E\right)^6$$

$$=\left[\begin{pmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac32&&\\&\frac32&\\&&\frac32\end{pmatrix}\right]^6=\begin{pmatrix}\left(\frac32\right)^6&&\\&\left(\frac32\right)^6&\\&&\left(\frac32\right)^6\end{pmatrix}=\left(\frac32\right)^6E,$$

则 $\left(A-\frac{3}{2}E\right)^6=Q\left(\frac32\right)^6EQ^{\mathrm{T}}=\left(\frac32\right)^6E$.

[2005,1,2,3] 设 l_1,l_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 a_1,a_2，则

a_1，$A(a_1+a_2)$ 线性无关的充分必要条件是 (　　).

(A) $l_1\neq 0$.　(B) $l_2\neq 0$.　(C) $l_1=0$.　(D) $l_2=0$.

【分析】 讨论一组抽象向量的线性无关性，可用定义或转化为求其秩即可.

【详解】 方法一：令 $k_1a_1+k_2A(a_1+a_2)=0$，则

$$k_1a_1+k_2l_1a_1+k_2l_2a_2=0,\qquad (k_1+k_2l_1)a_1+k_2l_2a_2=0.$$

由于 a_1,a_2 线性无关，于是有

$$\begin{cases}k_1+k_2l_1=0,\\ k_2l_2=0.\end{cases}$$

当 $l_2\neq 0$ 时，显然有 $k_1=0,k_2=0$，此时 a_1，$A(a_1+a_2)$ 线性无关；反过来，若 a_1，$A(a_1+a_2)$ 线性无关，则必然有 $l_2\neq 0$ (,否则，a_1 与 $A(a_1+a_2)=l_1a_1$ 线性相关)，故应选(B).

方法二： 由于 $[a_1, A(a_1+a_2)]=[a_1, l_1a_1+l_2a_2]=[a_1,a_2]\begin{bmatrix}1 & l_1\\ 0 & l_2\end{bmatrix}$,

可见 a_1， $A(a_1+a_2)$ 线性无关的充要条件是 $\begin{vmatrix}1 & l_1\\ 0 & l_2\end{vmatrix}=l_2\neq 0.$ 故应选(B).

【LRY】此题讨论抽象的向量组的线性相关性，并揉合进了特征值与特征向量的概念,但解决方法仍在第二章(B)第 4 题范围内.

[2005,4] 设 A 为三阶矩阵，a_1,a_2,a_3 是线性无关的三维列向量，且满足

$$Aa_1=a_1+a_2+a_3,\quad Aa_2=2a_2+a_3,\quad Aa_3=2a_2+3a_3.$$

(I) 求矩阵 B, 使得 $A(a_1,a_2,a_3)=(a_1,a_2,a_3)B$；

（II）求矩阵 A 的特征值；

（III）求可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

【分析】 利用(I)的结果相当于确定了 A 的相似矩阵，求矩阵 A 的特征值转化为求 A 的相似矩阵的特征值.

【详解】 (I) $A(a_1,a_2,a_3)=(a_1,a_2,a_3)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$,

可知 $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}.$

（II）因为 a_1,a_2,a_3 是线性无关的三维列向量，可知矩阵 $C=[a_1,a_2,a_3]$ 可逆，所以

$C^{-1}AC=B$，即矩阵 A 与 B 相似，由此可得矩阵 A 与 B 有相同的特征值.

由

$$|lE-B|=\begin{vmatrix}l-1 & 0 & 0\\ -1 & l-2 & -2\\ -1 & -1 & l-3\end{vmatrix}=(l-1)^2(l-4)=0,$$

得矩阵 B 的特征值，也即矩阵 A 的特征值

$$l_1=l_2=1,\ l_3=4.$$

（III） 对应于 $l_1=l_2=1$，解齐次线性方程组(E-B)X=0，得基础解系

$$x_1=(-1,1,0)^T,\quad x_2=(-2,0,1)^T;$$

对应于 $l_3=4$，解齐次线性方程组(4E-B)X=0，得基础解系

$$x_3=(0,1,1)^T.$$

令矩阵

$$Q=[x_1 \quad x_2 \quad x_3]=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

则 $$Q^{-1}BQ=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}.$$

因 $Q^{-1}BQ=Q^{-1}C^{-1}ACQ=(CQ)^{-1}A(CQ)$，记矩阵

$$P=CQ=[a_1 \quad a_2 \quad a_3]\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=[-a_1+a_2,-2a_1+a_3,a_2+a_3],$$

故 P 即为所求的可逆矩阵.

[2004,1,2] 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & a & 5\end{bmatrix}$ 的特征方程有一个二重根，求 a 的值，并讨论 A 是否可相似对角化.

【分析】 先求出 A 的特征值，再根据其二重根是否有两个线性无关的特征向量，确定 A 是否可相似对角化即可.

【详解】 A 的特征多项式为

$$|lE-A|=\begin{vmatrix}l-1 & -2 & 3\\ 1 & l-4 & 3\\ -1 & -a & l-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}l-2 & -(l-2) & 0\\ 1 & l-4 & 3\\ -1 & -a & l-5\end{vmatrix}$$

$$=(l-2)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & l-4 & 3\\ -1 & -a & l-5\end{vmatrix}=(l-2)(l^2-8l+18+3a).$$

当 $l=2$ 是特征方程的二重根，则有 $2^2-16+18+3a=0$，解得 a = -2.

当 a = -2 时，A 的特征值为 2,2,6, 矩阵 2E-A=$\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & -2 & 3\\ -1 & 2 & -3\end{bmatrix}$ 的秩为 1，故 $l=2$ 对应的线性无关的

特征向量有两个，从而 A 可相似对角化.

若 $\lambda=2$ 不是特征方程的二重根，则 $\lambda^2-8\lambda+18+3a$ 为完全平方，从而 18+3a = 16，解得 $a=-\dfrac{2}{3}$.

当 $a=-\dfrac{2}{3}$ 时，A 的特征值为 2，4，4，矩阵 4E-A=$\begin{bmatrix}3 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 3\\ -1 & \dfrac{2}{3} & -1\end{bmatrix}$ 秩为 2，故 $\lambda=4$ 对应的线性无关的特征向量只有一个，从而 A 不可相似对角化.

【评注】 n 阶矩阵 A 可对角化的充要条件是：对于 A 的任意 k_i 重特征根 λ_i，恒有 $n-r(\lambda_iE-A)=k_i$. 而单根一定只有一个线性无关的特征向量.

[2004,3] 设 n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & b & \cdots & b\\ b & 1 & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & b & \cdots & 1\end{pmatrix}$.

(Ⅰ) 求 A 的特征值和特征向量;

(Ⅱ) 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

【分析】这是具体矩阵的特征值和特征向量的计算问题，通常可由求解特征方程 $|\lambda E-A|=0$ 和齐次线性方程组 $(\lambda E-A)x=0$ 来解决.

【详解】 (Ⅰ) 1° 当 $b\neq 0$ 时，

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -b & \cdots & -b\\ -b & \lambda-1 & \cdots & -b\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -b & -b & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=[\lambda-1-(n-1)b][\lambda-(1-b)]^{n-1},$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=1+(n-1)b$，$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1-b$.

对 $\lambda_1=1+(n-1)b$，

$$\lambda_1E-A=\begin{pmatrix}(n-1)b & -b & \cdots & -b\\ -b & (n-1)b & \cdots & -b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -b & -b & \cdots & (n-1)b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}(n-1) & -1 & \cdots & -1\\ -1 & (n-1) & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & (n-1)\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & n & \cdots & 0 & -n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n & -n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

解得 $\xi_1=(1,1,1,\cdots,1)^T$，所以 A 的属于 λ_1 的全部特征向量为

$$k\xi_1=k(1,1,1,\cdots,1)^T \qquad (k\text{ 为任意不为零的常数}).$$

对 $\lambda_2=1-b$，

$$\lambda_2E-A=\begin{pmatrix} -b & -b & \cdots & -b \\ -b & -b & \cdots & -b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b & -b & \cdots & -b \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系为

$$\xi_2=(1,-1,0,\cdots,0)^T,\quad \xi_3=(1,0,-1,\cdots,0)^T,\quad \cdots,\xi_n=(1,0,0,\cdots,-1)^T.$$

故 A 的属于 λ_2 的全部特征向量为

$$k_2\xi_2+k_3\xi_3+\cdots+k_n\xi_n \qquad (k_2,k_3,\cdots,k_n\text{ 是不全为零的常数}).$$

2° 当 $b=0$ 时，

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^n,$$

特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=1$，任意非零列向量均为特征向量.

(II) 1° 当 $b\neq 0$ 时，A 有 n 个线性无关的特征向量，令 $P=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1+(n-1)b & & & \\ & 1-b & & \\ & & \mathbf{O} & \\ & & & 1-b\end{pmatrix}$$

2^o　当 $b=0$ 时，$A=E$，对任意可逆矩阵 P，均有

$$P^{-1}AP=E.$$

【评注】本题通过考查矩阵的特征值和特征向量而间接考查了行列式的计算, 齐次线性方程组的求解和矩阵的对角化等问题, 属于有一点综合性的试题. 另外,本题的解题思路是容易的, 只要注意矩阵中含有一个未知参数, 从而一般要讨论其不同取值情况.

[2004,4] 设三阶实对称矩阵 A 的秩为 2，$\lambda_1=\lambda_2=6$ 是 A 的二重特征值．若

$\alpha_1=(1,1,0)^T$，$\alpha_2=(2,1,1)^T$，$\alpha_3=(-1,2,-3)^T$，都是 A 的属于特征值 6 的特征向量.

(Ⅰ) 求 A 的另一特征值和对应的特征向量;

(Ⅱ) 求矩阵 A.

【分析】由矩阵 A 的秩为 2, 立即可得 A 的另一特征值为 0. 再由实对称矩阵不同特征值所对应的特征向量正交可得相应的特征向量, 此时矩阵 A 也立即可得.

【详解】 (Ⅰ) 因为 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 是 A 的二重特征值,故 A 的属于特征值 6 的线性无关的特征向量有 2 个. 由题设知 $\alpha_1=(1,1,0)^T$，$\alpha_2=(2,1,1)^T$ 为 A 的属于特征值 6 的线性无关特征向量.

又 A 的秩为 2，于是 $|A|=0$，所以 A 的另一特征值 $\lambda_3=0$．设 $\lambda_3=0$ 所对应的特征向量为 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)^T$，则有　$\alpha_1{}^T\alpha=0$，$\alpha_2{}^T\alpha=0$，即

$$\begin{cases}x_1+x_2 & =0,\\ 2x_1+x_2+x_3 & =0,\end{cases}$$

得基础解系为 $\alpha=(-1,1,1)^T$，故 A 的属于特征值 $\lambda_3=0$ 全部特征向量为

$$k\alpha=k(-1,1,1)^T \qquad (k\text{ 为任意不为零的常数}).$$

(Ⅱ) 令矩阵 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha)$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}6 & & \\ & 6 & \\ & & 0\end{pmatrix}$，所以

$$A=P\begin{pmatrix}6&&\\&6&\\&&0\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&&\\&6&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}.$$

【评注】 这是一个有关特征值和特征向量的逆问题, 即已知矩阵的部分特征值和特征向量, 要求另一部分特征值, 特征向量和矩阵. 这在历年考研题中还是首次出现.

[2003,1] 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{bmatrix}$**,** $P=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$**,** $B=P^{-1}A^*P$ **，求 B+2E 的特征值与特征向量，其中** A^* **为 A 的伴随矩阵，E 为 3 阶单位矩阵.**

【分析】可先求出 A^*, P^{-1}，进而确定 $B=P^{-1}A^*P$ 及 B+2E，再按通常方法确定其特征值和特征向量；或先求出 A 的特征值与特征向量，再相应地确定 A*的特征值与特征向量，最终根据 B+2E 与 A*+2E 相似求出其特征值与特征向量.

【详解】 方法一：

经计算可得

$$A^*=\begin{bmatrix}5&-2&-2\\-2&5&-2\\-2&-2&5\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$B=P^{-1}A^*P=\begin{bmatrix}7&0&0\\-2&5&-4\\-2&-2&3\end{bmatrix}.$$

从而

$$B+2E=\begin{bmatrix}9&0&0\\-2&7&-4\\-2&-2&5\end{bmatrix},$$

$$\left|lE-(B+2E)\right|=\begin{vmatrix}l-9&0&0\\2&l-7&4\\2&2&l-5\end{vmatrix}=(l-9)^2(l-3),$$

故 B+2E 的特征值为 $l_1=l_2=9, l_3=3.$

当 $l_1 = l_2 = 9$ 时，解 $(9E - A)x = 0$，得线性无关的特征向量为 $h_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$

所以属于特征值 $l_1 = l_2 = 9$ 的所有特征向量为

$$k_1 h_1 + k_2 h_2 = k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$，其中 k_1, k_2 是不全为零的任意常数.

当 $l_3 = 3$ 时，解 $(3E - A)x = 0$，得线性无关的特征向量为 $h_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，

所以属于特征值 $l_3 = 3$ 的所有特征向量为 $k_3 h_3 = k_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，其中 $k_3 \neq 0$ 为任意常数.

方法二：设 A 的特征值为 l，对应特征向量为 h，即 $Ah = l h$. 由于 $|A| = 7 \neq 0$，所以 $l \neq 0$.

又因 $A^* A = |A| E$，故有 $A^* h = \dfrac{|A|}{l} h.$

于是有 $$B(P^{-1}h) = P^{-1} A^* P(P^{-1}h) = \frac{|A|}{l}(P^{-1}h),$$

$$(B + 2E)P^{-1}h = (\frac{|A|}{l} + 2)P^{-1}h.$$

因此，$\dfrac{|A|}{l} + 2$ 为 B+2E 的特征值，对应的特征向量为 $P^{-1}h$.

由于 $$|lE - A| = \begin{vmatrix} l-3 & -2 & -2 \\ -2 & l-3 & -2 \\ -2 & -2 & l-3 \end{vmatrix} = (l-1)^2(l-7),$$

故 A 的特征值为 $l_1 = l_2 = 1, l_3 = 7.$

当 $l_1 = l_2 = 1$ 时，对应的线性无关特征向量可取为 $h_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

当 $l_3 = 7$ 时，对应的一个特征向量为 $h_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

由 $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，得 $P^{-1}h_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$P^{-1}h_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$P^{-1}h_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

因此，B+2E 的三个特征值分别为 9，9，3.

对应于特征值 9 的全部特征向量为

$$k_1P^{-1}h_1 + k_2P^{-1}h_2 = k_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}，其中 k_1, k_2 是不全为零的任意常数;$$

对应于特征值 3 的全部特征向量为

$$k_3P^{-1}h_3 = k_3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}，其中 k_3 是不为零的任意常数.$$

【评注】 设 $B = P^{-1}AP$，若 l 是 A 的特征值，对应特征向量为 h，则 B 与 A 有相同的特征值，但对应特征向量不同，B 对应特征值 l 的特征向量为 $P^{-1}h$.

本题计算量大，但方法思路都是常规和熟悉的，主要是考查考生的计算能力。不过利用相似矩阵有相同的特征值以及 A 与 A*的特征值之间的关系讨论，可适当降低计算量.

[2003,2] 若矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & a \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ 相似于对角阵 Λ，试确定常数 a 的值；并求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = \Lambda$.

【分析】 已知 A 相似于对角矩阵，应先求出 A 的特征值，再根据特征值的重数与线性无关特征向量的个数相同，转化为特征矩阵的秩，进而确定参数 a. 至于求 P，则是常识问题.

【详解】 矩阵 A 的特征多项式为

$$|lE - A| = \begin{vmatrix} l-2 & -2 & 0 \\ -8 & l-2 & -a \\ 0 & 0 & l-6 \end{vmatrix} = (l-6)[(l-2)^2 - 16]$$

$$= (l-6)^2(l+2),$$

故 A 的特征值为 $l_1 = l_2 = 6, l_3 = -2.$

由于 A 相似于对角矩阵 Λ，故对应 $l_1 = l_2 = 6$ 应有两个线性无关的特征向量，即

$3-r(6E-A)=2$，于是有 $r(6E-A)=1$.

由 $$6E-A=\begin{bmatrix}4&-2&0\\-8&4&-a\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&0&a\\0&0&0\end{bmatrix},$$

知 $a=0$.

于是对应于 $l_1=l_2=6$ 的两个线性无关的特征向量可取为

$$x_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\quad x_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}.$$

当 $l_3=-2$ 时，

$$-2E-A=\begin{bmatrix}-4&-2&0\\-8&-4&0\\0&0&-8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

解方程组 $\begin{cases}2x_1+x_2=0,\\ x_3=0,\end{cases}$ 得对应于 $l_3=-2$ 的特征向量 $x_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}$.

令 $P=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&2&-2\\1&0&0\end{bmatrix}$，则 P 可逆，并有 $P^{-1}AP=\Lambda$.

[2003,4] 设矩阵 $B=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$,已知矩阵 A 相似于 B，则秩(A-2E)与秩(A-E)之和等于(　　) .

(A) 2.　　(B) 3.　　(C) 4.　　(D) 5.

【分析】 利用相似矩阵有相同的秩计算，秩(A-2E)与秩(A-E)之和等于秩(B-2E)与秩(B-E)之和.

【详解】 因为矩阵 A 相似于 B，于是有矩阵 A-2E 与矩阵 B-2E 相似，矩阵 A-E 与矩阵 B-E 相似，且相似矩阵有相同的秩，而

秩(B-2E)=秩$\begin{bmatrix}-2&0&1\\0&-1&0\\1&0&-2\end{bmatrix}=3$，秩(B-E)=秩$\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix}=1$，

可见有 秩(A-2E)+秩(A-E)= 秩(B-2E)+秩(B-E)=4，故应选(C).

【评注】 若 $A\sim B$，则 $f(A)\sim f(B)$，且相似矩阵有相同的行列式、相同的秩和相同的特征值等性质.

[2003,4] 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{bmatrix}$ 可逆，向量 $a=\begin{bmatrix}1\\b\\1\end{bmatrix}$ 是矩阵 A^* 的一个特征向量，l 是 a 对应的特征值，

其中 A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵. 试求 a, b 和 l 的值.

【分析】 题设已知特征向量，应想到利用定义：$A^*a = la$，又与伴随矩阵 A^* 相关的问题，应利用 $AA^*=|A|E$ 进行化简.

【详解】 矩阵 A^* 属于特征值 l 的特征向量为 a，由于矩阵 A 可逆，故 A^* 可逆.于是 $l\neq 0$，$|A|\neq 0$，

且 $A^*a = la$． 两边同时左乘矩阵 A，得 $AA^*a = lAa$，

所以 $Aa=\dfrac{|A|}{l}a$，即 $\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\b\\1\end{bmatrix}=\dfrac{|A|}{l}\begin{bmatrix}1\\b\\1\end{bmatrix}$，

由此，得方程组

$$\begin{cases}3+b=\dfrac{|A|}{l}, & (1)\\ 2+2b=\dfrac{|A|}{l}b, & (2)\\ a+b+1=\dfrac{|A|}{l}. & (3)\end{cases}$$

由式(1),(2)解得　　$b=1$ 或 $b=-2$；

由式(1),(3)解得　　$a=2$.

由于　　$|A|=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{vmatrix}=3a-2=4$，

根据(1)式知，特征向量 a 所对应的特征值

$$l=\frac{|A|}{3+b}=\frac{4}{3+b}.$$

所以，当 $b=1$ 时，　$l=1$；

　　当 $b=-2$ 时，$l=4$.

【评注】 本题若先求出 A^*，再按特征值、特征向量的定义进行分析，则计算过程将非常复杂. 一般来说，见到 A^*,首先应想到利用公式 $AA^*=|A|E$ 进行化简.

[2002,1] 设 A, B 为同阶方阵,

(1) 如果 A, B 相似, 试证 A, B 的特征多项式相等.
(2) 举一个二阶方阵的例子说明(1)的逆命题不成立.
(3) 当 A, B 均为实对称矩阵时, 试证(1)的逆命题成立.

证: (1) 设 A～B, 则存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP = B$.

则 $|B-\lambda E| = |P^{-1}AP-\lambda P^{-1}P| = |P^{-1}(A-\lambda E)P| = |P^{-1}|\,|A-\lambda E|\,|P| = |A-\lambda E|$.

所以 A 与 B 有相同的特征多项式.

(2) 令 $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, 则 $|A-\lambda E| = \lambda^2 = |B-\lambda E|$.

但因为 A 与 B 的秩不同, 故 A, B 不相似.

(3) 当 A, B 均为实对称矩阵时, A, B 均与对角矩阵相似.

又因 A, B 的特征多项式相等, 所以它们有相同的特征值, 设为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

所以存在可逆矩阵 P, Q 满足 $P^{-1}AP = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} = Q^{-1}BQ$.

$\therefore \quad (PQ^{-1})^{-1}A(PQ^{-1}) = B.$

即 A, B 相似.

[2002,2] 矩阵 $\begin{pmatrix}0&-2&-2\\2&2&-2\\-2&-2&2\end{pmatrix}$ 的非零特征值是 ________ .

【详解】$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix}-\lambda&-2&-2\\2&2-\lambda&-2\\-2&-2&2-\lambda\end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_2} \begin{vmatrix}-\lambda&-2&-2\\2&2-\lambda&-2\\0&-\lambda&-\lambda\end{vmatrix}$

$\xlongequal{c_2-c_3} \begin{vmatrix}-\lambda&0&-2\\2&4-\lambda&-2\\0&0&-\lambda\end{vmatrix} = (4-\lambda)(-\lambda)^2$.

所以, 非零特征值为 4 .

[2002,3] 设 A 是 *n* 阶实对称矩阵, P 是 *n* 阶可逆矩阵. 已知 *n* 维列向量 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量, 则矩阵 $(P^{-1}AP)^T$ 属于特征值 λ 的特征向量是 (　　) .

(A) $P^{-1}\alpha$.　　(B) $P^T\alpha$.　　(C) $P\alpha$.　　(D) $(P^{-1})^T\alpha$.

解: 由 $(P^{-1}AP)^T = P^T A^T (P^{-1})^T = P^T A (P^T)^{-1}$, $Aa = l a$.

所以有 $[P^T A (P^T)^{-1}] P^T a = P^T (l a)$.

即 $(P^{-1}AP)^T P^T a = l P^T a$.

所以答案为(B).

[2002,3] 设 A 为三阶实对称矩阵, 且满足条件 $A^2 + 2A = O$, 已知 A 的秩 $r(A) = 2$.

(1) 求 A 的全部特征值;
(2) 当 k 为何值时, 矩阵 $A + kE$ 为正定矩阵, 其中 E 为三阶单位矩阵.

解: (1) 设 l 是 A 的特征值, 则 $l^2 + 2l$ 是 $A^2 + 2A$ 的特征值. 因为零矩阵的特征值只能是 0, 所以

$$l^2 + 2l = 0. \quad \therefore l = 0 \text{ 或 } l = -2.$$

由 $r(A) = 2$, 所以 A 的全部特征值为 $0, -2, -2$.

(2) 矩阵 $A + kE$ 仍为实对称矩阵, 由(1)知它的全部特征值为: $k, k-2, k-2$.
所以当 $k > 2$ 时 $A + kE$ 的特征值都大于零, 此时 $A + kE$ 为正定矩阵.

[2002,4] 设实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$, 求可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵, 并计算行列式 $|A - E|$ 的值.

解: $$|A - lE| = \begin{vmatrix} a-l & 1 & 1 \\ 1 & a-l & -1 \\ 1 & -1 & a-l \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - r_3} \begin{vmatrix} a-l & 1 & 1 \\ 0 & a-l+1 & -a+l-1 \\ 1 & -1 & a-l \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_2 + c_1]{c_3 + c_2} \begin{vmatrix} a-l & a-l+1 & 2 \\ 0 & a-l+1 & 0 \\ 1 & 0 & a-l-1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-l)(a-l+1)(a-l-1) - 2(a-l+1)$$

$$= [(a-l)(a-l-1) - 2](a-l+1)$$

$$= (a-l-2)(a-l+1)^2.$$

所以 A 的特征值为 $l_1 = l_2 = a+1$, $l_3 = a-2$.

当 $l_1 = l_2 = a+1$ 时，$A-(a+1)E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

得 $a_1 = (1,1,0)^T, a_2 = (1,0,1)^T$.

当 $l_3 = a-2$ 时，$A-(a-2)E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

得 $a_3 = (-1,1,1)^T$.

令 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\Lambda = \begin{pmatrix} a+1 & & \\ & a+1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP = \Lambda$.

由 A 的特征值为 $l_1 = l_2 = a+1$，$l_3 = a-2$. 所以 $A-E$ 的特征值为 $a, a, a-3$.

所以 $|A-E| = a^2(a-3)$.

[2001,1] 已知三阶矩阵 A 与三维向量 x，使得向量组 x, Ax, A^2x 线性无关，且满足 $A^3x = 3Ax - 2A^2x$

(1) 记 $P = (x, Ax, A^2x)$，求 3 阶矩阵 B，使 $A = PBP^{-1}$;

(2) 计算行列式 $|A+E|$.

解: (1) $AP = A(x, Ax, A^2x) = (Ax, A^2x, A^3x) = (Ax, A^2x, 3Ax - 2A^2x)$

$$= (x, Ax, A^2x)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

令 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. 则有 $AP = PB$.

由 x, Ax, A^2x 线性无关，知 $P = (x, Ax, A^2x)$ 可逆. 故 $A = PBP^{-1}$.

(2) 由(1)知 A 与 B 相似，所以 $A+E$ 与 $B+E$ 相似. 所以

$$|A+E| = |B+E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

[2001,3,4] 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$. **已知线性方程组** $AX=b$ **有解但不唯一，试求:**

(1) a 的值;

(2) 正交矩阵 Q, 使 Q^TAQ 为对角矩阵.

解: (1) $\bar{A}=\begin{pmatrix}1&1&a&1\\1&a&1&1\\a&1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\0&1-a&1-a^2&-2-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\0&0&(1-a)(2+a)&-2-a\end{pmatrix}$.

因为方程组 $AX=b$ 有解但不唯一，所以 $a=-2$.

(2) 由(1), $A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}$.

$$\left|A-lE\right|=\begin{vmatrix}1-l&1&-2\\1&-2-l&1\\-2&1&1-l\end{vmatrix}=-l\begin{vmatrix}1&1&-2\\1&-2-l&1\\1&1&1-l\end{vmatrix}$$

$$=-l\begin{vmatrix}1&1&-2\\0&-3-l&3\\0&0&3-l\end{vmatrix}=-l(-3-l)(3-l).$$

故 A 的特征值为 $l_1=3, l_2=-3, l_3=0.$

当 $l_1=3$ 时, $A-3E=\begin{pmatrix}-2&1&-2\\1&-5&1\\-2&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-5&1\\0&-9&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $a_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

当 $l_2=-3$ 时, $A+3E=\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&1&1\\-2&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&-3&-6\\1&1&1\\0&3&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix}$, $a_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

当 $l_3=0$ 时, $A-0E=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-3&3\\0&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $a_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

将 a_1,a_2,a_3 单位化得 $b_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$.

令 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$, 则有 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}3&&\\&-3&\\&&0\end{pmatrix}$.

[2000,3] 已知四阶矩阵 A 与 B 相似； 矩阵 A 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$，则行列式 $\left|B^{-1}-E\right|=$ ______.

解: 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，而相似矩阵有相同的特征值，所以 $\boldsymbol{B}$ 的四个特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$.

所以 B^{-1} 的四个特征值为 2,3,4,5. 所以 $B^{-1}-E$ 的四个特征值为 1,2,3,4.

所以 $\left|B^{-1}-E\right|=1\times2\times3\times4=24$.

[2000,4] 已知四阶矩阵 A 相似于 B ； A 的特征值 2、3、4、5. E 为四阶单位矩阵，则

$|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}|$ =______.

解: 因为 B 与 A 相似, 所以 B 的特征值为 2,3,4,5. 所以 B – E 的特征值为 1,2,3,4.

所以 $|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}|$ = 1*2*3*4 = 24.

[2000,4] 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{pmatrix}$, 已知 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量，$\lambda=2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重

特征值，试求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ ，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角形矩阵.

解: 因为 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量, $\lambda=2$ 是$\boldsymbol{A}$的二重特征值, 所以对应于 $\lambda=2$ 一定存在两个线性无关的特征向量, 因此有秩 $r(A-2E)=1$.

对矩阵 $A-2E$ 作初等变换,有

$$A-2E=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ x & 2 & y\\ -3 & -3 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ x-2 & 0 & y+2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\therefore \quad x=2, \quad y=-2$.　　　　$\therefore A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$.

由特征多项式 $\left|A-lE\right|=\begin{vmatrix}1-l & -1 & 1\\ 2 & 4-l & -2\\ -3 & -3 & 5-l\end{vmatrix}=(2-l)^2(6-l)$

得特征值: $\quad l_1=l_2=2, \quad l_3=6.$

对 $\quad l_1=l_2=2.$

$$A-2E=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 2 & 2 & -2\\ -3 & -3 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \text{得}\quad a_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

对 $\quad l_3=6.$

$$A-6E=\begin{pmatrix}-5 & -1 & 1\\ 2 & -2 & -2\\ -3 & -3 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.\ \text{得}\quad a_3=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}.$$

令 $\quad P=(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$, 则有 $\quad P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 6\end{pmatrix}$.

[1999,1] 设 n 阶矩阵 A 的元素全为 1，则 A 的 n 个特征值是 ________ .

解: 直接计算 $\left|A-lE\right|=(n-l)(-l)^{n-1}$, 所以特征值为 n, 0, 0, … ,0.

[1999,1,3] 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$**，其行列式** $|A|=-1$**，又 A 的伴随矩阵** A^* **有一个特征值** l_0**，属于** l_0 **的一个特征向量为** $a=(-1,-1,1)^T$**，求** a,b,c,l_0 **的值.**

解：由已知，l_0 是 A^* 的特征值，$a=(-1,-1,1)^T$ 是属于 l_0 的特征向量，所以有

$$A^*a=l_0a\ ,\ \therefore l_0Aa=AA^*a=|A|a=-a\ .$$

又因为 $|A|=-1\neq 0$，所以 A 可逆，所以 $l_0\neq 0$． $\therefore Aa=-\dfrac{1}{l_0}a$.

即 $$\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=-\frac{1}{l_0}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

得方程组: $$\begin{cases} -a+c+1=\dfrac{1}{l_0} & (1) \\ -a+c-1=-\dfrac{1}{l_0} & (2) \\ -b-2=\dfrac{1}{l_0} & (3) \end{cases}$$

(1)+(2)得 $a=c$. 代入(1)得 $l_0=1$，代入(3)得 $b=-3$.

由 $a=c$, $b=-3$ 且 $|A|=-1$，得

$$-1=|A|=\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & -1 & a-1 \\ 5 & -3 & 0 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix}=3a^2-3(a-1)^2-5a=a-3.$$

$\therefore a=2$.

$\therefore a=2,b=-3,c=2,l_0=1.$

[1999,3] 设 *A*,*B* 为 *n* 阶矩阵，且 *A* 与 *B* 相似，*E* 为 *n* 阶单位矩阵，则

(*A*) $\lambda E-A=\lambda E-B$.　　(*B*) ***A*** 与 ***B*** 有相同的特征值和特征向量.

(*C*) ***A*** 与 ***B*** 都相似于一个对角矩阵　　(*D*)对于任意常数 *t*, $tE-A$ 与 $E-B$ 相似.

【详解】(*A*)首先排除，因它意味着 $A=B$;

A 与 ***B*** 相似， ***A*** 与 ***B*** 有相同的特征值，但不一定有相同的特征向量，故(*B*)不成立；

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不一定可以对角化，更谈不上都相似于一个对角矩阵，排除（C）

剩下（D）为正确答案.

因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，所以存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$, 进而有

$\boldsymbol{P}^{-1}(t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}=t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 可见 $t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 相似.

[1999,4] 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-k&-1&k\\4&2&-3\end{pmatrix}$**. 问当 k 为何值时，存在可逆矩阵 P, 使得 P–1AP 为对角矩阵？并求出 P 和相应的对角矩阵.**

解: $|A-lE|=\begin{vmatrix}3-l&2&-2\\-k&-1-l&k\\4&2&-3-l\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-l&2&-2\\0&-1-l&k\\1-l&2&-3-l\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}1-l&2&-2\\0&-1-l&k\\0&0&-1-l\end{vmatrix}=(1+l)^2(1-l).$$

知, A 的特征值 $l_1=l_2=-1, l_3=1$.

由题设知,对应二重特征根 $l_1=l_2=-1$,必有两个线性无关的特征向量, 因此有 $r(A-lE)=1$.

当 $l_1=l_2=-1$时， $A+E=\begin{pmatrix}4&2&-2\\-k&0&k\\4&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4&2&-2\\-k&0&k\\0&0&0\end{pmatrix}$. $\therefore k=0$.

$$A+E\to\begin{pmatrix}4&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

对应的特征向量为: $a_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$.

当 $l_3=1$时，$A-E=\begin{pmatrix}2&2&-2\\0&-2&0\\4&2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

对应的特征向量为: $a_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

令 $P=(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&0&0\\0&2&1\end{pmatrix}$, 则有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}$.

[1998,1] 设 A 是 n 阶矩阵, $|A|\neq 0$, A^* 为 A 的伴随矩阵, E 为 n 阶单位矩阵. 若 A 有特征值 l, 则 $(A^*)^2+E$ 必有特征值________.

解: 因为 A 有特征值 l, $|A|\neq 0$, 则 A^* 有特征值 $\dfrac{|A|}{l}$, 则 $(A^*)^2+E$ 有特征值 $\left(\dfrac{|A|}{l}\right)^2+1$.

[1999,1] 已知二次曲面方程 $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$,可以经过正交变换 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}V\\h\\x\end{pmatrix}$

化为椭圆柱面方程 $h^2+4x^2=4$,求 a,b 的值和正交矩阵 P.

【详解】 由题设知，矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ 相似, 所以它们有相同的迹与行列式.

由 tr(A) = 2 + a, tr(B) = 5, 得 a = 3. 由 $|A|=\begin{vmatrix}1&b&1\\b&3&1\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&b-1&0\\b-1&2&0\\1&1&1\end{vmatrix}=-(b-1)^2, |B|=0$, 得 b = 1.

此时 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. 求得其特征值为 $l_1=0, l_2=1, l_3=4$.

解 $(A-0E)X=0$, 得属于特征值 $l_1=0$ 的特征向量 $a_1=(1,0,-1)^T$.

解 $(A-E)X=0$, 得属于特征值 $l_2=1$ 的特征向量 $a_2=(1,-1,1)^T$.

解 $(A-4E)X=0$, 得属于特征值 $l_3=4$ 的特征向量 $a_3=(1,2,1)^T$.

将 a_1,a_2,a_3 单位化，得 $b_1=\dfrac{a_1}{\|a_1\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}, b_2=\dfrac{a_2}{\|a_2\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}, b_3=\dfrac{a_3}{\|a_3\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.

令 $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$, 即为所求的正交矩阵.

[1998,3] 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 $B=(kE+A)^2$. 其中 k 为实数, E 为单位矩阵. 求对角矩阵 Λ，使得 B 与 A 相似，并求 k 为何值时, B 为正定矩阵.

解: Q $|A-lE|=\begin{vmatrix}1-l&0&1\\0&2-l&0\\1&0&1-l\end{vmatrix}=(2-l)\begin{vmatrix}1&0&1\\0&2-l&0\\1&0&1-l\end{vmatrix}$

$$=(2-l)\begin{vmatrix}1&0&1\\0&2-l&0\\0&0&-l\end{vmatrix}=-l(2-l)^2.$$

$\therefore$ A 的特征值为 $l_1=l_2=2, l_3=0$.

$\therefore$ $B=(kE+A)^2$ 的特征值为 $l_1=l_2=(k+2)^2, l_3=k^2$.

由 B 是实对称矩阵，则 B 与对角矩阵正交相似，且对角矩阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}(k+2)^2&0&0\\0&(k+2)^2&0\\0&0&k^2\end{pmatrix}$.

所以 $k\neq-2$ 且 $k\neq0$ 时 B 为正定矩阵.

[1998,3,4 末] 设向量 $a=(a_1,a_2,\mathbf{L},a_n)^T, b=(b_1,b_2,\mathbf{L},b_n)^T$ 都是非零向量，且满足条件 $a^Tb=0$,记 n 阶

矩阵 $A=a^Tb$. 求：

（1） $\boldsymbol{A}^2$;

（2）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量.

[1997,1] 已知 $z=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ **是矩阵** $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ **的一个特征向量.**

(I) 试确定参数 a,b 及特征向量 z 所对应的特征值；

(II) 问 A 能否相似于对角阵？说明理由.

【详解】(I) 由题设，有 $Az=lz$ 即 $\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=l\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

解得 $a=-3,b=0,l=-1$.

(II) 此时 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$. $|A-lE|=\begin{vmatrix}2-l&-1&2\\5&-3-l&3\\-1&0&-2-l\end{vmatrix}=-(1+l)^3$???!!!

[1997,3] 设三阶实对称矩阵 A 的特征值是 1, 2,3; 矩阵 A 的属于特征值 1, 2 的特征向量分别是

$a_1=(-1,-1,1)^T,a_2=(1,-2,-1)^T$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 3 的特征向量； (2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

【详解】(1)设 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 3 的特征向量为 $a_3=(x_1,x_2,x_3)^T$. 因为实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量相互正交，所以有 $a_1^Ta_3=0,a_2^Ta_3=0$. 即 $a_3=(x_1,x_2,x_3)^T$ 是齐次线性方程组

$\begin{cases}-x_1-x_2+x_3=0\\x_1-2x_2+x_3=0\end{cases}$ 的非零解，解上面方程组，得其基础解系为 $(1,0,1)^T$.

因此 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 3 的特征向量为 $a_3=k(1,0,1)^T$， k 为任意非零常数.

(2) 令矩阵 $P=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&-2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$, 则有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$. $\therefore A=P\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}P^{-1}$.

由 $P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 得 $A=P\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}13 & -2 & 5\\ -2 & 10 & 2\\ 5 & 2 & 13\end{pmatrix}$.

[1997,4] 设矩阵 A 与 B 相似，且 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & a\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$,

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=B$.

解: (1) 由 A 与 B 相似知它们的特征值, 行列式与迹都相同.

而 $|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 6 & -4\\ 0 & -6 & a+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 6 & -4\\ 0 & 0 & a-1\end{vmatrix}=6(a-1).\quad tr(A)=5+a.$

$|B|=4b,\quad tr(B)=4+b.$

所以 $\begin{cases}6(a-1)=4b\\ 5+a=4+b\end{cases}$, 解得 $a=5, b=6.$

(2) $l=2$ 时, 求解齐次线性方程组$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})x=0$, 其基础解系为 $a_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

$l=6$ 时, 求解齐次线性方程组$(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})x=0$, 其基础解系为 $a_3=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$.

令 $P=(a_1, a_2, a_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$, 则有 $P^{-1}AP=B.$

[1991,4]

5.7(1991 年数学四)　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征根，则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征根之一是(　　).

(A) $\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|^n$;　(B) $\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|$;　(C) $\lambda|\boldsymbol{A}|$;　(D) $\lambda|\boldsymbol{A}|^n$.

答案是：(B).

[1993,5]

5.8(1993 年数学五)　设 $\lambda=2$ 是非奇异矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征根，则矩阵 $\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}$ 有一特征值等于(　　).

(A) $\frac{4}{3}$;　(B) $\frac{3}{4}$;　(C) $\frac{1}{2}$;　(D) $\frac{1}{4}$.

答案是：(B).

[1993,4]

5.9(1993 年数学四)　n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 具有 n 个不同的特征值是 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似的(　　).

(A) 充分必要条件;　(B) 充分而非必要条件;

(C) 必要而非充分条件;　(D) 既非充分也非必要条件.

答案是：(B).

[1987,2]

5.12(1987 年数学二)　设 λ_1,λ_2 为 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且 $\lambda_1\neq\lambda_2$，而 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 分别为对应的特征向量，试证明 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

分析　用反证法. 设 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=\lambda(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)$，从而可以得出矛盾.

[1987,4,5]

5.13(1987 年数学四、五)　求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 4\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

的实特征值及对应的特征向量.

[1989,1,2]

5.14(1989 年数学一、二)　假设 λ 为 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，证明：

(1) $\frac{1}{\lambda}$ 为 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值；

(2) $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

[1989,4,5]

5.15(1989 年数学四、五)　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & -2 & -1\end{bmatrix}.$$

(1) 试求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值；

(2) 利用(1) 小题的结果，求矩阵 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值，其中 $\boldsymbol{E}$ 是三阶单位矩阵.

[1990,5]

5.16(1990 年数学五)　设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足条件

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E},$$

其中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵. 试证明 $\boldsymbol{A}$ 的实特征向量所对应的特征值的绝对值等于 1.

分析　用特征值、特征向量的定义证明.

解　设 x 是 $\boldsymbol{A}$ 的实特征向量，对应的特征值为 λ，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}.$$

上式两边转置得

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}.$$

于是

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\lambda\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

[1991,5]

5.17(1991 年数学五)　已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,k,1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

[1992,1,2]

5.18(1992 年数学一、二) 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$, 对应的特征向量依次为

$$\xi_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \xi_2=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix},\quad \xi_3=\begin{bmatrix}1\\3\\9\end{bmatrix}.$$

又向量

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}.$$

(1) 将 $\boldsymbol{\beta}$ 用 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性表示;

(2) 求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$($n$ 为自然数).

分析 根据 $\boldsymbol{\beta}=k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3$ 可以求出 k_1,k_2,k_3. 且由 $\boldsymbol{A}^n\xi_i=\lambda_i^n\xi_i$ 可得

$$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}=k_1\lambda_1^n\xi_1+k_2\lambda_2^n\xi_2+k_3\lambda_3^n\xi_3.$$

[1992,4]

5.19(1992 年数学四) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{bmatrix}.$$

(1) 求 x 和 y 的值;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

[1994,4,5]

5.20(1994 年数学四、五) 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{bmatrix}$$

有三个线性无关的特征向量, 求 x 和 y 应满足的条件.

因此, 符合题意的 x 和 y 应满足条件 $x+y=0$.

[1994,2]

5.21(1994 年数学二) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, $2,4,\cdots,2n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值, $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位阵, 计算行列式 $|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|$.

[1995,1,2]

5.22(1995 年数学一、二) 设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$，对应于 λ_1 的特征向量为 $\xi_1=(0,1,1)'$，求 A.

[1996,4]

5.23(1996 年数学四) 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&y&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}.$$

(1) 已知 A 的一个特征值为 3，试求 y；

(2) 求矩阵 P，使 $(AP)^T(AP)$ 为对角矩阵.

则
$$P^TA^TAP=(AP)^T(AP)=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&9\end{bmatrix}.$$

评注 由方法一得到的对角阵 $(AP)^T(AP)$ 是不惟一的(根据惯性定理正项个数、非零个数是惟一的). 由方法二得到的对角阵 $(AP)^T(AP)$ 中主对角线上四个数必然是 A^2 的四个特征值.

[1996,5]

5.24(1996 年数学五) 设有四阶方阵 A 满足条件

$$|3E+A|=0,\quad AA^T=2E,\quad |A|<0,$$

其中 E 是四阶单位阵，求方阵 A 的伴随矩阵 A^* 的一个特征值.

[题]

二次型

[常用结论]

1.

2. 两实对称矩阵合同的充要条件是正负惯性指数相同

[2011,2] 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$，则 f 的正惯性指数为_______.

解: $\because f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+2x_2^2=y_1^2+2y_2^2.$$

所以 f 的正惯性指数为 2.

[2011,1] 若二次曲面的的方程 $x^2+3y^3+z^2+2axy+2xz+2yz=4$ 经过正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$，则

$a=$________.

解: 由已知, $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$的秩为 2.

$$\therefore\begin{vmatrix}1&a&1\\a&3&1\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-1+a&0\\0&3-a&1-a\\1&1&1\end{vmatrix}=-(a-1)^2=0.$$

所以 $a=1$.

[2011,3]设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 的秩为 1，A 中行元素之和为 3，则 f 在正交变换下 $x=Qy$ 的标准为_________ .

解: 因为 A 中行元素之和为 3, 所以 $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. 所以 3 是 A 的一个特征值.

又因为 A 的秩为 1, 故 A 的另两个特征值都是 0. 所以 f 在正交变换下 $x=Qy$ 的标准为 $3y_1^2$.

[2010,1] 设已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准型为 $y_1^2+y_2^2$， 且 Q 的第三列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$.

(I) 求矩阵 A;
(II) 证明 $A+E$ 为正定矩阵，其中 E 为3阶单位矩阵

【分析】由二次型在正交变换下的标准形立即可得对应矩阵的特征值,由Q的列向量为特征向量即得一个特征向量,再由实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量相互正交可得另外两个线性无关的特征向量.

【详解】(I) 由于二次型在正交变换 $x = Q\,y$下的标准形为$y_1^2 + y_2^2$ ，可知A的特征值为 $l_1 = l_2 = 1,\ l_3 = 0$，

且Q的第3列$a_3 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$即为$A$的对应于 $l_3 = 0$ 的特征向量.

设A的对应于特征值 $l_1 = l_2 = 1$ 的特征向量为 $a = (x_1, x_2, x_3)^T$，由实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量相互正交，有

$$a^T a_3 = 0，即\ x_1 + x_3 = 0，$$

解得A的对应于 $l_1 = l_2 = 1$ 的线性无关且正交的两个特征向量:

$$\alpha_1 = (0, 1, 0)^T, \alpha_2 = (-1, 0, 1)^T.$$

显然α_1, α_2与α_3是正交的，且α_1, α_3是单位向量. 单位化α_2 得

$$h = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})^T.$$

令$Q = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，则$Q$为正交矩阵，且$Q^T A Q = \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

$$\therefore \quad A = Q\Lambda Q^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(II) 由A的特征值为1, 1, 0，知 $A + E$ 的特征值为2 , 2 , 1，即 $A + E$ 的特征值全大于零. 又 $A + E$ 显然是实对称矩阵，故 $A + E$ 是正定矩阵.

[2009,1,2,3] 设二次型 $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = ax_1^2 + ax_2^2 + \left(a-1\right)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

(I) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值；

(II) 若二次型 f 的规范形为$y_1^2 + y_2^2$，求a的值。

【解析】 (I) $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$

$$|lE-A|=\begin{vmatrix} l-a & 0 & -1 \\ 0 & l-a & 1 \\ -1 & 1 & l-a+1 \end{vmatrix}=(l-a)\begin{vmatrix} l-a & 1 \\ 1 & l-a+1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 0 & l-a \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(l-a)[(l-a)(l-a+1)-1]-[0+(l-a)]$$

$$=(l-a)[(l-a)(l-a+1)-2]$$

$$=(l-a)[l^2-2al+l+a^2-a-2]$$

$$=(l-a)\{[al+\frac{1}{2}(1-2a)]^2-\frac{9}{4}\}$$

$$=(l-a)(l-a+2)(l-a-1).$$

$$\therefore l_1=a, l_2=a-2, l_3=a+1$$

(II) 若规范形为 $y_1^2+y_2^2$，说明有两个特征值为正，一个为 0。则

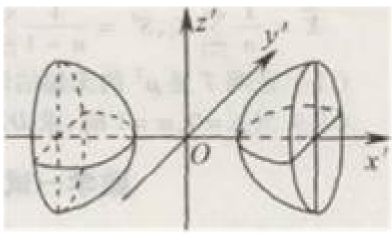
1) 若 $l_1=a=0$，则 $l_2=-2<0$，$l_3=1$，不符题意

2) 若 $l_2=0$，即 $a=2$，则 $l_1=2>0$，$l_3=3>0$，符合

3) 若 $l_3=0$，即 $a=-1$，则 $l_1=-1<0$，$l_2=-3<0$，不符题意

综上所述，故 $a=2$

[2008,1] 设 A 为 3 阶实对称矩阵，如果二次曲面方程 $(x \quad y \quad z)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=1$ 在正交变换下的标准方程的图形如图，则 A 的正特征值个数为【　　】.



(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

【答案】 应选(B).

【详解】此二次曲面为旋转双叶双曲面，此曲面的标准方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2+z^2}{c^2}=1$．故$A$的正特征值个数为1．故应选(B).

[2008,2,3,4] 设$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，则在实数域上，与 A 合同矩阵为【　　】.

(A) $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$.　(B) $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$.　(C) $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$.　(D) $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$.

【答案】 应选(D).

【详解】$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4=\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda+1)(\lambda-3)=0$

则 $\lambda_1=-1,\lambda_2=3$，记$D=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$，则

$\left|\lambda E-D\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2\\2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4=\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda+1)(\lambda-3)=0$

则 $\lambda_1=-1,\lambda_2=3$，正负惯性指数相同.故选 D.

[2007,1,2,3,4] 设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则$A$与$B$　(　　).

(A) 合同，且相似.　　(B) 合同，但不相似 .

(C) 不合同，但相似.　　(D) 既不合同，又不相似.

【分析】本题考查矩阵的合同关系与相似关系及其之间的联系，只要求得A的特征值，并考虑到实对称矩阵A必可经正交变换使之相似于对角阵，便可得到答案.

【详解】 由$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&1\\1&\lambda-2&1\\1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)^2$可得$\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=0$，

所以A的特征值为 3,3,0；而B的特征值为 1,1,0.

所以A与B不相似，但是A与B的秩均为 2，且正惯性指数都为 2，所以A与B合同，故选（B）.

【评注】若矩阵A与B相似，则A与B具有相同的行列式，相同的秩和相同的特征值.

所以通过计算A与B的特征值可立即排除（A）（C）.

[2005,1] 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

（I） 求 a 的值；

（II） 求正交变换 $x=Qy$，把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成标准形；

（III） 求方程 $f(x_1,x_2,x_3)$ =0 的解.

【分析】（I）根据二次型的秩为 2，可知对应矩阵的行列式为 0，从而可求 a 的值；（II）是常规问题，先求出特征值、特征向量，再正交化、单位化即可找到所需正交变换；（III） 利用第二步的结果，通过标准形求解即可.

【详解】（I） 二次型对应矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix},$$

由二次型的秩为 2，知 $|A|=\begin{vmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=0$，得 $a=0$.

（II） 这里 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$， 可求出其特征值为 $l_1=l_2=2, l_3=0$.

解 $(2E-A)x=0$，得特征向量为：$a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

解 $(0E-A)x=0$，得特征向量为：$a_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

由于 a_1,a_2 已经正交，直接将 a_1,a_2，a_3 单位化，得：

$$h_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, h_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, h_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

令 $Q=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{bmatrix}$，即为所求的正交变换矩阵，由 x=Qy，可化原二次型为标准形：

$$f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+2y_2^2.$$

（III） 由 $f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+2y_2^2=0$，得 $y_1=0, y_2=0, y_3=k$ （k 为任意常数）.

从而所求解为：x=Qy=$\begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} = kh_3 = \begin{bmatrix} c \\ -c \\ 0 \end{bmatrix}$，其中 c 为任意常数.

[2004,3] 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩为______.

【分析】二次型的秩即对应的矩阵的秩，亦即标准型中平方项的项数，于是利用初等变换或配方法均可得到答案.

【详解一】因为 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$

$$=2x_1{}^2+2x_2{}^2+2x_3{}^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

于是二次型的矩阵为　$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

由初等变换得　$A\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

从而　$r(A)=2$,　即二次型的秩为 2.

【详解二】因为 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$

$$=2x_1{}^2+2x_2{}^2+2x_3{}^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

$$=2(x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3)^2+\frac{3}{2}(x_2-x_3)^2$$

$$=2y_1{}^2+\frac{3}{2}y_2{}^2,$$

其中　$y_1=x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3,\qquad y_2=x_2-x_3.$

所以二次型的秩为 2.

[2003,3] 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$**，中二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1，特征值之积为-12.**

(1) 求 a,b 的值；

(2) 利用正交变换将二次型 f 化为标准形，并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.

【分析】 特征值之和为 A 的主对角线上元素之和，特征值之积为 A 的行列式，由此可求出 a,b 的值；进一步求出 A 的特征值和特征向量，并将相同特征值的特征向量正交化（若有必要），然后将特征向量单位化并以此为列所构造的矩阵即为所求的正交矩阵.

【详解】 （1）二次型 f 的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

设 A 的特征值为 $l_i(i=1,2,3)$. 由题设，有

$$l_1+l_2+l_3=a+2+(-2)=1,$$

$$l_1l_2l_3=\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{vmatrix}=-4a-2b^2=-12.$$

解得 a=1,b= -2.

(2) 由矩阵 A 的特征多项式

$$|lE-A|=\begin{vmatrix} l-1 & 0 & -2 \\ 0 & l-2 & 0 \\ -2 & 0 & l+2 \end{vmatrix}=(l-2)^2(l+3),$$

得 A 的特征值 $l_1=l_2=2, l_3=-3.$

对于 $l_1=l_2=2,$ 解齐次线性方程组 $(2E-A)x=0$，得其基础解系

$$x_1=(2,0,1)^T，\ x_2=(0,1,0)^T.$$

对于 $l_3=-3$，解齐次线性方程组 $(-3E-A)x=0$，得基础解系

$$x_3=(1,0,-2)^T.$$

由于 x_1,x_2,x_3 已是正交向量组，为了得到规范正交向量组，只需将 x_1,x_2,x_3 单位化，由此得

$$h_1=(\frac{2}{\sqrt5},0,\frac{1}{\sqrt5})^T，\ h_2=(0,1,0)^T，\ h_3=(\frac{1}{\sqrt5},0,-\frac{2}{\sqrt5})^T.$$

令矩阵

$$Q=\begin{bmatrix}h_1 & h_2 & h_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix},$$

则 Q 为正交矩阵. 在正交变换 X=QY 下，有

$$Q^TAQ=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix},$$

且二次型的标准形为 $f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$.

【评注】 本题求 a,b，也可先计算特征多项式，再利用根与系数的关系确定：

二次型 f 的矩阵 A 对应特征多项式为

$$|lE-A|=\begin{vmatrix}l-a & 0 & -b\\ 0 & l-2 & 0\\ -b & 0 & l+2\end{vmatrix}=(l-2)[l^2-(a-2)l-(2a+b^2)].$$

设 A 的特征值为 l_1,l_2,l_3，则 $l_1=2,\ l_2+l_3=a-2,\ l_2l_3=-(2a+b^2)$. 由题设得

$l_1+l_2+l_3=2+(a-2)=1$，

$l_1l_2l_3=-2(2a+b^2)=-12.$

解得 a=1,b=2.

[2002,1] 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换 $x=Py$ 可化成标准形 $f=6y_1^2$，则 $a=$ ______ .

【分析】根据题意, A 的特征值分别为一个正数, 两个零

【详解】 $A=\begin{pmatrix}a & 2 & 2\\ 2 & a & 2\\ 2 & 2 & a\end{pmatrix}$

$$|A-lE|=\begin{vmatrix}a-l & 2 & 2\\ 2 & a-l & 2\\ 2 & 2 & a-l\end{vmatrix}=(4+a-l)\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & a-l & 2\\ 1 & 2 & a-l\end{vmatrix}$$

$$=(4+a-l)\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & a-l-2 & 0\\ 0 & 0 & a-l-2\end{vmatrix}=(4+a-l)(a-l-2)^2.$$

因为已知实二次型经正交变换可化成标准形 $f=6y_1^2$，所以 A 的特征值分别为一个正数，两个零.

所以 $a-2=0$，即 $a=2$.

[2001,1] 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, **则 A 与 B (　　).**

(A) 合同且相似　　(B) 合同但不相似　　(C) 不合同但相似　　(D) 不合同且不相似

解: $$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1&1\\1&1-\lambda&1&1\\1&1&1-\lambda&1\\1&1&1&1-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1-\lambda&1&1\\1&1&1-\lambda&1\\1&1&1&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-\lambda&0&0\\0&0&-\lambda&0\\0&0&0&-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(-\lambda)^3.$$

所以 A 的特征值为 4, 0, 0, 0.

因为 A 是实对称矩阵，所以存在正交矩阵 Q，满足 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

所以 A 与 B 合同且相似. 故应选 (A) .

[2001,3] 设 A 为 n 阶实对称矩阵, $r(A)=n$, A_{ij} 是 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ **中元素** a_{ij} **的代数余子式 ($i,j=1,2,\ldots,n$), 二次型**

.

(1) 记 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，把 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|A|}x_ix_j$ 写成矩阵形式，并证明二次型 $f(X)$ 的矩阵为 A^{-1}.

(2) 二次型 $g(X)=X^TAX$ 与 $f(X)$ 的规范形是否相同? 说明理由.

解: (1) $$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|A|}x_ix_j=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1N}&A_{2N}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

因为 $r(A)=n$，所以 A 可逆，且 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^{*}$.

又 $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$，所以 A^{-1} 也是实对称矩阵.

所以二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵形式为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TA^{-1}X$.

(2) $\because$ $(A^{-1})^TAA^{-1}=(A^T)^{-1}E=A^{-1}$.　　$\therefore$ A 与 A^{-1} 合同.

$\therefore$ $g(X)=X^TAX$ 与 $f(X)$ 有相同的规范形.

[2000,3] 设有 n 元实二次型

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为实数，试问：当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足何种条件时，二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 为正定二次型.

解：显然有 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2\ge 0$.

且 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=0 \iff \begin{cases} x_1+a_1x_2=0 \\ x_2+a_2x_3=0 \\ \cdots\quad\cdots \\ x_{n-1}+a_{n-1}x_n=0 \\ x_n+a_nx_1=0 \end{cases}$　　(*)

所以二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 为正定二次型 $\iff$ 齐次方程组(*)只有零解 $\iff$ (*)的系数行列式不为零.

即 $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}=1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n\ne 0$.

即 $a_1a_2\cdots a_n\ne(-1)^n$.

[1997,3]

6.1(1997 年数学三)　若二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$$

是正定的,则 t 的取值范围是________.

答案是：$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$.

[1990,1,2]

6.4(1990 年数学一、二)　求一个正交变换化二次型

$$f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$$

成标准型.

[1991,1,2]

6.5(1991 年数学一、二)　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵, $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位阵,证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的行列式大于 1.

分析　$\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵,它的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 全大于零. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_n+1$ 全大于 1.

[1991,4]

6.6(1991 年数学四)　考虑二次型

$$f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3,$$

问 λ 取何值时, f 为正定二次型.

[1992,4]

6.7(1992 年数学四)　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 m,n 阶正定矩阵,试判定分块矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$ 是否是正定矩阵.

[1993,1,2]

6.8(1993 年数学一、二)　已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3\quad(a>0).$$

通过正交变换化为标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$,求参数 a 及所用的正交变换矩阵.

[1993,4]

6.9(1993 年数学四)　设二次型

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\alpha x_1 x_2 + 2\beta x_2 x_3 + 2x_1 x_3$$

经正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化为

$$f = y_2^2 + 2y_3^2.$$

其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ 和 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$ 是三维列向量，$\boldsymbol{P}$ 是三阶正交矩阵，试求常数 α, β.

[1995,4]

6.10(1995 年数学四)　已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3.$$

(1) 写出二次型 f 的矩阵表达式.

(2) 用正交变换把二次型 f 化为标准形，并写出相应的正交矩阵.

[1996,1,2]

6.11(1996 年数学一、二)　已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$$

的秩为 2.

(1) 求参数 c 及此二次型对应矩阵的特征值；

(2) 指出方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 表示何种二次曲面.

[题]

正定矩阵

[2005,3] 设 $D = \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}$ 为正定矩阵，其中 **A,B** 分别为 **m** 阶，**n** 阶对称矩阵，**C** 为 $m \times n$ 矩阵.

(I)　计算 $P^T DP$，其中 $P = \begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ o & E_n \end{bmatrix}$；

(II) 利用 (I) 的结果判断矩阵 $B - C^T A^{-1} C$ 是否为正定矩阵，并证明你的结论.

【分析】 第一部分直接利用分块矩阵的乘法即可；第二部分是讨论抽象矩阵的正定性，一般用定义.

【详解】 (I) 因 $P^T=\begin{bmatrix} E_m & o \\ -C^TA^{-1} & E_n \end{bmatrix}$，有

$$P^TDP=\begin{bmatrix} E_m & o \\ -C^TA^{-1} & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ o & E_n \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A & C \\ o & B-C^TA^{-1}C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ o & E_n \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A & o \\ o & B-C^TA^{-1}C \end{bmatrix}.$$

（II）矩阵 $B-C^TA^{-1}C$ 是正定矩阵.

由(I)的结果可知，矩阵 D 合同于矩阵

$$M=\begin{bmatrix} A & o \\ o & B-C^TA^{-1}C \end{bmatrix}.$$

又 D 为正定矩阵，可知矩阵 M 为正定矩阵.

因矩阵 M 为对称矩阵，故 $B-C^TA^{-1}C$ 为对称矩阵. 对 $X=(0,0,\cdots,0)^T$ 及任意的 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T\neq 0$，有

$$(X^T,Y^T)\begin{pmatrix} A & o \\ o & B-C^TA^{-1}C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=Y^T(B-C^TA^{-1}C)Y>0.$$ 故 $B-C^TA^{-1}C$ 为正定矩阵.

[1999,1] 设 A 为 m 阶实对称矩阵且正定，B 为 $m\times n$ 实矩阵，B^T 为 B 的转置矩阵，试证：B^TAB 为正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $r(B)=n$.

【详解】必要性. 设 B^TAB 为正定矩阵，则由定义知，对任意的实 n 维列向量 $x\neq 0$，有

$x^T(B^TAB)\,x>0$,　即 $(Bx)^TA\,(Bx)>0$.

于是，$Bx\neq 0$.　因此，$Bx=0$ 只有零解，故有 $r(B)=n$.

充分性. 因 $(B^TAB)^T = B^TA^TB=B^TAB$, 故 B^TAB 为实对称矩阵.

由 $r(B)=n$, 所以线性方程组 $Bx=0$ 只有零解，从而对任意的实 n 维列向量 $x\neq 0$，有 $Bx\neq 0$.又 A 为正定矩阵，所以对于 $Bx\neq 0$ 有 $(Bx)^TA\,(Bx)>0$.

于是当 $x\neq 0$，有 $x^T(B^TAB)\,x=(Bx)^TA\,(Bx)>0$，故 B^TAB 为正定矩阵.

[1999,3] 设 A 为 $m\times n$ 实矩阵，E 为 n 阶单位矩阵.已知矩阵 $B=lE+A^TA$，试证：当 $l>0$ 时，矩阵 B 为正定矩阵.

【详解】因为 $B^T=(lE+A^TA)^T=lE+A^TA=B.$ 所以 B 为 n 阶实对称矩阵.

对于任意的实 n 维向量 x ，有

$x^TBx=x^T(lE+A^TA)x=lx^Tx+x^TA^TAx=lx^Tx+(Ax)^TAx$.

所以当 $x\neq 0$ 时，$x^Tx>0,(Ax)^TAx>0$.

因此，当 $l>0$ 时，对任意的 $x\neq 0$，恒有 $x^TBx=lx^Tx+(Ax)^TAx>0$. 即 B 是正定矩阵.

[题] 求

未知类

[1999,1]

三、求直线 $l:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi:x-y+2z-1=0$ 上投影直线 l_0 的方程，并求 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

【详解 1】

过直线 l 作一垂直于 π 的平面 π_1，其法向量既垂直于 l 的方向向量 $s=\{1,1,-1\}$，又垂直于 π 的法向量 $n=\{1,-1,2\}$，可用向量积求得

$$n_1=s\times n\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=i-3j-2k.$$

又 $(1,0,1)$ 为直线 l 上的点，所以该点也在平面 π_1 上，由点法式得 π_1 的方程为

$(x-1)-3y-2(z-1)=0,$ 即 $\quad x-3y-2z+1=0$.

从而l_0的方程为

$$l_0:\begin{cases}x-y+2z-1=0\\x-3y-2z+1=0\end{cases}$$

将l_0写成参数y的方程： $\begin{cases}x=2y\\z=-\frac{1}{2}(y-1)\end{cases}$

于是直线绕y轴旋转所得旋转曲面方程为：

$$x^2+z^2=(2y)^2+\left[-\frac{1}{2}(y-1)\right]^2$$

即 $$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0.$$

【详解 2】

用平面束方法，直线$l:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$的方程可写为 $\begin{cases}x-y-1=0\\y+z-1=0\end{cases}$

于是过l的平面方程可写成

$$x-y-1+\lambda(y+z-1)=0,$$

即 $$x+(\lambda-1)y+\lambda z-\lambda-1=0.$$

在其中求出平面π_1，使它与π垂直，得

$$1-(\lambda-1)=2-\lambda=0,$$

解得$\lambda=-2$,于是π_1的方程为

$$(x-1)-3y-2(z-1)=0,\quad 即\quad x-3y-2z+1=0$$

以下同解法一.

[题] 求