计算机科学中的数学基础

陈昱衡 521021910939

2023 年 3 月 29 日

Warmup1

1 What is 11^4? Why is this number easy to compute, for a person who knows binomial coefficients?

利用二项式定理：

$$11^4 = (10+1)^4 \tag{1}$$
$$= \binom{4}{4}10^4 + \binom{4}{3}10^3 + \binom{4}{2}10^2 + \binom{4}{1}10 + 1 \tag{2}$$
$$= 10000 + 4000 + 600 + 40 + 1 \tag{3}$$
$$= 14641 \tag{4}$$

Warmup2

2 For which value(s) of k is $\binom{n}{k}$ a maximum, when n is a given positive integer? Prove your answer.

利用定义，我们做相邻两个二项式之商，有：

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{\frac{n\times(n-1)\times\cdots(n-k+1)}{1\times2\times\cdots\times k}}{\frac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+2)}{1\times2\times\cdots\times(k-1)}} \tag{5}$$
$$= \frac{n-k+1}{k} \tag{6}$$
$$\tag{7}$$

现在需要分情况讨论 $n-k+1$ 和 k 的大小关系。

于是有，

1. n 是偶数，可知，$k=\frac{n}{2}$ 时，有 $\frac{n-k+1}{k}\geq 1$, $k=\frac{n}{2}+1$ 时，有 $\frac{n-k+1}{k}\leq 1$，故 $\binom{n}{\frac{n}{2}}\geq\binom{n}{\frac{n}{2}-1}$ 且 $\binom{n}{\frac{n}{2}}\geq\binom{n}{\frac{n}{2}+1}$，故此时 $k=\frac{n}{2}$ 时 $\frac{n}{k}$ 取最值。
2. n 是奇数，可知，$k=\frac{n+1}{2}$ 时，有 $\frac{n-k+1}{k}=1$, 故 $\binom{n}{\frac{n+1}{2}}=\binom{n}{\frac{n-1}{2}}$, 故当 $k=\frac{n+1}{2}$ 或 $\frac{n-1}{2}$ 时，$\binom{n}{k}$ 取最大值。

Warmup3

3 Prove the hexagon property,

$$\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k}\binom{n+1}{k+1}\binom{n}{k-1}.$$

按照二项式的定义将两侧的式子展开，有：

$$\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} \tag{8}$$

$$= \frac{(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-k+1)\times n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k)\times(n+1)\times n\times\cdots\times(n-k+2)}{(k-1)\times(k-2)\times\cdots\times 1\times(k+1)\times k\times\cdots\times 1\times k\times(k-1)\times\cdots 1} \tag{9}$$

$$= \frac{(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-k+1)\times n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+2)(n-k+1)(n-k)\times(n+1)\times n\times\cdots\times(n-k+2)}{(k-1)\times(k-2)\times\cdots\times 1\times(k+1)\times k\times\cdots\times 1\times k\times(k-1)\times\cdots 1} \tag{10}$$

$$= \frac{(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-k+1)(n-k)\times n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+2)\times(n+1)\times n\times\cdots\times(n-k+2)(n-k+1)}{(k-1)\times(k-2)\times\cdots\times 1\times(k+1)\times k\times\cdots\times 1\times k\times(k-1)\times\cdots 1} \tag{11}$$

只需将分母中的三个项稍微调整顺序即可

Warmup4

4 Evaluate $\binom{-1}{k}$ by negating (actually un-negating) its upper index.

根据对整数域二项式的定义，有

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)^k}{k!} \tag{12}$$

$$= \frac{(-1)\times(-2)\cdots\times(-k)}{k!} \tag{13}$$

$$= (-1)^k \times \frac{k(k-1)\times\cdots\times 2\times 1}{k!} \tag{14}$$

$$= (-1)^k \quad k \geq 0 \tag{15}$$