2013 线性代数考研题

1．(13-1,2,3-04) 设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，且 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则(　).

(A) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价

(B) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价

(C) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价

(D) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价

解　应选(B).

由 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 知 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示．又 $\boldsymbol{B}$ 可逆，故有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{CB}^{-1}$，从而 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组线性表示．根据向量组等价的定义知应选(B).

2．(13-1,2,3-04)矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为(　).

(A) $a=0$，$b=2$　　(B) $a=0$，b 为任意常数

(C) $a=2$，$b=0$　　(D) $a=2$，b 为任意常数

解　应选(B).

由于 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 为实对称矩阵，故一定可相似于对角矩阵，从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,b,0$．由于

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}1-\lambda&a&1\\a&b-\lambda&a\\1&a&1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\mathrm{r}_1+\mathrm{r}_3}\begin{vmatrix}2-\lambda&2a&2-\lambda\\a&b-\lambda&a\\1&a&1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\mathrm{c}_3-\mathrm{c}_1}\begin{vmatrix}2-\lambda&2a&0\\a&b-\lambda&0\\1&a&-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-\lambda\begin{vmatrix}2-\lambda&2a\\a&b-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda[(2-\lambda)(b-\lambda)-2a^2]$$

从而 $a=0$，b 为任意常数，即应选(B).

3．(13-1,2,3-04) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是三阶非零矩阵，$|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij}+A_{ij}=0\ (i,j=1,2,3)$，则 $|\boldsymbol{A}|=$_____.

解　应填 -1.

由 $a_{ij}+A_{ij}=0\ (i,j=1,2,3)$ 可知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}^*$，和

$$|\boldsymbol{A}|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=-a_{i1}^2-a_{i2}^2-a_{i3}^2<0$$

利用 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{AA}^*=-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 得 $|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}|=|-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}|=(-|\boldsymbol{A}|)^3|\boldsymbol{E}|=-|\boldsymbol{A}|^3$，从而 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

4．(13-1,2,3-11) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

解　由题意知 $\boldsymbol{C}$ 为 2 阶矩阵，故可设 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$．由 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$ 得线性方程组

$$\begin{cases} -x_2 + ax_3 = 0 \\ -ax_1 + x_2 + ax_4 = 1 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - ax_3 = b \end{cases} \qquad (1)$$

增广矩阵

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right)$$

由于线性方程组(1)有解，所以$1+a=0, b=0$，故$a=-1, b=0$．代入上式得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_3 + x_4 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

通解为　　$x_1 = 1 + k_1 + k_2$，$x_2 = -k_1$，$x_3 = k_1$，$x_4 = k_2$　k_1, k_2任意

故　　$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1+k_1+k_2 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + k_1\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　　k_1, k_2任意

5．(13-1,2,3-11)设二次型$f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$，记

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

(1) 证明二次型f对应的矩阵为$2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$．

(2) 若$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$正交且均为单位向量，证明二次型$f$在正交变换下的标准形为$2y_1^2 + y_2^2$．

解　(1) 展开二次型f并整理得

$$\begin{aligned} f &= (2a_1^2 + b_1^2)x_1^2 + (2a_2^2 + b_2^2)x_2^2 + (2a_3^2 + b_3^2)x_3^2 \\ &\quad + (4a_1a_2 + 2b_1b_2)x_1x_2 + (4a_1a_3 + 2b_1b_3)x_1x_3 + (4a_2a_3 + 2b_2b_3)x_2x_3 \end{aligned}$$

故二次型f对应的矩阵为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \begin{pmatrix} 2a_1^2 + b_1^2 & 2a_1a_2 + b_1b_2 & 2a_1a_3 + b_1b_3 \\ 2a_1a_2 + b_1b_2 & 2a_2^2 + b_2^2 & 2a_2a_3 + b_2b_3 \\ 2a_1a_3 + b_1b_3 & 2a_2a_3 + b_2b_3 & 2a_2^2 + b_2^2 \end{pmatrix} \\ &= 2\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ b_1b_2 & b_2^2 & b_2b_3 \\ b_1b_3 & b_2b_3 & b_2^2 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

(2) 注意到$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 1, \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 0, \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 1$，从而有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha}, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}$$

即 2 和 1 是$\boldsymbol{A}$的特征值．又由于

$$r(\boldsymbol{A}) = r(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) \le r(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) + r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) = 2$$

所以 0 为$\boldsymbol{A}$的特征值，故三阶矩阵$\boldsymbol{A}$的全部特征值 2,1,0，从而f在正交变换下的标准形为$2y_1^2 + y_2^2$．