考生编号________

考生姓名________

报考单位________

密封线内不要答题

2011年考研数学(一)试题

考生注意事项

1. 答题前,考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内,写在其他地方无效。

3. 填(书)写必须使用蓝(黑)色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束,将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

得分	评卷人

一、选择题(1～8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.请将所选项前的字母填在题后括号内)

(1) 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是

(A)(1,0).　(B)(2,0).　(C)(3,0).　(D)(4,0).　【　】

(2) 设数列$\{a_n\}$单调减少,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(n=1,2,\cdots)$无界,则幂级数 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(x-1)^n$ 的收敛域是

(A)$(-1,1]$.　(B)$[-1,1)$.　(C)$[0,2)$.　(D)$(0,2]$.　【　】

(3) 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数,且 $f(x)>0,f'(0)=0$,则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点(0,0)处取得极小值的一个充分条件是

(A)$f(0)>1,f''(0)>0$.　(B)$f(0)>1,f''(0)<0$.

(C)$f(0)<1,f''(0)>0$.　(D)$f(0)<1,f''(0)<0$.　【　】

(4) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x,J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\mathrm{d}x,K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x$,则 I,J,K 的大小关

题号	一	二	三									总分
			15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分												
评卷人												

系为

(A) $I < J < K$.　　(B) $I < K < J$.

(C) $J < I < K$.　　(D) $K < J < I$.　　【　】

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第二列加到第一列得矩阵 $\boldsymbol{B}$，再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第二行与第三行得到单位矩阵，记 $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A} =$

(A) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$.　　(B) $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$.　　(C) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$.　　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$.　　【　】

(6) 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$ 是四阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，若 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系可为

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$.　　【　】

(7) 设 $F_1(x), F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x), f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是

(A) $f_1(x)f_2(x)$.　　(B) $2f_2(x)F_1(x)$.

(C) $f_1(x)F_2(x)$.　　(D) $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$.　　【　】

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 EX 与 EY 存在. 记 $U = \max\{X,Y\}$，$V = \min\{X,Y\}$ 则 $E(UV)$ 等于

(A) $EU \cdot EV$.　　(B) $EX \cdot EY$.

(C) $EU \cdot EY$.　　(D) $EX \cdot EV$.　　【　】

得分	评卷人

二、填空题(9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分. 请将答案写在题中横线上)

(9) 曲线 $y=\int_0^x \tan t\,\mathrm{d}t\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$ 的弧长 $s=$ ________.

(10) 微分方程 $y'+y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$ ________.

(11) 设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$,则 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$ ________.

(12) 设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线,从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向,则曲线积分 $\oint_L xz\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+\frac{y^2}{2}\mathrm{d}z=$ ________.

(13) 若二次曲面的方程 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$,经过正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$,则 $a=$ ________.

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$,则 $E(XY^2)=$

三、解答题(15 ~ 23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

得分	评卷人

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}$.

得分	评卷人

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $z = f(xy, g(x))$,其中函数 f 具有二阶连续偏导数,函数 $g(x)$ 可导且在 $x = 1$ 处取得极值 $g(1) = 1$,求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

得分	评卷人

(17)(本题满分 10 分)

求方程 $k\arctan x - x = 0$ 不同实根的个数,其中 k 为参数.

密 封 线 内 不 要 答 题

得分	评卷人

(18)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)证明：对任意正整数 n，都有 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ 成立；

(Ⅱ)设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\,(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

得分	评卷人

(19)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0, f(x,1)=0$，

$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$，

计算二重积分 $I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

得分	评卷人

(20)(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$,不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示.

(Ⅰ)求 a 的值.

(Ⅱ)将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

得分	评卷人

(21)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的秩为 2 且 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量.

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

得分	评卷人

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\{X^2 = Y^2\} = 1$.

(Ⅰ) 求二维随机变量(X,Y) 的概率分布;

(Ⅱ) 求 $Z = XY$ 的概率分布;

(Ⅲ) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

得分	评卷人

(23)(本题满分 11 分)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_0, \sigma^2)$ 的简单随机样本，其中 μ_0 已知，$\sigma^2 > 0$ 未知. $\overline{X}$ 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差.

(Ⅰ) 求参数 σ^2 的最大似然估计 $\hat{\sigma}^2$；

(Ⅱ) 计算 $E\hat{\sigma}^2$ 和 $D\hat{\sigma}^2$.

密封线内不要答题

2011年考研数学(一)
试题分析、详解及评注

一、选择题

(1) **应选(C)**

【分析】此题要求曲线的拐点,观察曲线方程,其为多项式,具有无限阶连续导数.此题可利用凹凸性和拐点的基本定义求解.也可利用曲线的图像求解.

【详解】在区间[1,2]上,$\dfrac{f(1)+f(2)}{2}=0$,而$f\left(\dfrac{1+2}{2}\right)<0$,从而$f(x)$为凹函数;

在[2,3]上,$\dfrac{f(2)+f(3)}{2}=0$,而$f\left(\dfrac{2+3}{2}\right)<0$,从而$f(x)$为凹函数;

在[3,4]上,$\dfrac{f(3)+f(4)}{2}=0$,而$f\left(\dfrac{3+4}{2}\right)>0$,从而$f(x)$为凸函数.

由拐点的定义知,(3,0)为曲线的拐点.

另解:此曲线零点有四个,分别为(1,0)、(2,0)、(3,0)、(4,0),在每个区间上函数的符号如下表所示.

$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,3)$	$(3,4)$	$(4,+\infty)$
+	−	−	+	+

其图像大体如图11-1所示.

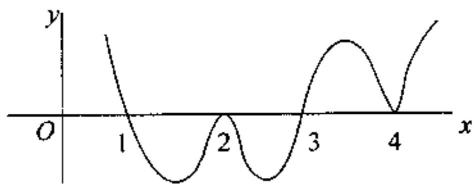

图11-1

从而,由图11-1可知,(3,0)为曲线的拐点,故[C]项入选.

【评注】此题考查一元连续可导函数的拐点的有关知识,为基本题型.

(2) **应选(C)**

【分析】利用幂级数收敛域的判定方法求解.

【详解】易知,幂级数$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(x-1)^k$的收敛中心为1,收敛半径为1,收敛区间为(0,2),下面判定此幂级数在区间端点处的敛散性.

当$x=0$时,原级数为$\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$,因为$\lim\limits_{k\to\infty}a_k=0$,所以此级数为交错级数.从而利用交错级数收敛的条件知,幂级数在$x=0$处收敛.

当$x=2$时,原级数为$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$,又因为由题设知$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$无界,所以幂级数在$x=2$处发散.

综上所述,幂级数的收敛域为[0,2).故选C.

【评注】此题求幂级数的收敛域,求幂级数收敛域的一般步骤如下:

(1) 首先将幂级数化为标准形式$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$.

(2) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$中至多只有有限个$a_n=0$,则收敛半径为$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_n+1}\right|$,或$R=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

(3) 代入 $x=\pm R$,考查 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nR^n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^na_nR^n$ 的收敛性.

类似题型参见《考研数学复习指南》(理工类,2012 版)P_{226} 例【8.21】.

(3) **应选(A)**

【分析】 利用二元可微函数取极值的充分条件求解此题.

【详解】 $z'_x=f'(x)\ln f(y)$, $z''_{xx}=f''(x)\ln f(y)$

$z'_y=f(x)\dfrac{f'(y)}{f(y)}$, $z''_{yy}=f(x)\left[\dfrac{f''(y)f(y)-(f'(y))^2}{f^2(y)}\right]$,

$z''_{xy}=f'(x)\dfrac{f'(y)}{f(y)}$.

从而 $A=z''_{xx}(0,0)=f''(0)\ln f(0)$,

$B=z''_{xy}(0,0)=f'(0)\dfrac{f'(0)}{f(0)}=0$,

$C=z''_{yy}(0,0)=f(0)\dfrac{f(0)f''(0)}{f^2(0)}$.

由函数取极值的充分条件知,$B^2-AC=f''^2(0)\ln f(0)<0$,$f''(0)\ln f(0)>0$,

从而有 $f(0)>1$ 且 $f''(0)>0$.

故应选(A)

【评注】 此题考查多元函数取极值的充分条件,为基本题型.类似例题参见《考研数学复习指南》(理工类,2012 版)P_{281} 例【10.31】.

(4) **应选(B)**

【分析】 利用定积分的比较性质求解此题,只需判断积分区间上被积函数的大小关系即可.

【详解】 被积函数中 $\ln x$ 为单调递增函数.

而当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$时,$\sin x<\cos x<\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x$.

从而由定积分的性质有 $\quad I<K<J$,

从而应选(B)

【评注】 此题为基础题型,考查定积分的性质(比较定理).类似,应用比较定理可对定积分进行估值计算,也可用来进行不等式的证明,类似题型见《考研数学复习指南》(理工类,2012 版)P_{93} 例【4.1】,例【4.2】.

(5) **应选(D)**

【分析】 利用矩阵初等变换的知识求解此题.

【详解】 由题意 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AP}_1$,$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$.

从而 $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{AP}_1=\boldsymbol{E}$.

$\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$.

从而知(D)项入选.

【评注】 本题考查矩阵初等变换的有关知识,注意左乘变行,右乘变列,是基础题型.类似题目见《考研数学复习指南》(理工类,2012 版)P_{389} 例【2.6】.

(6) **应选(D)**

【分析】 利用矩阵的伴随矩阵的性质和方程组基础解系的知识求解.

【详解】 由伴随矩阵性质有 $\quad\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

又因为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解,所以 $|\boldsymbol{A}|=0$,从而 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 都为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

又因为 $r(\boldsymbol{A})=3$. 从而 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$,从而 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系的秩为 3.

而由条件 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ 知,$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

从而,$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

由以上分析知(D) 项人选.

【评注】本题考查伴随矩阵和向量组相关性以及方程组基础解系的有关知识,为基础题型. 完全类似题目见《考研数学复习指南》(理工类,2012 版)P_{402} 例【2.35】.

(7) **应选**(D)

【分析】利用连续分布密度函数的性质求解此题,对每个选项验证其是否满足密度函数的性质,用排除法求解.

【详解】对选项(D),$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)\mathrm{d}x=F_1(x)F_2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=1.$

从而易知,四个选项均满足大于等于零的条件,从而(D) 项满足连续分布概率密度的条件,为概率密度(其他选项均无法验证满足实数轴上积分为 1 的条件). 从而 D 人选.

【评注】此题考查密度函数的性质,为基础题型.

若 x 为连续型随机变量,则其密度函数 $\varphi(x)$ 满足

(1)$\varphi(x)\geqslant 0$;

(2)$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=1$;

(3)$P(x_1<x\leqslant x_2)=\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)\mathrm{d}x$;

(4)$F'(x)=\varphi(x)$,x 为 $\varphi(x)$ 的连续点,分布函数 $F(x)=\int_{\infty}^{x}\varphi(x)\mathrm{d}x$.

类似例题参见《考研数学复习指南》(理工类,2012 版)P_{534} 例【2.5】.

(8) **应选**(B)

【分析】本题考查独立随机变量函数的数字特征,利用随机变量独立的性质计算.

【详解】$UV=\max\{X,Y\}\min\{X,Y\}$

而无论 X 与 Y 的关系如何,$UV=XY$.

从而 $EUV=EXY=EXEY$.

因此选(B).

【评注】本题为基础题型,要熟练掌握随机变量独立的有关性质.

二、填空题

(9) **应填** $\ln(1+\sqrt{2})$

【分析】本题考查定积分的计算,利用求曲线弧长的公式求解.

【详解】
$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+y'(x)^2}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sec x\mathrm{d}x\\&=\ln|\sec x+\tan x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln(1+\sqrt{2}).\end{aligned}$$

【评注】本题考查求曲线弧长的基本公式,属基本题型.

(10) **应填** $\mathrm{e}^{-x}\sin x$

【分析】此题考查一阶线性微分方程求特解的方法，可利用公式直接计算.

$y = e^{-\int 1dx}(C+\int e^{-x}\cos x e^{\int 1dx}dx) = e^{-x}(C+\sin x)$.

代入 $y(0)=0$，得 $C=0$，从而满足条件的特解为

$y = e^{-x}\sin x$.

【评注】此题属于基本题型，一阶微分方程的计算方法和公式可参见《考研数学复习指南》(理工类，2012 版)P_{155} 页表 6-5.

(11) 应填 4

【分析】此题考查变上限积分的求导和二元函数求偏导的知识，直接计算即可.

【详解】$F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}dt$.

从而$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\sin xy}{1+(xy)^2}\cdot y$,

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{x=0,y=2}=\left.\frac{y\cos xy(1+x^2y^2)+2xy^2\sin xy}{1+x^4y^4+2x^2y^2}\cdot y\right|_{x=0,y=2}=4.$$

【评注】此题为基本题型，考查变上限积分函数和二元函数求偏导的有关知识.

(12) 应填 π

【分析】此题考查曲线积分的计算方法，可分析积分曲线的特点，利用斯托克斯公式计算.

【详解】由斯托克斯公式：$\oint_L xz\,dx+x\,dy+\frac{y^2}{2}dz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xz & x & \frac{y^2}{2}\end{vmatrix}$

$=\iint_\Sigma y\,dydz+x\,dzdx+dxdy$,

其中 Σ 为 L 所围曲面上侧.

从而原式$=\iint_{D_{xy}}(1-x-y)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r(1-r(\cos\theta-\sin\theta))d\theta dr=\pi$.

【评注】此题为基本题型，考查斯托克斯公式，此知识点的详细说明见《考研数学复习指南》(理工类，2012 版)P_{322}.

(13) 应填 1

【分析】此题要求把二次型转化为标准二次型，利用正交化的基本方法求解此题.

【详解】二次型对应的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1 & a & 1\\ a & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$，求题设知矩阵 A 的秩为 2.

而 $A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0 & a-1 & 0\\ 0 & 3-a & 1-a\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，易知 $a=1$.

【评注】此题考查二次型化标准型的有关知识，属基本题型，完全类似题型可参见《考研数学复习指南》(理工类，2012 版)P_{493} 例【6.7】.

(14) 应填 $\mu(\sigma^2+\mu^2)$

【分析】利用二维正态随机变量的性质求随机变量函数的数学期望. 可用独立性简化求解过程.

【详解】由题设知$(X,Y) \sim N(\mu,\mu,\sigma^2,\sigma^2,0)$，
从而 X,Y 的相关系数为 0，所以，由二元正态分布的性质知，X,Y 独立，所以

$$\begin{aligned} E(XY^2) &= EXEY^2 \\ &= \mu[DY+(EY)^2] \\ &= \mu(\sigma^2+\mu^2). \end{aligned}$$

【评注】此题考查二维正态随机变量相关性和独立性的关系：对于二维正态随机变量 X,Y，其相关性与独立性等价. 注意公式 $EY^2 = DY+(EY)^2$ 的应用. 此题为基本题型.

三、解答题

(15)【分析】可先对 $y(x)$ 求对数，计算 $\ln(y)$ 的极限，进而得到 $y(x)$ 的极限. 对 $\ln(y)$ 求极限实际上是求 $\frac{0}{0}$ 型极限，利用等价无穷小代换和洛比达法则计算.

【解】记 $y=\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$. 当 $x>0$ 时，$\ln y = \frac{\ln[\ln(1+x)]-\ln x}{e^x-1}$，

$$\begin{aligned} \lim_{x\to0^+}\ln y &= \lim_{x\to0^+}\frac{\ln[\ln(1+x)]-\ln x}{e^x-1} \\ &= \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{(1+x)\ln(1+x)}-\frac{1}{x}}{1} \\ &= \lim_{x\to0^+}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x(1+x)\ln(1+x)} \\ &= \lim_{x\to0^+}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2} \\ &= \lim_{x\to0^+}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

当 $x<0$ 时，$\ln y = \frac{\ln[-\ln(1+x)]-\ln(-x)}{e^x-1}$，同样可得

$$\lim_{x\to0^-}\ln y = \lim_{x\to0^-}\frac{\ln[-\ln(1+x)]-\ln(-x)}{e^x-1} = -\frac{1}{2}.$$

综上可知，$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

【评注】本题考查 1^∞ 型未定式极限的计算. 还可以利用重要极限$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{1/x}=e$ 计算，这与先对 $y(x)$ 求对数再计算 $\ln(y)$ 的极限本质上是相同的. 本题属于基础题型，基本上历年都有涉及，需重点练习，熟练掌握. 读者可参阅《考研数学复习指南》(理工类，2012 版)P19 题型一中的多个例题进行这方面知识点的训练.

(16)【分析】求多元复合函数的混合偏导数，注意函数 $z=f(u,v)$ 对 x 和 y 求偏导时，$u=xy, v=yg(x)$ 都是 x 和 y 的函数，使用链式法则. 注意题中条件“函数 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值”，对于可导函数 $g(x)$ 而言，这意味着 $g'(1)=0$.

【解】由题意 $g'(1)=0$.

因为$\frac{\partial z}{\partial x} = yf'_1 + yg'(x)f'_2$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = f'_1 + y[xf''_{11}+g(x)f''_{12}] + g'(x)f'_2 + yg'(x)[xf''_{21}+g(x)f''_{22}],$$

所以

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = f'_1(1,1)+f''_{11}(1,1)+f''_{12}(1,1)$$

【评注】本题考查多元复合函数二阶混合偏导的求导方法，注意分析二元函数 $z = f(u,v)$ 中中间变量 u,v 是否仍为自变量 x 和 y 的函数，若是，需要再乘以 u,v 对 x,y 的偏导数. 本题中还涉及可导一元函数在某点取极值的知识点. 本题属于基本题型.

(17)【分析】首先判断函数 $f(x) = k\arctan x - x$ 的单调区间，然后在每个单调区间内利用介值定理判断是否存在根即可.

【解】令 $f(x) = k\arctan x - x$，则 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数，且

$$f(0) = 0, f'(x) = \frac{k-1-x^2}{1+x^2}.$$

当 $k-1 \leqslant 0$ 即 $k \leqslant 1$ 时，$f'(x) < 0 (x \neq 0)$，$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调减少，方程 $f(x) = 0$ 只有一个实根 $x = 0$.

当 $k-1 > 0$ 即 $k > 1$ 时，在 $(0, \sqrt{k-1})$ 内，$f'(x) > 0$，$f(x)$ 单调增加；在 $(\sqrt{k-1}, +\infty)$ 内，$f'(x) < 0$，$f(x)$ 单调减少，所以 $f(\sqrt{k-1})$ 是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的最大值.

由于 $f(0) = 0$，所以 $f(\sqrt{k-1}) > 0$.

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{k\arctan x}{x} - 1\right) = -\infty$，所以存在 $\xi \in (\sqrt{k-1}, +\infty)$，使得 $f(\xi) = 0$.

由 $f(x)$ 是奇函数及其单调性可知：当 $k > 1$ 时，方程 $f(x) = 0$ 有且仅有三个不同实根 $x = -\xi, x = 0, x = \xi$.

【评注】本题要求函数根的个数，考查了函数单调区间的判断和零点定理的应用. 要判断函数在某个区间上是否存在根，首先想到的就是零点定理. 如果函数在某个区间上严格单调，那么若有根的话，最多只有一个根. 本题所涉及知识点是基本知识点，属基础题型.

(18)【分析】本题(Ⅰ)是对不等式的证明，通过变形后可直接利用拉格朗日中值定理证明.(Ⅱ)以(Ⅰ)的条件为基础，利用单调有界数列必有极限的性质来证明数列 $\{a_n\}$ 收敛即可.

【证】(Ⅰ)根据拉格朗日中值定理，存在 $\xi \in (n, n+1)$，使得

$$\ln(1+\frac{1}{n}) = \ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{\xi},$$

所以 $\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{\xi} < \frac{1}{n}$.

(Ⅱ)当 $n \geqslant 1$ 时，由(Ⅰ)知

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln(1+\frac{1}{n}) < 0,$$

且

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln(1+1) + \ln(1+\frac{1}{2}) + \cdots + \ln(1+\frac{1}{n}) - \ln n$$
$$= \ln(1+n) - \ln n > 0,$$

所以数列 $\{a_n\}$ 单调下降且有下界，故 $\{a_n\}$ 收敛.

【评注】本题(Ⅰ)是不等式的证明. 不等式的证明方法很多《考研数学复习指南》(理工类，2012 版)P351 第 2 节专门列出了一节将不等式的证明中常用的方法分为六大类进行了汇总和详解. 考生可根据题目特点，灵活选取.

数列收敛的证明方法也有多种，用单调有界数列必有极限这个定理来证明数列收敛是最容易用也是最常用的方法，需重点掌握.

(19)【分析】本题为抽象函数的二重积分的求解，而且被积函数包括抽象函数的偏导数，可用分部积分法求解. 注意，因为函数 $f(1,y)$ 和 $f(x,1)$ 分别是关于 y 和 x 的常值函数，所以

$f'(1,Y)=0, f'_x(x,1)=0$. 以上这两点是解决本题的关键.

【解】因为 $f(1,y)=0, f(x,1)=0$，所以 $f'_y(1,y)=0, f'_x(x,1)=0$.

从而

$$I=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1 x\left[yf'_x(x,y)\Big|_{y=0}^{y=1}-\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$
$$=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 xf'_x(x,y)\mathrm{d}x$$
$$=-\int_0^1\left[xf(x,y)\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=a.$$

【评注】本题考查了二重积分计算，但本题是对抽象函数进行积分计算，不属于基础题型，但所涉及的知识点都是基本知识点. 分析此题我们发现，题目的条件中包括了 $f(1,y)$ 和 $f(x,1)$ 的函数值，和在整个区域 D 上函数 $f(x,y)$ 的二重积分值，这些信息提示我们使用分部积分法把所要求的二重积分转化为对 $f(x,y)$ 的二重积分的计算. 这种解题技巧需重点掌握.

(20)【分析】(Ⅰ)由题目条件知道，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，而它们都是三维向量，由任意 $n+1$ 和 $n+1$ 个以上的 n 维向量组必线性相关知，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_i$ 必线性相关，对 $i=1,2,3$.(Ⅱ)利用矩阵初等变换的基础知识求解.

【解】(Ⅰ)4个3维向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_i$ 线性相关 $(i=1,2,3)$，若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示 $(i=1,2,3)$，与题设矛盾. 于是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关，.

从而

$$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{bmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{bmatrix}=a-5=0.$$

于是　$a=5$. 此时，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示.

(Ⅱ)令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\vdots\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$. 对 $\boldsymbol{A}$ 施以初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right),$$

从而

$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$，　$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，　$\boldsymbol{\beta}_3=5\boldsymbol{\alpha}_1+10\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$.

【评注】本题(Ⅰ)考查已知向量组线性相关性反求其中参数，属常考知识点. 本题(Ⅱ)考查将某一向量组用另一向量组线性表示的知识，属于基本题型，需熟练重点掌握.

(21)【分析】(Ⅰ)利用所给信息求矩阵的特征值和特征向量. 注意，由于三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为2，所以 $\boldsymbol{A}$ 必有一个特征值为0.(Ⅱ)在(Ⅰ)中已经求出了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量，直接利用此计算即可.

【解】(1) 由于 $\boldsymbol{A}$ 的秩为2，故0是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值. 由题设可得

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

所以，-1是A的一个特征值，且属于-1的特征向量为$k_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$k_1$为任意非零常数；

1 也是 A 的一个特征值，且属于 1 的特征向量为 $k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$k_2$ 为任意非零常数. 设 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 是 A 的属于 0 的特征向量，由于 A 为实对称矩阵，则

$$(1,0,-1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,\quad (1,0,1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,$$

即$\begin{cases}x_1-x_3=0,\\x_1+x_3=0,\end{cases}$

于是属于 0 的特征向量为 $k_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$k_3$ 为任意非零常数.

(Ⅱ) 令 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

于是

$$A=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

【评注】本题考查求解矩阵的特征值和特征向量的知识，实对称矩阵必可对角化，对角化的矩阵的对角线元素即为矩阵的特征值，而变换所用矩阵则由特征值对应的特征向量组成. 本题所涉及知识点都是常考知识点，本题属于基本题型.

(22)**【分析】**(Ⅰ) 利用随机变量 X 和 Y 的概率分布给出随机变量(X,Y)的联合概率分布. 注意到 $P\{X^2=Y^2\}=1$，从而 $P\{X^2\neq Y^2\}=0$. 然后利用

$$P\{X=0\}=P\{X=0,Y=-1\}+P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}$$

求出 $P\{X=0,Y=0\}$，依此类推，求出 $P\{X=1,Y=-1\}$，$P\{X=1,Y=1\}$ 的概率即可.

(Ⅱ) 写出 $Z=XY$ 的所有可能取值，然后由(Ⅰ) 的结果直接计算即可. (Ⅲ) 由(Ⅰ) 和 (Ⅱ) 中求出的 X 和 Y 的联合分布以及 Z 的分布直接利用公式计算相关系数即可.

【解】(Ⅰ) 由 $P\{X^2=Y^2\}=1$ 得 $P\{X^2\neq Y^2\}=0$，所以

$$P\{X=0,Y=-1\}=P\{X=0,Y=1\}=P\{X=1,Y=0\}=0$$

故(X,Y)的概率分布为

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

(Ⅱ)$Z=XY$的可能取值为$-1,0,1$.由(X,Y)的概率分布可得Z的概率分布为

Z	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(Ⅲ)由X,Y及Z的概率分布得

$$EX=\frac{2}{3},DX=\frac{2}{9},EY=0,DY=\frac{2}{3},EZ=E(XY)=0,$$

故有　$\mathrm{Cov}(X,Y)=0,\rho_{XY}=0.$

【评注】本题(Ⅰ)已知两个随机变量的分布,求其联合分布,属于基本题型.(Ⅱ)考查二维随机变量函数的概率分布的计算方法,也是基本题型.(Ⅲ)考查两随机变量的相关系数的计算公式$\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DXDY}}=\dfrac{EXEY-EXY}{\sqrt{DXDY}}$.这类题属于常考的重点题型,考生可参阅《考研数学复习指南》(理工类,2012版)P551题型六中的多个例题加以练习,熟练掌握.

(23)**【分析】**(Ⅰ)写出似然函数,求出参数σ^2的最大似然估计.(Ⅱ)利用(Ⅰ)的结果,求统计量的数字特征.可通过分析统计量所满足的分布族的特征考虑直接利用已知结果计算,也可利用样本独立同分布的性质直接求统计量的数字特征.

【解】(Ⅰ)设$x_1,x_2,\cdots,x_n$为样本观测值,则似然函数

$$L(\sigma^2)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2},$$

$$\ln L(\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2.$$

令$\dfrac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}(\sigma^2)}=0$,得

$$-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2=0,$$

从而得σ^2的最大似然估计

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2.$$

(Ⅱ)解法1　由于$\dfrac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$,

所以 $E\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \cdot n = \sigma^2$，$D\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma^4}{n^2} \cdot 2n = \frac{2\sigma^2}{n}$.

解法 2 $E\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i - \mu_0)^2 = \sigma^2$.

$$D\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i - \mu_0)^2 = \frac{1}{n}D(X_1 - \mu_0)^2$$

$$= \frac{\sigma^4}{n}D\left(\frac{X_1 - \mu_0}{\sigma}\right)^2 = \frac{2\sigma^4}{n}.$$

【评注】本题(Ⅰ)考查参数的最大似然估计的计算方法，属于基本且常考的题型，需重点掌握. 读者可参阅《考研数学复习指南》(理工类，2012 版)P617 题型一中的例题进行这方面知识点的重点训练.(Ⅱ)求解估计量的数字特征，也就是考查统计量数字特征的计算方法，这也是基本的知识点的考查，属基础题型，有关该知识点的详细介绍和例题可参阅《考研数学复习指南》(理工类，2012 版)P607 题型一.