



## 1. Линейные разностные и функциональные уравнения с одной независимой переменной

### 1.1. Линейные разностные и функциональные уравнения, содержащие неизвестную функцию с двумя различными аргументами

#### Линейные разностные уравнения первого порядка.

1.  $y(x+1) - ay(x) = 0$ .

Линейное однородное разностное уравнение с постоянными коэффициентами первого порядка.

2.  $y(x+1) - ay(x) = f(x)$ .

Линейное неоднородное разностное уравнение с постоянными коэффициентами первого порядка.

3.  $y(x+1) - xy(x) = 0$ .

4.  $y(x+1) - a(x-b)(x-c)y(x) = 0$ .

5.  $y(x+1) - R(x)y(x) = 0, \quad R(x) = a \frac{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_n)}{(x-\mu_1)(x-\mu_2)\dots(x-\mu_m)}.$

6.  $y(x+1) - f(x)y(x) = 0$ .

7.  $y(x+a) - by(x) = 0$ .

8.  $y(x+a) - by(x) = f(x)$ .

9.  $y(x+a) - bxy(x) = 0, \quad a, b > 0$ .

10.  $y(x+a) - f(x)y(x) = 0$ .

#### Линейные функциональные уравнения, содержащие $y(x)$ и $y(ax)$ .

11.  $y(ax) - by(x) = 0, \quad a, b > 0$ .

12.  $y(ax) - by(x) = f(x)$ .

#### Линейные функциональные уравнения, содержащие $y(x)$ и $y(a-x)$ .

13.  $y(x) - y(a-x) = 0$ .

14.  $y(x) + y(a-x) = 0$ .

15.  $y(x) + y(a-x) = b$ .

16.  $y(x) + y(a-x) = f(x)$ .

17.  $y(x) - y(a-x) = f(x)$ .

18.  $y(x) + g(x)y(a-x) = f(x)$ .

**Линейные функциональные уравнения, содержащие  $y(x)$  и  $y(z)$ , где  $z = \varphi(x)$ .**

19.  $y(x^a) - by(x) = 0, \quad a, b > 0.$
20.  $y(x) - y(a/x) = 0.$
21.  $y(x) + y(a/x) = 0.$
22.  $y(x) + y(a/x) = b.$
23.  $y(x) + y(a/x) = f(x).$
24.  $y(x) - y(a/x) = f(x).$
25.  $y(x) + g(x)y(a/x) = f(x).$
26.  $y(x) - y\left(\frac{a-x}{1+bx}\right) = 0.$
27.  $y(x) + y\left(\frac{a-x}{1+bx}\right) = 0.$
28.  $y(x) + y\left(\frac{a-x}{1+bx}\right) = f(x).$
29.  $y(x) - y\left(\frac{a-x}{1+bx}\right) = f(x).$
30.  $y(x) - cy\left(\frac{a-x}{1+bx}\right) = f(x), \quad c \neq \pm 1.$
31.  $y(x) + g(x)y\left(\frac{a-x}{1+bx}\right) = f(x).$
32.  $y(x) + cy\left(\frac{ax-\beta}{x+b}\right) = f(x), \quad \beta = a^2 + ab + b^2.$
33.  $y(x) + cy\left(\frac{bx+\beta}{a-x}\right) = f(x), \quad \beta = a^2 + ab + b^2.$
34.  $y(x) + g(x)y\left(\frac{ax-\beta}{x+b}\right) = f(x), \quad \beta = a^2 + ab + b^2.$
35.  $y(x) + g(x)y\left(\frac{bx+\beta}{a-x}\right) = f(x), \quad \beta = a^2 + ab + b^2.$
36.  $y(x) - y(\sqrt{a^2 - x^2}) = 0, \quad 0 \leq x \leq a.$
37.  $y(x) + y(\sqrt{a^2 - x^2}) = 0, \quad 0 \leq x \leq a.$
38.  $y(x) + y(\sqrt{a^2 - x^2}) = b, \quad 0 \leq x \leq a.$
39.  $y(x) + y(\sqrt{a^2 - x^2}) = f(x), \quad 0 \leq x \leq a.$
40.  $y(x) - y(\sqrt{a^2 - x^2}) = f(x), \quad 0 \leq x \leq a.$
41.  $y(x) + g(x)y(\sqrt{a^2 - x^2}) = f(x), \quad 0 \leq x \leq a.$

**Линейные функциональные уравнения, содержащие  $y(\sin x)$  и  $y(\cos x)$ .**

42.  $y(\sin x) - y(\cos x) = 0.$
43.  $y(\sin x) + y(\cos x) = 0.$
44.  $y(\sin x) + y(\cos x) = a.$
45.  $y(\sin x) + y(\cos x) = f(x).$
46.  $y(\sin x) - y(\cos x) = f(x).$
47.  $y(\sin x) + g(x)y(\cos x) = f(x).$

**Линейные функциональные уравнения, содержащие  $y(x)$  и  $y(\omega(x))$ , где  $\omega(\omega(x)) = x$ .**

48.  $y(x) - y(\omega(x)) = 0,$  where  $\omega(\omega(x)) = x.$
49.  $y(x) + y(\omega(x)) = 0,$  where  $\omega(\omega(x)) = x.$
50.  $y(x) + y(\omega(x)) = b,$  where  $\omega(\omega(x)) = x.$
51.  $y(x) + y(\omega(x)) = f(x),$  where  $\omega(\omega(x)) = x.$
52.  $y(x) - y(\omega(x)) = f(x),$  where  $\omega(\omega(x)) = x.$
53.  $y(x) + g(x)y(\omega(x)) = f(x),$  where  $\omega(\omega(x)) = x.$

## 1.2. Другие линейные разностные и функциональные уравнения

**Линейные разностные уравнения второго порядка,  $y_n = y(n)$ .**

1.  $y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = 0.$   
*Линейное однородное разностное уравнение с постоянными коэффициентами второго порядка.*
2.  $y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = f_n.$   
*Линейное неоднородное разностное уравнение с постоянными коэффициентами второго порядка.*
3.  $y(x+2) + ay(x+1) + by(x) = 0.$   
*Линейное однородное разностное уравнение с постоянными коэффициентами второго порядка.*
4.  $y(x+2) + ay(x+1) + by(x) = f(x).$   
*Линейное неоднородное разностное уравнение с постоянными коэффициентами второго порядка.*
5.  $y(x+2) + a(x+1)y(x+1) + bx(x+1)y(x) = 0.$

**Другие функциональные уравнения.**

6.  $Ay(ax) + By(bx) + y(x) = 0.$

7.  $Ay(x^a) + By(x^b) + y(x) = 0.$
8.  $y(y(x)) - x = 0.$
9.  $y(y(x)) + ay(x) + bx = 0.$
10.  $y(y(y(x))) - x = 0.$
11.  $Ay(x) + By\left(\frac{ax - \beta}{x + b}\right) + Cy\left(\frac{bx + \beta}{a - x}\right) = f(x), \quad \beta = a^2 + ab + b^2.$
12.  $f_1(x)y(x) + f_2(x)y\left(\frac{ax - \beta}{x + b}\right) + f_3(x)y\left(\frac{bx + \beta}{a - x}\right) = g(x), \quad \beta = a^2 + ab + b^2.$
13.  $y_{n+m} + a_{m-1}y_{n+m-1} + \dots + a_1y_{n+1} + a_0y_n = 0.$   
*Линейное однородное разностное уравнение с постоянными коэффициентами  $m$ -го порядка.*
14.  $y_{n+m} + a_{m-1}y_{n+m-1} + \dots + a_1y_{n+1} + a_0y_n = f_n.$   
*Линейное неоднородное разностное уравнение с постоянными коэффициентами  $m$ -го порядка.*
15.  $y(x + n) + a_{n-1}y(x + n - 1) + \dots + a_1y(x + 1) + a_0y(x) = 0.$   
*Линейное однородное разностное уравнение с постоянными коэффициентами  $n$ -го порядка.*
16.  $y(x + n) + a_{n-1}y(x + n - 1) + \dots + a_1y(x + 1) + a_0y(x) = f(x).$   
*Линейное неоднородное разностное уравнение с постоянными коэффициентами  $n$ -го порядка.*
17.  $y(x + b_n) + a_{n-1}y(x + b_{n-1}) + \dots + a_1y(x + b_1) + a_0y(x) = 0.$
18.  $y(x^{a_n}) + b_{n-1}y(x^{a_{n-1}}) + \dots + b_1y(x^{a_1}) + b_0y(x) = 0.$
19.  $y(a_nx) + b_{n-1}y(a_{n-1}x) + \dots + b_1y(a_1x) + b_0y(x) = 0.$
20.  $y^{[n]}(x) + a_{n-1}y^{[n-1]}(x) + \dots + a_1y(x) + a_0x = 0, \quad y^{[n]}(x) = y(y^{[n-1]}(x)).$

Веб-сайт [EqWorld](http://EqWorld.com) содержит обширную информацию о решениях различных классов обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных, интегральных уравнений, функциональных уравнений и других математических уравнений.