历年全国硕士研究生入学考试线性代数试题

版本:2001-2011

解题方法及依据的知识点见下列参考文献:

[1] 陈建龙等, 《线性代数》(十一五国家级规划教材), 科学出版社, 2007.
[2] 张小向等, 《线性代数学习指导》, 科学出版社, 2008.
[3] 周建华等, 《几何与代数》(十一五国家级规划教材), 科学出版社, 2009.

一. 填空题

1. 01 数一 设矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$, 其中$\boldsymbol{E}$为单位矩阵, 则$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=$__________.

解: $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})$.

2. 01 数二 设方程$\begin{bmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$有无穷多个解, 则$a=$_______.

解: $\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+2&a+2&a+2\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}\times(-1)=(a+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&a-1&0\\0&0&a-1\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2$.

原方程有无穷多个解$\Rightarrow(a+2)(a-2)^2=0\Rightarrow a=-2$或1.

当$a=1$时, $\begin{bmatrix}a&1&1&1\\1&a&1&1\\1&1&a&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&-2\end{bmatrix}\times(-1)\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&-3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, 由此可见此时原方程有无解. 因此$a=-2$.

事实上, $a=-2$时, $\begin{bmatrix}a&1&1&1\\1&a&1&1\\1&1&a&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1&1&1\\1&-2&1&1\\1&1&-2&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-2&1&1&1\\1&-2&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}1&-2&1&1\\-2&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\times2\to\begin{bmatrix}1&-2&1&1\\0&-3&3&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$.

3. 01 数三/四 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix}$ 且秩($\boldsymbol{A}$) = 3，则 k = ________.

解: $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k+3 & k+3 & k+3 & k+3 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}\times(-1) = (k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix}$

$= (k+3)(k-1)^3$.

秩($\boldsymbol{A}$) = 3 ⇒ $|\boldsymbol{A}| = 0$ ⇒ $k = -3$ 或 1.

当 $k = 1$ 时，秩($\boldsymbol{A}$) = 1，因此 $k = -3$.

4. 01 数四 设行列式 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$，则第四行各元素余子式之和的值为________.

解: [方法一] $\boldsymbol{D}$ 的第四行各元素余子式依次为

$$\boldsymbol{M}_{41}=\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -7 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-56,\ \boldsymbol{M}_{42}=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0,\ \boldsymbol{M}_{43}=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix}=42,\ \boldsymbol{M}_{44}=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix}=-14.$$

于是有 $\boldsymbol{M}_{41}+\boldsymbol{M}_{42}+\boldsymbol{M}_{43}+\boldsymbol{M}_{44}=-28$.

[方法二] 计算"$\boldsymbol{D}$ 的第四行各元素余子式之和"相当于把 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ 按第四行展开，而

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -7\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -28.$$

[注] 计算"$\boldsymbol{D}$ 的第四行各元素代数余子式之和"相当于把 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 按第四行展开，而 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ 0.

5. 02 数一 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 可化成标准形 $f = 6y_1^2$，则 a = ________.

解: 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix}$. 又因为 $f(x_1, x_2, x_3)$ 经正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 可化成标准形 $f = 6y_1^2$，可见 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. 于是有

$$3a = a + a + a = \mathrm{tr}\boldsymbol{A} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 6.$$

故 $a = 2$.

[注] 也可以由 $f(x_1, x_2, x_3)$ 经正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 可化成标准形 $f = 6y_1^2$ 看出 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 1，因而 $a = 2$.

6. 02 数二 矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ 的非零特征值是________.

解: 根据对角线法则, $\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda-2 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)^2 + 8 - 8 - 4(\lambda-2) + 4(\lambda-2) - 4\lambda = \lambda^2(\lambda-4)$, 可见该矩阵的非零特征值是 4.

[注] 由此可以进一步看出 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$不能与对角矩阵相似. 因为假若 A 相似于对角矩阵, 则 A 相似于$\Lambda = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 因而秩($A$) = 秩($\Lambda$) = 1. 但秩($A$) = 2, 矛盾!

7. 02 数三 设三阶矩阵$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, 三维列向量$\alpha = (a, 1, 1)^T$. 已知$A\alpha$与$\alpha$线性相关, 则$a$ = _____.

解: 因为$\alpha = (a, 1, 1)^T \neq \mathbf{0}$, 而且$A\alpha$与$\alpha$线性相关, 故存在$\lambda$使得$A\alpha = \lambda\alpha$, 即

$$\begin{bmatrix} a \\ 2a+3 \\ 3a+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

由此可得$\lambda = 1$, $a = -1$.

8. 02 数四 设矩阵$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = A^2 - 3A + 2E$, 则B^{-1} = _______.

解: $B = A^2 - 3A + 2E = (A - E)(A - 2E) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

$|B| = 2$, $B^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \dfrac{1}{|B|}B^* = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

9. 03 数一 从$\mathbf{R}^2$的基$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$到基$\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$的过渡矩阵为_______.

解: 令$A = (\alpha_1, \alpha_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = (\beta_1, \beta_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, 基$\alpha_1, \alpha_2$到基$\beta_1, \beta_2$的过渡矩阵为$P$, 则$B = AP$,

$$P = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

10. 03 数二 设α为 3 维列向量, α^T是α的转置. 若$\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 则$\alpha^T\alpha$ = _______.

解: 设$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, 则$\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2 \end{bmatrix}$. 又因为$\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 所以

$$\alpha^T\alpha = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 + 1 + 1 = 3.$$

11. 03 数二 设三阶方阵A, B满足$A^2B - A - B = E$, 其中E为三阶单位矩阵, 若$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则$|B|$ = ____.

解: $A^2B - A - B = E \Rightarrow (A^2 - E)B = A + E \Rightarrow (A+E)(A-E)B = A+E \Rightarrow |A+E|\cdot|A-E|\cdot|B| = |A+E|$.

而$|A+E| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 18$. $|A-E| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2$. 故$|B| = \dfrac{1}{2}$.

12. 03 数三/四 设n维向量$\boldsymbol{\alpha} = (a, 0, \ldots, 0, a)^T$, $a < 0$, $\boldsymbol{E}$为n阶单位矩阵, 矩阵$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha\alpha}^T$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E} + \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^T$, 其中$\boldsymbol{A}$的逆矩阵为$\boldsymbol{B}$, 则$a$ = _____.

解: $\boldsymbol{\alpha} = (a, 0, \ldots, 0, a)^T$, $a < 0 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha} = 2a^2$, $\boldsymbol{\alpha\alpha}^T = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & \cdots & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & \cdots & 0 & a^2 \end{bmatrix} \neq \boldsymbol{O}$.

矩阵$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha\alpha}^T$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E} + \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^T$, 其中$\boldsymbol{A}$的逆矩阵为$\boldsymbol{B} \Rightarrow (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha\alpha}^T)(\boldsymbol{E} + \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^T) = \boldsymbol{E}$

$\Rightarrow \boldsymbol{E} + \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^T - \boldsymbol{\alpha\alpha}^T - \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^T\boldsymbol{\alpha\alpha}^T = \boldsymbol{E} \Rightarrow (\frac{1}{a} - 1 - 2a)\boldsymbol{\alpha\alpha}^T = \boldsymbol{O} \Rightarrow \frac{1}{a} - 1 - 2a = 0 \Rightarrow a = -1$ (因为$a < 0$).

13. 03 数四 设$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$均为三阶方阵, $\boldsymbol{E}$为三阶单位矩阵. 已知$\boldsymbol{AB} = 2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 则$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$ = ____.

解: $\boldsymbol{AB} = 2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \Rightarrow (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{AB} - 2\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} + 2\boldsymbol{E} = 2\boldsymbol{E} \Rightarrow (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{E} \Rightarrow (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})$.

又因为$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 所以$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

14. 04 数一/二 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{ABA}^* = 2\boldsymbol{BA}^* + \boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{A}^*$为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, $\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵, 则$|\boldsymbol{B}|$ = ______.

解: $|\boldsymbol{A}| = 3 \Rightarrow \boldsymbol{AA}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} = 3\boldsymbol{E} \Rightarrow |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{A}^*| = |3\boldsymbol{E}| = 27 \Rightarrow |\boldsymbol{A}^*| = 9$.

$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$.

$\boldsymbol{ABA}^* = 2\boldsymbol{BA}^* + \boldsymbol{E} \Rightarrow (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{BA}^* = \boldsymbol{E} \Rightarrow |\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|\cdot|\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{E}| = 1 \Rightarrow |\boldsymbol{B}| = \frac{1}{9}$.

15. 04 数三 二次型$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$的秩为______.

解: 二次型$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$的矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$,

秩(f) = 秩$(\boldsymbol{A}) = 2$.

16. 04 数四 设$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$, 其中$\boldsymbol{P}$为三阶可逆矩阵, 则$\boldsymbol{B}^{2004} - 2\boldsymbol{A}^2$ = _______.

解: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\boldsymbol{B}^{2004} - 2\boldsymbol{A}^2 = (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})^{2004} - 2\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{2004}\boldsymbol{P} - 2\boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

17. 04 数四 设$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{3\times3}$是实正交矩阵, 且$a_{11} = 1$, $\boldsymbol{b} = (1, 0, 0)^T$, 则线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$的解是_______.

解: $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{3\times3}$是实正交矩阵 $\Rightarrow \boldsymbol{AA}^T = \boldsymbol{E}$, 即

$$\begin{bmatrix} a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

由$a_{11} = 1$ 可知$a_{12} = a_{13} = 0$. 于是$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & a_{21} & a_{31} \\ 0 & a_{22} & a_{32} \\ 0 & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

18. 05 数一/二/四 设α_1, α_2, α_3均为 3 维列向量, 记矩阵$\boldsymbol{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{B} = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3, \alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$. 如果$|\boldsymbol{A}| = 1$, 那么$|\boldsymbol{B}|$ = _____.

×(−1) ×(−2)

解: $|\boldsymbol{B}| = |\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3, \alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3| = |\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+3\alpha_3, 2\alpha_2+8\alpha_3| = |\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+3\alpha_3, 2\alpha_3|$
$= 2|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+3\alpha_3, \alpha_3| = 2|\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2, \alpha_3| = 2|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 2|\boldsymbol{A}| = 2$.

[另解] $\boldsymbol{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{B} = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3, \alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3) \Rightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = (2-1)(3-1)(3-2) = 2$. (注: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$ 为范德蒙行列式).

19. 05 数三/四 设行向量组(2, 1, 1, 1), (2, 1, a, a), (3, 2, 1, a), (4, 3, 2, 1)线性相关, 且 $a \neq 1$, 则 a = _____.

解: 向量组(2, 1, 1, 1), (2, 1, a, a), (3, 2, 1, a), (4, 3, 2, 1)线性相关$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 3 & 2 & 1 & a \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. 而

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 3 & 2 & 1 & a \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underline{\underline{c_1 - c_2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & a \\ 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}\times(-1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-1 & a-1 \\ 1 & 0 & a-1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (a-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a-1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (a-1)(2a-1).$$

又因为 $a \neq 1$, 所以 $a = \dfrac{1}{2}$.

20. 06 数一 点(2, 1, 0)到平面 $3x + 4y + 5z = 0$ 的距离 d = _____.

解: $d = \dfrac{|3\times2+4\times1+5\times0|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}} = \dfrac{10}{5\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

21. 06 数一/二/三/四 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为 2 阶单位矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{B} + 2\boldsymbol{E}$, 则$|\boldsymbol{B}|$ = _____.

解: $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{B} + 2\boldsymbol{E} \Rightarrow \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) = 2\boldsymbol{E} \Rightarrow |\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}| = |2\boldsymbol{E}| = 4$. 而$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, 故$|\boldsymbol{B}| = 2$.

22. 06 数四 设α_1, α_2为 2 维列向量, 矩阵$\boldsymbol{A} = (2\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1-\alpha_2)$, $\boldsymbol{B} = (\alpha_1, \alpha_2)$. 若行列式$|\boldsymbol{A}| = 6$, 则$|\boldsymbol{B}|$ = _____.

解: $6 = |\boldsymbol{A}| = |2\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1-\alpha_2| = |2\alpha_1+\alpha_2, 3\alpha_1| = 3|2\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1| = 3|\alpha_2, \alpha_1| = -3|\alpha_1, \alpha_2| = -3|\boldsymbol{B}| \Rightarrow |\boldsymbol{B}| = -2$.

[另解] $\boldsymbol{A} = (2\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1-\alpha_2)$, $\boldsymbol{B} = (\alpha_1, \alpha_2) \Rightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3|\boldsymbol{B}| \Rightarrow |\boldsymbol{B}| = -2$.

23. 07 数一/二/三/四 设矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则$\boldsymbol{A}^3$的秩为_____.

解: $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{A}^3=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{A}^3$的秩为 1.

24. 08 数一/二 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是λ, 2, 3, 其中λ未知, 且$|\boldsymbol{A}| = 24$, 则λ =_______.

解: $24 = |\boldsymbol{A}| = \lambda\times 2\times 3 \Rightarrow \lambda = 4$.

25. 08 数一/二 设$\boldsymbol{A}$为 2 阶矩阵, α_1, α_2为线性无关的 2 维列向量, $\boldsymbol{A}\alpha_1 = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A}\alpha_2 = 2\alpha_1+\alpha_2$, 则$\boldsymbol{A}$的非零特征值为______.

解: α_1, α_2为线性无关的 2 维列向量 $\Rightarrow \boldsymbol{P} = (\alpha_1, \alpha_2)$为可逆矩阵.

$$\boldsymbol{A}\alpha_1 = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{A}\alpha_2 = 2\alpha_1+\alpha_2 \Rightarrow \boldsymbol{AP} = \boldsymbol{A}(\alpha_1, \alpha_2) = (\boldsymbol{0}, 2\alpha_1+\alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2)\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \boldsymbol{A}$ 与$\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}$有相同的特征值$\Rightarrow \boldsymbol{A}$ 的非零特征值为 1.

另解: α_1, α_2为线性无关的 2 维列向量 $\Rightarrow \alpha_1\neq\boldsymbol{0}$, $2\alpha_1+\alpha_2\neq\boldsymbol{0}$.

$\boldsymbol{A}\alpha_1 = \boldsymbol{0} = 0\alpha_1 \Rightarrow 0$ 是$\boldsymbol{A}$的一个特征值.

$\boldsymbol{A}\alpha_2 = 2\alpha_1+\alpha_2 \Rightarrow \boldsymbol{A}(2\alpha_1+\alpha_2) = 2\boldsymbol{A}\alpha_1+\boldsymbol{A}\alpha_2 = \boldsymbol{0}+2\alpha_1+\alpha_2 = 2\alpha_1+\alpha_2 \Rightarrow 1$ 是$\boldsymbol{A}$的一个特征值.

最后由 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵可知 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为 1.

26. 08 数三/四 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互不相同, 若行列式$|\boldsymbol{A}| = 0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的秩为______.

解: 设 3 阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为λ_1, λ_2, λ_3, 由于λ_1, λ_2, λ_3互不相同, 所以$\boldsymbol{A}$相似于$\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{bmatrix}$且由$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = |\boldsymbol{A}|$ $= 0$ 可知λ_1, λ_2, λ_3中有一个为零, 另外两个不为零. 因此$\boldsymbol{A}$的秩为 2.

27. 09 数一 若 3 维向量α, β满足$\alpha^{\mathrm{T}}\beta = 2$, 其中$\alpha^{\mathrm{T}}$为$\alpha$的转置, 则矩阵$\beta\alpha^{\mathrm{T}}$的非零特征值为_______.

解: 3 维向量α, β满足$\alpha^{\mathrm{T}}\beta = 2 \Rightarrow \beta\neq\boldsymbol{0}\Rightarrow$ 秩$(\beta\alpha^{\mathrm{T}})\leq$ 秩$(\beta) = 1\Rightarrow$ 矩阵$\beta\alpha^{\mathrm{T}}$至多有一个非零的特征值.

$\alpha^{\mathrm{T}}\beta = 2 \Rightarrow (\beta\alpha^{\mathrm{T}})\beta = \beta(\alpha^{\mathrm{T}}\beta) = 2\beta \Rightarrow 2$ 是矩阵$\beta\alpha^{\mathrm{T}}$的非零特征值.

故矩阵$\beta\alpha^{\mathrm{T}}$的非零特征值为 2.

28. 09 数二 设α, β为 3 维列向量, β^{T}为β的转置, 若矩阵$\alpha\beta^{\mathrm{T}}$相似于$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, 则$\beta^{\mathrm{T}}\alpha$ = ______.

解: 设$\alpha = (a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}}$, $\beta = (b_1, b_2, b_3)^{\mathrm{T}}$, 则$\alpha\beta^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&a_1b_3\\a_2b_1&a_2b_2&a_2b_3\\a_3b_1&a_3b_2&a_3b_3\end{bmatrix}$. 因为$\alpha\beta^{\mathrm{T}}$相似于$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, 所以有

$$\beta^{\mathrm{T}}\alpha = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 = \mathrm{Tr}(\alpha\beta^{\mathrm{T}}) = 2+0+0 = 2.$$

29. 09 数三 设$\alpha = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\beta = (1, 0, k)^{\mathrm{T}}$, 若矩阵$\alpha\beta^{\mathrm{T}}$相似于$\begin{bmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, 则$k$ = ______.

解: 因为$\alpha = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\beta = (1, 0, k)^{\mathrm{T}}$, 所以$\alpha\beta^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}1&0&k\\1&0&k\\1&0&k\end{bmatrix}$. 又因为矩阵$\alpha\beta^{\mathrm{T}}$相似于$\begin{bmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, 所以有

$$1+0+k = \mathrm{Tr}(\alpha\beta^{\mathrm{T}}) = 3+0+0 = 3.$$

故 $k = 2$.

30. 10 数一 设$\alpha_1 = (1, 2, -1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2 = (1, 1, 0, 2)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3 = (2, 1, 1, a)^{\mathrm{T}}$, 若由$\alpha_1$, α_2, α_3生成的向量空间的维数是 2, 则a = _______.

解: 首先, 由α_1, α_2, α_3生成的向量空间的维数 = 秩$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

其次, $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&1\\-1&0&1\\0&2&a\end{bmatrix}\begin{matrix}\times(-2)\ \times1\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2\\0&-1&-3\\0&1&3\\0&2&a\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \times1\ \times2\\ \\ \\ \end{matrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2\\0&-1&-3\\0&0&0\\0&0&a-6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2\\0&-1&-3\\0&0&a-6\\0&0&0\end{bmatrix}$.

故"由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$生成的向量空间的维数是 2" ⇔ "秩$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$" ⇔ "$a-6=0$" ⇔ "$a=6$".

31. 10 数二/三 设A, B为 3 阶矩阵, 且$|A|=3$, $|B|=2$, $|A^{-1}+B|=2$, 则$|A+B^{-1}|=$________.

解: $A+B^{-1}=B^{-1}+A=(AA^{-1})B^{-1}+A(BB^{-1})=A(A^{-1}+B)B^{-1}$.

$|A+B^{-1}|=|A(A^{-1}+B)B^{-1}|=|A|\times|A^{-1}+B|\times|B^{-1}|=3\times2\times2^{-1}=3$.

32. 11 数一 若二次曲面的方程 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$, 经过正交变换化为$y_1^2+4z_1^2=4$, 则$a=$ ________.

解: 二次型$x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz$ 的矩阵$A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&a&1\\a&3&1\\1&1&1\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \times(-1)\end{matrix}=\begin{vmatrix}0&a-1&0\\a-1&2&0\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&a-1\\a-1&2\end{vmatrix}=-(a-1)^2.$$

由题目条件可知存在正交矩阵Q, 使得$Q^TAQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&4\end{pmatrix}$. 故$|A|=0$. 由此可得$a=1$.

此时, $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$,

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-1&\lambda-3&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \times(-1)\\ \times1\end{matrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&1-\lambda&\lambda-1\\-1&\lambda-3&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&-1&1\\-1&\lambda-3&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}\begin{matrix}\times1\\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&\lambda-4&0\\0&-2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-4&0\\-2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\lambda(\lambda-4).$$

可见A的特征值为$\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=4$. 因而确实存在正交矩阵Q, 使得$Q^TAQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&4\end{pmatrix}$.

33. 11 数二 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$, 则$f$的正惯性指数为________.

解一: $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3=(x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3)+2x_2^2$

$=(x_1+x_2+x_3)^2+2x_2^2$.

令$\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3,\\y_2=x_2\\y_3=x_3\end{cases}$, 则$\begin{cases}x_1=y_1-y_2-y_3,\\x_2=y_2\\x_3=y_3\end{cases}$ 即 $x=Py$, 其中 $P=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$为可逆矩阵,

且$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准形: $y_1^2+2y_2^2$.

可见 f 的正惯性指数为 2.

解二: $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$的矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$,

$$|\lambda E-A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-3 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \times(-1) \\ \times 1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ -1 & \lambda-3 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda-3 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times 1 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda-4 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)\lambda(\lambda-4).$$

可见$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 4$. 因而$f$的正惯性指数为 2.

34. 11 数三 设二次型$f(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$的秩为 1, $\boldsymbol{A}$的行元素之和为 3, 则f在正交变换下$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$下的标准形为________.

解: 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 的行元素之和为 3,

即$a_{11} + a_{12} + a_{13} = 3$, $a_{21} + a_{22} + a_{23} = 3$, $a_{31} + a_{32} + a_{33} = 3$,

所以 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+a_{12}+a_{13} \\ a_{21}+a_{22}+a_{23} \\ a_{31}+a_{32}+a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

可见 3 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

因为秩($\boldsymbol{A}$) = 秩(f) = 1, 而且 $\boldsymbol{A}$ 正交相似于一个对角矩阵Λ, 其对角线上的元素为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,

所以秩(Λ) = 秩($\boldsymbol{A}$) = 1, Λ的对角线上只能有一个非零.

故$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

由此可知f在正交变换下$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$下的标准形为 $3y_1^2$.

二. 选择题

1. 01 数一 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ ( ).

(A) 合同且相似. (B) 合同但不相似. (C) 不合同但相似. (D) 不合同且不相似.

解: 因为$\boldsymbol{A}$是实对称矩阵, 所以存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$使$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \lambda_1&0&0&0\\0&\lambda_2&0&0\\0&0&\lambda_3&0\\0&0&0&\lambda_4 \end{bmatrix} \overset{\text{记为}}{=\!=} \Lambda$, 其中$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$由为$\boldsymbol{A}$的特征值. 又因为秩($\boldsymbol{A}$) = 1, Tr ($\boldsymbol{A}$) = 4, 所以$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$中有一个非零, 其余 3 个为零, 且$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4$ = Tr ($\boldsymbol{A}$) = 4. 可见$\boldsymbol{A}$的非零特征值等于 4. 因而$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$合同且相似. 选A.

2. 01 数三/四 设$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{14}&a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{24}&a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{34}&a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{44}&a_{43}&a_{42}&a_{41} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} 0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1 \end{bmatrix}$, 其中$\boldsymbol{A}$可逆, 则$\boldsymbol{B}^{-1}$等于( ).

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$. (B) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_2$. (C) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}$. (D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1$.

解: 因为$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44} \end{bmatrix} \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_4} \begin{bmatrix} a_{14}&a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{24}&a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{34}&a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{44}&a_{43}&a_{42}&a_{41} \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}$, 根据初等列变换与右乘相应的初等矩阵之间的关系可知$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$. 因而$\boldsymbol{B}^{-1} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1)^{-1} = \boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}$. 选C.

[注] 由于本题中的$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$, 因而$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$也成立. 由此可以得到$\boldsymbol{B}^{-1} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2)^{-1} = \boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} =$

$P_2P_1A^{-1}$. 事实上, $P_2P_1A^{-1} = AP_1P_2$.

3. 01 数三 设 A 是 n 阶矩阵, α是 n 维列向量, 若秩$\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}$= 秩$(A)$, 则线性方程组(　　).

(A) $Ax = \alpha$必有无穷多解.　　　　(B) $Ax = \alpha$必有唯一解.

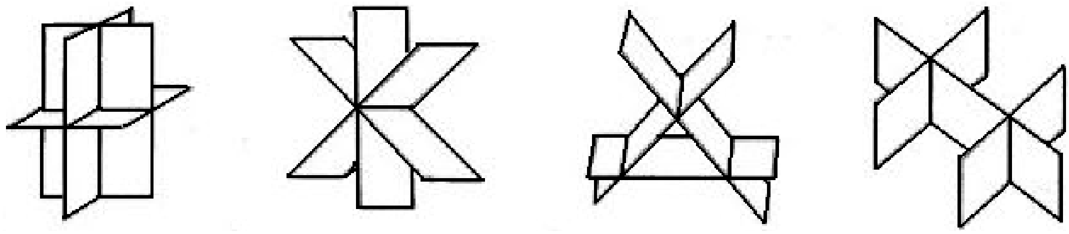
(C) $\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ 仅有零解.　　(D) $\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ 必有非零解.

解: 因为秩$\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}$= 秩$(A) \le n < n + 1$, 而$\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}$的列数为$n + 1$, 即齐次线性方程组$\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0}$的系数矩阵的秩小于未知数的个数, 故$\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ 必有非零解. 选D.

[注] ① 取 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 则秩$\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}$= 秩$(A) = 2$, 此时 $Ax = \alpha$只有唯一解, 故选项(A)被排除.

②取 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 则秩$\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}$= 秩$(A) = 1$, 此时 $Ax = \alpha$有无穷多解, $\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ 有非零解, 故选项(B)和(C)被排除.

4. 02 数一 设有三张不同平面的方程$a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = b_i$, $i = 1, 2, 3$, 它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为 2, 则这三张平面可能的位置关系为(　　).

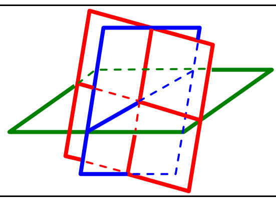
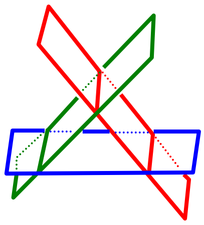
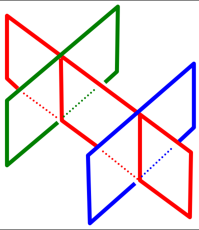
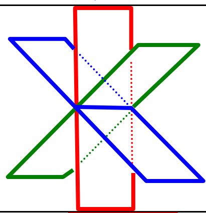
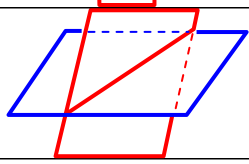
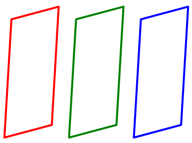
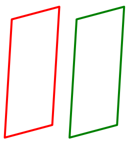
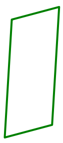


(A)　　(B)　　(C)　　(D)

解: 令$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, 由条件可知方程组$Ax = b$有无穷多解, 而且对应的齐次线性方程组$Ax = \mathbf{0}$ 的基础解系中只有一个解向量, 因而$Ax = b$的通解形如$x = t\begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$, 其中$\begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}$为$Ax = \mathbf{0}$ 的基础解系, $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$为$Ax = b$的特解, t为任意实数. 由此可见这三张平面交于一条直线, 交线的参数方程为

$$\begin{cases} x = lt + x_0, \\ y = mt + y_0, \\ z = nt + z_0. \end{cases}$$ 选B.

[注] 令$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, 则平面的方程$a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = b_i$, $i = 1, 2, 3$ 的几种可能的位置关系如下:

秩($\boldsymbol{A}$)	秩($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$)	$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有多少解	三张平面的相对位置	示意图	例子($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$) =
3	3	唯一解	交于一点		$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&2\\0&0&1&3\end{bmatrix}$
2	3	无解	无公共点且两两不平行		$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&2\\1&2&2&4\end{bmatrix}$
2	3	无解	无公共点且有两张平面平行		$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&2\\1&1&1&3\end{bmatrix}$
2	2	无穷多解	交于一直线且两两不重合		$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&2\\1&2&2&3\end{bmatrix}$
2	2	无穷多解	交于一直线，其中两张平面重合		$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&1&3\end{bmatrix}$
1	2	无解	无公共点，相互平行且不重合		$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&2\\1&1&1&3\end{bmatrix}$
1	2	无解	无公共点，有两张平面重合		$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&2\end{bmatrix}$
1	1	无穷多解	三张平面重合		$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$

6. 02 数二 设向量组α_1, α_2, α_3线性无关，向量β_1可由α_1, α_2, α_3线性表示，而向量β_2不能由α_1, α_2, α_3线性表示，则对于任意常数k，必有(　　).

(A) α_1, α_2, α_3, $k\beta_1+\beta_2$线性无关.　　(B) α_1, α_2, α_3, $k\beta_1+\beta_2$线性相关.

(C) α_1, α_2, α_3, $\beta_1+k\beta_2$线性无关.　　(D) α_1, α_2, α_3, $\beta_1+k\beta_2$线性相关.

解: 假若α_1, α_2, α_3, $k\beta_1+\beta_2$线性相关，则由“α_1, α_2, α_3线性无关”可知$k\beta_1+\beta_2$能由α_1, α_2, α_3线性表示. 因而可设

$$k\beta_1+\beta_2 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3.$$

又因为β_1可由α_1, α_2, α_3线性表示，故可设

$$\beta_1 = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + t_3\alpha_3.$$

于是有

$$\beta_2 = (k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3) - k\beta_1 = (k_1-kt_1)\alpha_1 + (k_2-kt_2)\alpha_2 + (k_3-kt_3)\alpha_3.$$

这与“β_2不能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示”矛盾. 因此$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1+\beta_2$线性无关. 选A.

[注] 根据上述分析, 选项(B)立即可以排除. 若取$k = 0$, 则$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1+k\beta_2$线性相关, 故可排除(C); 若取$k = 1$, 则$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1+k\beta_2$线性无关, 故可排除(D).

7. 02数三 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times m$ 矩阵, 则线性方程组$(AB)x = 0$ ( ).

(A) 当 $n > m$ 时仅有零解. (B) 当 $n > m$ 时必有非零解.

(C) 当 $m > n$ 时仅有零解. (D) 当 $m > n$ 时必有非零解.

解: 因为A是$m\times n$矩阵, B是$n\times m$矩阵, 所以AB是$m\times m$矩阵. 当$m > n$时, 秩$(AB) \le$ 秩$(A) \le n < m$, 此时$(AB)x = 0$ 必有非零解. 选D.

[注] 根据上述分析, 选项(C)立即可以排除. 若取 $A = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}1&1\\1&1\\1&1\end{bmatrix}$, 则 $AB = \begin{bmatrix}3&3\\3&3\end{bmatrix}$, 此时$(AB)x = 0$有非零解, 故可排除(A); 若取$A = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$, 则$AB = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, 此时$(AB)x = 0$仅有零解, 故可排除(B).

8. 02数三 设A是n阶实对称矩阵, P是n阶可逆矩阵, 已知n维列向量α是A的属于特征值λ的特征向量,则矩阵$(P^{-1}AP)^T$属于特征值λ的特征向量是( ).

(A) $P^{-1}\alpha$. (B) $P^T\alpha$. (C) $P\alpha$. (D) $(P^{-1})^T\alpha$.

解: 由条件可得$A\alpha = \lambda\alpha$, $(P^{-1}AP)^T(P^T\alpha) = [P^TA^T(P^T)^{-1}](P^T\alpha) = P^TA\alpha = \lambda(P^T\alpha)$. 选B.

9. 02数四 设 A, B 为 n 阶矩阵, A^*, B^*分别为 A, B 对应的伴随矩阵, 分块矩阵 $C = \begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix}$, 则 C 的伴随矩阵 $C^* =$ ( ).

(A) $\begin{bmatrix}|A|A^*&O\\O&|B|B^*\end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix}|B|B^*&O\\O&|A|A^*\end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix}|A|B^*&O\\O&|B|A^*\end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix}|B|A^*&O\\O&|A|B^*\end{bmatrix}$.

解: $C^* = (C_{ij})_{2n\times 2n}$, 其中$C_{ij}$表示$C$中第$i$行第$j$列处的元素的代数余子式.

当时$i, j \le n$时, $C_{ij} = A_{ij}|B|$; 当时$i, j \ge n$时, $C_{ij} = |A|B_{ij}$;

当时$i \le n$且$j > n$时, $C_{ij} = 0$; 当时$i > n$且$j \le n$时, $C_{ij} = 0$. 选D.

[注]后两种情况可以通过分析分块矩阵的秩得出结论.

10. 03数一/二 设向量组I: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$可由向量组II: $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$线性表示, 则( ).

(A) 当 $r < s$ 时, 向量组 II 必线性相关. (B) 当 $r > s$ 时, 向量组 II 必线性相关.

(C) 当 $r < s$ 时, 向量组 I 必线性相关. (D) 当 $r > s$ 时, 向量组 I 必线性相关.

解: 不妨设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$均为列向量. 记$A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s)$, 由条件可知存在$s\times r$矩阵$C$使得$A = BC$. 于是当$r > s$时, 秩$(A) \le$ 秩$(C) \le s < r$, 从而向量组I必线性相关. 选D.

[注]取I: $\alpha_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, II: $\beta_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\beta_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$可排除(A)和(C); 取I: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, II: $\beta_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\beta_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$可排除(B).

11. 03数一 设有齐次线性方程组 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$, 其中 A, B 均为 $m\times n$ 矩阵, 现有 4 个命题:

①若 $Ax = 0$ 的解均是 $Bx = 0$ 的解, 则秩$(A) \ge$ 秩(B).

②若秩$(A) \ge$ 秩(B), 则 $Ax = 0$ 的解均是 $Bx = 0$ 的解.

③若 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解, 则秩$(A) =$ 秩(B).

④若秩$(A) =$ 秩(B), 则 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解.

以上命题中正确的是( ).

(A) ①②. (B) ①③. (C) ②④. (D) ③④.

解: $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解均是$\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 的解 $\Rightarrow n-$秩$(\boldsymbol{A}) \le n-$秩$(\boldsymbol{B}) \Rightarrow$ 秩$(\boldsymbol{A}) \ge$ 秩$(\boldsymbol{B})$, 可见①正确, 进一步可见③正确.

取$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, 则秩$(\boldsymbol{A}) =$ 秩$(\boldsymbol{B})$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$是$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解但不是$\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 的解, 可见②④不正确.

选B.

12. 03 数三 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$, 若 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵的秩等于 1, 则必有(　　).

(A) $a = b$ 或 $a + 2b = 0$.　(B) $a = b$ 或 $a + 2b \neq 0$.
(C) $a \neq b$ 且 $a + 2b = 0$.　(D) $a \neq b$ 且 $a + 2b \neq 0$.

解: 假设 $a = b$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{O}$, 因而秩$(\boldsymbol{A}^*) = 0 \neq 1$, 可见 $a \neq b$.

假设 $a \neq b$ 且 $a + 2b \neq 0$, 则$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2b & a+2b & a+2b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = (a+2b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} \times(-b)$

$= (a+2b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+2b)(a-b)^2 \neq 0$, 此时由$\boldsymbol{AA}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$可推出$\boldsymbol{A}^*$可逆, 因而秩$(\boldsymbol{A}^*) = 3 \neq 1$, 可见$a + 2b = 0$. 选C.

[注]对于一般的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 可以证明秩$(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & 当秩(\boldsymbol{A}) = n时; \\ 1, & 当秩(\boldsymbol{A}) = n-1时; \\ 0, & 当秩(\boldsymbol{A}) < n-1时. \end{cases}$

13. 03 数三 设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$均为$n$维向量, 下列结论不正确的是(　　).

(A) 若对于任意一组不全为零的数$k_1, k_2, \ldots, k_s$, 都有$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_s\alpha_s \neq \boldsymbol{0}$, 则$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性无关.

(B) 若$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性相关, 则对于任意一组不全为零的数$k_1, k_2, \ldots, k_s$, 都有$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_s\alpha_s = \boldsymbol{0}$.

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性无关的充分必要条件是此向量组的秩为$s$.

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性无关的必要条件是其中任意两个向量线性无关.

解: 取$\alpha_1 = \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 则$\alpha_1, \alpha_2$线性相关, 但对于$k_1 = k_2 = 1$, 有$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \boldsymbol{0}$. 选B.

14. 03 数四 设矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$, 则秩$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$与秩$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$之和等于(　　).

(A) 2.　　(B) 3.　　(C) 4.　　(D) 5.

解: 因为矩阵$\boldsymbol{A}$相似于$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 所以$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = |\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$. 由此可得$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$. 因而秩$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}) = 3$(否则秩$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}) < 3 \Rightarrow |\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}| = 0 \Rightarrow 2$ 是$\boldsymbol{A}$的特征值). 又因为$\boldsymbol{B}$是对称矩阵, 所以$\boldsymbol{B}$相似于对角矩阵, 从而A也相似于对角矩阵, 可见$\boldsymbol{A}$的二重特征值$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$有两个线性无关的特征向量与之对应, 即齐次线性方程组$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系由两个线性无关的解向量构成, 故秩$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) = 1$. 综上所述, 秩$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}) +$ 秩$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) = 3 + 1 = 4$. 选C.

另解: 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$, 所以 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 相似于 $\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 相似于 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$.
于是秩$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}) +$ 秩$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) =$ 秩$(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}) +$ 秩$(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}) = 3 + 1 = 4$.

15. 04 数一/二 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得 $\boldsymbol{B}$, 再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得 $\boldsymbol{C}$, 则满足 $\boldsymbol{AQ} = \boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为(　　).

(A) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

解: 根据初等列变换与右乘相应的初等矩阵之间的对应关系可知$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$. 选D.

16. 04 数一/二 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的任意两个非零矩阵, 则必有( ).
(A) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关, $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关.
(B) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关, $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.
(C) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关, $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关.
(D) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关, $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

解: $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}, \boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\Rightarrow\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关.
$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}, \boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\Rightarrow\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$的列向量组线性相关 $\Rightarrow\boldsymbol{B}$的行向量组线性相关. 选A.

[注]取 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的非零矩阵, 其中 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关, $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关, 由此可以排除选项(B), (C), (D).

17. 04 数三/四 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价, 则必有( ).
(A) 当$|\boldsymbol{A}|=a\ (a\neq 0)$时, $|\boldsymbol{B}|=a$. (B) 当$|\boldsymbol{A}|=a\ (a\neq 0)$时, $|\boldsymbol{B}|=-a$.
(C) 当$|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时, $|\boldsymbol{B}|=0$. (D) 当$|\boldsymbol{A}|=0$ 时, $|\boldsymbol{B}|=0$.

解: n 阶矩阵矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价$\Rightarrow$秩$(\boldsymbol{A})=$ 秩$(\boldsymbol{B})$. 当$|\boldsymbol{A}|=0$ 时, 秩$(\boldsymbol{B})=$ 秩$(\boldsymbol{A})<n\Rightarrow|\boldsymbol{B}|=0$.
n 阶矩阵矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价$\Rightarrow$存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PAQ}$. 当$|\boldsymbol{A}|=0$ 时, $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{PAQ}|=|\boldsymbol{P}|\cdot|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{Q}|=0$. 选D.

[注]取 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价且$|\boldsymbol{A}|=1\neq 0, |\boldsymbol{B}|=2$. 由此可以排除选项(A), (B), (C).

18. 04 数三 设n阶矩阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$, 若$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的互不相等的解,则对应的齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系( ).
(A) 不存在. (B) 仅含一个非零解向量.
(C) 含有两个线性无关的解向量. (D) 含有三个线性无关的解向量.

解: n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{A}$ 有非零的 $n-1$ 阶子式$\Rightarrow$秩$(\boldsymbol{A})\geq n-1$.
若$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的互不相等的解, 则秩$(\boldsymbol{A})<n$.
综上所述, 可见秩$(\boldsymbol{A})=n-1$. 因此齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中仅含一个非零解向量. 选B.

19. 05 数一/二/三 设λ_1, λ_2是矩阵$\boldsymbol{A}$的两个不同的特征值, 对应的特征向量分别为α_1, α_2, 则$\alpha_1, \boldsymbol{A}(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关的充分必要条件是( ).
(A) $\lambda_1\neq 0$. (B) $\lambda_2\neq 0$. (C) $\lambda_1=0$. (D) $\lambda_2=0$.

解: $[\alpha_1, \boldsymbol{A}(\alpha_1+\alpha_2)]=[\alpha_1, \boldsymbol{A}\alpha_1+\boldsymbol{A}\alpha_2]=[\alpha_1, \lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2]=[\alpha_1, \alpha_2]\begin{bmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{bmatrix}$.
λ_1, λ_2是矩阵$\boldsymbol{A}$的两个不同的特征值, 对应的特征向量分别为$\alpha_1, \alpha_2\Rightarrow\alpha_1, \alpha_2$线性无关.
$\alpha_1, \boldsymbol{A}(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关 $\Leftrightarrow$ 秩$[\alpha_1, \boldsymbol{A}(\alpha_1+\alpha_2)]=2\Leftrightarrow$ 秩$\begin{bmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{bmatrix}=2\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{bmatrix}$可逆$\Leftrightarrow\lambda_2\neq 0$. 选B.

20. 05 数一/二 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\ (n\geq 2)$阶可逆矩阵, 交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}^*, \boldsymbol{B}^*$分别为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵, 则( ).
(A) 交换 $\boldsymbol{A}^*$的第 1 列与第 2 列得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$. (B) 交换 $\boldsymbol{A}^*$的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$.

(C) 交换 $\boldsymbol{A}^*$的第 1 列与第 2 列得矩阵$-\boldsymbol{B}^*$. (D) 交换 $\boldsymbol{A}^*$的第 1 行与第 2 行得矩阵$-\boldsymbol{B}^*$.

解: 用 $\boldsymbol{P}$ 表示由 n 阶单位矩阵交换第 1 行与第 2 行所得的初等矩阵.

交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{PA}$ 且$|\boldsymbol{B}| = -|\boldsymbol{A}|$.

$\boldsymbol{A}$可逆 $\Rightarrow \boldsymbol{B}$可逆且$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$, $\boldsymbol{B}^* = |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1} = -|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{PA})^{-1} = -|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1} = -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}^{-1} \Rightarrow -\boldsymbol{B}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}^{-1} \Rightarrow$ 交换 $\boldsymbol{A}^*$的第 1 列与第 2 列得矩阵$-\boldsymbol{B}^*$. 选C.

21. $\boxed{\text{05 数三}}$设矩阵$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{3\times3}$满足$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 其中$\boldsymbol{A}^*$为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$为$\boldsymbol{A}$的转置矩阵, 若$a_{11}, a_{12}, a_{13}$为三个相等的正数, 则$a_{11}$为( ).

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (B) 3. (C) $\dfrac{1}{3}$. (D) $\sqrt{3}$.

解: 矩阵$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{3\times3}$满足$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \Rightarrow |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{AA}^* = \boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}} \Rightarrow |\boldsymbol{A}|^2 = |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{A}|^{\mathrm{T}} = |\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|^3 \Rightarrow |\boldsymbol{A}| = 0$ 或 1

$\Rightarrow \boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{O}$或$\boldsymbol{E}$.

a_{11}, a_{12}, a_{13}为三个相等的正数(设$a_{11} = a_{12} = a_{13} = a$) $\Rightarrow \boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a & a & a \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & * & * \\ a & * & * \\ a & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a^2 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$

$\Rightarrow 3a^2 = 1 \Rightarrow a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 选A.

22. $\boxed{\text{05 数四}}$设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵, 若 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{CA}$, 则 $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}$ 为( ).

(A) $\boldsymbol{E}$. (B) $-\boldsymbol{E}$. (C) $\boldsymbol{A}$. (D) $-\boldsymbol{A}$.

解: $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{AB} \Rightarrow (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E} \Rightarrow \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$; $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{CA} \Rightarrow \boldsymbol{C}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$.

综上所述, $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1} = (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{E}$. 选A.

23. $\boxed{\text{06 数一/二}}$设$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$均为$n$维列向量, $\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵, 下列选项正确的是( ).

(A) 若$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$线性相关, 则$\boldsymbol{A}\alpha_1, \boldsymbol{A}\alpha_2, \dots, \boldsymbol{A}\alpha_s$线性相关.

(B) 若$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$线性相关, 则$\boldsymbol{A}\alpha_1, \boldsymbol{A}\alpha_2, \dots, \boldsymbol{A}\alpha_s$线性无关.

(C) 若$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$线性无关, 则$\boldsymbol{A}\alpha_1, \boldsymbol{A}\alpha_2, \dots, \boldsymbol{A}\alpha_s$线性相关.

(D) 若$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$线性无关, 则$\boldsymbol{A}\alpha_1, \boldsymbol{A}\alpha_2, \dots, \boldsymbol{A}\alpha_s$线性无关.

解: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$线性相关 $\Rightarrow$ 秩$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s$

$\Rightarrow$ 秩$(\boldsymbol{A}\alpha_1, \boldsymbol{A}\alpha_2, \dots, \boldsymbol{A}\alpha_s) =$ 秩$[\boldsymbol{A}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)] \le$ 秩$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s \Rightarrow \boldsymbol{A}\alpha_1, \boldsymbol{A}\alpha_2, \dots, \boldsymbol{A}\alpha_s$线性相关.

选A.

[注]由上面的分析可以立即排除选项(B). 取$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, α_1, α_2线性无关, $\boldsymbol{A}\alpha_1, \boldsymbol{A}\alpha_2$也线性无关. 由此可以排除选项(C). 取$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, α_1, α_2线性无关, $\boldsymbol{A}\alpha_1, \boldsymbol{A}\alpha_2$线性相关.

由此可以排除选项(D).

24. $\boxed{\text{06 数一/二/三/四}}$设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}$, 再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的-1 倍加到第 2 列得 $\boldsymbol{C}$, 记 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则( ).

(A) $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$. (B) $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{PAP}^{-1}$. (C) $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$. (D) $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}$.

解: $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 由条件可知, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{BP}^{-1} = \boldsymbol{PAP}^{-1}$. 选B.

25. $\boxed{\text{07 数一/二/三/四}}$设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关, 则下列向量组线性相关的是( ).

(A) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$. (B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$.

(C) $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$. (D) $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$.

解: 不妨设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$为列向量, 则$(\alpha_1-\alpha_2, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_3-\alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\boldsymbol{P}$, 其中$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$的秩为 2

$\Rightarrow$ 秩$(\alpha_1-\alpha_2, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_3-\alpha_1) \le$ 秩$(\boldsymbol{P}) = 2 < 3 \Rightarrow \alpha_1-\alpha_2, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_3-\alpha_1$线性相关. 选A.

[注] $(\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \ne 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$可逆.

又因为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关, 所以$\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1$线性无关. 类似地可以说明选项(C), (D)中的向量组线性无关.

26. 07 数一/二/三/四 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ (　　).

(A) 合同且相似.　　(B) 合同但不相似.　　(C) 不合同但相似.　　(D) 既不合同也不相似.

解: $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \times(-1) = \lambda\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}$

$= \lambda(\lambda-3)^2$.

由此可得$\boldsymbol{A}$的特征值为 3, 3, 0. 又因为$\boldsymbol{A}$是实对称矩阵, 所以$\boldsymbol{A}$的合同规范形为$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 但$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$不相似. 选B.

[注]两个同阶方阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似的必要条件有:
①$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = |\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$; ②$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值; ③秩$(\boldsymbol{A})$ = 秩$(\boldsymbol{B})$; ④迹$(\boldsymbol{A})$ = 迹$(\boldsymbol{B})$; ⑤$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$.

两个同阶方阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似的充分必要条件有:
①[定义]存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{B}$; ②$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$有相同的相似标准形.

两个同阶方阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$合同的必要条件有:
①$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的对称性; ②秩$(\boldsymbol{A})$ = 秩$(\boldsymbol{B})$.

两个同阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$合同的充分必要条件有:
①[定义]存在可逆矩阵$\boldsymbol{C}$使得$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{B}$; ②秩$(\boldsymbol{A})$ = 秩$(\boldsymbol{B})$且$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$有相同的正惯性指数; ③$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$有相同的合同标准形; ④$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$有相同的合同规范形.

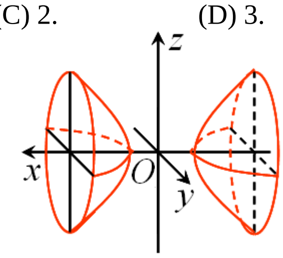
27. 08 数一/二/三/四 设$\boldsymbol{A}$为n阶非零矩阵, $\boldsymbol{E}$为n阶单位矩阵. 若$\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{O}$, 则(　　).

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.　　(B) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.
(C) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.　　(D) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.

解: 设$\boldsymbol{A}\xi = \lambda\xi$, 其中$\xi$为$n$维非零向量, 则$\lambda^3\xi = \boldsymbol{A}^3\xi = \boldsymbol{O}\xi = \boldsymbol{0}$. 由此可得$\lambda^3 = 0$, 从而$\lambda = 0$. 这就是说$\boldsymbol{A}$的特征值一定为零. 所以$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| \ne 0$(否则 1 是$\boldsymbol{A}$的特征值), $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}| \ne 0$(否则$-1$ 是$\boldsymbol{A}$的特征值). 可见$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$都可逆. 事实上, $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2) = \boldsymbol{E}$, $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2) = \boldsymbol{E}$. 选C.

28. 08 数一 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵, 如果二次曲面方程$(x, y, z)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$在正交变换下的标准方程的图形如图,则 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值个数为(　　).

(A) 0.　　　(B) 1.　　　(C) 2.　　　(D) 3.



解: 由此曲面的标准方程的图形可知此二次曲面为双叶双曲面, 故A的正特征值个数为 1. 选B.

[注]二次曲面的分类及相应的图形可参见《线性代数学习指导》(张小向, 陈建龙 编, 科学出版社, 2008)或《几何与代数》(周建华, 陈建龙, 张小向 编, 科学出版社, 2009).

29. 08 数二/三/四 设 $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$, 则在实数域上与 A 合同的矩阵为(　　).

(A) $\begin{bmatrix}-2&1\\1&-2\end{bmatrix}$.　(B) $\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}$.　(C) $\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$.　(D) $\begin{bmatrix}1&-2\\-2&1\end{bmatrix}$.

解: 设A与B合同, 则存在可逆矩阵C使得$C^TAC=B$. 于是有

$$|B|=|C^TAC|=|C^T|\cdot|A|\cdot|C|=|C|\cdot|A|\cdot|C|=|A|\cdot|C|^2=-3|C|^2<0.$$

而(A), (B), (C), (D)四个选项中只有$\begin{bmatrix}1&-2\\-2&1\end{bmatrix}$的行列式为$-3<0$. 事实上取 $C=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$, 则有

$$C^TAC=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&1\end{bmatrix}.$$

选D.

[注]本题涉及到的矩阵都是实对称矩阵. 设A的特征值为λ_1, λ_2, 则$\lambda_1\lambda_2=|A|=-3<0$. 可见$\lambda_1$, λ_2中一正一负. 因而A的秩为 2, 正惯性指数为 1. 故A与B合同的充分必要条件是: B为 2 阶实对称矩阵且$|B|<0$.

30. 09 数一 设α_1, α_2, α_3是 3 维向量空间$\mathbf{R}^3$的一组基, 则由基α_1, $\frac{1}{2}\alpha_2$, $\frac{1}{3}\alpha_3$到基$\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_2+\alpha_3$, $\alpha_3+\alpha_1$的过渡矩阵为(　　)

(A) $\begin{bmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{bmatrix}$.　(B) $\begin{bmatrix}1&2&0\\0&2&3\\1&0&3\end{bmatrix}$.　(C) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$.　(D) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$.

解: 设所求的过渡矩阵为P, 即 $(\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1)=(\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3)P$, 亦即

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/3\end{bmatrix}P,$$

其中$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$是可逆矩阵, 故$\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/3\end{bmatrix}P$. 由此可得

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{bmatrix}.$$ 选A.

31. 09数一/二/三 设A, B为2阶矩阵, A^*, B^*分别为A, B的伴随矩阵, 若$|A|=2$, $|B|=3$, 则分块矩阵$\begin{bmatrix}O&A\\B&O\end{bmatrix}$的伴随矩阵为(　　).

(A) $\begin{bmatrix}O&3B^*\\2A^*&O\end{bmatrix}$.　(B) $\begin{bmatrix}O&2B^*\\3A^*&O\end{bmatrix}$.　(C) $\begin{bmatrix}O&3A^*\\2B^*&O\end{bmatrix}$.　(D) $\begin{bmatrix}O&2A^*\\3B^*&O\end{bmatrix}$.

解: A, B为 2 阶矩阵, $|A|=2$, $|B|=3\Rightarrow\begin{vmatrix}O&A\\B&O\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&O\\O&B\end{vmatrix}=6$, $A^{-1}=\frac{1}{2}A^*$, $B^{-1}=\frac{1}{3}B^*$.

$$\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} \begin{bmatrix} E & O \\ O & E \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} E & O \\ O & E \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^* = 6\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} = 6\begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} O & \frac{1}{3}B^* \\ \frac{1}{2}A^* & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{bmatrix}.$$ 选B.

32. 09数二/三 设A, P均为3阶矩阵, P^T为P的转置矩阵, 且$P^TAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 若$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $Q = (\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$, 则$Q^TAQ$为(　　).

(A) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.　(B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.　(C) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.　(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

解: $Q = (\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$Q^TAQ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^TAP \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$ 选A.

33. 10数一 设A为$m\times n$型矩阵, B为$n\times m$型矩阵, E为m阶单位矩阵, 若$AB = E$, 则(　　).

(A) 秩$r(A) = m$, 秩$r(B) = m$.　(B) 秩$r(A) = m$, 秩$r(B) = n$.

(C) 秩$r(A) = n$, 秩$r(B) = m$.　(D) 秩$r(A) = n$, 秩$r(B) = n$.

解: $m = r(E) = r(AB) \le r(A) \le m \Rightarrow r(A) = m$,　$m = r(E) = r(AB) \le r(B) \le m \Rightarrow r(B) = m$. . 选A.

34. 10数一/二/三 设A为4阶对称矩阵, 且$A^2 + A = O$, 若A的秩为3, 则A相似于(　　).

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.　(B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.　(C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.　(D) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

解: 首先, A为对称矩阵 $\Rightarrow A$相似于对角矩阵Λ(对角线上的元素为A的特征值).

其次, $A^2 + A = O \Rightarrow A$的特征值$\lambda$满足$\lambda^2 + \lambda = 0$

(事实上, 设ξ为对应的特征向量, 即$\xi \neq 0$ 且 $A\xi = \lambda\xi$, 则

$(\lambda^2 + \lambda)\xi = \lambda(\lambda\xi) + \lambda\xi = \lambda(A\xi) + A\xi = A(\lambda\xi) + A\xi = A(A\xi) + A\xi = (A^2 + A)\xi = O\xi = 0$

故$\lambda^2 + \lambda = 0$)

$\Rightarrow A$的特征值$\lambda = -1$ 或 0.

最后, A的秩为3 $\Rightarrow \Lambda$的秩为3.

综上所述, A相似于$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 选D.

35. 10数二/三 设向量组I: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$可由向量组II: $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$线性表示, 下列命题正确的是(　　).

(A) 若向量组I线性无关, 则$r \le s$.　(B) 若向量组I线性相关, 则$r > s$.

(C) 若向量组II线性无关, 则$r \le s$.　(D) 若向量组II线性相关, 则$r > s$.

解: 首先, 向量组I: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$可由向量组II: $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$线性表示 $\Rightarrow$ 秩(I) $\le$ 秩(II).

其次, 向量组I线性无关 $\Rightarrow$ 秩(I) $= r$.

故 $r =$ 秩(I) $\le$ 秩(II) $\le s$. 可见命题(A)正确.

下面说明其他3个命题不正确.

① 取$r = 2$, $s = 3$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3$,

则向量组I: α_1, α_2可由向量组II: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$线性表示，且向量组I线性相关，但$r > s$不成立.

可见命题(B)不正确.

② 取$r = 3$, $s = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = (0, 0)^T$, $\beta_1 = (1, 0)^T$, $\beta_2 = (0, 1)^T$,

则向量组I: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$可由向量组II: β_1, β_2线性表示，且向量组II线性无关，但$r \le s$不成立.

可见命题(C)不正确.

③ 取$r = 2$, $s = 3$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3$,

则向量组I: α_1, α_2可由向量组II: $\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性表示，且向量组II线性相关，但$r > s$不成立.

可见命题(D)不正确.

选A.

36. 11 数一/二/三 设$\boldsymbol{A}$为三阶矩阵，将$\boldsymbol{A}$的第二列加到第一列得到矩阵$\boldsymbol{B}$，再交换$\boldsymbol{B}$的第二行与第三行得到单位矩阵，记$\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A} =$ (　　).

(A) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$.　　(B) $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$.　　(C) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$.　　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$.

解: 根据初等变换与初等矩阵的关系以及题目条件可得$\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1) = \boldsymbol{E}$. 故$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1} = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$.

选D.

37. 11 数一/二 设$\boldsymbol{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$，若$(1, 0, 1, 0)^T$是方程$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，则$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系可为 (　　).

(A) α_1, α_2.　　(B) α_1, α_3.　　(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.　　(D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

解: 因为$\boldsymbol{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$，且$(1, 0, 1, 0)^T$是方程$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,

所以秩$(\boldsymbol{A}) = 3$，且$\alpha_1 + \alpha_3 = 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 1\alpha_3 + 0\alpha_4 = \boldsymbol{A}(1, 0, 1, 0)^T = \boldsymbol{0}$.

由秩$(\boldsymbol{A}) = 3$ 可知$|\boldsymbol{A}| = 0$，且 $\boldsymbol{A}$ 中存在 3 阶非零子式，因而 $\boldsymbol{A}^* \ne \boldsymbol{O}$，故秩$(\boldsymbol{A}^*) \ge 1$.

同时由$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} = 0\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$可知, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$都是$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解,

因而由秩$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$ 可知秩$(\boldsymbol{A}^*) \le 1$.

于是可得秩$(\boldsymbol{A}^*) = 1$.

因此 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的任意 3 个线性无关的解向量都构成 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系.

另一方面，由$\alpha_1 + \alpha_3 = \boldsymbol{0}$ 可见$\alpha_1 = -\alpha_3$，且$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关.

于是结合秩$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$ 可知$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性无关.

事实上，由$\alpha_1 = -\alpha_3$可见$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$能由$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性表示,

因而 $3 =$ 秩$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \le$ 秩$(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \le 3$，故秩$(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$，即$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性无关,

综上所述, $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$可作为$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系.

选D.

38. 11 数三 设$\boldsymbol{A}$为 4×3 矩阵, η_1, η_2, η_3是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \beta$的三个线性无关的解, k_1, k_2为任意实数,则$\boldsymbol{Ax} = \beta$的通解为 (　　).

(A) $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1)$.　　(B) $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2} + k_2(\eta_2 - \eta_1)$.

(C) $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2} + k_1(\eta_3 - \eta_1) + k_2(\eta_2 - \eta_1)$.　　(D) $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2} + k_1(\eta_3 - \eta_1) + k_2(\eta_2 - \eta_1)$.

解: 首先, 由条件可知$\boldsymbol{A}\eta_1 = \beta, \boldsymbol{A}\eta_2 = \beta, \boldsymbol{A}\eta_3 = \beta$，因而

$$\boldsymbol{A}(\eta_2 + \eta_3) = \boldsymbol{A}\eta_2 + \boldsymbol{A}\eta_3 = \beta + \beta = 2\beta,\quad \boldsymbol{A}\frac{\eta_2+\eta_3}{2} = \beta,$$

$$\boldsymbol{A}(\eta_2 - \eta_1) = \boldsymbol{A}\eta_2 - \boldsymbol{A}\eta_1 = \beta - \beta = \boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{A}(\eta_3 - \eta_1) = \boldsymbol{A}\eta_3 - \boldsymbol{A}\eta_1 = \beta - \beta = \boldsymbol{0},$$

这就是说, $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}$是$\boldsymbol{Ax} = \beta$的一个特解, $\eta_2 - \eta_1$和$\eta_3 - \eta_1$都是齐次线性组方程$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解.

其次, $\eta_2-\eta_1$与$\eta_3-\eta_1$线性无关.

事实上, 假若$\eta_2-\eta_1$与$\eta_3-\eta_1$线性相关, 则$\eta_1, \eta_2-\eta_1, \eta_3-\eta_1$线性相关, 因而秩$(\eta_1, \eta_2-\eta_1, \eta_3-\eta_1) < 3$.

但η_1, η_2, η_3线性无关, 因而秩$(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = 3$.

而$(\eta_1, \eta_2-\eta_1, \eta_3-\eta_1) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, 其中$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$可逆.

故秩$(\eta_1, \eta_2-\eta_1, \eta_3-\eta_1) =$ 秩$(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = 3$, 这与秩$(\eta_1, \eta_2-\eta_1, \eta_3-\eta_1) < 3$ 矛盾!

最后, 秩$(\boldsymbol{A}) = 1$.

事实上, 一方面, 设秩$(\boldsymbol{A}) = r$, 则齐次线性组方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 只能有 $3-r$ 个线性无关的解,

由上一步可知 $3-r \geq 2$, 故 $r \leq 1$.

另一方面, $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$ (否则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O} \Rightarrow$ 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \beta$无解, 这与已知条件矛盾),

故秩$(\boldsymbol{A}) \geq 1$.

综上所述, $\eta_2-\eta_1, \eta_3-\eta_1$是齐次线性组方程$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系, $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}$是$\boldsymbol{Ax} = \beta$的一个特解,

因而$\boldsymbol{Ax} = \beta$的通解为$\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2} + k_1(\eta_3-\eta_1) + k_2(\eta_2-\eta_1)$.

三. 计算题

1. $\boxed{\text{01 数一}}$设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$为线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系, $\beta_1 = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2, \beta_2 = t_1\alpha_2 + t_2\alpha_3, \ldots, \beta_s = t_1\alpha_s + t_2\alpha_1$, 其中$t_1, t_2$为实常数. 试问$t_1, t_2$满足什么关系时$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$也为线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

解: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$为线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系 $\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性无关.

$$\beta_1 = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2, \beta_2 = t_1\alpha_2 + t_2\alpha_3, \ldots, \beta_s = t_1\alpha_s + t_2\alpha_1 \Rightarrow (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)\begin{bmatrix}t_1 & 0 & 0 & \cdots & t_2\\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_1\end{bmatrix}.$$

令$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix}t_1 & 0 & 0 & \cdots & t_2\\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_1\end{bmatrix}$, 则$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$也为线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系 $\Leftrightarrow \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$也线性无关 $\Leftrightarrow \boldsymbol{P}$可逆 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{P}| \neq 0$.

$$\text{而}|\boldsymbol{P}| = \begin{vmatrix}t_1 & 0 & 0 & \cdots & t_2\\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_1\end{vmatrix}_{s\times s} = t_1\begin{vmatrix}t_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_1\end{vmatrix}_{(s-1)\times(s-1)} - t_2\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & t_2\\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_1\end{vmatrix}_{(s-1)\times(s-1)}$$

$$= t_1^s - t_2(-1)^s t_2\begin{vmatrix}t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & t_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_2\end{vmatrix}_{(s-2)\times(s-2)} = t_1^s + (-1)^{s+1}t_2^s.$$

当s为偶数时, $|\boldsymbol{P}| = t_1^s - t_2^s$, 此时$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$也为线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系$\Leftrightarrow t_1 \neq \pm t_2$.

当s为奇数时, $|\boldsymbol{P}| = t_1^s + t_2^s$, 此时$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$也为线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系$\Leftrightarrow t_1 \neq -t_2$.

2. 01 数一 已知 3 阶矩阵$\boldsymbol{A}$与三维向量$\boldsymbol{x}$使得向量组$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$线性无关，且满足$\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{Ax} - 2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$.

(1)记$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})$，求 3 阶矩阵$\boldsymbol{B}$使$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PBP}^{-1}$.

(2)计算行列式$|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}|$.

解: (1) 因为$\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}, 3\boldsymbol{Ax} - 2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

所以$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

(2) $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{PBP}^{-1} + \boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{P} (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{E})\boldsymbol{P}^{-1}| = |\boldsymbol{P}|\cdot|\boldsymbol{B} + \boldsymbol{E}|\cdot|\boldsymbol{P}^{-1}| = |\boldsymbol{P}|\cdot|\boldsymbol{B} + \boldsymbol{E}|\cdot|\boldsymbol{P}|^{-1} = |\boldsymbol{B} + \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$.

3. 01 数二 已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，且矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AXA} + \boldsymbol{BXB} = \boldsymbol{AXB} + \boldsymbol{BXA} + \boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵，求 $\boldsymbol{X}$.

解: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\boldsymbol{AXA} + \boldsymbol{BXB} = \boldsymbol{AXB} + \boldsymbol{BXA} + \boldsymbol{E} \Rightarrow (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{E} \Rightarrow \boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. 01 数二 已知$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$为线性方程组$\boldsymbol{Ax} = 0$的一个基础解系，若$\beta_1 = \alpha_1 + t\alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + t\alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + t\alpha_4, \beta_4 = \alpha_4 + t\alpha_1$，讨论实数$t$满足什么条件时$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$也为线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

解: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$为线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系 $\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性无关.

$\beta_1 = \alpha_1 + t\alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + t\alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + t\alpha_4, \beta_4 = \alpha_4 + t\alpha_1 \Rightarrow (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{bmatrix}$.

令$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{bmatrix}$，则$|\boldsymbol{P}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{vmatrix} - t\begin{vmatrix} 0 & 0 & t \\ t & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{vmatrix} = 1-t^4$.

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$也为线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系 $\Leftrightarrow \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$也线性无关 $\Leftrightarrow \boldsymbol{P}$可逆 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{P}| \neq 0 \Leftrightarrow t \neq \pm 1$.

5. 01 数三/四 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. 已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \beta$有解但不唯一，试求

(1) a的值. (2) 正交矩阵$\boldsymbol{Q}$使$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}$为对角矩阵.

解: (1) $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+a & 2+a & 2+a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2+a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2+a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(2+a)(a-1)^2$.

当 $a \neq -2$ 且 $a \neq 1$ 时, $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，此时线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \beta$有唯一解;

当 $a = -2$ 时, $(\boldsymbol{A}, \beta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times(-1) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

此时秩$(\boldsymbol{A})$ = 秩$(\boldsymbol{A}, \beta) = 2 < 3$，线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \beta$有解但不唯一;

当 $a = 1$ 时, $(\boldsymbol{A}, \beta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

此时秩$(\boldsymbol{A}) = 1$, 秩$(\boldsymbol{A}, \beta) = 2$, 线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \beta$无解.

根据题设条件可知 $a = -2$.

(2) $|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda+2 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ -1 & \lambda+2 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda+2 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$ $\times 1 \quad \times(-2)$

$= \lambda\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda+3 & 0 \\ 0 & -3 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda+3)\lambda$.

由此可得$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 0$.

$(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为$\xi_1 = (-1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

$(-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为$\xi_2 = (1, -2, 1)^{\mathrm{T}}$.

$(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为$\xi_3 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$.

ξ_1, ξ_2, ξ_3是两两正交的. $\|\xi_1\| = \sqrt{2}$, $\|\xi_2\| = \sqrt{6}$, $\|\xi_3\| = \sqrt{3}$.

令$\boldsymbol{q}_1 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{q}_2 = (\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{q}_3 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3) = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$, 则$\boldsymbol{Q}$为正交矩阵且$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6. 01 数三 设$\boldsymbol{A}$为n阶实对称阵, 秩$(\boldsymbol{A}) = n$, $\boldsymbol{A}_{ij}$是$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$中元素$a_{ij}$的代数余子式$(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, 二次型$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\boldsymbol{A}_{ij}}{|\boldsymbol{A}|}x_i x_j$.

(1) 记$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, 把$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$写成矩阵形式, 并证明二次型$f(\boldsymbol{x})$的矩阵为$\boldsymbol{A}^{-1}$.

(2) 二次型$g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$与$f(\boldsymbol{x})$的规范形是否相同?说明理由.

解: (1) 因为$\boldsymbol{A}$为n阶实对称阵, 秩$(\boldsymbol{A}) = n$, 所以$|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 且$\boldsymbol{A}$可逆. 于是由$\boldsymbol{AA}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$可知$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ (其中$\boldsymbol{A}^*$为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵, $\boldsymbol{E}$为n阶单位矩阵), 而且由

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{AA}^{-1})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}$$

可知$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{-1}$, 即$\boldsymbol{A}^{-1}$也是对称矩阵.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\boldsymbol{A}_{ij}}{|\boldsymbol{A}|}x_i x_j = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\begin{bmatrix} \frac{\boldsymbol{A}_{11}}{|\boldsymbol{A}|} & \frac{\boldsymbol{A}_{12}}{|\boldsymbol{A}|} & \cdots & \frac{\boldsymbol{A}_{1n}}{|\boldsymbol{A}|} \\ \frac{\boldsymbol{A}_{21}}{|\boldsymbol{A}|} & \frac{\boldsymbol{A}_{22}}{|\boldsymbol{A}|} & \cdots & \frac{\boldsymbol{A}_{2n}}{|\boldsymbol{A}|} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\boldsymbol{A}_{n1}}{|\boldsymbol{A}|} & \frac{\boldsymbol{A}_{n2}}{|\boldsymbol{A}|} & \cdots & \frac{\boldsymbol{A}_{nn}}{|\boldsymbol{A}|} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix},$$

其中
$$\begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{12}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{1n}}{|A|} \\ \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{2n}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{A_{n1}}{|A|} & \frac{A_{n2}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}(A^*)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{|A|}(|A|A^{-1})^{\mathrm{T}} = A^{-1}.$$

由此可见二次型$f(\mathbf{x})$的矩阵为A^{-1}.

(2) 设 A 的正负惯性指数分别为 p, q, 则由秩$(A) = n$ 可知 $p + q = n$, 于是存在可逆矩阵 C 使得
$$C^{\mathrm{T}}AC = \begin{bmatrix} E_p & O \\ O & -E_q \end{bmatrix},$$
其中E_p, E_q分别为p阶, q阶单位矩阵. 从而有
$$C^{-1}A^{-1}(C^{-1})^{\mathrm{T}} = C^{-1}A^{-1}(C^{\mathrm{T}})^{-1} = (C^{\mathrm{T}}AC)^{-1} = \begin{bmatrix} E_p & O \\ O & -E_q \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} E_p & O \\ O & -E_q \end{bmatrix},$$
可见二次型$g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}$与$f(\mathbf{x})$的规范形是否相同.

7. 01 数四 设$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})^{\mathrm{T}}$ $(i = 1, 2, \dots, r;\ r < n)$是$n$维实向量, 且$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$线性无关. 已知$\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^{\mathrm{T}}$是线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\quad \cdots\quad \cdots\quad \cdots\quad \cdots\quad \cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$
的非零解向量. 试判断向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$的线性相关性.

解: 假若$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$线性相关, 则由$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$线性无关可知$\beta$能由$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$线性表示. 于是可设
$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r),\ \beta = A\gamma.$$
又因为β是线性方程组$A^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解, 即$A^{\mathrm{T}}\beta = \mathbf{0}$, 从而有$\|\beta\|^2 = \beta^{\mathrm{T}}\beta = (A\gamma)^{\mathrm{T}}\beta = \gamma^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\beta = 0$. 这与$\beta$是非零向量矛盾! 此矛盾表明向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$是线性无关的.

8. 02 数一/二 已知 4 阶方阵$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$均为 4 维向量, 其中$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$, 如果$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求线性方程组$A\mathbf{x} = \beta$的通解.

解: $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性无关 $\Rightarrow$ 秩(A) = 秩$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \ge 3$.

$\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3 \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性相关 $\Rightarrow$ 秩(A) = 秩$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) < 4$.

综上可知秩$(A) = 3$, 因而齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系中只有一个解向量.

$\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3 \Rightarrow \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 + 0\alpha_4 = \mathbf{0} \Rightarrow \xi = (1, -2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$是$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的非零解.

$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \Rightarrow \eta^* = (1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$是$A\mathbf{x} = \beta$的特解.

因而$A\mathbf{x} = \beta$的通解为$\eta = k(1, -2, 1, 0)^{\mathrm{T}} + (1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, 其中$k$为任意实数.

9. 02 数三 设齐次线性方程组
$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0, \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0, \\ \cdots\quad \cdots\quad \cdots\quad \cdots\quad \cdots\quad \cdots \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + ax_n = 0, \end{cases}$$
其中 $a \ne 0$, $b \ne 0$, $n \ge 2$. 试讨论 a, b 为何值时, 方程组仅有零解, 有无穷多组解? 在有无穷多组解时, 求出全部解, 并用基础解系表示全部解.

解: 令 $A = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{bmatrix}$, 则$|A| = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$

$$= [a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ b & a & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b & b & \cdots & a\end{vmatrix} = [a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a-b & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a-b\end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

当 $a \neq (1-n)b$ 且 $a \neq b$ 时, $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 此时方程组仅有零解.

当 $a = (1-n)b$ 时, $\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix}(1-n)b & b & \cdots & b\\ b & (1-n)b & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b & b & \cdots & (1-n)b\end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{l}\times\frac{1}{b}\\ \times\frac{1}{b}\\ \vdots\\ \times\frac{1}{b}\end{array} \to \begin{bmatrix}1-n & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1-n & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1-n\end{bmatrix} \to$

$$\begin{bmatrix}1-n & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}-1 & -1 & \cdots & -1 & n-1\\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}-1 & -1 & \cdots & -1 & n-1\\ 0 & -n & \cdots & 0 & n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -n & n\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\times(-1)\\ \times(-\frac{1}{n})\\ \vdots\\ \times(-\frac{1}{n})\\ \end{array}$$

$$\to \begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ \times(-1)\\ \vdots\\ \times(-1)\\ \end{array} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & -1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

由此可得 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系

$$\xi = (1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}},$$

以及通解

$$\boldsymbol{x} = k(1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}},$$

其中 k 为任意实数.

当 $a = b$ 时, $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}b & b & \cdots & b\\ b & b & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b & b & \cdots & b\end{bmatrix}\begin{array}{l}\times\frac{1}{b}\\ \times\frac{1}{b}\\ \vdots\\ \times\frac{1}{b}\end{array} \to \begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{array}{l}\times(-1)\\ \\ \\ \end{array} \to \begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$, 由此可得 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系

$$\xi_1 = (-1, 1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}},\ \xi_2 = (-1, 0, 1, \ldots, 0)^{\mathrm{T}},\ \ldots,\ \xi_{n-1} = (-1, 0, 0, \ldots, 1)^{\mathrm{T}},$$

以及通解

$$\boldsymbol{x} = k_1(-1, 1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}} + k_2(-1, 0, 1, \ldots, 0)^{\mathrm{T}} + \ldots + k_{n-1}(-1, 0, 0, \ldots, 1)^{\mathrm{T}},$$

其中$k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$为任意实数.

10. 02 数三 设$\boldsymbol{A}$为三阶实对称矩阵，且满足条件$\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$. 已知$\boldsymbol{A}$的秩$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 2$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

(2) 当 k 为何值时，矩阵 $\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵，其中 $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵.

解: (1) $\boldsymbol{A}$为三阶实对称矩阵 $\Rightarrow$ 存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$使得$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}$, 其中$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$为$\boldsymbol{A}$的特征值.

$\boldsymbol{A}$的秩$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 2 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$中有两个非零，一个为零. 不妨设$\lambda_3 = 0$.

$\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O} \Rightarrow \boldsymbol{A}$的特征值满足$\lambda^2 + 2\lambda = 0$.

(事实上，设$\xi \neq \boldsymbol{0}$ 且$\boldsymbol{A}\xi = \lambda\xi$, 则$(\lambda^2 + 2\lambda)\xi = (\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A})\xi = \boldsymbol{O}\xi = \boldsymbol{0}$, 因而$\lambda^2 + 2\lambda = 0$.)

于是得$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$.

(2) 由(1)可知$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{E})\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ} + \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}k\boldsymbol{EQ} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ} + k\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix}-2+k & 0 & 0\\ 0 & -2+k & 0\\ 0 & 0 & k\end{bmatrix}$. 因此$\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{E}$为正定矩阵 $\Leftrightarrow k > 2$.

11. 02 数四 设四元齐次线性方程组(I)为

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=0, \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=0. \end{cases}$$

且已知另一四元齐次线性方程组(II)的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (2, -1, a+2, 1)^T,\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (-1, 2, 4, a+8)^T.$$

(1)求方程组(I)的一个基础解系.

(2)当 a 为何值时，方程组(I)与(II)有非零公共解？在有非零公共解时，求出全部非零公共解.

解: (1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

由此可得方程组(I)的一个基础解系:

$$\xi_1 = (5, -3, 1, 0)^T,\ \xi_2 = (-3, 2, 0, 1)^T.$$

(2) 方程组(I)与(II)有非零公共解 $\Leftrightarrow$ 存在不全为零的数k_1, k_2使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2$是方程组(I)的解

$\Leftrightarrow$ 存在不全为零的数k_1, k_2使得$\begin{cases} -(a+1)k_1=0 \\ (a+1)k_1-(a+1)k_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -a-1 & 0 \\ a+1 & -a-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1+a)^2 = 0$

$\Leftrightarrow a = -1$.

当$a = -1$ 时，$\begin{cases} -(a+1)k_1=0 \\ (a+1)k_1-(a+1)k_2=0 \end{cases}$ 对于任意不全为零的数k_1, k_2都成立，因此方程组(I)与(II)的全部非零公共解为$\boldsymbol{x} = k_1(2, -1, 1, 1)^T + k_2(-1, 2, 4, 7)^T$，其中$k_1, k_2$为任意不全为零的数.

12. 02 数四 设实对称矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix}$，求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$为对角矩阵，并计算行列式$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|$的值.

解: $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-a & -1 & -1 \\ \lambda-a-1 & \lambda-a-1 & 0 \\ -1 & 1 & \lambda-a \end{vmatrix} = (\lambda-a-1)\begin{vmatrix} \lambda-a & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & \lambda-a \end{vmatrix}$

$= (\lambda-a-1)\begin{vmatrix} \lambda-a+1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & \lambda-a \end{vmatrix} = (\lambda-a-1)\begin{vmatrix} \lambda-a+1 & -1 \\ -2 & \lambda-a \end{vmatrix} = (\lambda-a-1)^2(\lambda-a+2)$.

由此可得$\boldsymbol{A}$的特征值$\lambda_1 = \lambda_2 = a+1$, $\lambda_3 = a-2$.

$\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A} = (a+1)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，由此可得$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系:

$$\xi_1 = (1, 1, 0)^T,\ \xi_2 = (1, 0, 1)^T.$$

$\lambda_3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A} = (a-2)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}\times(-1) \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{matrix}\times 1 & \times 2 \\ & \\ & \end{matrix} \to$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}\times(-1)\ \ \times(-\frac{1}{3}) \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\times(-\frac{1}{3}) \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

由此可得$(\lambda_3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系:

$$\xi_3 = (-1, 1, 1)^T.$$

令$\boldsymbol{P} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$，则$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{bmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{bmatrix}$.

$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{P}|^{-1}\cdot|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|\cdot|\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}^{-1}|\cdot|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|\cdot|\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} - \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{EP}| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-3 \end{vmatrix} = a^2(a-3)$.

13. 03 数一 设矩阵$A=\begin{bmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$, $B=P^{-1}A^*P$, 求$B+2E$的特征值与特征向量, 其中A^*为A的伴随矩阵, E为 3 阶单位矩阵.

解: $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-2\\-2&\lambda-3&-2\\-2&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-7&\lambda-7&\lambda-7\\-2&\lambda-3&-2\\-2&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-7)\begin{vmatrix}1&1&1\\-2&\lambda-3&-2\\-2&-2&\lambda-3\end{vmatrix}\times 2$

$=(\lambda-7)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-7)(\lambda-1)^2$. 由此可见$A$的特征值为 7, 1, 1 且$|A|=7$, $A^*=|A|A^{-1}=7A^{-1}$.

$(7E-A)x=\mathbf{0}$ 的一个基础解系为$\xi_1=(1, 1, 1)^T$.

$(E-A)x=\mathbf{0}$ 的一个基础解系为$\xi_2=(-1, 1, 0)^T$, $\xi_3=(-1, 0, 1)^T$.

令$Q=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, 则$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}7&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $Q^{-1}A^{-1}Q=(Q^{-1}AQ)^{-1}=\begin{bmatrix}1/7&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

令$M=P^{-1}Q$,

$(P, Q)=\begin{bmatrix}0&1&0&1&-1&-1\\1&0&1&1&1&0\\0&0&1&1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&1&1&0\\0&1&0&1&-1&-1\\0&0&1&1&0&1\end{bmatrix}\times(-1)\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&-1\\0&1&0&1&-1&-1\\0&0&1&1&0&1\end{bmatrix}=(E, M)$.

可见 $M=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&-1&-1\\1&0&1\end{bmatrix}$. 又因为

$$M^{-1}(B+2E)M=M^{-1}BM+M^{-1}2EM=M^{-1}BM+2E=(P^{-1}Q)^{-1}P^{-1}A^*P(P^{-1}Q)+2E$$
$$=Q^{-1}PP^{-1}A^*PP^{-1}Q+2E=Q^{-1}7A^{-1}Q+2E=7Q^{-1}A^{-1}Q+2E$$
$$=7\begin{bmatrix}1/7&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{bmatrix}.$$

由此可见$B+2E$的特征值为$\lambda_1=3$, $\lambda_2=\lambda_3=9$. 令$M=(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, 即

$$\eta_1=(0, 1, 1)^T,\ \eta_2=(1, -1, 0)^T,\ \eta_3=(-1, -1, 1)^T,$$

则$B+2E$的对应于$\lambda_1=3$ 的特征向量为$k(0, 1, 1)^T$, 其中k为任意非零实数. 对应于$\lambda_2=\lambda_3=9$ 的特征向量为$k_1(1, -1, 0)^T+k_2(-1, -1, 0)^T$, 其中$k_1$, k_2为任意不全为零的实数.

[注] $A^*=\begin{bmatrix}5&-2&-2\\-2&5&-2\\-2&-2&5\end{bmatrix}$, $P^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}7&0&0\\-2&5&-4\\-2&-2&3\end{bmatrix}$, $B+2E=\begin{bmatrix}9&0&0\\-2&7&-4\\-2&-2&5\end{bmatrix}$, $|\lambda E-(B+2E)|=(\lambda-3)(\lambda-9)^2$.

14. 03 数二 若矩阵$A=\begin{bmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{bmatrix}$相似于对角矩阵$\Lambda$, 试确定常数$a$的值, 并求可逆矩阵$P$使$P^{-1}AP=\Lambda$.

解: $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-8&\lambda-2&-a\\0&0&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)^2(\lambda+2)$. 由此可见$A$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=6$, $\lambda_3=-2$.

因为 A 相似于对角矩阵, 所以 A 有两个线性无关的特征向量与 6 对应, 即齐次线性方程组$(6E-A)x=\mathbf{0}$的基础解系由两个线性无关的解向量构成, 故秩$(6E-A)=3-2=1$. 而

$6E-A=\begin{bmatrix}4&-2&0\\-8&4&-a\\0&0&0\end{bmatrix}\times 2\to\begin{bmatrix}4&-2&0\\0&0&-a\\0&0&0\end{bmatrix}\times\frac{1}{4}\to\begin{bmatrix}1&-1/2&0\\0&0&-a\\0&0&0\end{bmatrix}$, 可见 $a=0$.

此时$(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系为

$$\xi_1=(1,2,0)^{\mathrm T},\ \xi_2=(0,0,1)^{\mathrm T}.$$

$(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系为

$$\xi_3=(1,-2,0)^{\mathrm T}.$$

令$\boldsymbol{P}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&0&-2\\0&1&0\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$.

15. $\boxed{\text{03 数三}}$已知齐次线性方程组$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n=0,\end{cases}$其中$\sum\limits_{i=1}^n a_i\neq 0$. 试讨论$a_1, a_2, \dots, a_n$和$b$满足何种关系时，

(1)方程组仅有零解.

(2)方程组有非零解，在有非零解时，求此方程组的一个基础解系.

解: 当$n=1$时，若$a_1+b\neq 0$，则方程组仅有零解；若$a_1+b=0$，则方程组有非零解，此时方程组的一个基础解系为$x_1=1$.

下面设$n>1$.

该齐次线性方程组的系数矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1+b&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1&a_2+b&a_3&\cdots&a_n\\a_1&a_2&a_3+b&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n+b\end{bmatrix}$.

当$b=0$时，秩$(\boldsymbol{A})=1$，对应的方程组有非零解，其基础解系由$n-1$个线性无关的解向量构成，而且任意$n-1$个线性无关的解向量都可以取作一个基础解系. 此时设$a_1, a_2, \dots, a_n$中第一个非零的是a_i，则此方程组的一个基础解系为:

$$\xi_1=(1,0,\dots,0)^{\mathrm T},\ \xi_2=(0,1,0,\dots,0)^{\mathrm T},\ \dots,\ \xi_{i-1}=(0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{第 }i-1\text{ 个分量}}}{1},0,\dots,0)^{\mathrm T},$$

$$\xi_i=(0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{第 }i\text{ 个分量}}}{-a_{i+1}},a_i,0,\dots,0)^{\mathrm T},\ \xi_{i+1}=(0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{第 }i\text{ 个分量}}}{-a_{i+2}},0,a_i,0,\dots,0)^{\mathrm T},\ \dots,\ \xi_{n-1}=(0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{第 }i\text{ 个分量}}}{-a_{n-1}},0,\dots,0,a_i)^{\mathrm T}.$$

当$b\neq 0$时，$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_1+b&a_2&\cdots&a_n\\a_1&a_2+b&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_1&a_2&\cdots&a_n+b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&a_1+b&a_2&\cdots&a_n\\1&a_1&a_2+b&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&a_1&a_2&\cdots&a_n+b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-a_1&-a_2&\cdots&-a_n\\1&b&0&\cdots&0\\1&0&b&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&b\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}1+\frac{a_1}{b}+\frac{a_2}{b}+\cdots+\frac{a_n}{b}&-a_1&-a_2&\cdots&-a_n\\0&b&0&\cdots&0\\0&0&b&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&b\end{vmatrix}=\left(1+\frac{a_1}{b}+\frac{a_2}{b}+\cdots+\frac{a_n}{b}\right)b^n=\left(b+\sum_{i=1}^n a_i\right)b^{n-1}.$$

①若$b\neq-\sum\limits_{i=1}^n a_i$，则$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，对应的方程组仅有零解；

②若$b=-\sum\limits_{i=1}^n a_i$，则$|\boldsymbol{A}|=0$，故秩$(\boldsymbol{A})<n$. 不妨设$a_1=0$，则

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a_1+b & * & * & \cdots & * \\ a_1 & b & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & b \end{bmatrix} \xlongequal{\text{记为}} \boldsymbol{B}$$

$\times(-\frac{a_2}{a_1})$

$\times(-\frac{a_3}{a_1})$

$\vdots$

$\times(-\frac{a_n}{a_1})$

其中$\boldsymbol{B}$有一个n–1 阶子式$\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix} = b^{n-1} \neq 0$，由此可见秩($\boldsymbol{A}$) = 秩($\boldsymbol{B}$) ≥ n–1.

于是可得秩($\boldsymbol{A}$) = n–1. 对应的方程组有非零解，其基础解系由 1 个线性无关的解向量构成，而且任意 1 个非零的解向量都可以取作一个基础解系. 又因为$\xi = (1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$是该方程组的一个非零解，因此该方程组的一个基础解系为$\xi = (1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$.

16. 03 数三 设二次型$f(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3$, $(b > 0)$，其中二次型的矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值之和为 1，特征值之积为–12.

(1)求 a, b 的值.

(2)利用正交变换将二次型 f 化为标准形，并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.

解: (1) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{bmatrix}$. 因为$\boldsymbol{A}$的特征值之和为 1，所以$a + 2 + (-2) = 1$，即$a = 1$. 进而有$|\boldsymbol{A}| = -4-2b^2$. 又因为$\boldsymbol{A}$的特征值之积为–12，所以$-4-2b^2 = -12$，由条件$b > 0$ 可得$b = 2$.

(2) $|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda+3)$. 由此可见$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -3$.

此时$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为

$$\xi_1 = (0, 1, 0)^{\mathrm{T}},\ \xi_2 = (2, 0, 1)^{\mathrm{T}}.$$

$(-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为

$$\xi_3 = (1, 0, -2)^{\mathrm{T}}.$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3两两正交，且$\|\xi_1\| = 1$, $\|\xi_2\| = \sqrt{5}$, $\|\xi_3\| = \sqrt{5}$.

令$\boldsymbol{q}_1 = \xi_1$, $\boldsymbol{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\xi_2 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\xi_3 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}})^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3) = \begin{bmatrix} 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，则二次型$f$化为标准形 $2y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2$.

17. 03 数四 设有向量组(I): $\alpha_1 = (1, 0, 2)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2 = (1, 1, 3)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3 = (1, -1, a+2)^{\mathrm{T}}$和向量组(II): $\beta_1 = (1, 2, a-3)^{\mathrm{T}}$, $\beta_2 = (2, 1, a+6)^{\mathrm{T}}$, $\beta_3 = (2, 1, a+4)^{\mathrm{T}}$，试问：当$a$为何值时，向量组(I)与(II)等价? 当$a$为何值时，向量组(I)与(II)不等价?

解: 令$\boldsymbol{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{B} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a+2 \end{vmatrix}\times(-2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}\times(-1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = a+1$.

$$|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ a-3 & a+6 & a+4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-2) \quad \times(3-a) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 12-a & 10-a \end{vmatrix} \times\tfrac{1}{3}(12-a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

由$|\boldsymbol{B}| \neq 0$ 可知秩(II) = 3. 于是向量组(I)与(II)等价 $\Leftrightarrow$ 秩(I) = 3 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}| \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1$.

18. 03 数四 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$ 可逆，向量$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{bmatrix}$是矩阵 $\boldsymbol{A}^*$的一个特征向量，λ是$\boldsymbol{\alpha}$对应的特征值，其中 $\boldsymbol{A}^*$是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，试求 a, b 和λ的值.

解: $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 3a-2$. $\boldsymbol{AA}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} = (3a-2)\boldsymbol{E}$.

矩阵$\boldsymbol{A}$可逆 $\Rightarrow \boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$可逆$\Rightarrow \lambda \neq 0$.

向量$\boldsymbol{\alpha}$是矩阵 $\boldsymbol{A}^*$的一个特征向量, λ是$\boldsymbol{\alpha}$对应的特征值 $\Rightarrow \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha} \Rightarrow \boldsymbol{AA}^*\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{A\alpha}$

$$\Rightarrow (3a-2)\begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3a-2 \\ 3ab-2b \\ 3a-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(3+b) \\ \lambda(2+2b) \\ \lambda(1+a+b) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ \lambda=1 \end{cases} \text{或} \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \\ \lambda=4 \end{cases}.$$

19. 04 数一 设有齐次线性方程组$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + \cdots + 2x_n = 0, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + (n+a)x_n = 0, \end{cases}$ ($n \geq 2$)，试问 a 取何值时，该方程组有非零解，并求出其通解.

解: 该齐次线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2}+a & \frac{n(n+1)}{2}+a & \cdots & \frac{n(n+1)}{2}+a \\ 2 & 2+a & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix} = [\tfrac{n(n+1)}{2}+a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix}$$

$$= [\tfrac{n(n+1)}{2}+a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = [\tfrac{n(n+1)}{2}+a]a^{n-1}.$$

该方程组有非零解 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}| = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{n(n+1)}{2}$ 或 0.

当 $a = -\frac{n(n+1)}{2}$ 时, $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \cdots & n+a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2+a & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & \cdots & n-1+a & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to$

$$\begin{bmatrix} -n & -n & \cdots & -n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 2 & 2+a & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & \cdots & n-1+a & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times(-\tfrac{1}{n}) \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1-n}{2} \\ 2 & 2+a & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & \cdots & n-1+a & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times(-2) \ \cdots \ \times(1-n)$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1&\frac{1-n}{2}\\0&a&\cdots&0&n+1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a&\frac{n^2-1}{2}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}\\\times\frac{-2}{n(n+1)}\\\vdots\\\times\frac{-2}{n(n+1)}\\ \\\end{matrix}\to\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1&\frac{1-n}{2}\\0&1&\cdots&0&-\frac{2}{n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&\frac{1-n}{n}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}\\\times(-1)\\\vdots\\\times(-1)\\ \\\end{matrix}\to\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0&\frac{-1}{n}\\0&1&\cdots&0&\frac{-2}{n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&\frac{1-n}{n}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

由此可得该方程组的一个基础解系: $\xi=(\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n-1}{n},1)^{\mathrm T}$.

通解为$\boldsymbol{x}=k(\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n-1}{n},1)^{\mathrm T}$, 其中$k$为任意实数.

当 $a=0$ 时, $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\2&2&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\n&n&\cdots&n\end{bmatrix}\begin{matrix}\times(-2)\ \cdots\ \times(-n)\\ \\ \\ \\\end{matrix}\to\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$.

由此可得该方程组的一个基础解系:

$$\xi_1=(-1,1,0,\ldots,0)^{\mathrm T},\ \xi_2=(-1,0,1,0,\ldots,0)^{\mathrm T},\ \ldots,\ \xi_{n-1}=(-1,0,\ldots,0,1)^{\mathrm T}.$$

通解为$\boldsymbol{x}=k_1(-1,1,0,\ldots,0)^{\mathrm T}+k_2(-1,0,1,0,\ldots,0)^{\mathrm T}+\ldots+k_{n-1}(-1,0,\ldots,0,1)^{\mathrm T}$, 其中$k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}$为任意实数.

[注]当 $a=-\frac{n(n+1)}{2}$ 时, $|\boldsymbol{A}|=0\Rightarrow$ 秩$(\boldsymbol{A})<n$. 同时 $\boldsymbol{A}$ 有一个 $n-1$ 阶子式

$$\begin{vmatrix}1+a&1&\cdots&1\\2&2+a&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\n-1&n-1&\cdots&n-1+a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-n&-n&\cdots&-n\\2&2+a&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\n-1&n-1&\cdots&n-1+a\end{vmatrix}=-n\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\2&2+a&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\n-1&n-1&\cdots&n-1+a\end{vmatrix}$$

$=-n\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&a\end{vmatrix}=-na^{n-2}\neq0\Rightarrow$ 秩$(\boldsymbol{A})\geq n-1$. 于是可得秩$(\boldsymbol{A})=n-1$. 因而对应的方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有一个解向量, 而且任取$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个非零解都可以作为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系. 容易验证

$$\xi=(1,2,\ldots,n-1,n)^{\mathrm T}$$

是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个非零解, 故该方程组的通解为$\boldsymbol{x}=k(1,2,\ldots,n-1,n)^{\mathrm T}$, 其中$k$为任意实数.

20. [04 数一/二]设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{bmatrix}$的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化.

解: $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&3\\1&\lambda-4&3\\-1&-a&\lambda-5\end{vmatrix}\begin{matrix}\\\times(1-\lambda)\ \ \times1\\ \\\end{matrix}=\begin{vmatrix}0&(2-\lambda)(\lambda-3)&3(2-\lambda)\\1&\lambda-4&3\\0&\lambda-4-a&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-3&3\\\lambda-4-a&\lambda-2\end{vmatrix}$

$=(\lambda-2)(\lambda-4-\sqrt{-2-3a})(\lambda-4+\sqrt{-2-3a})$.

故$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 有 3 个根: $\lambda_1=2$, $\lambda_2=4+\sqrt{-2-3a}$, $\lambda_3=4-\sqrt{-2-3a}$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 特征方程有一个二重根, 所以 $4-\sqrt{-2-3a}=2$ 或 $\sqrt{-2-3a}=0$, 即 $a=-2$ 或$-\dfrac{2}{3}$.

当 $a=-2$ 时, 2 是$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 的二重根, $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&3\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{bmatrix}\begin{matrix}\times(-1)\ \ \times1\\ \\ \\\end{matrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

可见秩$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$, 因而 $\boldsymbol{A}$ 有 2 个线性无关的特征向量与 2 对应. 此时 $\boldsymbol{A}$ 是可以相似对角化.

当 $a=-\dfrac{2}{3}$ 时, 4 是$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 的二重根, $4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&-2&3\\1&0&3\\-1&2/3&-1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\\times(-3)\ \ \times1\\ \\\end{matrix}\to\begin{bmatrix}0&-2&-6\\1&0&3\\0&2/3&2\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\\times3\end{matrix}\to$

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&2/3&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3\\0&0&0\\0&2/3&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3\\0&2/3&2\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

可见秩$(4E-A) = 2$, 因而 A 只有 1 个线性无关的特征向量与 4 对应. 此时 A 是不可以相似对角化.

21. 04 数二设有齐次线性方程组 $\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\2x_1+(2+a)x_2+2x_3+2x_4=0,\\3x_1+3x_2+(3+a)x_3+3x_4=0,\\4x_1+4x_2+4x_3+(4+a)x_4=0,\end{cases}$ 试问 a 取何值时, 该方程组有非零解, 并求出其通解.

解: 该齐次线性方程组的系数矩阵 A 的行列式

$$|A| = \begin{vmatrix}1+a&1&1&1\\2&2+a&2&2\\3&3&3+a&3\\4&4&4&4+a\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}10+a&10+a&10+a&10+a\\2&2+a&2&2\\3&3&3+a&3\\4&4&4&4+a\end{vmatrix} = (10+a)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&2+a&2&2\\3&3&3+a&3\\4&4&4&4+a\end{vmatrix}$$

$$= (10+a)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&a&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&a\end{vmatrix} = (10+a)a^3.$$

该方程组有非零解 $\Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow a = -10$ 或 0.

当 $a = -10$ 时, $A = \begin{bmatrix}-9&1&1&1\\2&-8&2&2\\3&3&-7&3\\4&4&4&-6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-9&1&1&1\\2&-8&2&2\\3&3&-7&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-4&-4&-4&6\\2&-8&2&2\\3&3&-7&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\times(-\tfrac{1}{4})\to$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&-\frac{3}{2}\\2&-8&2&2\\3&3&-7&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}\times(-2)\ \times(-3)\\ \\ \\ \\\end{matrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&-\frac{3}{2}\\0&-10&0&5\\0&0&-10&\frac{15}{2}\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}\\\times(-\frac{1}{10})\\\times(-\frac{1}{10})\\ \\\end{matrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&-\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{3}{4}\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}\\\times(-1)\\\times(-1)\\ \\\end{matrix}\to$$

$\begin{bmatrix}1&0&0&-\frac{1}{4}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{3}{4}\\0&0&0&0\end{bmatrix}$. 由此可得该方程组的一个基础解系: $\xi = (\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1)^T$.

通解为$x = k(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1)^T$, 其中$k$为任意实数.

当 $a = 0$ 时, $A = \begin{bmatrix}1&1&1&1\\2&2&2&2\\3&3&3&3\\4&4&4&4\end{bmatrix}\begin{matrix}\times(-2)\ \times(-3)\ \times(-4)\\ \\ \\ \\\end{matrix}\to\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$.

由此可得该方程组的一个基础解系:

$$\xi_1 = (-1, 1, 0, 0)^T,\ \xi_2 = (-1, 0, 1, 0)^T,\ \xi_3 = (-1, 0, 0, 1)^T.$$

通解为$x = k_1(-1, 1, 0, 0)^T + k_2(-1, 0, 1, 0)^T + k_3(-1, 0, 0, 1)^T$, 其中$k_1, k_2, k_3$为任意实数.

[注]当 $a = -10$ 时, $|A| = 0 \Rightarrow$ 秩$(A) < 4$. 同时 A 有一个 3 阶子式

$$\begin{vmatrix}-9&1&1\\2&-8&2\\3&3&-7\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-4&-4&-4\\2&-8&2\\3&3&-7\end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-8&2\\3&3&-7\end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-10&0\\0&0&-10\end{vmatrix} = -400 \neq 0 \Rightarrow \text{秩}(A) \geq 3.$$

于是可得秩$(A) = 3$. 因而对应的方程组$Ax = 0$的基础解系中只有一个解向量, 而且任取$Ax = 0$的一个非零解都可以作为 $Ax = 0$ 的基础解系. 容易验证

$$\xi = (1, 2, 3, 4)^T$$

是$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个非零解，故该方程组的通解为$\boldsymbol{x} = k(1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}}$，其中$k$为任意实数.

22. $\boxed{\text{04数三}}$设$\alpha_1 = (1, 2, 0)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2 = (1, a+2, -3a)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3 = (-1, -b-2, a+2b)^{\mathrm{T}}$, $\beta = (1, 3, -3)^{\mathrm{T}}$，试讨论当$a, b$为何值时，(1) β不能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示; (2) β可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$唯一地线性表示，并求出表示式; (3) β可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式.

解: 令$\boldsymbol{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. $(\boldsymbol{A},\beta) = \begin{bmatrix}1&1&-1&1\\2&a+2&-b-2&3\\0&-3a&a+2b&-3\end{bmatrix}\times(-2) \to \begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&a&-b&1\\0&-3a&a+2b&-3\end{bmatrix}\times 3 \to \begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&a&-b&1\\0&0&a-b&0\end{bmatrix}$.

(1) 当$a = b = 0$ 时，秩$(\boldsymbol{A}) = 1$，秩$(\boldsymbol{A}, \beta) = 2$，故线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \beta$无解，即$\beta$不能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示.

当 $a = 0, b \neq 0$ 时，$\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&a&-b&1\\0&0&a-b&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&0&-b&1\\0&0&-b&0\end{bmatrix}\times(-1) \to \begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&0&-b&1\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$,

此时秩$(\boldsymbol{A}) = 2$，秩$(\boldsymbol{A}, \beta) = 3$，故线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \beta$无解，即$\beta$不能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示.

(2) 当$a \neq 0$ 且$a \neq b$时，秩$(\boldsymbol{A})$ = 秩$(\boldsymbol{A}, \beta) = 3$，故线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \beta$有唯一解$\boldsymbol{x} = (1-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}, 0)^{\mathrm{T}}$，即$\beta$可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$唯一地线性表示，且$\beta = (1-\frac{1}{a})\alpha_1 + \frac{1}{a}\alpha_2$.

(3) 当 $a = b \neq 0$ 时，秩$(\boldsymbol{A})$ = 秩$(\boldsymbol{A}, \beta) = 2$，故线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \beta$有无穷多解. 此时有

$$\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&a&-b&1\\0&0&a-b&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&a&-a&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\times\tfrac{1}{a} \to \begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&1&-1&\frac{1}{a}\\0&0&0&0\end{bmatrix}\times(-1) \to \begin{bmatrix}1&0&0&1-\frac{1}{a}\\0&1&-1&\frac{1}{a}\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

由此可得$\boldsymbol{Ax} = \beta$的通解$\boldsymbol{x} = k(0, 1, 1)^{\mathrm{T}} + (1-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}, 0)^{\mathrm{T}}$，其中$k$为任意实数.

因此β可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示，但表示式不唯一. 表示式如下:

$$\beta = (1-\tfrac{1}{a})\alpha_1 + (k+\tfrac{1}{a})\alpha_2 + k\alpha_3,$$

其中 k 为任意实数.

23. $\boxed{\text{04数三}}$设n阶矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}1&b&\cdots&b\\b&1&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&\cdots&1\end{bmatrix}$, (1) 求$\boldsymbol{A}$的特征值和特征向量; (2) 求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$为对角矩阵.

解: (1) $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix}\lambda-1&-b&\cdots&-b\\-b&\lambda-1&\cdots&-b\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-b&-b&\cdots&\lambda-1\end{vmatrix} = [\lambda - (1+(n-1)b)][\lambda - (1-b)]^{n-1}$,

由此可得$\boldsymbol{A}$的特征值$\lambda_1 = 1+(n-1)b$, $\lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 1-b$.

$(\lambda_1\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为$\xi_1 = (1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$,

故对应于$\lambda_1 = 1+(n-1)b$的特征向量为$k\xi_1$，其中$k \neq 0$.

$(\lambda_2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为

$\xi_2 = (-1, 1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$, $\xi_3 = (-1, 0, 1, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$, …, $\xi_n = (-1, 0, 0, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$,

故对应于$\lambda_1 = 1+(n-1)b$的特征向量为

$$k_1\xi_2 + k_2\xi_3 + \ldots + k_{n-1}\xi_n,$$

其中$k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$不全为零.

(2) 根据(1)，令$\boldsymbol{P} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$，则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix}1+(n-1)b&0&\cdots&0\\0&1-b&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1-b\end{pmatrix}.$$

24. 04数四 设线性方程组 $\begin{cases} x_1+\lambda x_2+\mu x_3+x_4=0, \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=0, \\ 3x_1+(2+\lambda)x_2+(4+\mu)x_3+4x_4=1, \end{cases}$ 已知(1, –1, 1, –1)$^{\mathrm{T}}$是该方程组的一个解, 试求(1)方程组的全部解, 并用对应的齐次线性方程组的基础解系表示全部解; (2) 该方程组满足$x_2 = x_3$的全部解.

解: (1) 把$\boldsymbol{x}$ = (1, –1, 1, –1)$^{\mathrm{T}}$代入该方程组得 $\begin{cases} 1-\lambda+\mu-1=0, \\ 2-1+1-2=0, \\ 3-(2+\lambda)+(4+\mu)-4=1, \end{cases}$ 由此可得$\lambda=\mu$. 令$\boldsymbol{A}$为该线性方程组的系数矩阵, $\boldsymbol{b}$ = (0, 0, 1)$^{\mathrm{T}}$, 则

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{bmatrix}1&\lambda&\lambda&1&0\\2&1&1&2&0\\3&2+\lambda&4+\lambda&4&1\end{bmatrix}\begin{matrix}\times(-2)\ \times(-3)\\ \\ \\ \end{matrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&\lambda&\lambda&1&0\\0&1-2\lambda&1-2\lambda&0&0\\0&2-2\lambda&4-2\lambda&1&1\end{bmatrix}\times(-1)\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1&\lambda&\lambda&1&0\\0&1-2\lambda&1-2\lambda&0&0\\0&1&3&1&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&\lambda&\lambda&1&0\\0&1&3&1&1\\0&1-2\lambda&1-2\lambda&0&0\end{bmatrix}\times(-\lambda)\ \times(2\lambda-1)\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1&0&-2\lambda&1-\lambda&-\lambda\\0&1&3&1&1\\0&0&2(2\lambda-1)&2\lambda-1&2\lambda-1\end{bmatrix}.$$

当$\lambda\neq\dfrac{1}{2}$时, $\begin{bmatrix}1&0&-2\lambda&1-\lambda&-\lambda\\0&1&3&1&1\\0&0&2(2\lambda-1)&2\lambda-1&2\lambda-1\end{bmatrix}\times\frac{1}{2(2\lambda-1)}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-2\lambda&1-\lambda&-\lambda\\0&1&3&1&1\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\times(-3)\ \times2\lambda\rightarrow$

$\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$. 由此可的对应的齐次线性方程组的一个基础解系为$\xi=(-1,\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1)^{\mathrm{T}}$, 原方程组的一个特解为$\eta^*=(0,\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0)^{\mathrm{T}}$, 因而原方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=k(-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)^{\mathrm{T}}+(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)^{\mathrm{T}},$$

其中 k 为任意实数.

当$\lambda=\dfrac{1}{2}$时, $\begin{bmatrix}1&0&-2\lambda&1-\lambda&-\lambda\\0&1&3&1&1\\0&0&2(2\lambda-1)&2\lambda-1&2\lambda-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1&1/2&-1/2\\0&1&3&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$.

由此可的对应的齐次线性方程组的一个基础解系为

$$\xi_1=(1,-3,1,0)^{\mathrm{T}},\ \xi_2=(-\frac{1}{2},-1,0,1)^{\mathrm{T}},$$

原方程组的一个特解为$\eta^*=(-\dfrac{1}{2},1,0,0)^{\mathrm{T}}$, 因而原方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1(1,-3,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-\frac{1}{2},-1,0,1)^{\mathrm{T}}+(-\frac{1}{2},1,0,0)^{\mathrm{T}},$$

其中k_1, k_2为任意实数.

(2) 当$\lambda\neq\dfrac{1}{2}$时, 由$x_2=x_3$得$\dfrac{1}{2}k+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}k-\dfrac{1}{2}$, 故$k=-1$. 由此可得该方程组满足$x_2=x_3$的解为

$$\boldsymbol{x}=(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

当$\lambda=\dfrac{1}{2}$时, 由$x_2=x_3$得$-3k_1-k_2+1=k_1$, 故$k_2=1-4k_1$. 由此可得该方程组满足$x_2=x_3$的解为

$$\boldsymbol{x} = k_1(3, 1, 1, -4)^{\mathrm{T}} + (-1, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}},$$

其中k_1为任意实数.

25. 04 数四 设三阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为 2, $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ 是$\boldsymbol{A}$的二重特征值. 若$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (-1, 2, -3)^{\mathrm{T}}$都是$\boldsymbol{A}$的属于特征值 6 的特征向量.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的另一特征值和对应的特征向量; (2)求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解: (1) 设$\boldsymbol{A}$的另一特征值为λ_3. 因为秩$(\boldsymbol{A}) = 2$, 所以$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = |\boldsymbol{A}| = 0$. 进而由$\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ 可知$\lambda_3 = 0$.

设$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{A}$的对应于$\lambda_3 = 0$ 特征向量, 则由$\boldsymbol{A}$是实对称矩阵以及$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 1, 1)^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{A}$的属于特征值 6 的特征向量可知$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0$, $\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0$. 令$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)^{\mathrm{T}}$, 则

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\times(-2) \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\times(-1) \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\times(-1) \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

由此可得$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系: $\xi = (-1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$. 故$\boldsymbol{A}$的属于特征值 0 的特征向量为$k(-1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, 其中$k$为任意非零实数.

(2) 令$\boldsymbol{P} = (\alpha_1, \alpha_2, \xi)$, 则$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$. 由

$$(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{E}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\times(-1) \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\times(-1) \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\times(-1) \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\times\tfrac{1}{3} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\times 2\ \times 1 \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\times(-2) \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{可得} \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \text{从而有}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

26. 05 数一 已知二次型$f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$的秩为 2.

(1)求a的值; (2) 求正交变换$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Qy}$, 把$f(x_1, x_2, x_3)$化成标准形; (3) 求方程$f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解.

解: (1) 二次型$f(x_1, x_2, x_3)$的矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. $|\boldsymbol{A}| = -8a$. 因为二次型$f(x_1, x_2, x_3)$的秩为 2, 即秩$(\boldsymbol{A}) = 2$, 所以$|\boldsymbol{A}| = 0$. 由此可得$a = 0$.

(2) $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2\lambda$. 由此可得$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 0$.

$(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为$\xi_1 = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\xi_2 = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

$(0\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为$\xi_3 = (-1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$.

ξ_1, ξ_2, ξ_3两两正交, $\|\xi_1\| = \sqrt{2}$, $\|\xi_2\| = 1$, $\|\xi_3\| = \sqrt{2}$.

令$\boldsymbol{q}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\xi_1 = (\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{q}_2 = \xi_2 = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{q}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\xi_3 = (-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3)$,

则$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Qy}$为正交变换, 而且经过此正交变换$f(x_1, x_2, x_3)$化成标准形 $2y_1^2 + 2y_2^2$.

(3) $f(x_1, x_2, x_3) = 0 \Leftrightarrow 2y_1^2 + 2y_2^2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{y} = (0, 0, c)^{\mathrm{T}}$ (其中c为任意实数)

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}(\text{其中 } c \text{ 为任意实数}).$$

27. 05 数一/二 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行是(a, b, c), a, b, c 不全为零，矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{pmatrix}$($k$ 为常数)，且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，求线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的通解.

解: 因为 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行是(a, b, c), a, b, c 不全为零，所以秩$(\boldsymbol{A}) \geq 1$. 从而 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中至多有两个线性无关的解向量.

又因为$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，若$k \neq 9$，则$\xi_1 = (1, 2, 3)^T$, $\xi_2 = (3, 6, k)^T$线性无关而且是$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解，此时$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的通解为$\boldsymbol{x} = k_1(1, 2, 3)^T + k_2(3, 6, k)^T$，其中$k_1, k_2$为任意实数.

若 $k = 9$，则有以下两种情况:

① 当秩$(\boldsymbol{A}) = 2$ 时, $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有一个(非零的)解向量，而$\xi_1 = (1, 2, 3)^T$是$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的非零解.所以此时$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的通解为$\boldsymbol{x} = k(1, 2, 3)^T$，其中$k$为任意实数.

② 当秩$(\boldsymbol{A}) = 1$ 时, $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ 同解，不妨设$a \neq 0$，则$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ 的一个基础解系为

$$\eta_1 = (-b, a, 0)^T,\ \eta_2 = (-c, 0, a)^T,$$

于是$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的通解为$\boldsymbol{x} = k_1(-b, a, 0)^T + k_2(-c, 0, a)^T$，其中$k_1, k_2$为任意实数.

28. 05 数二 确定常数a，使向量组$\alpha_1 = (1, 1, a)^T$, $\alpha_2 = (1, a, 1)^T$, $\alpha_3 = (a, 1, 1)^T$可由向量组$\beta_1 = (1, 1, a)^T$, $\beta_2 = (-2, a, 4)^T$, $\beta_3 = (-2, a, a)^T$线性表示，但向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$不能由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示.

解: 令$\boldsymbol{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{B} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. 则$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}\times(-1)$

$$= (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(a+2)(a-1)^2.$$

假若$|\boldsymbol{A}| \neq 0$，则向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，从而构成$\mathbf{R}^3$的一组基，于是向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$能由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示，这不符合题目要求，故$|\boldsymbol{A}| = 0$，即$a = -2$ 或 1.

当 $a = -2$ 时, $(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix}\times(-1)\ \times 2 \\ \\ \\ \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \to$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$. 由此可见$\alpha_2 = (1, a, 1)^T$, $\alpha_3 = (a, 1, 1)^T$不能由向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性表示，这也不符合题目要求.

当$a = 1$ 时, $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, 1, 1)^T$, $\beta_1 = (1, 1, 1)^T$, $\beta_2 = (-2, 1, 4)^T$, $\beta_3 = (-2, 1, 1)^T$，显然$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$可由向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性表示.

综上所述, $a = 1$.

29. 05 数三/四 已知齐次线性方程组(I)$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$和(II)$\begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ 2x_1 + b^2x_2 + (c+1)x_3 = 0 \end{cases}$同解，求 a, b, c 的值.

解: 分别记齐次线性方程组(I)和(II)的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，则$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 2-a$.

因为齐次线性方程组(II)中方程的个数小于未知数的个数，从而一定有非零解，又因为齐次线性方程组(I)与(II)同解，这表明方程组(I)也有非零解，所以$|\boldsymbol{A}| = 0$，即 $a = 2$. 于是有

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{matrix}\times(-2)&\times(-1)\\ & \\ & \end{matrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&-1\\0&-1&-1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \times(-1)\\ \end{matrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&-1&-1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \times(-2)&\times 1\\ & \end{matrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

由此可得方程组(I)的基础解系: $\xi = (-1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$. 把$\xi = (-1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$代入方程组(II)得

$$\begin{cases}-1-b+c=0\\-2-b^2+c+1=0\end{cases},\ \text{进而得到}\begin{cases}b=0\\c=1\end{cases}\text{或}\begin{cases}b=1,\\c=2.\end{cases}$$

当 $b = 0$, $c = 1$ 时, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&0&2\end{bmatrix}$的秩为 1, 此时方程组(II)的基础解系中有两个线性无关的解向量, 而方程组(I)的基础解系中只有一个(线性无关的)解向量, 这与题设条件矛盾.

当$b = 1$, $c = 2$ 时, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\end{bmatrix}$的秩为 2, 此时方程组(II)的基础解系中也只有一个(线性无关的)解向量, 而且$\xi = (-1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$是(II)的解, 因而方程组(II)的基础解系可取为$\xi = (-1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$. 这表明方程组(I)和(II)确实同解.

综上所述, 有 $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$.

30. 05 数三 设 $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$为正定矩阵, 其中 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 分别为 m 阶, n 阶对称矩阵, $\boldsymbol{C}$ 为 $m\times n$ 矩阵.

(I) 计算$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DP}$, 其中$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m&-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}$.

(II) 利用(I)的结果判断矩阵$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$是否为正定矩阵, 并证明你的结论.

解: (I) 由条件可知$\boldsymbol{A}$为对称矩阵, 而且$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DP}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m&-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m&-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m&\boldsymbol{O}\\-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}&-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{bmatrix}.$$

(II) 因为$|\boldsymbol{P}| = 1$, 可见$\boldsymbol{P}$可逆, 因而$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{bmatrix}$与$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$合同. 又因为$\boldsymbol{D}$为正定矩阵, 所以 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{bmatrix}$也是正定矩阵. 于是对于任意的$n$维非零向量$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, 令$m+n$维向量$\boldsymbol{y} = (0, \ldots, 0, x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, 则$\boldsymbol{y}$也是非零向量, 因而有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}\end{bmatrix}\boldsymbol{y}>0.$$

故$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$是正定矩阵.

31. 05 数四 设$\boldsymbol{A}$为三阶矩阵, α_1, α_2, α_3是线性无关的三维列向量, 且满足$\boldsymbol{A}\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\boldsymbol{A}\alpha_2 = 2\alpha_2 + \alpha_3$, $\boldsymbol{A}\alpha_3 = 2\alpha_2 + 3\alpha_3$.

(I) 求矩阵$\boldsymbol{B}$, 使得$\boldsymbol{A}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\boldsymbol{B}$.

(II) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

(III) 求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$, 使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$为对角矩阵.

解: (I) 因为α_1, α_2, α_3是线性无关的三维列向量, 所以矩阵$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$可逆, 因而由

$$\boldsymbol{A}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\boldsymbol{B}$$

可知$\boldsymbol{B} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1}\boldsymbol{A}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$存在而且唯一.

又因为$\boldsymbol{A}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_2 + 3\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{bmatrix}$,

可见 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{bmatrix}$.

(II) 由$\boldsymbol{B}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}\boldsymbol{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$可知$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似, 因而有相同的特征值.

由$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\-1&\lambda-2&-2\\-1&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)$可得$\boldsymbol{B}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=4$.

于是可得$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=4$.

(III) $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为$\xi_1=(-1,1,0)^{\mathrm T},\ \xi_2=(-2,0,1)^{\mathrm T}$.

$(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为$\xi_3=(0,1,1)^{\mathrm T}$.

令$\boldsymbol{Q}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{bmatrix}-1&-2&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$, 则$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{bmatrix}$.

再令$\boldsymbol{P}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\boldsymbol{Q}$, 则有$\boldsymbol{P}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}-1&-2&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}=(-\alpha_1+\alpha_2,-2\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3)$, 而且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=[(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\boldsymbol{Q}]^{-1}\boldsymbol{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}\boldsymbol{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{bmatrix}.$$

32. 06 数一/二 已知非齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1\\ax_1+x_2+3x_3-bx_4=1\end{cases}$有 3 个线性无关的解.

(I) 证明方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$. (II) 求 a,b 的值及方程组的通解.

证明(I): 设该方程组的 3 个线性无关的解为η_1,η_2,η_3, 则$\eta_1-\eta_2,\ \eta_1-\eta_3$是齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的非零解, 而且线性无关(否则由$\eta_1-\eta_2,\ \eta_1-\eta_3$非零且线性相关可设$\eta_1-\eta_3=k(\eta_1-\eta_2)$, 于是有

$$(1-k)\eta_1+k\eta_2+\eta_3=\boldsymbol{0},$$

这与η_1,η_2,η_3线性无关矛盾!). 因此$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\le 4-2=2$. 又因为$\boldsymbol{A}$有一个 2 阶子式$\begin{vmatrix}1&1\\4&3\end{vmatrix}=-1\ne0$, 所以$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\ge 2$. 综上所述可知$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$.

解(II): 令$\boldsymbol{b}=(1,-1,1)^{\mathrm T}$, 则由$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$ 以及

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{bmatrix}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\a&1&3&-b&1\end{bmatrix}\begin{matrix}\times(-4)\ \times(-a)\\ \\ \\\end{matrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&1-a&3-a&-a-b&1+a\end{bmatrix}\times(1-a)\to$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&0&4-2a&4a-b-5&4-2a\end{bmatrix}$$可知 $4-2a=4a-b-5=0$, 故 $a=2,b=3$. 此时

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&0&4-2a&4a-b-5&4-2a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\times(-1)\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&-1\\0&1&-1&5&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\times(-1)\to$$

$$\begin{bmatrix}1&0&2&-4&2\\0&1&-1&5&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$ 由此可得$\begin{cases}x_1+2x_3-4x_4=2,\\x_2-x_3+5x_4=-3,\end{cases}$ 即$\begin{cases}x_1=-2x_3+4x_4+2,\\x_2=x_3-5x_4-3,\end{cases}$ 进而得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解

$$\boldsymbol{x}=k_1(-2,1,1,0)^{\mathrm T}+k_2(4,-5,0,1)^{\mathrm T}+(2,-3,0,0)^{\mathrm T},$$

其中k_1,k_2为任意实数.

33. 06 数一/二 设 3 阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的各行元素之和均为 3, 向量$\alpha_1=(-1,2,-1)^{\mathrm T},\ \alpha_2=(0,-1,1)^{\mathrm T}$是线性方程

组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的两个解, (I) 求$\boldsymbol{A}$的特征值与特征向量. (II)求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$和对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$, 使得$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$.

06 数三/四(III) 求$\boldsymbol{A}$及$(\boldsymbol{A}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E})^6$, 其中$\boldsymbol{E}$为 3 阶单位矩阵.

解: (I) 因为$\boldsymbol{A}$是 3 阶实对称矩阵, 所以$\boldsymbol{A}$有 3 个线性无关的特征向量. 令$\alpha_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$, 则由条件可知$\boldsymbol{A}\alpha_1=0\alpha_1$, $\boldsymbol{A}\alpha_2=0\alpha_2$, $\boldsymbol{A}\alpha_3=3\alpha_3$, 其中$\alpha_1$, α_2线性无关, $\alpha_3\neq\boldsymbol{0}$, 由此可见$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=3$. 对应于$\lambda_1=\lambda_2=0$的特征向量为$k_1(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}+k_2(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$, 其中$k_1$, k_2为任意不全为零的实数. 对应于$\lambda_3=3$的特征向量为$k(1,1,1)^{\mathrm{T}}$, 其中k为任意非零实数.

(II) 令$\beta_1=\alpha_1$, $\beta_2=\alpha_2-\dfrac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}-\dfrac{-3}{6}(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}=(-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2})^{\mathrm{T}}$, $\beta_3=\alpha_3$.

再把β_1, β_2, β_3单位化得:

$$\boldsymbol{q}_1=\frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1=(\frac{-1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},\frac{-1}{\sqrt6})^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{q}_2=\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2=(\frac{-1}{\sqrt2},0,\frac{1}{\sqrt2})^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{q}_3=\frac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3=(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})^{\mathrm{T}}.$$

于是令$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3)=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt6}&\frac{-1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{2}{\sqrt6}&0&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{-1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$, 则$\boldsymbol{Q}$为正交矩阵且$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{bmatrix}$.

(III) 因为$\boldsymbol{Q}$为正交矩阵且$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{bmatrix}$, 所以

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0&0&\sqrt3\\0&0&\sqrt3\\0&0&\sqrt3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt6}&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{-1}{\sqrt6}\\\frac{-1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

$$(\boldsymbol{A}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E})^2=\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+\frac{9}{4}\boldsymbol{E}=\frac{9}{4}\boldsymbol{E}.\quad(\boldsymbol{A}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E})^6=(\frac{9}{4}\boldsymbol{E})^3=\frac{729}{64}\boldsymbol{E}.$$

34. 06 数三/四设 4 维向量组$\alpha_1=(1+a,1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(2,2+a,2,2)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(3,3,3+a,3)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_4=(4,4,4,4+a)^{\mathrm{T}}$. 问$a$为何值时$\alpha_1$, α_2, α_3, α_4是线性相关? 当α_1, α_2, α_3, α_4线性相关时, 求其一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大线性无关组线性表出.

解: 令$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, 则$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10+a&2&3&4\\10+a&2+a&3&4\\10+a&2&3+a&4\\10+a&2&3&4+a\end{vmatrix}$

$$= (10+a)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix} = (10+a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = (10+a)a^3.$$

于是, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$是线性相关 $\Leftrightarrow$ 秩$(\boldsymbol{A}) < 4 \Leftrightarrow |\boldsymbol{A}| = 0 \Leftrightarrow a = -10$ 或 0.

当$a = -10$ 时, $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -8 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 1 & -8 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 & 4 \\ -9 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{matrix} \times(-1) \quad \times 9 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & -10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \\ 0 & 20 & 30 & -50 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & -10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & 30 & -30 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & -10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \times(-2) \\ \times(-3) \\ \\ \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

由此可见$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$的一个极大线性无关组, 且$\alpha_4 = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$.

当$a = 0$ 时, $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (2, 2, 2, 2)^T$, $\alpha_3 = (3, 3, 3\ 3)^T$, $\alpha_4 = (4, 4, 4, 4)^T$. 显然$\alpha_1$是$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$的一个极大线性无关组, 且$\alpha_2 = 2\alpha_1$, $\alpha_3 = 3\alpha_1$, $\alpha_4 = 4\alpha_1$.

35. 07 数一/二/三/四 设线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$ 与方程$x_1 + 2x_2 + x_3 = a-1$ 有公共解, 求a的值及所有公共解.

解: 令 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a-1 \end{bmatrix}$, 则由条件可知$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$有解, 因而秩$(\boldsymbol{A})$ = 秩$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. 而且所求的公共解就是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解.

$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{bmatrix}\begin{matrix} \times(-1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \times(-3) \quad \times(-1) \\ \\ \\ \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \times(a-2) \\ \\ \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{bmatrix}.$

当 $a \neq 1$ 且 $a \neq 2$ 时, 秩$(\boldsymbol{A}) = 3$, 秩$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 4$, 不符合条件. 故 $a = 1$ 或 2.

当$a = 1$ 时, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \times(-1) \\ \\ \\ \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 由此可得

$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$ 故所求的公共解为: $\boldsymbol{x} = k(-1, 0, 1)^T$, 其中$k$为任意实数.

当$a = 2$ 时, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \times(-1) \\ \\ \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \times(-1) \\ \\ \\ \end{matrix} \to$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\times(-1)\to\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$，由此可得 $\begin{cases}x_1=0,\\x_2=1,\\x_3=-1,\end{cases}$ 这就是所求的公共解.

36. 07 数一/二/三/四 设 3 阶对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-2$, $\alpha_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的一个特征向量，记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证 α_1 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量，并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值与特征向量.

(II) 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解: (I) 由条件可知 $\boldsymbol{A}\alpha_1=\alpha_1$, $\boldsymbol{B}\alpha_1=(\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E})\alpha_1=\boldsymbol{A}^5\alpha_1-4\boldsymbol{A}\alpha_1+\alpha_1=\alpha_1-4\alpha_1+\alpha_1=-2\alpha_1$. 可见 α_1 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量，对应的特征值为 -2.

设 α_2, α_3 分别为对应于 $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-2$ 的特征向量，则由 $\boldsymbol{A}$ 的对称性可知 α_1, α_2, α_3 两两正交，因而 α_2, α_3 是 $x_1-x_2+x_3=0$ 的两个线性无关的解，进一步可以看出 α_2, α_3 构成 $x_1-x_2+x_3=0$ 的一个基础解系，而且有

$\boldsymbol{B}\alpha_2=(\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E})\alpha_2=\boldsymbol{A}^5\alpha_2-4\boldsymbol{A}^3\alpha_2+\alpha_2=2^5\alpha_2-4\times2^3\alpha_2+\alpha_2=\alpha_2$.

$\boldsymbol{B}\alpha_3=(\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E})\alpha_3=\boldsymbol{A}^5\alpha_3-4\boldsymbol{A}^3\alpha_3+\alpha_3=(-2)^5\alpha_2-4\times(-2)^3\alpha_2+\alpha_2=\alpha_3$.

可见 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值为 $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$,

与 $\lambda_1=-2$ 对应的特征向量为 $k(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，其中 k 为任意非零实数.

与 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 对应的特征向量可表示为 $k_1\alpha_2+k_2\alpha_3$，其中 k_1, k_2 为任意不全为零的实数.

下面来求 $\boldsymbol{B}$ 的与 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 对应的特征向量的具体表达式.

一方面，若 α 是 $\boldsymbol{B}$ 的与 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 对应的特征向量，则由于 $\boldsymbol{B}$ 也是实对称矩阵，因而 α 与 α_1 正交；另一方面，若 α 是与 α_1 正交的非零向量，则 α 是 $x_1-x_2+x_3=0$ 的解，因而能由 α_2, α_3 线性表示，这意味着 α 是 $\boldsymbol{B}$ 的与 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 对应的特征向量. 所以 α 是 $\boldsymbol{B}$ 的与 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 对应的特征向量 $\Leftrightarrow$ α 是与 α_1 正交的非零向量 $\Leftrightarrow$ α 是 $x_1-x_2+x_3=0$ 的非零解.

又因为 $x_1-x_2+x_3=0$ 的一个基础解系为: $\xi_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\xi_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$. 所以 $\boldsymbol{B}$ 的与 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 对应的特征向量为 $k_1(1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，其中 k_1, k_2 为任意不全为零的实数.

(II) 令 $\boldsymbol{P}=(\alpha_1,\xi_1,\xi_2)=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，则由(I)可知 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

$$(\boldsymbol{P},\boldsymbol{E})=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&0&0\\-1&1&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\-1&1&0&0&1&0\\1&1&-1&1&0&0\end{array}\right]\begin{matrix}\times1\ \times(-1)\\ \\ \\\end{matrix}\to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\0&1&1&0&1&1\\0&1&-2&1&0&-1\end{array}\right]\times(-1)\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\0&1&1&0&1&1\\0&0&-3&1&-1&-2\end{array}\right]\times(-\tfrac13)\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\0&1&1&0&1&1\\0&0&1&-\frac13&\frac13&\frac23\end{array}\right]\times(-1)$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac13&-\frac13&\frac13\\0&1&0&\frac13&\frac23&\frac13\\0&0&1&-\frac13&\frac13&\frac23\end{array}\right]$$. 由此可得 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac13&-\frac13&\frac13\\\frac13&\frac23&\frac13\\-\frac13&\frac13&\frac23\end{bmatrix}$，于是有

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac13&-\frac13&\frac13\\\frac13&\frac23&\frac13\\-\frac13&\frac13&\frac23\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1&-1\\2&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac13&-\frac13&\frac13\\\frac13&\frac23&\frac13\\-\frac13&\frac13&\frac23\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{bmatrix}.$$

37. 08 数一/二/三/四 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2a&1&&\\a^2&2a&\ddots&\\&\ddots&\ddots&1\\&&a^2&2a\end{bmatrix}_{n\times n}$ 满足方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{b}=(1,0,\ldots,$

$0)^T$.

(1) 求证$|\boldsymbol{A}| = (n+1)a^n$.

(2) a为何值时，方程组有唯一解，此时求x_1.

(3) a 为何值时，方程组有无穷多解，此时求通解.

证明(1): 用数学归纳法. 记$\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n\times n}$.

当$n = 1$ 时, $\boldsymbol{D}_1 = 2a = (1+1)a^1$.

当$n = 2$ 时, $\boldsymbol{D}_2 = \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix} = 3a^2 = (2+1)a^2$.

可见结论对于 $n = 1, 2$ 成立.

假设结论对于 $n < k$ 的情形已经成立(其中 $k \ge 3$), 下面来看 $n = k$ 的情形.

对$\boldsymbol{D}_k$按第一行展开得:

$$\boldsymbol{D}_k = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{k\times k} = 2a\boldsymbol{D}_{k-1} - \begin{vmatrix} a^2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2a & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{(k-1)\times(k-1)} = 2a\boldsymbol{D}_{k-1} - a^2\boldsymbol{D}_{k-2}.$$

由归纳假设, $\boldsymbol{D}_{k-1} = ka^{k-1}$, $\boldsymbol{D}_{k-2} = (k-1)a^{k-2}$, 故有

$$\boldsymbol{D}_k = 2a\boldsymbol{D}_{k-1} - a^2\boldsymbol{D}_{k-2} = 2aka^{k-1} - a^2(k-1)a^{k-2} = 2ka^k - (k-1)a^k = (k+1)a^k.$$

即结论对于 $n = k$ 的情形也成立.

根据数学归纳法原理可知$|\boldsymbol{A}| = (n+1)a^n$对于一切正整数$n$都成立.

[注] 对$\boldsymbol{D}_n$按第一行展开得$\boldsymbol{D}_n = 2a\boldsymbol{D}_{n-1} - a^2\boldsymbol{D}_{n-2}$. 由此可得

$$\boldsymbol{D}_n - a\boldsymbol{D}_{n-1} = a\boldsymbol{D}_{n-1} - a^2\boldsymbol{D}_{n-2} = a(\boldsymbol{D}_{n-1} - a\boldsymbol{D}_{n-2}) = a^2(\boldsymbol{D}_{n-2} - a\boldsymbol{D}_{n-3}) = \ldots = a^{n-3}(\boldsymbol{D}_3 - a\boldsymbol{D}_2) = a^{n-2}(\boldsymbol{D}_2 - a\boldsymbol{D}_1)$$
$$= a^{n-2}(3a^2 - 2a^2) = a^n.$$

故$\boldsymbol{D}_n = a\boldsymbol{D}_{n-1} + a^n$. 根据这个递推公式可得$\boldsymbol{D}_n = (n+1)a^n$.

解: (2) 方程组有唯一解 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}| \ne 0 \Leftrightarrow a \ne 0$.

用$\boldsymbol{b} = (1, 0, \ldots, 0)^T$替换$\begin{vmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n\times n}$的第一列得$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2a & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n\times n} = \boldsymbol{D}_{n-1} = na^{n-1}$.

当$a \ne 0$ 时，根据克拉默法则可得$x_1 = \dfrac{na^{n-1}}{(n+1)a^n} = \dfrac{n}{(n+1)a}$.

解: (3) 方程组有无穷多解 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

当$a = 0$ 时, $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$即$\begin{cases} x_2 = 1, \\ x_2 = 0, \\ \cdots \\ x_n = 0, \end{cases}$ 其通解为$\boldsymbol{x} = (c, 1, 0, \ldots, 0)^T$, 其中$c$为任意实数.

38. $\boxed{\text{08 数二/三/四}}$设$\boldsymbol{A}$为 3 阶矩阵, α_1, α_2为$\boldsymbol{A}$的分别属于特征值-1, 1 特征向量, 向量α_3满足$\boldsymbol{A}\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$.

(1) 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关.

(2) 令$\boldsymbol{P} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 求$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.

证明(1): 因为α_1, α_2为$\boldsymbol{A}$的分别属于特征值-1, 1 特征向量, 所以$\boldsymbol{A}\alpha_1 = -\alpha_1$, $\boldsymbol{A}\alpha_2 = \alpha_2$, 而且$\alpha_1$, α_2线性无关.

假若$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关, 则$\alpha_3$能由$\alpha_1$, α_2线性表示, 于是可设$\alpha_3 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$.

又因为向量α_3满足$\boldsymbol{A}\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$, 所以$\boldsymbol{A}(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2) = \alpha_2 + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$. 整理得

$$2k_1\alpha_1 + \alpha_2 = \boldsymbol{0}.$$

这与α_1, α_2线性无关矛盾! 此矛盾表明$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关.

解(2): 由条件可得$\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{A}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\boldsymbol{A}\alpha_1, \boldsymbol{A}\alpha_2, \boldsymbol{A}\alpha_3) = (-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 故$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

39. 09数一/二/三 设$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}$, $\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. (1) 求满足$\boldsymbol{A}\xi_2 = \xi_1$, $\boldsymbol{A}^2\xi_3 = \xi_1$的所有向量$\xi_2, \xi_3$.

(2)对(1)中任意向量ξ_2, ξ_3证明ξ_1, ξ_2, ξ_3线性无关.

解(1): $(\boldsymbol{A}, \xi_1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times(-\tfrac{1}{4}) \to$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

由此可得满足$\boldsymbol{A}\xi_2 = \xi_1$的$\xi_2 = k(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)^{\mathrm{T}} + (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)^{\mathrm{T}}$, 其中$k$为任意实数.

$\boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$,

$(\boldsymbol{A}^2, \xi_1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times 1 \;\; \times(-2) \to \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times\tfrac{1}{2} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

由此可得满足$\boldsymbol{A}^2\xi_3 = \xi_1$的$\xi_3 = k_1(-1, 1, 0)^{\mathrm{T}} + k_2(0, 0, 1)^{\mathrm{T}} + (\frac{1}{2}, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, 其中$k_1, k_2$为任意实数.

证明(2): $|\xi_1, \xi_2, \xi_3| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2}(k+1) & -k_1 + \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2}(k+1) & k_1 \\ 2 & k & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2}(k+1) & -k_1 + \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & k & k_2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2}(k+1) \\ 2 & k \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0.$

所以ξ_1, ξ_2, ξ_3线性无关.

40. 09数一/二/三 设二次型$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

(1) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值.

(2) 若二次型f的规范形为$y_1^2 + y_2^2$, 求a的值.

解: (1) 二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{bmatrix}$.

$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} = (\lambda-a)(\lambda-a-1)(\lambda-a+2).$

由此可得$\boldsymbol{A}$的特征值为: $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = a+1$, $\lambda_3 = a-2$.

(2) 若二次型f的规范形为$y_1^2 + y_2^2$, 则$\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = a+1$, $\lambda_3 = a-2$ 中有两个正数, 一个为 0. 由此可得 $a = 2$.

41. $\boxed{10\text{ 数一/二/三}}$设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解.

(1) 求λ, a.

(2) 求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

解: (1) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解$\Rightarrow |\boldsymbol{A}|=0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda+1)=0 \Rightarrow \lambda=1$ 或-1.

当$\lambda=1$ 时, $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&1&a\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\times(-1) \to \begin{pmatrix}1&1&1&a\\0&0&0&1\\0&0&0&1-a\end{pmatrix}\times(a-1)\to\begin{pmatrix}1&1&1&a\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

由此可见秩$(\boldsymbol{A})=1$ 而秩$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})=2$, $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解.

当$\lambda=-1$ 时, $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}-1&1&1&a\\0&-2&0&1\\1&1&-1&1\end{pmatrix}\times1 \to \begin{pmatrix}-1&1&1&a\\0&-2&0&1\\0&2&0&1+a\end{pmatrix}\times1\to\begin{pmatrix}-1&1&1&a\\0&-2&0&1\\0&0&0&2+a\end{pmatrix}$,

由此可见秩$(\boldsymbol{A})=2$.

由于 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解, 故秩$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})=$ 秩$(\boldsymbol{A})=2$, 可见 $2+a=0$, 即 $a=-2$.

此时 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无数多解, 当然存在两个不同的解.

综上所述, $\lambda=-1$, $a=-2$.

(2) 由(1)得$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}-1&1&1&-2\\0&-2&0&1\\1&1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&1&-2\\0&-2&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\times(-1)\\\times(-\frac{1}{2})\\ \end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&2\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\times1\to$

$\begin{pmatrix}1&0&-1&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. 故$\begin{cases}x_1-x_3=\frac{3}{2},\\x_2=-\frac{1}{2},\end{cases}$ 即$\begin{cases}x_1=x_3+\frac{3}{2},\\x_2=-\frac{1}{2},\end{cases}$ 由此可得$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_3+\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_3\\0\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$.

可见 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$, 其中 k 为任意实数.

42. $\boxed{10\text{ 数一}}$已知二次型$f(x_1, x_2, x_3)=x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$下的标准形为$y_1^2+y_2^2$, 且$\boldsymbol{Q}$的第三列为$(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^{\mathrm{T}}$.

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

(2) 证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

解(1) 因为二次型$f(x_1, x_2, x_3)=x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$下的标准形为$y_1^2+y_2^2$.

所以$\boldsymbol{A}$的特征值为: $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=0$.

设$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3)$, 则$\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$为$\boldsymbol{A}$的对应于$\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量, $\boldsymbol{q}_3=(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^{\mathrm{T}}$为$\boldsymbol{A}$的对应于$\lambda_3=0$ 的特征向量.

为了求$\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$, 我们先证明“非零向量ξ为$\boldsymbol{A}$的对应于$\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量 $\Leftrightarrow$ ξ与$\boldsymbol{q}_3$正交”.

一方面, $\boldsymbol{A}$的对应于$\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量ξ必与$\boldsymbol{q}_3$正交.

另一方面, 设ξ与$\boldsymbol{q}_3$正交. 注意到$\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$, $\boldsymbol{q}_3$是$\mathbf{R}^3$的一组标准正交基, 故可设$\xi=k_1\boldsymbol{q}_1+k_2\boldsymbol{q}_2+k_3\boldsymbol{q}_3$,

由于ξ与$\boldsymbol{q}_3$的内积为 0, 即$\langle\xi, \boldsymbol{q}_3\rangle=0$, 于是有

$$0=\langle\xi, \boldsymbol{q}_3\rangle=\langle k_1\boldsymbol{q}_1+k_2\boldsymbol{q}_2+k_3\boldsymbol{q}_3, \boldsymbol{q}_3\rangle=k_1\langle\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_3\rangle+k_2\langle\boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3\rangle+k_3\langle\boldsymbol{q}_3, \boldsymbol{q}_3\rangle=k_3.$$

从而$\xi=k_1\boldsymbol{q}_1+k_2\boldsymbol{q}_2$, 进而$\boldsymbol{A}\xi=\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{q}_1+k_2\boldsymbol{q}_2)=k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_2=k_1\boldsymbol{q}_1+k_2\boldsymbol{q}_2=\xi$,

可见ξ为$\boldsymbol{A}$的对应于$\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量.

因此$\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$可取为任意两个与$\boldsymbol{q}_3=(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^{\mathrm{T}}$正交的标准正交向量组, 即$\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+0x_2+\frac{\sqrt{2}}{2}x_3=0$ 的两个正交的单位解向量.

而$\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+0x_2+\frac{\sqrt{2}}{2}x_3=0$ 的一个基础解系为

$$\xi_1 = (-1, 0, 1)^T,\ \xi_2 = (0, 1, 0)^T,$$

它们已经是正交的了，单位化即得

$$\boldsymbol{q}_1 = (-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \tfrac{\sqrt{2}}{2})^T,\ \boldsymbol{q}_2 = (0, 1, 0)^T.$$

于是由$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^T = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

证明(2) 由(1)得$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，从而$\boldsymbol{Q}^T(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ} + \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

可见 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值全大于零，因而 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵.

43. $\boxed{\text{10 数二/三}}$设$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{bmatrix}$，正交矩阵$\boldsymbol{Q}$使得$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ}$为对角矩阵，若$\boldsymbol{Q}$的第一列为$\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$.

求 a, $\boldsymbol{Q}$.

解: 设$\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3)$，由条件可知$\boldsymbol{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$是$\boldsymbol{A}$的特征向量.

设$\boldsymbol{Aq}_1 = \lambda_1\boldsymbol{q}_1$，即$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$,

从而$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$，即$\begin{bmatrix} 2 \\ 5+a \\ 4+2a \end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$，由此可得$\lambda_1 = 2$, $a = -1$.

故 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$,

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -4 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ -4 & 1 & \lambda \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \times(-1) \\ \times 1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} \lambda-5 & 5-\lambda & \lambda-5 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ -4 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-5)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ -4 & 1 & \lambda \end{vmatrix}\begin{matrix} \times(-1)\ \times 4 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= (\lambda-5)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & -3 & \lambda+4 \end{vmatrix} = (\lambda-5)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 \\ -3 & \lambda+4 \end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda-2)(\lambda+4).$$

故$\boldsymbol{A}$的特征值为: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = -4$.

$$5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{matrix} \times(-5)\ \times 4 \\ \\ \\ \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -9 & -9 \\ 0 & 9 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

由此可得$(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})x = 0$ 的基础解系: $\xi_2 = (1, -1, 1)^T$.

$$-4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -4 \\ 1 & -7 & 1 \\ -4 & 1 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -7 & 1 \\ -4 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -7 & 1 \\ -4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

由此可得$(-4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})x = 0$ 的基础解系: $\xi_3 = (-1, 0, 1)^T$.

令$\boldsymbol{q}_2 = \dfrac{1}{\|\xi_2\|}\xi_2 = (\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}})^T$, $\boldsymbol{q}_3 = \dfrac{1}{\|\xi_3\|}\xi_3 = (-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}})^T$,

则$\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$为正交矩阵, 且$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

注: 若取$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$, 则$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

44. 11 数一/二 设向量组$\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, 3, 5)^T$不能由向量组$\beta_1 = (1, 1, 1)^T$, $\beta_2 = (1, 2, 3)^T$, $\beta_3 = (3, 4, a)^T$线性表示.

(1) 求 a 的值.

(2) 将$\beta_1, \beta_2, \beta_3$由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表出.

解: (1) 令$\boldsymbol{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{B} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$,

则$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$不能由$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性表示 ⇔ 矩阵方程$\boldsymbol{BX} = \boldsymbol{A}$无解 ⇔ 秩$(\boldsymbol{B}) \neq$ 秩$(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A})$.

而$(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & a & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \times(-1) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & a-3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times(-2) \to$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-5 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

由此可见 $a - 5 = 0$, 即 $a = 5$.

(2) $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \times(-1) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \times(-1) \to$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \times(-3) \quad \times(-1) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

由此可见$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$的解为$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 10 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, 故$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 10 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$,

即$\beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3$, $\beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, $\beta_3 = 5\alpha_1 + 10\alpha_2 - 2\alpha_3$.

45. 11 数三 设向量组$\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, 3, 5)^T$不能由向量组$\beta_1 = (1, a, 1)^T$, $\beta_2 = (1, 2, 3)^T$, $\beta_3 = (1, 3, 5)^T$线性表示.

(1) 求 a 的值.

(2) 将$\beta_1, \beta_2, \beta_3$由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表出.

解: (1) 令$\boldsymbol{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{B} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$,

则$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$不能由$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性表示 ⇔ 矩阵方程$\boldsymbol{BX} = \boldsymbol{A}$无解 ⇔ 秩$(\boldsymbol{B}) \neq$ 秩$(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A})$.

而$(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \times(-a) \quad \times(-1) \to$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2-a & 3-a & -a & 1 & 3-a \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2-a & 3-a & -a & 1 & 3-a \end{pmatrix} \times\frac{1}{2} \to$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\0&1&2&0&\frac12&2\\0&2-a&3-a&-a&1&3-a\end{pmatrix}\times(a-2)\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\0&1&2&0&\frac12&2\\0&0&a-1&-a&\frac12a&a-1\end{pmatrix}.$$

由此可见 $a-1=0$, 即 $a=1$.

(2) $$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&1\\0&1&3&1&2&3\\1&1&5&1&3&5\end{pmatrix}\times(-1)\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&1\\0&1&3&1&2&3\\0&1&4&0&2&4\end{pmatrix}\times(-1)\to$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&1\\0&1&3&1&2&3\\0&0&1&-1&0&1\end{pmatrix}\times(-3)\ \times(-1)\to\begin{pmatrix}1&0&0&2&1&0\\0&1&0&4&2&0\\0&0&1&-1&0&1\end{pmatrix}.$$

由此可见$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的解为$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2&1&0\\4&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$, 故$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&1&0\\4&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$,

即$\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3$, $\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2$, $\beta_3=\alpha_3$.

46. $\boxed{\text{11 数一/二/三}}$设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵, $r(\boldsymbol{A})=2$ 且 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解: (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵, 所以 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个实的特征值且对应于不同的特征值的特征向量是正交的.

又因为 $r(\boldsymbol{A})=2$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 有一个特征值为 0, 另外两个特征值非零.

由$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$可以看出$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$和$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$分别是$\boldsymbol{A}$的对应于$\lambda_1=-1$和$\lambda_2=1$的特征向量.

$\boldsymbol{A}$的对应于$\lambda_3=0$的特征向量与ξ_1,ξ_2正交, 即齐次线性方程组$\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}x=0$的非零解.

该齐次线性方程组的一个基础解系为$\xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

综上所述, $\boldsymbol{A}$的 3 个特征值为$\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=0$.

对应的特征向量依次为$k_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $k_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, 其中$k_1,k_2,k_3$为任意非零实数.

(2) 由(1)可知, 令$\boldsymbol{P}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, 则$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

$$\text{由}(\boldsymbol{P},\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}-1&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0&1\\0&0&1&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&1\\-1&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\end{pmatrix}\times1$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&1\\0&2&0&1&0&1\\0&0&1&0&1&0\end{pmatrix}\times\tfrac12\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&1\\0&1&0&\frac12&0&\frac12\\0&0&1&0&1&0\end{pmatrix}\times(-1)\to\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac12&0&\frac12\\0&1&0&\frac12&0&\frac12\\0&0&1&0&1&0\end{pmatrix}\text{可得}$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac12&0&\frac12\\ \frac12&0&\frac12\\ 0&1&0\end{pmatrix}.\ \text{故}A=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac12&0&\frac12\\ \frac12&0&\frac12\\ 0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

四. 证明题

1. 02 数一 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶方阵,
   (1) 如果 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 相似, 试证 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的特征多项式相等.
   (2) 举一个二阶方阵的例子说明(1)的逆命题不成立.
   (3) 当 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为实对称矩阵时, 试证(1)的逆命题成立.

证明(1): 如果$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$相似, 那么存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$, 于是有

$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{P}|^{-1}\cdot|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}^{-1}|\cdot|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}^{-1}\lambda\boldsymbol{EP}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}| = |\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$.

这就是说 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的特征多项式相等.

解(2): 取$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$, 则$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0\\0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1\\0&\lambda-1\end{vmatrix}=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$.

但是假若存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$, 则有$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$. 这是不可能的.

故 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 不相似.

证明(3): 当$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$均为$n$阶实对称矩阵时, 若$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$的特征多项式相等, 则$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$具有相的特征值. 设$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$为$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$的特征值, 则存在正交矩阵$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{BQ},$$

于是有$(\boldsymbol{PQ}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{PQ}^{-1})=\boldsymbol{QP}^{-1}\boldsymbol{APQ}^{-1}=\boldsymbol{QQ}^{-1}\boldsymbol{BQQ}^{-1}=\boldsymbol{B}$, 故$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$相似.

2. 02 数二 已知$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$为 3 阶矩阵, 且满足 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$, 其中$\boldsymbol{E}$是 3 阶单位矩阵.
   (1) 证明: 矩阵 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆.
   (2) 若 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

证明(1): $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E} \Rightarrow 2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})=\boldsymbol{AB}-4\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{AB}-4\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

$$\Rightarrow (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})=\boldsymbol{AB}-4\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}+8\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}+8\boldsymbol{E}=8\boldsymbol{E} \Rightarrow (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\frac{1}{8}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E} \Rightarrow \boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\text{ 可逆.}$$

解(2): 由上面的证明可知$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=8(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})^{-1}$, 因而$\boldsymbol{A}=8(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})^{-1}+2\boldsymbol{E}$, 其中$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-3&-2&0\\1&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}, (\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix}-1/4&1/4&0\\-1/8&-3/8&0\\0&0&-1/2\end{bmatrix}.\quad \text{故}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}.$$

3. 03 数一/二 已知平面上三条不同直线的方程为

$$l_1: ax+2by+3c=0,$$
$$l_2: bx+2cy+3a=0,$$
$$l_3: cx+2ay+3b=0,$$

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$.

证明: $\begin{vmatrix}a&2b&3c\\b&2c&3a\\c&2a&3b\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}a+b+c&a+b+c&a+b+c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}=6(a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&1\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}$

$=6(a+b+c)(bc+ac+ab-a^2-b^2-c^2)=-3(a+b+c)[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]$.

由于l_1, l_2, l_3是三条不同的直线, 所以a, b, c不能全部相等, 因而$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\neq 0$.

于是，这三条直线交于一点 $\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $\begin{cases} ax+2by+3c=0 \\ bx+2cy+3a=0 \\ cx+2ay+3b=0 \end{cases}$ 有唯一解 $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} a & 2b & 3c \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -3(a+b+c)[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2] = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0.$

4. $\boxed{\text{08 数一}}$ 设 $\boldsymbol{A} = \alpha\alpha^{\mathrm{T}} + \beta\beta^{\mathrm{T}}$, α, β 是三维列向量, α^{T} 为 α 的转置, β^{T} 为 β 的转置. 证明:

(1) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \le 2$. (2)若 α, β 线性相关, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) < 2$.

证明: (1) 因为 α, β 为三维列向量, 所以 $\mathrm{r}(\alpha\alpha^{\mathrm{T}}) \le \mathrm{r}(\alpha) \le 1$, $\mathrm{r}(\beta\beta^{\mathrm{T}}) \le \mathrm{r}(\beta) \le 1$. 于是有

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\alpha\alpha^{\mathrm{T}} + \beta\beta^{\mathrm{T}}) \le \mathrm{r}(\alpha\alpha^{\mathrm{T}}) + \mathrm{r}(\beta\beta^{\mathrm{T}}) \le 2.$$

(2) 若 α, β 线性相关, 不妨设 $\beta = k\alpha$, 则有

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\alpha\alpha^{\mathrm{T}} + \beta\beta^{\mathrm{T}}) = \mathrm{r}[\alpha\alpha^{\mathrm{T}} + (k\alpha)(k\alpha)^{\mathrm{T}}] = \mathrm{r}(\alpha\alpha^{\mathrm{T}} + k^2\alpha\alpha^{\mathrm{T}}) = \mathrm{r}[(1+k^2)\,\alpha\alpha^{\mathrm{T}}] = \mathrm{r}(\alpha\alpha^{\mathrm{T}}) \le \mathrm{r}(\alpha) \le 1.$$