2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学一答案解析

一、选择题:1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数 (　　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

【答案】(C)

【解析】因为曲线 $y=\dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}$，故 $\lim\limits_{x\to 1^+} y=\infty$，所以 $x=1$ 为垂直渐近线.

又由 $\lim\limits_{x\to\infty} y=1$，故 $y=1$ 为水平渐近线，无斜渐近线，故曲线渐近线的条数为 2.

(2) 设函数 $y(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $y'(0)=$ (　　)

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$　　(B) $(-1)^n(n-1)!$　　(C) $(-1)^{n-1}n!$　　(D) $(-1)^n n!$

【答案】(A)

【解析】因为 $y'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y(x)-y(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)=-1\times(-2)\cdots(1-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

(3) 如果函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，那么下列命题正确的是 (　　)

(A) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

(B) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

(C) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在

(D) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在

【答案】(B)

【解析】设$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=k$，由$f(x,y)$连续，则$f(0,0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$，

故 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x}=0,$$

同理 $$\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0,$$

故 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-0-0\cdot x-0\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}k\sqrt{x^2+y^2}=0,$$

$f(x,y)$在$(0,0)$可微，故选(B).

(4) 设$I_K=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x(k=1,2,3)$则有 ( )

(A) $I_1<I_2<I_3$ (B) $I_3<I_2<I_1$ (C) $I_2<I_3<I_1$ (D) $I_2<I_1<I_3$

【答案】(D)

【解析】由$I_1=\int_0^{\pi}e^{x^2}\sin xdx$， $I_2=\int_0^{2\pi}e^{x^2}\sin xdx$， $I_3=\int_0^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx$，

先比较I_1,I_2，易知$I_2-I_1=\int_{\pi}^{2\pi}e^{x^2}\sin xdx<0$， $I_1>I_2$；

比较I_3,I_2，易知$I_3-I_2=\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx>0$， $I_3>I_2$；

再比较I_3,I_1，则$I_3-I_1=\int_{\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx$令$x-2\pi=y$

则 $$I_3-I_1=\int_{-\pi}^{\pi}e^{(2\pi+y)^2}\sin ydy=\int_0^{\pi}e^{(2\pi+y)^2}\sin ydy+\int_{-\pi}^{0}e^{(2\pi+y)^2}\sin ydy$$

$$=\int_0^{\pi}e^{(2\pi+y)^2}\sin ydy-\int_0^{\pi}e^{(2\pi-y)^2}\sin ydy>0$$

所以$I_3>I_1$，综上$I_3>I_1>I_2$，故答案选(D).

(5)设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$,其中c_1,c_2,c_3,c_4为任意常数，则下列向量组线性相关的为 ( )

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ (B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ (C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ (D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

【答案】(C)

【解析】$\left|\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\right|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_3&c_4\end{vmatrix}=c_1\times\begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix}=0$，故$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$必定线性相关，从而应选 C.

(6) 设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $P=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$Q=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$则 $Q^{-1}AQ=$ ( )

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

【答案】(B)

【解析】$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

$$Q^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1},$$

从而 $$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$，故应选 B.

(7)设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为1与参数为4 的指数分布，则 $P\{X<Y\}=$ ( )

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

【答案】(A)

【解析】X,Y 的概率密度分别为

$$X \sim f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, x>0\\0, \quad x\le 0\end{cases};\quad Y \sim f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, y>0\\0, \quad y\le 0\end{cases};$$

又 X 与 Y 相互独立，从而 X 与 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-(x+4y)}, x>0, y>0\\0, \qquad \text{其他}\end{cases};$$

$$P(X<Y)=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D 4e^{-(x+4y)}dxdy=\int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty}4e^{-(x+4y)}dydx=\frac{1}{5}.$$

(8) 将长度为 $1m$ 的木棒随机地截成两段，则两段长度的相关系数为 (　　)

(A) 1　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $-\frac{1}{2}$　　(D) -1

【答案】D

【解析】设 X,Y 分别为所截成两段木棒的长度，则由题意得 $P(X+Y)=1$ 即 $P(Y=-X+1)=1$，从而 X 与 Y 处处线性负相关，故它们的相关系数为 -1.

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

(9)若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e$，则 $f(x)=$_____.

【答案】e^x

【解析】由 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$，特征方程为 $\lambda^2+\lambda-2=0$，$\lambda_1=1, \lambda_2=-2$，故其通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$.

对解求一阶和二阶导数，则 $y'=C_1e^x-2C_2e^{-2x}$，$y''=C_1e^x+4C_2e^{-2x}$，带入原方程得 $y+y''=C_1e^x+5C_2e^{-2x}=2e^x$，因此，$C_1=1, C_2=0$，所以 $y=e^x$.

(10) $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=$_____.

【答案】$\frac{\pi}{2}$

【解析】$I=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x \xlongequal{\text{令}x=1+\sin\theta} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin\theta)\cos\theta d(1+\sin\theta)$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin\theta)\cos^2\theta d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

(11) $grad(xy+\frac{z}{y})|_{(2,1,1)}=$______.

【答案】$(1,1,1)$

【解析】令 $u=xy+\dfrac{z}{y}$，则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(2,1,1)}=y|_{y=1}=1$，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(2,1,1)}=\left.\left(x-\dfrac{z}{y^2}\right)\right|_{(2,1,1)}=1$，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{(2,1,1)}=\left.\dfrac{1}{y}\right|_{y=1}=1$，

故 $grad(xy+\dfrac{z}{y})|_{(2,1,1)}=(1,1,1)$.

(12)设 $\Sigma=\{(x,y,z)\,|\,x+y+z=1,x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0\}$，则 $\iint\limits_{\Sigma}y^2ds=$_____.

【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{12}$

【解析】由 $z=1-x-y$，$z_x'=-1,z_y'=-1$，曲面在 xOy 面上投影为 $D:\{(x,y)\,|\,0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1-x\}$，

则 $I=\iint\limits_{\Sigma}y^2ds=\iint\limits_{D}y^2\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,d\sigma=\sqrt{3}\iint\limits_{D}y^2d\sigma=\sqrt{3}\int_0^1dx\int_0^{1-x}y^2dy=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

(13) 设 α 为三维单位向量，E 为三阶单位矩阵，则矩阵 $E-\alpha\alpha^T$ 的秩为__________.

【答案】2.

【解析】矩阵 $\alpha\alpha^T$ 的特征值为 1,0,0，则 $E-\alpha\alpha^T$ 的特征值为 0,1,1.

又因为 $(E-\alpha\alpha^T)^T=E-\alpha\alpha^T$ 知 $E-\alpha\alpha^T$ 为实对称矩阵，必可相似对角化，即

$$E-\alpha\alpha^T\sim\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}，故\ r(E-\alpha\alpha^T)=r\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=2.$$

(14)设 A，B，C 是随机文件，A 与 C 互不相容，$P(AB)=\dfrac{1}{2},P(C)=\dfrac{1}{3},P(AB|\overline{C})=$______.

【答案】$\dfrac{3}{4}$

【解析】由于 A 与 C 互不相容，所以 $AC=\phi$，则 $ABC=\phi$，从而 $P(ABC)=0$；

$$P(AB|\overline{C})=\frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(AB)-P(ABC)}{P(\overline{C})}=\frac{\frac{1}{2}-0}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}.$$

三、解答题：15~23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

证明 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\frac{x^2}{2},(-1<x<1)$.

【解析】 令 $f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2},-1<x<1$.

因为 $f(-x)=f(x)$,所以只讨论当 $x\ge 0$ 的时候即可.

又 $f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-x+(1+x)}{(1-x)^2}-\sin x-x$

$$=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x,\qquad 0\le x<1.$$

$$f''(x)=\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}+\frac{2(1-x^2)-2x(-2x)}{(1-x^2)^2}-\cos x-1$$

$$=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2}-\cos x-1$$

$$=\frac{4}{(1-x^2)^2}-\cos x-1\qquad 0\le x<1$$

$$f'''(x)=\frac{-4\times 2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4}+\sin x$$

$$=\frac{16x(1-x^2)}{(1-x^2)^4}+\sin x$$

当 $x\in[0,1)$时，$f'''(x)\ge 0$，从而 $f''(x)$ 单调递增,则 $f''(x)\ge f''(0)=2>0$,

所以当 $x\in[0,1)$时， $f'(x)$单调递增,即 $f'(x)\ge f'(0)=0$,

所以当 $x\in[0,1)$时，$f(x)$ 单调递增,即 $f(x)\ge f(0)=0,x\in[0,1)$.

所以当 $-1<x<1$时， $f(x)\ge 0$,即 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\frac{x^2}{2}$, $(-1<x<1)$.

(16) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

【解析】 令 $\frac{\partial f}{\partial x}=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+x\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-x)=(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-y)=(-xy)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0.$$

从上式中解得 $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$

因为 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-x)\cdot(1-x^2)+e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-2x)=(x^3-3x)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-y)\cdot(-xy)+e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-x)=(xy^2-x)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-y)\cdot(1-x^2)=(x^2y-y)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

所以 $A=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(1,0)}=-2e^{-\frac{1}{2}}$； $B=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)}=0$； $C=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(1,0)}=-e^{-\frac{1}{2}}$

又因为 $AC-B^2=2e^{-1}>0$ 又 $A<0$

所以 $(1,0)$ 为极大值点，即 $f(1,0)=e^{-\frac{1}{2}}$ 为极大值。

或 $A=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(-1,0)}=2e^{-\frac{1}{2}}$

$B=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(-1,0)}=0$

$C=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(-1,0)}=e^{-\frac{1}{2}}$

$AC-B^2=2e^{-1}>0$ 又 $A>0$

$\therefore (-1,0)$ 为极小值点， $f(-1,0)=-e^{-\frac{1}{2}}$ 为极小值.

(17)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

【解析】 (I) 收敛域

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{4(n+1)^2+4(n+1)+3}{2(n+1)+1}\cdot x^{2(n+1)+1}}{\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}\cdot x^{2n}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4(n+1)^2+4(n+1)+3}{4n^2+4n+3}\cdot\frac{2n+1}{2n+3}\cdot x^2\right|$$

$$=x^2$$

令 $x^2<1$，得 $-1<x<1$，当 $x=\pm1$ 时，级数发散。所以，收敛域为 $(-1,1)$.

(II) 设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^2+2}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(2n+1)x^{2n}+\frac{2}{2n+1}x^{2n}\right]$ $(|x|<1)$

令 $S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}$， $S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}$

因为 $\int_0^x S_1(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(2n+1)t^{2n}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}=\frac{x}{1-x^2}\quad(|x|<1)$

所以 $S_1(x)=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}(|x|<1)$

因为 $xS_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n+1}$

所以 $[xS_2(x)]'=\sum_{n=0}^{\infty}2x^{2n}=2\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}\right)=2\cdot\frac{1}{1-x^2}(|x|<1)$

所以 $\int_0^x[xS_2(x)]'=\int_0^x 2\cdot\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^x\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|(|x|<1)$

所以，$xS_2(x)\Big|_0^x=\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$，故 $xS_2(x)=\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$.

当 $x\neq 0$ 时，$S_2(x)=\frac{1}{x}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$.

当 $x=0$ 时，$S_1(0)=1$，$S_2(0)=2$.

所以，$S(x)=S_1(x)+S_2(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{x}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| & x\in(-1,0)\cup(0,1),\\ 3 & x=0.\end{cases}$

(18)(本题满分 10 分)

已知曲线 $L:\begin{cases}x=f(t),\\ y=\cos t,\end{cases}(0\le t<\frac{\pi}{2})$，其中函数 $f(t)$ 具有连续导数，且 $f(0)=0, f'(t)>0$，$(0<t<\frac{\pi}{2})$ 若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1，求函数 $f(t)$ 的表达式，并求此曲线 L 与 x 轴与 y 轴无边界的区域的面积.

【解析】设切点的坐标为 $(f(t),\cos t)$，则切线方程为 $y-\cos t=\frac{-\sin t}{f'(t)}(x-f(t))$

令 $y=0$ 得 $x=f(t)+\frac{f'(t)\cos t}{\sin t}$，则 $\sqrt{(\frac{f'(t)\cos t}{\sin t})^2+\cos^2 t}=1$，即 $f'(t)=\frac{\sin^2 t}{\cos t}$，$0\le t<\frac{\pi}{2}$.

从而 $f(t)=\int\frac{\sin^2 t}{\cos t}\mathrm{d}t=\int(\frac{1}{\cos t}-\cos t)\mathrm{d}t=\ln(\sec t+\tan t)-\sin t+c$.

又因为 $f(0)=0$ 可得 $c=0$，因此 $f(t)=\ln(\sec t+\tan t)-\sin t$.

又由面积的计算公式可得 $S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}y(t)\mathrm{d}x(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\frac{\sin^2 t}{\cos t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$.

(19)（本题满分 10 分）

已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$，再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段，计算曲线积分 $J=\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y$.

【解析】 补充曲线 L_1 沿 y 轴由点 $(2,0)$ 到点 $0(0,0)$，D 为曲线 L 与 L_1 围成的区域. 由格林公式可得

$$\text{原式}=\oint_{L+L_1}3x^2y\mathrm{d}x+\left(x^3+x-2y\right)\mathrm{d}y-\int_{L_1}3x^2y\mathrm{d}x+\left(x^3-x-2y\right)\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\left(3x^2+1-3x^2\right)\mathrm{d}\sigma-\int_{L_1}(-2y)\mathrm{d}y=\iint_D 1\mathrm{d}\sigma+\int_{L_1}2y\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2-\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 1^2-\int_0^2 2y\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\pi}{2}-y^2\Big|_0^2$$

$$=\frac{\pi}{2}-4.$$

(20)（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

（I）计算行列式.

（II）当实数 a 为何值时，方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多解，并求其通解.

【解析】（I）$|A|=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=1-a^4=\left(1-a^2\right)\left(1+a^2\right)$

（II）由 $|A|=0$ 知 $a=1$ 或 $a=-1$.

当 $a=1$ 时，$(A\mid\beta)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&-2\end{array}\right)$

因为 $r(A)\neq r(A\mid\beta)$，所以 $Ax=\beta$ 无解，从而 $a=1$ 舍去.

当 $a=-1$ 时 $(A\mid\beta)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\-1&0&0&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$

所以 $Ax=\beta$ 的通解为 $x=k(0,0,1,1)^T+(0,-1,0,0)^T$， k 为任意常数.

(21)(本题满分 11 分)

已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^T(A^TA)x$ 的秩为 2.

(I) 求实数 a 的值;

(II) 求利用正交变换 $x=Qy$ 将 f 化为标准形.

【解析】

(I) 由二次型的秩为 2 知 $r\left(A^TA\right)=2$，故 $r\left(A\right)=r\left(A^TA\right)=2$，

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

当 $a=-1$ 时，$r\left(A\right)=2$.

(II) 令 $B=A^TA=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\-(\lambda-2)&\lambda-2&-2\\0&-2&\lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&0&-2\\-1&\lambda-2&-2\\0&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)=0.$$

所以 B 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=6$，$\lambda_3=0$.

解 $(2E-B)x=0$ 的基础解系为 $\alpha_1=(1,-1,0)^T$；解 $(6E-A)x=0$ 的基础解析为 $\alpha_2=(1,1,2)^T$；

解 $(0E-A)x=0$ 的基础解析为 $\alpha_3=(1,1,-1)^T$.

单位化得 $\beta_1=\frac{1}{\|\alpha_1\|}\alpha_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0)^T$，$\beta_2=\frac{1}{\|\alpha_2\|}\alpha_2=\frac{\sqrt{6}}{6}(1,1,2)^T$，$\beta_3=\frac{1}{\|\alpha_3\|}\alpha_3=\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,-1)^T$.

得正交矩阵 $Q=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$，对角矩阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 6 & \\ & & 0\end{pmatrix}$，则 $Q^TAQ=\Lambda$

因此，作正交变换 $x=Qy$，则二次型 f 的标准形为

$$f(x)=x^T\left(A^TA\right)x=y^T\Lambda y=2y_1^2+6y_2^2.$$

（22）（本题满分 11 分）

设二维离散型随机变量 X、Y 的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

（I）求 $P\{X=2Y\}$.

（II）求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$.

【解析】

（I）$P\{X=2Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$

（II）X 的概率分布为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

故 $E(X)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

XY 的概率分布为

XY	0	1	2	4
P	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{12}$

故 $E(XY)=0\cdot\frac{7}{12}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot 0+4\cdot\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$.

Y 的概率分布为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

故 $E(Y)=0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}=1$，从而，$E(Y^2)=0^2\cdot\frac{1}{3}+1^2\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$，

$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$，

故 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)=\mathrm{Cov}(X,Y)-\mathrm{Cov}(Y,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)-D(Y)=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cdot 1-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$.

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(u,\sigma^2)$ 与 $N(u,2\sigma^2)$，其中 σ 是未知参数且 $\sigma>0$。设 $Z=X-Y$.

(I)求 Z 的概率密度 $f(z;\sigma^2)$.

(II) 设 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本，求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$.

(III) 证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.

【解析】(I) $E(Z)=E(X-Y)=E(X)-E(Y)=0$；

$D(Z)=D(X-Y)=D(X)+D(Y)=3\sigma^2$；

因为 $X\sim N(\mu,\sigma^2), Y\sim N(\mu,2\sigma^2)$，且 X,Y 相互独立，所以 $Z=X-Y\sim N(0,3\sigma^2)$，则 Z 的概率密度为

$$f_Z(z,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{3}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\cdot 3\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}},-\infty<z<+\infty.$$

(II) 最大似然函数为

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(z_i;\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}e^{-\frac{z_i^2}{6\sigma^2}}\right),-\infty<z_i<+\infty(i=1,2,\ldots,n)$$

两边取对数，得

$$\ln L(\sigma^2)=\sum_{i=1}^{n}\left[-\ln\sqrt{6\pi}-\frac{1}{2}\ln\sigma^2-\frac{z_i^2}{6\sigma^2}\right]$$

对上式两边求导，得

$$\frac{d\ln L\left(\sigma^2\right)}{d\left(\sigma^2\right)}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{-1}{2\sigma^2}+\frac{z_i^2}{6\left(\sigma^2\right)^2}\right]=\frac{1}{6\left(\sigma^2\right)^2}\left[-3n\sigma^2+\sum_{i=1}^{n}z_i^2\right]$$

令 $\frac{d\ln L\left(\sigma^2\right)}{d\left(\sigma^2\right)}=0$，得 $\sigma^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$.

所以 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$.

（III）$E\left(\hat{\sigma}^2\right)=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}E\left(z_i^2\right)=\frac{1}{3n}\cdot nE\left(Z\right)=\frac{1}{3}\left[D\left(Z\right)+\left(E\left(Z\right)\right)^2\right]=\frac{1}{3}\left(3\sigma^2+0\right)=\sigma^2$.

所以 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计.