5. Системы дифференциальных уравнений в частных производных общего вида

Обозначение: L — произвольный линейный дифференциальный оператор.

5.1. Линейные системы дифференциальных уравнений в частных производных

1. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = L[u] + f_1(t)u + g_1(t)w, \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = L[w] + f_2(t)u + g_2(t)w.$

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L[u] + a_1 u + b_1 w, \quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = L[w] + a_2 u + b_2 w.$

5.2. Нелинейные системы двух дифференциальных уравнений в частных производных, содержащие прозводные первого порядка по t

1. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = L[u] + uf(t, au - cw) + g(t, au - cw),$
$\dfrac{\partial w}{\partial t} = L[w] + wf(t, au - cw) + h(t, au - cw).$

2. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = L_1[u] + uf\Big(\dfrac{u}{w}\Big), \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = L_2[w] + wg\Big(\dfrac{u}{w}\Big).$

3. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = L[u] + uf\Big(t, \dfrac{u}{w}\Big), \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = L[w] + wg\Big(t, \dfrac{u}{w}\Big).$

4. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = L[u] + uf\Big(\dfrac{u}{w}\Big) + g\Big(\dfrac{u}{w}\Big), \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = L[w] + wf\Big(\dfrac{u}{w}\Big) + h\Big(\dfrac{u}{w}\Big).$

5. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = L[u] + uf\Big(t, \dfrac{u}{w}\Big) + \dfrac{u}{w}h\Big(t, \dfrac{u}{w}\Big), \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = L[w] + wg\Big(t, \dfrac{u}{w}\Big) + h\Big(t, \dfrac{u}{w}\Big).$

6. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = L[u] + uf\Big(t, \dfrac{u}{w}\Big)\ln u + ug\Big(t, \dfrac{u}{w}\Big),$
$\dfrac{\partial w}{\partial t} = L[w] + wf\Big(t, \dfrac{u}{w}\Big)\ln w + wh\Big(t, \dfrac{u}{w}\Big).$

5.3. Нелинейные системы двух дифференциальных уравнений в частных производных, содержащие прозводные второго порядка по t

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L[u] + uf(t, au - bw) + g(t, au - bw),$
$\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = L[w] + wf(t, au - bw) + h(t, au - bw).$

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L_1[u] + uf\Big(\dfrac{u}{w}\Big), \quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = L_2[w] + wg\Big(\dfrac{u}{w}\Big).$

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L[u] + uf\Big(t, \dfrac{u}{w}\Big), \quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = L[w] + wg\Big(t, \dfrac{u}{w}\Big).$

4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L[u] + uf\Big(\dfrac{u}{w}\Big) + g\Big(\dfrac{u}{w}\Big), \quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = L[w] + wf\Big(\dfrac{u}{w}\Big) + h\Big(\dfrac{u}{w}\Big).$

5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L[u] + au\ln u + uf\Big(t, \dfrac{u}{w}\Big), \quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = L[w] + aw\ln w + wg\Big(t, \dfrac{u}{w}\Big).$

5.4. Нелинейные системы дифференциальных уравнений в частных производных со многими неизвестными, содержащие прозводные первого порядка по t

1. $$\frac{\partial u_m}{\partial t} = L[u_m] + u_m f(t, u_1 - b_1 u_n, \dots, u_{n-1} - b_{n-1} u_n) + \\ + g_m(t, u_1 - b_1 u_n, \dots, u_{n-1} - b_{n-1} u_n), \quad m = 1, \dots, n.$$

2. $$\frac{\partial u_m}{\partial t} = L[u_m] + u_m f_m\Big(t, \frac{u_1}{u_n}, \dots, \frac{u_{n-1}}{u_n}\Big) + \frac{u_m}{u_n} g\Big(t, \frac{u_1}{u_n}, \dots, \frac{u_{n-1}}{u_n}\Big),$$
$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = L[u_n] + u_n f_n\Big(t, \frac{u_1}{u_n}, \dots, \frac{u_{n-1}}{u_n}\Big) + g\Big(t, \frac{u_1}{u_n}, \dots, \frac{u_{n-1}}{u_n}\Big),$$
$m = 1, \dots, n-1.$

Веб-сайт EqWorld содержит обширную информацию о решениях различных классов обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных, интегральных уравнений, функциональных уравнений и других математических уравнений.