

УДК 532.5:534.1

© 2001 г. Н.А. Кудряшов, М.Б. Сухарев

## ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ОПИСАНИЯ ВОЛН НА ВОДЕ

Дается краткий обзор методов нахождения точных решений нелинейных уравнений в частных производных. Представлены новые решения нелинейного уравнения, встречающегося при описании длинных волн на воде.

**1. Введение.** По-видимому, все нелинейные дифференциальные уравнения (ДУ) условно можно разделить на три типа: точно решаемые, частично решаемые и не имеющие аналитических решений. Эта классификация не позволяет дать определения указанных классов, что само по себе – непростая задача. Так, например, даже для точно решаемых гамильтоновых систем (называемых часто интегрируемыми) различают точно решаемые ДУ в квадратурах, вполне интегрируемые системы и алгебраическую полную интегрируемость [1–3].

В данной работе пойдет речь о втором из указанных выше типов ДУ, под которым будем иметь в виду ДУ, не относящиеся к первому типу, но имеющие некоторый набор частных решений. Следует заметить, что все обсуждаемые методы применимы и при нахождении точных решений ДУ первого типа. Однако для ДУ первого типа существуют более общие методы нахождения аналитических решений, чем в случае ДУ второго типа, например метод обратной задачи рассеяния.

Поскольку после формулировки математической модели возникает вопрос о существовании аналитических решений, то растет естественная потребность в методах нахождения этих решений. В последние годы появился ряд работ, претендующих на новые методы решения нелинейных ДУ (как обыкновенных, так и в частных производных). Однако по своей сути большинство из них содержат лишь некоторые модификации одного и того же подхода. По мнению авторов данной работы, большинство предложенных методов нахождения аналитических решений могут быть классифицированы в рамках единого подхода, который развивается на протяжении последних 120 лет, начиная со знаменитой работы С.В. Ковалевской, посвященной решению задачи о движении твердого тела в поле силы тяжести.

Одним из самых замечательных свойств, которым может обладать обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ), является свойство Пенлеве, соответствующее тому, что общее решение ОДУ не имеет критических подвижных особых точек. По существу наличие этого свойства является критерием существования общего решения для ОДУ.

Это свойство было замечено еще в девятнадцатом столетии в работах Брио и Буке [4]. Затем Фукс и Пуанкаре использовали этот факт при анализе ОДУ первого порядка [4]. Однако первым исследователем, применившим свойство Пенлеве при решении задач механики, была С.В. Ковалевская, которая нашла новый случай (отличный от случаев Эйлера и Лагранжа) точного решения задачи о движении твердого тела в поле силы тяжести, потребовав, чтобы общее решение было мероморфной функцией [5]. Ответ на сформулированный Ковалевской вопрос позволил найти параметры математической модели для случая точного решения. Можно

сказать, что Ковалевская нашла значения параметров, когда система уравнений, описывающая движение твердого тела, имеет свойство Пенлеве.

Вскоре после работы Ковалевской Пенлеве предпринял попытку исследования ОДУ второго порядка, имеющих вид

$$y_{zz} = R(y, y_z, z) \quad (1.1)$$

Здесь  $R$  – функция, алгебраическая по  $y, y_z$  и локально аналитическая по  $z$ . Основной целью его исследования было нахождение всех неприводимых ОДУ указанного вида, общие решения которых не имеют критических подвижных особых точек, и поиск ОДУ, определяющих новые функции. Среди ОДУ типа (1.1) Пенлеве и его ученики нашли 50 канонических ОДУ (их перечень можно найти в [6]), общие решения которых не имели критических подвижных особых точек, причем решения 44 ОДУ из этого списка выражались через решения линейных ОДУ и специальные функции, известные к тому времени. Для описания решений оставшихся шести неприводимых ОДУ Пенлеве и Гамбье ввели новые специальные функции, названные ими трансцендентами. Трансценденты Пенлеве не являются классическими функциями в нашем обычном понимании, поскольку они могут быть определены только как решения нелинейных ОДУ второго порядка [7, 8] в связи с тем, что решения уравнений Пенлеве имеют существенно трансцендентную зависимость от постоянных интегрирования.

Интерес к методам Ковалевской – Пенлеве возник после работ Абловица, Рамани и Сигура [9, 10], заметивших, что точно решаемые нелинейные уравнения в частных производных (УЧП) при использовании переменных бегущей волны, автомодельных переменных и т.д. сводятся к уравнениям, имеющим свойство Пенлеве. В этой связи ими была высказана гипотеза о свойстве Пенлеве, которая может быть сформулирована следующим образом. Если любая редукция нелинейного УЧП к ОДУ сводится к уравнению, имеющему свойство Пенлеве, то такое нелинейное УЧП – точно решаемое. К сожалению, практическая реализация этой гипотезы неудобна, и была предложена [11] модификация применения этой гипотезы к нелинейным УЧП.

Суть этой модификации заключается в следующем. Пусть задано нелинейное ДУ

$$E(u, u_x, \dots, x, t) = 0 \quad (1.2)$$

Его решение ищется в виде

$$u = z^{-p}(u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots) \quad (1.3)$$

где  $z \equiv z(x, t)$  – новая функция,  $u_j = u_j(z_x, z_t, \dots)$  – коэффициенты, зависящие от производных функции  $z(x, t)$ ,  $p$  – число, которое определяется из равенства нулю выражений при наименьшей степени  $z(x, t)$  после подстановки ряда в ДУ. Коэффициенты  $u_j$  последовательно находятся из равенства нулю выражений при различных степенях функции  $z(x, t)$  после подстановки ряда в ДУ.

Для точно решаемого ДУ в разложении (1.3) появляются произвольные коэффициенты  $u_r$ , количество которых равно порядку ДУ.

Основной успех метода связан с тем, что, полагая  $u_j \equiv 0$  для всех  $j \geq p$ , для точно решаемого ДУ удастся построить преобразования Бэклунда и пары Лакса [12–15]. Однако оказалось, что усеченные преобразования

$$u = u_0 z^{-p} + u_1 z^{-p+1} + \dots + u_p \quad (1.4)$$

эффективны и при нахождении частных решений ДУ, что было продемонстрировано [16–33] в различных модификациях применения метода разложений Пенлеве для нахождения решений целого ряда нелинейных ДУ. Например, с использованием формулы (1.4) найдены [23, 24] частные решения обобщенного уравнения Курамото – Сивашинского и уравнения Бюргерса – Кортевега – де Вриза при конкретных

значениях параметров этих уравнений. Зависимость коэффициентов  $u_j$  от производных функции  $z(x, t)$  в формуле (1.4) находилась при этом после подстановки выражения (1.4) в исходное ДУ и последующего приравнивания нулю выражений при одинаковых степенях функции  $z(x, t)$ . В результате подстановки находится переопределенная система ДУ относительно  $z(x, t)$ , которая переходит в алгебраическую систему уравнений, если в ней положить

$$z(x, t) = 1 + c_1 \exp(kx - \omega t) \quad (1.5)$$

где  $c_1$ ,  $k$  и  $\omega$  – постоянные числа, которые находятся из алгебраической системы уравнений. Поскольку  $u_k$  в равенстве (1.4) зависят от производных функции  $z(x, t)$ , то коэффициенты в равенстве (1.4) превращаются в этом случае в произведение постоянных величин, умноженных на экспоненты, полученные от дифференцирования выражения (1.5).

При подстановке выражения (1.5) в равенство (1.4) оно переходит в соотношение, состоящее из суммы степеней выражений

$$r = \frac{a_0 \exp(kx - \omega t)}{1 + c_1 \exp(kx - \omega t)} \quad (1.6)$$

использованное некоторыми авторами при нахождении точных решений [34, 35]. В ряде случаев эта сумма может быть представлена в виде суммы  $\operatorname{sech}(kx + \omega t)$  и  $\operatorname{cosech}(kx + \omega t)$ , также неоднократно использованной при поиске точных решений неинтегрируемых уравнений [36–38].

Можно также заметить, что зависимость (1.6) преобразуется к виду

$$r = \frac{\tilde{a}_0}{2} \left[ 1 + \operatorname{th} \left( \frac{1}{2} (kx - \omega t + b) \right) \right] \quad (1.7)$$

где  $b$  – произвольная постоянная. Поэтому решение нелинейных ДУ можно также искать в виде разложения по степеням гиперболических тангенсов [39].

Еще один из методов связан с поиском решения нелинейного ДУ в виде суммы ряда по степеням функций, которые являются решениями уравнения Риккати [17, 33] и уравнения для эллиптической функции [25, 31, 40], причем по существу эти разложения определяются аналогично разложениям Пенлеве. Таким образом, большинство методов нахождения точных решений нелинейных ДУ по существу основаны на методе, непосредственно связанном с подходом Пенлеве к анализу нелинейных ДУ.

Следует заметить, что поиск решений в виде суммы гиперболических тангенсов, секансов и косекансов дает лишь некоторый набор частных решений, как правило, не исчерпывая всех возможных решений. Полный набор частных решений, который имеет соответствующая математическая модель, удастся найти, лишь используя подстановку (1.4) и анализируя переопределенную систему уравнений для  $z(x, t)$ . Этот анализ (часто довольно сложный) позволяет найти все функции, для которых исходная математическая модель допускает условное свойство Пенлеве.

**2. Решения нелинейного дифференциального уравнения пятого порядка в виде уединенных волн.** К настоящему времени получены частные решения многих нелинейных УЧП, встречающихся при описании физических явлений. Одно из немногих до сих пор не изученных УЧП, встречающееся при описании длинных волн на воде, имеет вид [41]

$$u_t + u_x + c_1 u u_x + c_2 u_{xxx} + c_3 u_x u_{xx} + c_4 u u_{xxx} + c_5 u_{xxxx} = 0 \quad (2.1)$$

Частные случаи этого уравнения анализировались в ряде работ. Так, например, были найдены [26] точные решения этого уравнения в виде уединенных волн при  $c_3 = c_4 = 0$ . В случае  $c_3 = c_4 = c_5 = 0$  уравнение (2.1) принимает вид хорошо известного уравнения Кортевега – де Вриза.

Для удобства вычислений используем замену переменных

$$u \rightarrow -\frac{60c_2}{c_3+2c_4}u, \quad \sqrt{\frac{c_2}{c_5}}(x-t) \rightarrow x, \quad \sqrt{\frac{c_2}{c_5}}\frac{c_2^2}{c_5}t \rightarrow t$$

$$a = \frac{60c_4}{c_3+2c_4}, \quad b = \frac{60c_1c_5}{c_2(c_3+2c_4)}, \quad c_3 \neq -2c_4, \quad c_5 \neq 0 \quad (2.2)$$

Тогда уравнение (2.1) приводится к виду

$$u_t + u_{xxxx} - auu_{xxx} - 2(30-a)u_xu_{xx} - buu_x + u_{xxx} = 0, \quad ab \neq 0 \quad (2.3)$$

Покажем, что (2.3) не является точно решаемым уравнением. С этой целью применим к нему тест Пенлеве [11]. Индексы Фукса (т.е. номера произвольных коэффициентов в разложении (1.3)) находятся как корни уравнения, зависящего от параметра  $a$ ,

$$(r+1)(r-6)(r^3-15r^2+(86-a)r-120)=0 \quad (2.4)$$

Будем интересоваться только целыми решениями уравнения (2.4), поскольку при нецелых индексах Фукса уравнение не удовлетворяет требованиям теста Пенлеве. Существуют лишь два значения параметра  $a$ , для которых все индексы Фукса целые:

$$a = 180: r = -3, -2, -1, 6, 20$$

$$a = 12: r = -1, 4, 5, 6, 6 \quad (2.5)$$

Однако при проверке соответствия номеров произвольных коэффициентов разложения в ряд Лорана (1.3) общего решения уравнения (2.3) вблизи подвижной особой точки в обоих случаях оказываются нарушены условия совместности. Это означает, что по крайней мере один из произвольных коэффициентов разложения (1.3) таковым не является, т.е. общее решение уравнения (2.3) не может быть представлено в виде (1.3). Следовательно, тест Пенлеве для уравнения (2.3) не выполняется, т.е. уравнение (2.3) не относится к точно решаемым уравнениям.

Будем искать возможные частные решения двумя способами: в виде полинома по степеням функций, удовлетворяющих системе уравнений Риккати [17], и в виде полинома по степеням функции, удовлетворяющей невырожденному эллиптическому уравнению [30, 31].

Суть метода [17] заключается в следующем: пусть функции  $\tau(\theta)$  и  $\sigma(\theta)$  удовлетворяют системе уравнений Риккати

$$\sigma' = -\sigma\tau, \quad \tau' = -\tau^2 - \frac{\mu_0}{K}\sigma + 1 \quad (2.6)$$

Общее решение системы (2.6) имеет вид

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{\mu_0/K + c_1 \operatorname{ch} \theta + c_2 \operatorname{sh} \theta}, \quad \tau(\sigma) = \frac{c_1 \operatorname{sh} \theta + c_2 \operatorname{ch} \theta}{\mu_0/K + c_1 \operatorname{ch} \theta + c_2 \operatorname{sh} \theta} \quad (2.7)$$

Полагая  $c_2 = 0$ ,  $c_1 = 1/K$ , получаем элементарные уединенные волны (солитон и кинк соответственно)

$$\sigma(\theta) = \frac{K}{\operatorname{ch} \theta + \mu_0}, \quad \tau(\theta) = \frac{\operatorname{sh} \theta}{\operatorname{ch} \theta + \mu_0} \quad (2.8)$$

Система уравнений (2.6) допускает первый интеграл

$$\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{\mu_0}{K}\right)^2 - \frac{\tau^2}{\sigma^2} = \frac{1}{K^2} \quad (2.9)$$

Для всех значений  $\mu_0$ , кроме  $\mu_0 = \pm 1$ , функции  $\sigma$  и  $\tau$  имеют простые подвижные полюса, а в случае  $\mu_0 = \pm 1$  функция  $\sigma$  имеет полюс второго порядка. Чтобы исключить изменение порядка полюсов для функции  $\sigma$ , выбирается  $K = \sqrt{\mu_0^2 - 1}$  и система уравнений (2.6) рассматривается при условии, что

$$1 - \tau^2 - 2\mu\sigma + \sigma^2 = 0; \quad \mu = \frac{\mu_0}{\sqrt{\mu_0^2 - 1}}, \quad \mu^2 \neq 1 \quad (2.10)$$

Решение уравнения (2.3) ищется в виде полинома по степеням функций  $\sigma$  и  $\tau$ , вычисляемых в точке  $\theta = \theta(\xi)$ ,  $\theta' \neq 0$ . Для упрощения дальнейших вычислений будем полагать

$$\theta = k\xi, \quad \xi = x - ct, \quad k = \text{const}, \quad c = \text{const} \quad (2.11)$$

Уравнение (2.3) допускает решение в виде полинома второй степени по  $(\sigma, \tau)$ . Поскольку все степени  $\tau$  выше первой можно исключить с помощью соотношения (2.10), то решение уравнения (2.3) будет иметь вид

$$u = \alpha + \beta\sigma(\theta) + \gamma\tau(\theta) + \lambda\sigma(\theta)\tau(\theta) + \varphi\sigma(\theta)^2 \quad (2.12)$$

Для упрощения дальнейших вычислений предполагаем, что все коэффициенты – постоянные величины.

Подставляем выражение (2.12) в уравнение (2.3), а затем исключаем все производные от  $(\sigma, \tau)$  и степени  $\tau$  выше первой с помощью соотношений (2.6), (2.10). Приравняв коэффициенты в получившемся выражении при различных степенях  $(\sigma, \tau)$  к нулю, получим конечную систему алгебраических уравнений с неизвестными  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \varphi, \mu, k, c$ .

Решение этой системы уравнений можно разделить на два этапа: на первом этапе предполагаем  $\mu(\mu^2 - 1) \neq 0$  и получаем решения уравнения (2.3) в виде комбинации волн типа (2.8), на втором этапе предполагаем  $\mu = 0$  и находим решения уравнения (2.3) в виде полинома по степеням  $\text{sech } \theta$  и  $\text{th } \theta$ . Все возможные решения вида (2.12) можно сгруппировать в три семейства, определяемые коэффициентами при старших степенях  $\sigma, \tau$ ,

$$1) \quad \varphi = \frac{k^2}{2}, \quad \lambda = \frac{k^2}{2}, \quad 2) \quad \varphi = \frac{k^2}{2}, \quad \lambda = -\frac{k^2}{2}, \quad 3) \quad \varphi = k^2, \quad \lambda = 0 \quad (2.13)$$

Заметим, что решения второго семейства (2.13) получаются из решений первого семейства (2.13) заменой  $\tau \rightarrow -\tau$ , поэтому далее решения второго семейства (2.13) не рассматриваются.

На первом этапе находим единственное решение из первого семейства (2.13), справедливое для произвольного значения параметра  $a$ ,

$$u = A_0 - \frac{k^2}{2}v, \quad A_0 = \frac{12 - b + ak^2}{12a}, \quad v = \frac{1 + \mu_0 \text{ch } \theta - \sqrt{\mu_0^2 - 1} \text{sh } \theta}{(\mu_0 + \text{ch } \theta)^2} \quad (2.14)$$

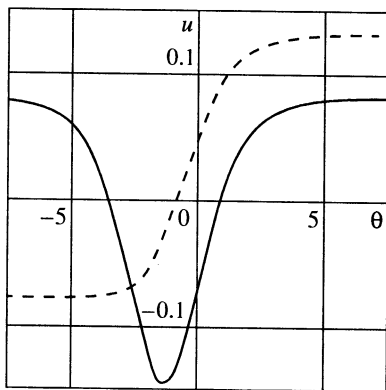
Это решение – двухпараметрическое с параметрами  $k$  и  $\mu_0$ , действительное для  $\mu_0^2 > 1$ . Остальные параметры решения (2.12) принимают следующие значения:

$$\beta = -\frac{k^2\mu}{2}, \quad \gamma = 0, \quad c = \frac{b(b-12) - a(a-12)k^4}{12a} \quad (2.15)$$

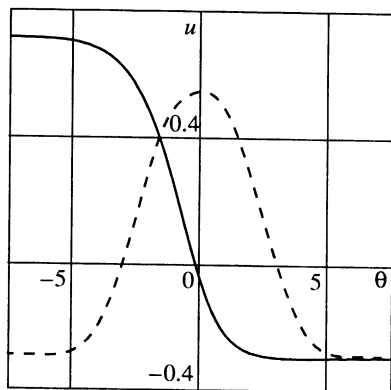
На фиг. 1 изображено решение (2.14) при  $a = -48$ ,  $b = 15$ ,  $k = 0,95$ ,  $\mu_0 = 2$  (сплошная линия).

На втором этапе находим два решения, справедливые для произвольного  $a$ . Первое решение принадлежит первому семейству (2.13)

$$u = A_0 + \frac{k^2}{2} \frac{1 \pm \text{ch } \theta}{\text{sh}^2 \theta} \quad (2.16)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Это решение является частным случаем решения (2.14) и может быть получено из выражения (2.14) заменой  $\theta \rightarrow \theta + i\pi/2$ .

Второе решение – из третьего семейства (2.13)

$$u = A_0 + \frac{k^2}{4} - k^2 \operatorname{sech}^2 \theta \quad (2.17)$$

Это – однопараметрическое решение с параметром  $k$ . Параметры из (2.12) для этого решения принимают следующие значения:

$$\beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad c = \frac{b(b-12) - 16a(a-12)k^4}{12a} \quad (2.18)$$

Решение (2.17) при замене  $\theta \rightarrow \theta + i\pi/2$  переходит в решение, отличающееся от (2.17) заменой  $-k^2 \operatorname{sech}^2 \theta \rightarrow k^2 \operatorname{cosech}^2 \theta$ .

Заметим, что при  $a = 12$  решения (2.14), (2.16), (2.17) соответствуют волнам, распространяющимся с фиксированной скоростью, не зависящей от волнового вектора.

Заметим, также, что для параметров уравнения  $a = 10$  и  $a = -48$  существуют решения вида (2.12), отличные от приведенных выше.

В случае  $a = 10$  и  $\mu(\mu^2 - 1) \neq 0$ , и при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{6 - b + 10k^2}{60}, \quad \beta = -k^2\mu, \quad \gamma = 0 \\ c &= \frac{b(b-6) - 40k^4}{60}, \quad \mu^2 = \frac{2}{3} + \frac{b}{30k^2} \end{aligned} \quad (2.19)$$

решение, принадлежащее третьему семейству (2.13), может быть записано в виде

$$u = \frac{6 - b + 10k^2}{60} - \frac{k^2}{1 \pm \kappa \operatorname{ch} \theta} + \frac{30}{b + 20k^2} \frac{k^4}{(1 \pm \kappa \operatorname{ch} \theta)^2} \quad (2.20)$$

где

$$\kappa = \sqrt{\frac{b - 10k^2}{b + 20k^2}} \quad (2.21)$$

При мнимом  $\kappa$  решение (2.20) после замены  $\theta \rightarrow \theta + i\pi/2$ ,  $\kappa \rightarrow i\kappa$  принимает вид, отличающийся от (2.20) заменой  $\operatorname{ch} \theta$  на  $\operatorname{sh} \theta$  и знака подкоренного выражения в равенстве (2.21) на противоположный.

В случае  $a = -48$  и  $\mu(\mu^2 - 1) \neq 0$  существуют решения как из первого семейства (2.13), так и из третьего семейства (2.13).

Первое семейство решений (2.13) определяется следующими значениями параметров:

$$\alpha = \frac{1}{96}(b - 2 - 50k^2), \quad \gamma = \pm \frac{\sqrt{3}}{12} \sqrt{5bk^2 - 348k^4}$$

$$\beta = \gamma - \frac{1}{2}k^2\mu, \quad c = \frac{1}{96}(2b - 21b^2 + 2450bk^2 - 69120k^4)$$
(2.22)

причем решения в действительной области возможны лишь при двух значениях  $k$ .  
Первое решение

$$u = -\frac{1}{48} + \frac{49b}{16704} - \frac{5b}{696}v, \quad k^2 = \frac{5b}{348}, \quad c = \frac{1}{96} \left( 2b - \frac{341b^2}{5046} \right)$$
(2.23)

Второе решение

$$u = A_1 \pm \frac{b}{144} \frac{\sqrt{\mu_0^2 - 1} + \operatorname{sh} \theta}{\mu_0 + \operatorname{ch} \theta} - \frac{b}{144}v, \quad A_1 = -\frac{1}{48} + \frac{11b}{3456}$$

$$k^2 = \frac{b}{72}, \quad c = \frac{1}{96} \left( 2b - \frac{11b^2}{36} \right)$$
(2.24)

Это – однопараметрические решения с параметром  $\mu_0$ , причем  $\mu_0^2 > 1$ . Решение (2.24) при  $b = 15$ ,  $\mu_0 = 2$  построено на фиг. 1 штриховой линией (выбран знак плюс). В (2.23) и (2.24)  $v$  определяется выражением (2.14).

Заметим, что решение (2.23) – частный случай решения (2.14), а решение (2.24) при  $\mu = 0$  и замене  $\theta \rightarrow \theta + i\pi/2$  переходит в

$$u = A_1 + \frac{1 \pm \operatorname{ch} \theta}{\operatorname{sh} \theta} \frac{b}{144} \left( \frac{1}{\operatorname{sh} \theta} + \kappa \right), \quad \kappa = \pm 1$$
(2.25)

График этого решения при  $b = 75$ ,  $\kappa = 1$  приведен на фиг. 2 сплошной линией (выбран знак минус).

Группа решений (2.22) содержит решение с  $k^2 = b/48$ , отличное от приведенных выше. Однако это решение содержит мнимую часть, поэтому и не рассматривается.

Третье семейство решений (2.13) для  $a = -48$ ,  $\mu(\mu^2 - 1) \neq 0$  определяется следующими значениями параметров:

$$\alpha = -\frac{1 + 13k^2}{48}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

$$c = \frac{1}{48}(b + 13bk^2 - 1728k^4), \quad \mu^2 = \frac{29}{35} + \frac{b}{420k^2}$$
(2.26)

Однопараметрическое решение с параметром  $k$  из этого семейства имеет вид

$$u = -\frac{1 + 13k^2}{48} + \frac{420k^4}{b + 348k^2} \frac{1}{(1 + \kappa \operatorname{ch} \theta)^2}$$
(2.27)

где

$$\kappa = \pm \sqrt{\frac{b - 72k^2}{b + 348k^2}}$$
(2.28)

График решения (2.27) с  $b = 75$ ,  $k = 1$  приведен на фиг. 2 штриховой линией (для  $\kappa$  выбран знак плюс).

В случае мнимого  $\kappa$  в (2.27), (2.28) после замены  $\theta \rightarrow \theta + i\pi/2$ ,  $\kappa \rightarrow i\kappa$  приходим к решению, которое получается из (2.27), (2.28) заменой  $\operatorname{ch}\theta$  на  $\operatorname{sh}\theta$  в (2.27) и заменой знака подкоренного выражения в (2.28).

Существует еще одно решение из третьего семейства (2.13) для  $a = -48$ ,  $\mu(\mu^2 - 1) \neq 0$  и  $\gamma = 0$ . Однако это решение может быть определено лишь неявным образом как решение системы четырех уравнений

$$\begin{aligned} -12k^2 + bk^2 + 192k^4 - 576k^2\alpha + 12\beta^2 - 264k^4\beta\mu - 420k^4\mu^2 &= 0 \\ -2\beta + b\beta + 148k^2\beta - 96\alpha\beta + 10k^2\mu + 130k^4\mu + 480k^2\alpha\mu - 60\beta^2\mu - 30k^2\beta\mu^2 &= 0 \\ 2ck^2 - 8k^4 - 32k^6 + 2bk^2\alpha - 384k^4\alpha + b\beta^2 + 108k^2\beta^2 + 6k^2\beta\mu + 30k^4\beta\mu + 288k^2\alpha\beta\mu &= 0 \\ c - k^2 - k^4 + b\alpha - 48k^2\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

При  $a = -48$  и  $\mu = 0$  третье семейство решений (2.13) определяется следующими значениями параметров:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{96}(b - 2 - 200k^2), \quad \beta = 0, \quad \gamma = \pm \frac{\sqrt{5bk^2 - 1392k^4}}{2\sqrt{3}} \\ c &= \frac{1}{96}(2b - 21b^2 + 9800bk^2 - 1105920k^4) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Одно из решений, принадлежащее этому семейству, имеет вид ( $k^2 = b/288$ )

$$u = A_1 \pm \frac{b}{144} \operatorname{th} \theta - \frac{b}{288} \operatorname{sech}^2 \theta \quad (2.31)$$

В семейство решений, определяемое значениями параметров (2.30), входят, помимо (2.31) решение с  $k^2 = 5b/1392$  (частный случай решения (2.17)) и решение с  $k^2 = b/192$  с неустранимой мнимой частью.

Решение (2.31) при замене  $\theta \rightarrow \theta + i\pi/2$  переходит в решение, отличающееся от (2.31) заменой  $\operatorname{th}\theta$  и  $\operatorname{sech}\theta$  на  $\operatorname{cth}\theta$  и  $\operatorname{cosech}\theta$ , соответственно.

При  $a = -48$  и  $\mu = 0$  третье семейство решений (2.13) определяется следующими значениями параметров:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{96}(b - 2 + 148k^2), \quad \beta = \pm \frac{\sqrt{5bk^2 + 696k^4}}{2\sqrt{3}}, \quad \gamma = 0 \\ c &= \frac{1}{96}(2b - 21b^2 - 4900bk^2 - 270720k^4) \end{aligned} \quad (2.32)$$

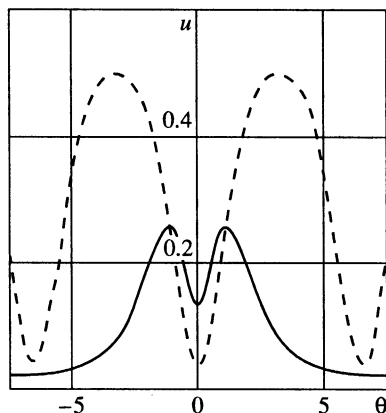
В это семейство решений входит решение с  $k^2 = -5b/696$  (частный случай решения (2.17)), решение с  $k^2 = A_4^+$ ,  $c = c^+$ ,  $b < 0$ , которое после замены  $\theta \rightarrow \theta + i\pi/2$  приводится к виду

$$u = A_2^+ \pm A_3^+ \operatorname{cosech} \theta + A_4^+ \operatorname{cosech}^2 \theta \quad (2.33)$$

а также решение с  $k^2 = A_4^-$ ,  $c = c^-$ ,  $b < 0$

$$u = A_2^- \pm A_3^- \operatorname{sech} \theta - A_4^- \operatorname{sech}^2 \theta \quad (2.34)$$





Фиг. 3

Здесь

$$A_2^{\pm} = -\frac{1158 + (161 \pm 37\sqrt{14})b}{55584}, \quad A_3^{\pm} = \frac{\sqrt{1355\sqrt{14} \pm 4712}}{2316}b$$

$$A_4^{\pm} = -\frac{20 \pm \sqrt{14}}{2316}b, \quad c^{\pm} = \frac{223494 + (46853 \pm 10825\sqrt{14})b}{10727712}b \quad (2.35)$$

График решения (2.34) с  $b = -100$  приведен на фиг. 3 сплошной линией (выбран знак минус).

**3. Решения нелинейного дифференциального уравнения пятого порядка в виде кноидальных волн.** Для поиска решения уравнения (2.3) в виде кноидальной волны воспользуемся методом, описанным ранее [30, 31].

Интегрируя уравнение (2.3), записанное в переменных бегущей волны, получаем

$$u_{xxxx} - auu_{xx} + u_{xx} + \frac{3}{2}(a-20)u_x^2 - \frac{b}{2}u^2 - cu + d = 0 \quad (3.1)$$

где  $d$  – постоянная интегрирования.

Общее решение уравнения (3.1) имеет полюс второго порядка, поэтому будем искать решение в виде

$$u = \alpha R(x) + \beta \quad (3.2)$$

где  $\alpha, \beta$  – постоянные, а  $R$  – решение уравнения

$$R_x^2 = 4R^3 + fR^2 + gR + h \quad (3.3)$$

Подставляя выражение (3.2) в уравнение (3.1) и приравнявая нулю коэффициенты при разных степенях  $R(x)$ , получаем следующие значения параметров уравнения:

$$\alpha = 1, \quad \beta = \frac{12 - b + af}{12a}, \quad g = \frac{(12 - b)b + a(12c + (a - 12)f^2)}{12a(a - 12)}$$

$$h = \frac{1}{432a^2(a - 12)^2} [2b^3(a - 6) - 36b(48 - 4a(1 + 2c - 3f) + a^2(c - f))$$

$$+ b^2(288 + 36a(f - 1) - 3a^2f) + a(a - 12)(36c(8 + af) + a(-288d + f^3(a - 12)))]$$

где предполагается  $a \neq 12$ . В случае  $a = 12$  находим

$$\alpha = 1, \quad \beta = \frac{12 - b + 12f}{144}, \quad c = \frac{b(b-12)}{144}$$

$$g = -\frac{144b - 24b^2 + b^3 + 41472d - 144bf^2}{1728b}$$

Пусть  $R_1 < R_2 < R_3$  – действительные и различные корни уравнения, соответствующего обращению в нуль правой части равенства (3.3). Тогда уравнение (3.1) имеет решение в виде кноидальной волны

$$u = \frac{12 - b + af}{12a} + R_2 - (R_2 - R_1) \operatorname{cn}^2 \left( \sqrt{R_3 - R_1} x; \sqrt{\frac{R_2 - R_1}{R_3 - R_1}} \right) \quad (3.4)$$

График этого решения при  $a = -48$ ,  $b = -100$ ,  $f = -8$ ,  $R_1 = 0,9$ ,  $R_2 = 1,36$ ,  $R_3 = 1,44$  построен на фиг. 3 штриховой линией.

Рассмотрим предельный случай  $R_2 = R_3$ . Тогда решение (3.4) принимает вид

$$u = \frac{12 - b + af}{12a} + R_1 + (R_2 - R_1) \operatorname{th}^2 \sqrt{R_2 - R_1} x \quad (3.5)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  определяются через произвольные параметры  $f$ ,  $c$ . Решение вида (3.5) уже было получено. Оно совпадает с (2.17).

Таким образом, найдены частные решения (2.14), (2.17) уравнения (2.3), справедливые для любых значений  $a$ . Для двух значений  $a$  получены дополнительные частные решения: (2.20) для  $a = 10$  и (2.24), (2.27), (2.31), (2.33), (2.34) для  $a = -48$ . Также найдено решение (3.4) типа кноидальной волны.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-01114, 00-01-81071 Бел2000-а).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
2. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука. Физматлит, 1977. 495 с.
3. Переломов А.М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990. 237 с.
4. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1941. 398 с.
5. Голубев В.В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Гостехиздат, 1953. 288 с.
6. Ince E.L. Ordinary Differential Equations. L; N.Y.; Longmans, Green and Co., 1927. = Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ОНТИ НКТП Украины, 1939. 717 с.
7. Conte R. The Painlevé approach to nonlinear ordinary differential equations // The Painlevé Property / Ed. R. Conte. CRM Series in Mathematical Physics. N.Y.: Springer, 1999. P. 77–180.
8. Громек В.И., Лукашевич Н.А. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Минск: Университетское, 1990. 157 с.
9. Ablowitz M., Ramani A., Segur H. Nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of Painlevé type // Lett. Nuovo Cimento. 1978. V. 23. № 2. P. 333–338.
10. Ablowitz M., Ramani A., Segur H. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type // J. Math. Phys. 1980. V. 21. № 4. P. 715–721; № 5. P. 1006–1015.
11. Weiss J., Tabor M., Carnevale G. The Painlevé property for partial differential equations // J. Math. Phys. 1983. V. 24. № 3. P. 522–526.
12. Weiss J. The Painlevé property for partial differential equations. II. Bäcklund transformation, Lax pairs, and the Schwarzian derivative // J. Math. Phys. 1983. V. 24. № 6. P. 1405–1413.
13. Weiss J. Bäcklund transformation and the Painlevé property // J. Math. Phys. 1986. V. 27. № 5. P. 1293–1305.
14. Musette M., Conte R. Algorithmic method for deriving Lax pairs from the invariant Painlevé analysis of nonlinear partial differential equations // J. Math. Phys. 1991. V. 32. № 6. P. 1450–1457.

15. *Musette M., Conte R.* The two-singular-manifold method: I. Modified Korteweg–de Vries and the sine-Gordon equations // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1994. V. 27. № 11. P. 3895–3913.
16. *Conte R., Musette M.* Painlevé analysis and Bäcklund transformation in the Kuramoto–Sivashinsky equation // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1989. V. 22. № 2. P. 169–177.
17. *Conte R., Musette M.* Link between solitary waves and projective Riccati equations // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1992. V. 25. № 21. P. 5609–5623.
18. *Ablowitz M.J., Zeppetella A.* Explicit solutions of Fissler's equation for a special wave speed // *Bull. Math. Biology.* 1979. V. 41. № 6. P. 835–840.
19. *Nozaki K.* Hirota's method and the singular manifold expansion // *J. Phys. Soc. Japan.* 1987. V. 56. № 9. P. 3052–3054.
20. *Cariello F., Tabor M.* Painlevé expansions for nonintegrable evolution equations // *Physica D.* 1989. V. 39. № 1. P. 77–94.
21. *Choudhury S.R.* Painlevé analysis and special solutions of two families of reaction-diffusion equations // *Phys. Lett. A.* 1991. V. 159. № 6–7. P. 311–317.
22. *Pickering A.* A new truncation in Painlevé analysis // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1993. V. 26. № 17. P. 4395–4405.
23. *Кудряшов Н.А.* Преобразования Бэклунда для уравнения в частных производных четвертого порядка с нелинейностью Бюргерса – Кортевега – де Фриза // *Докл. АН СССР.* 1988. Т. 300. № 2. С. 342–345.
24. *Кудряшов Н.А.* Точные солитонные решения обобщенного эволюционного уравнения волновой динамики // *ПММ.* 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 465–470.
25. *Кудряшов Н.А.* Точные решения нелинейных волновых уравнений, встречающихся в механике // *ПММ.* 1990. Т. 54. С. 450–453.
26. *Кудряшов Н.А.* Точные решения уравнения  $N$ -го порядка с нелинейностью Бюргерса – Кортевега – де Фриза // *Мат. моделирование.* 1989. Т. 1. № 6. С. 57–65.
27. *Кудряшов Н.А.* Точные решения обобщенного уравнения Гинзбурга – Ландау // *Мат. моделирование.* 1989. Т. 1. № 9. С. 151–158.
28. *Кудряшов Н.А.* Метод разложений Пенлеве для неинтегрируемых нелинейных уравнений // *Мат. моделирование.* 1990. Т. 2. № 12. С. 102–116.
29. *Кудряшов Н.А.* О точных решениях уравнений семейства Фишера // *Теорет. и мат. физика.* 1993. Т. 94. № 2. С. 296–306.
30. *Kudryashov N.A.* Exact solutions of the generalized Kuramoto – Sivashinsky equation // *Phys. Lett. A.* 1990. V. 147. № 5–6. P. 287–291.
31. *Kudryashov N.A.* On types of nonlinear nonintegrable equations with exact solutions // *Phys. Lett. A.* 1991. V. 155. № 4–5. P. 269–275.
32. *Kudryashov N.A., Zargaryan E.D.* Solitary waves in active – dissipative dispersive media // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1996. V. 29. № 24. P. 8067–8077.
33. *Землянухин А.И.* Точное солитоноподобное решение нелинейного эволюционного уравнения пятого порядка // *Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика.* 1999. Т. 7. № 2–3. С. 29–32.
34. *Гудков В.В.* Решения типа бегущей волны для двухкомпонентных систем реакции – диффузии // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 1995. Т. 35. № 4. С. 615–623.
35. *Lu H., Wang M.* Exact soliton solutions of some nonlinear physical models // *Phys. Lett. A.* 1999. V. 255. № 4–6. P. 249–252.
36. *Dai X., Dai J.* Some solitary wave solutions for families of generalized higher order KdV equations // *Phys. Lett. A.* 1989. V. 142. № 6–7. P. 367–370.
37. *Lan H., Wang K.* Exact soliton solution in ice-like structures // *Phys. Lett. A.* 1989. V. 139. № 1–2. P. 61–64.
38. *Huang G., Luo S., Dai X.* Exact and explicit solitary wave solutions to a model equation for water waves // *Phys. Lett. A.* 1989. V. 139. № 8. P. 373–374.
39. *Lan H., Wang K.* Exact solutions for some nonlinear equations // *Phys. Lett. A.* 1989. V. 137. № 7–8. P. 369–372.
40. *Porubov A.V.* Exact travelling wave solutions of nonlinear evolution equation of surface waves in a convecting fluid // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1993. V. 26. № 17. P. L797–L800.
41. *Olver P.J.* Hamilton and non-hamilton models for water waves // *Lecture Notes in Physics.* N.Y.: Springer, 1984. № 195. P. 273–290.

Москва

Поступила в редакцию  
6.II.2001

e-mail: kudr@dampe.mephi.ru