3. Нелинейные системы двух дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа

3.1. Системы уравнений массо- и теплообмена реагирующих сред и уравнений математической биологии вида $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F(u,w)$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=G(u,w)$

Предварительные замечания. Подобные системы дифференциальных уравнений используются для описания стационарных процессов в теории массотеплопереноса реагирующих сред, в теории химических реакторов, в теории горения, в математической биологии и биофизике.

В общем случае такие системы инвариантны относительно сдвигов по независимым переменным (и относительно замен x на $-x$ и y на $-y$) и допускает точные решения типа бегущей волны $u_m = u_m(z)$, где $z = k_1 x + k_2 y$. Такие решения, а также вырожденные решения, когда одна из искомых величин равны нулю, здесь не рассматриваются.

Далее $f(\ldots)$, $g(\ldots)$, $h(\ldots)$ — произвольные функции соответствующего аргумента.

1. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=uf(au-bw)+g(au-bw),$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=wf(au-bw)+h(au-bw).$$

2. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^{\lambda u}f(\lambda u-\sigma w),\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=e^{\sigma w}g(\lambda u-\sigma w).$$

3. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=uf\Big(\frac{u}{w}\Big),\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=wg\Big(\frac{u}{w}\Big).$$

4. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=uf\Big(\frac{u}{w}\Big)+\frac{u}{w}h\Big(\frac{u}{w}\Big),\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=wg\Big(\frac{u}{w}\Big)+h\Big(\frac{u}{w}\Big).$$

5. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u^n f\Big(\frac{u}{w}\Big),\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=w^n g\Big(\frac{u}{w}\Big).$$

6. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=uf(u^n w^m),\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=wg(u^n w^m).$$

7. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=uf(u^2+w^2)-wg(u^2+w^2),$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=wf(u^2+w^2)+ug(u^2+w^2).$$

8. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=uf(u^2-w^2)+wg(u^2-w^2),$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=wf(u^2-w^2)+ug(u^2-w^2).$$

3.2. Другие системы

9. $$ax\frac{\partial u}{\partial x} + ay\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f(u,w),$$
$$ax\frac{\partial w}{\partial x} + ay\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - g(u,w).$$

10. $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f\left(t, \frac{u}{w}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + ug\left(t, \frac{u}{w}\right),$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f\left(t, \frac{u}{w}\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + wh\left(t, \frac{u}{w}\right).$$