УДК 517.9

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ

© 1994 г. А. Д. Полянин, А. И. Журов Представлено академиком Д.М. Климовым 25.01.94 г.

Поступило 27.01.94 г.

Предлагается алгебраический метод поиска точных аналитических решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (систем уравнений) и связанных с ними уравнений нелинейной механики. Метод основан на непосредственном задании структуры решения в параметрическом виде с учетом зависимости от произвольных постоянных, ряда неопределенных параметров и функций, которые находятся далее из дифференциальных уравнений методами компьютерной алгебры [1]. Приведены конкретные примеры, иллюстрирующие возможности предложенного метода. Указанный подход позволяет найти новые интегрируемые уравнения, которые не удается решить другими [2 - 6] методами.

1. Предварительные замечания. Обыкновенных дифференциальных уравнений, точное аналитическое (общее) решение которых можно записать в явном виде $(C_1, C_2, ..., C_n$ – провзвольные постоянные)

$$y = y(x; C_1, ..., C_n)$$
 (1)

или

$$x = x(y; C_1, ..., C_n),$$
 (2)

известно сравнительно немного [2, 3]. Решения вида (1) имеют, например, достаточно простые и хорошо изученные линейные уравнения, уравнение Бернулли и др.

Гораздо больше существует уравнений, точное аналитическое решение которых можно представить в параметрическом виде

$$x = x(t; C_1, ..., C_n), y = y(t; C_1, ..., C_n).$$
 (3)

Такие решения, например, в ряде случаев имеют уравнения Абеля, уравнения Эмдена—Фаулера, уравнения теории горения и теории химических реакторов, уравнения тепломассопереноса, уравнения пограничного слоя неньютоновской жидкости и др. [5, 6].

2. Описание алгебраического метода. Будем искать общее решение некоторого семейства дифференциальных уравнений полиномиального типа (коэффициенты которых являются полиномами относительно зависимой и независимой переменных), которые описываются "свободными" параметрами А,. Решение будем задавать в параметрической форме; оно должно содержать параметр t, произвольные постоянные интегрирования $C_1, C_2, ..., C_n$ и "неопределенные" коэффициенты $a_m, b_m, m = 1, 2, ..., M$. Анализ конкретных результатов, приведенных в книгах [5, 6], показывает, что решение целесообразно искать в виде полиномов (которые могут содержать дробные степени) или отношений полиномов относительно произвольных постоянных $C_1, ..., C_n$

Для наглядности ограничимся далее случаем уравнения первого порядка. Зависимость решения от параметра *t* будем задавать в виде

$$x = x(f_1, ..., f_k; C)$$
, $y = y(f_1, ..., f_k; C)$ (4)

с помощью набора некоторых функций $f_i = f_i(t)$, подлежащих определению в ходе исследования. (Зависимость x и y от a_m и b_m для простоты не указана.) Структура правых частей в (4) по f_i и C задается априорно (например, x и y линейны относительно функций f_i и степенным образом зависят от C; см. пример). Подставляя решение (4) в исходное уравнение и выделяя члены при одинаковых степенях постоянной C, получим

$$\sum_{n} C^{n} \left(\sum_{l} K_{nl} \Psi_{nl} \right) = 0, \tag{5}$$

где $K_{nl} = K_{nl}(A_s, a_m, b_m)$ не зависят от f_i и C, а Ψ_{nl} зависят от функций f_i и их производных. Функции f_i выбираются из условия, чтобы в выражении (5) осталось как можно меньше линейно независимых Ψ_{nl} . Если все Ψ_{nl} линейно независимы, то для удовлетворения (5) следует решить определяющую систему

$$K_n(A_s, a_m, b_m) = 0.$$
 (6)

Для решения системы (6), в которую может входить значительное число неизвестных, удобно использовать методы компьютерной алгебры [1]. При этом целесообразно величины, входящие в (6) линейным образом, считать искомыми и выразить их через остальные (которые могут входить нелинейно).

3. Конкретные примеры. Для иллюстрации эффективности описанного метода, рассмотрим следующее 10-параметрическое нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$(A_{22}y^2 + A_{12}xy + A_{11}x^2 + A_2y + A_1x) y'_x =$$

$$= B_{22}x^2 + B_{12}xy + B_{11}y^2 + B_2x + B_1y,$$
(7)

которое часто встречается в теории динамических систем второго порядка [7 - 9]. Важно отметить также, что уравнение (7) несколькими различными способами может быть сведено к уравнениям Абеля второго рода и связанным с ними уравнениям теории горения, теории химических реакторов и теории нелинейных колебаний [5, 6].

Решение ищем в параметрическом виде

$$x = a_1(C^m f(t) + a_2 Cg(t)), y = b_1 C^m f(t) + b_2 Cg(t),$$
 (8)

где C — произвольная постоянная; функции f и g, значения параметра m и "неопределенные" коэффициенты a_1 , a_2 , b_1 , b_2 подлежат определению в ходе решения задачи.

Подставим выражения (8) в уравнение (7) с учетом равенства $y'_x = y'_t/x'_t$. После выделения членов при одинаковых степенях постоянной интегрирования C получим

$$K_{1}C^{3m}\phi_{1} + C^{2m+1}(K_{2}\phi_{2} + K_{3}\phi_{3}) + K_{4}C^{2m}\phi_{4} +$$

$$+ C^{m+2}(K_{5}\phi_{5} + K_{6}\phi_{6}) + C^{m+1}(K_{7}\phi_{7} + K_{8}\phi_{8}) +$$

$$+ K_{9}C^{3}\phi_{9} + K_{10}C^{2}\phi_{10} = 0.$$
(9)

Здесь коэффициенты $K_i = K_i(A_{ij}, B_{ij}; A_i, B_i; a_1, a_2; b_1, b_2)$ не зависят от C и t и линейны относительно параметров $A_{ij}, B_{ij}; A_i, B_i$ уравнения (7), а функции $\phi_i = \phi_i(t)$ выражаются через f, g следующим образом (штрих обозначает производную по t):

$$\phi_1 = f^2 f', \quad \phi_2 = f^2 g', \quad \phi_3 = gff', \quad \phi_4 = ff',$$
 $\phi_5 = fgg', \quad \phi_6 = g^2 f', \quad \phi_7 = fg', \quad \phi_8 = gf', \quad (10)$
 $\phi_9 = g^2 g', \quad \phi_{10} = gg'.$

Если все функции ϕ_i линейно независимы, то для удовлетворения (9) следует положить $K_i = 0$, i = 1, 2, ..., 10. Получится система из 10 линейных однородных уравнений относительно 10 неизвестных A_{ij} , B_{ij} , A_i , B_i , которая в невырожденном случае имеет только тривиальное (нулевое) решение. Равенство (9) допускает нетривиальное решение (относительно A_{ij} , B_{ij} ; A_i , B_i), если хотя

бы две функции ϕ_i и ϕ_j , стоящие при одинаковых степенях C, будут линейно зависимы (в этом случае уравнений будет меньше, чем неизвестных).

Например, для m = 3/2 в (9) при C^3 стоят функции ϕ_4 и ϕ_9 . Накладывая условие пропорциональности ϕ_4 = const ϕ_9 , с учетом выражений (10) получим уравнение для f и g: ff' = const g^2g' . Интегрируя, имеем $f^2 = \alpha g^3 + \beta$, где α , β – произвольные постоянные. Без ограничения общности можно положить $f = \sqrt{\alpha g^3 + \beta}$, g = t (одну из функций f или g всегда за счет перепараметризации можно взять равной t, если $f'g' \neq 0$). Перебирая значения параметра m и считая линейно зависимыми (пропорциональными) другие функции ϕ_i при одинаковых степенях параметра C, получим другие уравнения для определения f и g. Результаты такого анализа приведены ниже в табл. 1 (наиболее громоздкие формулы опущены).

Рассмотрим подробнее первый случай в табл. 1, который в силу (7) соответствует решению вида

$$x = a_n t^n + a_1 C t, \quad y = b_n t^n + b_1 C t,$$
 (11)

где n, a_n , a_1 , b_n , b_1 — "неопределенные" коэффициенты. Подставим выражения (11) в уравнение (7). После выделения членов при одинаковых степенях параметра t и постоянной интегрирования C получим

$$\begin{split} \Lambda_{3n-1}t^{3n-1} + \Lambda_{2n}Ct^{2n} + \Lambda_{2n-1}t^{2n-1} + \Lambda_{n+1}C^2t^{n+1} + \\ + \Lambda_nCt^n + \Lambda_2C^3t^2 + \Lambda_1C^2t = 0, \end{split} \tag{12}$$

где коэффициенты $\Lambda_k = \Lambda_k(A_{ij}, B_{ij}; A_i, B_i; a_n, a_1; b_n, b_1; n)$ имеют следующий вид:

$$\Lambda_{3n-1} = n \left(b_n^3 A_{22} + b_n^2 a_n A_{12} + b_n a_n^2 A_{11} - a_n^3 B_{22} - a_n^2 b_n B_{12} - a_n b_n^2 B_{11} \right),$$

$$\Lambda_{2n} = b_n^2 b_1 \left(2n + 1 \right) A_{22} + a_n \left(a_n b_1 + 2n a_1 b_n \right) A_{11} + b_n \left[\left(n + 1 \right) a_n b_1 + n a_1 b_n \right] A_{12} - a_n^2 a_1 \left(2n + 1 \right) B_{22} - b_n \left(b_n a_1 + 2b_1 a_n n \right) B_{11} - a_n \left[\left(n + 1 \right) b_n a_1 + n b_1 a_n \right] B_{12}, \tag{13}$$

$$\begin{split} &\Lambda_{2n-1} = n \left(b_n^2 A_2 + b_n a_n A_1 - a_n^2 B_2 - a_n b_n B_1 \right), \Lambda_{n+1} = \\ &= b_n b_1^2 \left(n + 2 \right) A_{22} + a_1 \left(n a_1 b_n + 2 a_n b_1 \right) A_{11} + \\ &+ b_1 \left[a_n b_1 + (n+1) a_1 b_n \right] A_{12} - a_1^2 a_n (n+2) B_{22} - \\ &- b_1 \left(n b_1 a_n + 2 b_n a_1 \right) B_{11} - a_1 \left[b_n a_1 + (n+1) b_1 a_n \right] B_{12}, \\ &\Lambda_n = (n+1) b_n b_1 A_2 + \left(a_n b_1 + n a_1 b_n \right) A_1 - \\ &- \left(n + 1 \right) a_n a_1 B_2 - \left(b_n a_1 + n b_1 a_n \right) B_1, \\ &\Lambda_2 = b_1^3 A_{22} + b_1^2 a_1 A_{12} + b_1 a_1^2 A_{11} - \end{split}$$

Таблица 1. Показатели m и функции f и g, при которых уравнение (7) допускает решение вида (8)

№	m	f	g
1	0	t ⁿ	t
2	0	ln t	t
3	0	1/ln <i>t</i>	t
4	0	$t^n + \beta$	t
5	0	t	$ t ^n \alpha t + \beta ^k$
6	1	t ⁿ	t
7	1	$tP_{\alpha}^{n}P_{\beta}^{k}$	$P_{\alpha}^{n}P_{\beta}^{k}$
8	1	$tQ_2^n\psi(t)$	$Q_2^n \psi(t)$
9	3/2	t	$(\alpha t^3 + \beta)^{1/2}$
10	2	t	$(\alpha t^n + \beta t)^{1/2}$
11	2	$t^n + \beta t^2$	t

Примечание. $P_{\alpha} = |\alpha_1 t + \alpha_0|$, $P_{\beta} = |\beta_1 t + \beta_0|$, $Q_2 = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$, $\psi(t) = \exp\left(k \arctan \frac{2\alpha t + \beta}{\Delta^{1/2}}\right)$, $\Delta = 4\alpha \gamma - \beta^2 > 0$.

$$-a_1^3B_{22}-a_1^2b_1B_{12}-a_1b_1^2B_{11},$$

$$\Lambda_1=b_1^2A_2+b_1a_1A_1-a_1^2B_2-a_1b_1B_1.$$

Определяющая система в данном случае состойт из 7 уравнений

$$\Lambda_k(A_{ij}, B_{ij}; A_i, B_i; a_n, a_1; b_n, b_1; n) = 0,$$
 (14) которые линейны относительно коэффициентов уравнения (7) A_{ij}, B_{ij}, A_i, B_i (это видно из равенств (13)).

Считая параметры A_{22} , B_{22} , A_2 , a_n , a_1 , b_n , b_1 , n произвольными, решим систему (14) относительно остальных параметров A_{12} , A_{11} , B_{12} , B_{11} , A_1 , B_1 , B_2 методами компьютерной алгебры, используя символьные вычисления на ЭВМ с помощью системы Reduce [1]. Вместо A_{22} , B_{22} и A_2 введем параметры p, q и r так, чтобы решение принимало более простой вид. В результате получим

$$A_{22} = (n-1) a_1 a_n p,$$

$$A_{12} = (a_1 b_n - n a_n b_1) p - (n-1) a_1 a_n q,$$

$$A_{11} = (n a_n b_1 - a_1 b_n) q, \quad A_2 = (n-1) a_1 a_n r,$$

$$A_1 = (a_1 b_n - n a_n b_1) r, \quad B_{22} = (n-1) b_1 b_n q, \quad (15)$$

$$B_{12} = -(n-1) b_1 b_n p + (b_1 a_n - n b_n a_1) q,$$

$$B_{11} = (n b_n a_1 - b_1 a_n) p, \quad B_2 = -(n-1) b_1 b_n r,$$

$$B_1 = -(b_1 a_n - n b_n a_1) r.$$

Формулы (15) определяют 8-параметрическое семейство нелинейных дифференциальных уравнений (6) с произвольными параметрами p, q, r, a_1 , b_n , b_1 , n, которое допускает аналитическое решение в виде (11), где C – произвольная постоянная.

Для иллюстрации метода приведем еще итоговые результаты, соответствующие случаям 2, 3, 9 и 11 в табл. 1.

При

$$A_{22}=a_1a_2p, \quad A_{12}=-b_1a_2p-a_1a_2q, \quad A_{11}=b_1a_2q,$$
 $A_2=a_1\left(a_1b_2-a_2b_1\right)p, \quad A_1=-a_1\left(a_1b_2-a_2b_1\right)q,$ (16) $B_{22}=b_1b_2q, \quad B_{12}=-b_1b_2p-a_1b_2q, \quad B_{11}=a_1b_2p,$ $B_2=-b_1\left(a_1b_2-a_2b_1\right)q, \quad B_1=b_1\left(a_1b_2-a_2b_1\right)p$ решение уравнения (7) имеет вид

$$x = a_1 \ln|t| + a_2 Ct, \quad y = b_1 \ln|t| + b_2 Ct,$$
 (17)

где a_1, a_2, b_1, b_2, p, q – произвольные параметры. При

$$A_{22} = a_1 a_2^2, \quad A_{12} = -2a_1 a_2 b_2, \quad A_{11} = a_1 a_2^2,$$

$$A_2 = -a_1 a_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1), \quad A_1 = -b_1 a_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

$$B_{22} = b_1 b_2^2, \quad B_{12} = -2b_1 b_2 a_2, \quad B_{11} = b_1 a_2^2,$$

$$B_2 = b_1 b_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1), \quad B_1 = a_1 b_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

решение уравнения (7) имеет вид

решение уравнения (7) имеет вид

$$x = a_1 \frac{1}{\ln|t|} + a_2 Ct, \quad y = b_1 \frac{1}{\ln|t|} + b_2 Ct,$$
 (19)

где a_1, a_2, b_1, b_2 – произвольные параметры. При

$$A_{22} = 3\alpha a_1^3, \quad A_{12} = -6\alpha a_1^2 b_1, \quad A_{11} = 3\alpha a_1 b_1^2,$$

$$A_2 = -2a_2^2 (a_1 b_2 - a_2 b_1), \quad A_1 = 2a_2 b_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

$$(20)$$

$$B_{22} = 3\alpha b_1^3, \quad B_{12} = -6\alpha b_1^2 a_1, \quad B_{11} = 3\alpha b_1 a_1^2,$$

$$B_2 = -2b_2^2 (b_1 a_2 - b_2 a_1), \quad B_1 = 2b_2 a_2 (b_1 a_2 - b_2 a_1)$$

$$x = a_1 C^3 t + a_2 C^2 \sqrt{\alpha t^3 + \beta},$$

$$y = b_1 C^3 t + b_2 C^2 \sqrt{\alpha t^3 + \beta},$$
(21)

где a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , α , β – произвольные параметры. В решении (21) для удобства C было переобозначено на C^2 .

При

$$A_{22} = (n-2) a_1^3 \beta, \quad A_{12} = -2 (n-2) a_1^2 b_1 \beta,$$

$$A_{11} = (n-2) a_1 b_1^2 \beta,$$

$$A_2 = (n-1) (a_1 b_2 - a_2 b_1) a_1 a_2,$$

$$A_1 = (n a_1 b_2 - a_2 b_1) (a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

$$B_{22} = (n-2) b_1^3 \beta, \quad B_{12} = -2 (n-2) b_1^2 a_1 \beta,$$
(22)

$$B_{11} = (n-2) b_1 a_1^2 \beta,$$

$$B_2 = (n-1) (b_1 a_2 - b_2 a_1) b_1 b_2,$$

$$B_1 = (nb_1 a_2 - b_2 a_1) (b_1 a_2 - b_2 a_1)$$

решение уравнения (7) имеет вид

$$x = a_1 C^2 (t^n + \beta t^2) + a_2 C t,$$

$$y = b_1 C^2 (t^n + \beta t^2) + b_2 C t,$$
(23)

где $a_1, a_2, b_1, b_2, n, \beta$ – произвольные параметры.

Отметим, что помимо решений вида (8) уравнение (7) имеет и другие решения при соответствующих коэффициентах A_{ij} , B_{ij} , A_i , B_i . В частности, при

$$A_{22} = 0, \quad A_{12} = -na_1c_n, \quad A_{11} = nb_1c_n,$$

$$A_2 = (n-1)a_na_1, \quad A_1 = -na_nb_1 + a_1b_n,$$

$$B_{22} = 0, \quad B_{12} = nb_1c_n, \quad B_{11} = -na_1c_n,$$

$$B_2 = -(n-1)b_nb_1, \quad B_1 = nb_na_1 - b_1a_n$$
(24)

решение уравнения (7) имеет вид

$$x = \frac{a_n t^n + a_1 C t}{c_n t^n + c_0 C}, \quad y = \frac{b_n t^n + b_1 C t}{c_n t^n + c_0 C}, \quad (25)$$

где $n, a_n, a_1, b_n, b_1, c_n, c_0$ – произвольные параметры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Климов Д.М., Руденко В.М. Методы компьютерной алгебры в задачах механики. М.: Наука, 1989. 215 с.
- 2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
- Murphy G.M. Ordinary Differential Equations and Their Solutions. N.Y.: D. Van Norstrand Company, Inc., 1960. 451 p.
- 4. Zwillinger D. Handbook of Differential Equations. San Diego; N.Y.; L.: Acad. Press, Inc., 1989. 673 p.
- 5. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям (Приложения в механике, точные решения). М.: Наука, 1993. 464 с.
- Zaitsev V.F., Polyanin A.D. Discrete Group Methods for Integrating Equations of Nonlinear Mechanics. Boca Raton; L.: CRC Press, 1993. 375 p.
- 7. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966. 568 с.
- 8. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976. 496 с.
- 9. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.