2014 线性代数考研题

1．(14-1,2,3-04) 行列式$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = (\quad)$.

(A) $(ad-bc)^2$　(B) $-(ad-bc)^2$　(C) $a^2d^2-b^2c^2$　(D) $b^2c^2-a^2d^2$

解　应选(B).

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = a\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix} + b\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix}$$

$$= -ad\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + bc\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -(ad-bc)^2$$

故选(B).

2．(14-1,2,3-04) 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$为 3 维向量，则对任意常数$k,l$，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关的 (　).

(A) 必要非充分条件　　(B) 充分非必要条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

解　应选(A).

设$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0}$，即$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+(k_1k+k_2l)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关得$k_1=k_2=0$. 故当$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关时，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$对任意常数$k,l$都线性无关.

令$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关. 则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$对任意常数$k,l$都线性无关，但$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关. 故选(B).

3．(14-1,2,3-04) 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$的负惯性指数为 1，则$a$的取值范围是_____.

解　应填$[-2,2]$.

采用配方法

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+ax_3)^2-a^2x_3^2-x_2^2+4x_2x_3=(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2$$

由于f的负惯性指数为 1，所以$4-a^2\ge 0$，故$-2\le a\le 2$.

4．(14-1,2,3-11) 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ) 求方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系;

(Ⅱ) 求满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$的所有矩阵$\boldsymbol{B}$.

解　$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

（Ⅰ） $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的同解方程组为$\begin{cases}x_1=-x_4\\x_2=2x_4\\x_3=3x_4\end{cases}$，基础解系为$\boldsymbol{\xi}=(-1,2,3,1)^{\mathrm{T}}$.

（Ⅱ） 设$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$. 则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{e}_1$的通解为

$$\boldsymbol{x}=(2,-1,-1,0)^{\mathrm{T}}+k_1\boldsymbol{\xi}=(2-k_1,-1+2k_1,-1+3k_1,k_1)^{\mathrm{T}}$$

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{e}_2$的通解为

$$\boldsymbol{x}=(6,-3,-4,0)^{\mathrm{T}}+k_2\boldsymbol{\xi}=(6-k_2,-3+2k_2,-4+3k_2,k_2)^{\mathrm{T}}$$

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{e}_3$的通解为

$$\boldsymbol{x}=(-1,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_3\boldsymbol{\xi}=(-1-k_3,1+2k_3,1+3k_3,k_3)^{\mathrm{T}}$$

故满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$的所有矩阵$\boldsymbol{B}$为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2-k_1 & 6-k_2 & -1-k_3\\-1+2k_1 & -3+2k_2 & 1+2k_3\\-1+3k_1 & -4+3k_2 & 1+3k_3\\k_1 & k_2 & k_3\end{pmatrix}\qquad (k_1,k_2,k_3\text{为任意常数})$$

5．(14-1,2,3-11) 证明n阶矩阵$\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$相似.

解 设前一矩阵为$\boldsymbol{A}$，后一矩阵为$\boldsymbol{B}$. 可求得$\boldsymbol{A}$的特征值为n和0($n-1$重)，又由于$\boldsymbol{A}$是实对称矩阵，所以$\boldsymbol{A}$相似于矩阵$\mathrm{diag}(n,0,\cdots,0)$. 可求得$\boldsymbol{B}$的特征值也为$n$和$0$($n-1$重)，且$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{B}=1$，故$\boldsymbol{B}$对应$n-1$重特征值 0 有$n-1$个线性无关的特征向量，从而$\boldsymbol{A}$也相似于矩阵$\mathrm{diag}(n,0,\cdots,0)$. 由相似关系的对称性和传递性知$\boldsymbol{A}$相似于$\boldsymbol{B}$.