

计算机科学中的数学基础 Exercise20

陈昱衡 521021910939

2023 年 5 月 10 日

1 Basics12

12 How many ways are there to put the numbers $\{1, 2, \dots, 2n\}$ into a $2 \times n$ array so that rows and columns are in increasing order from left to right and from top to bottom? For example, one solution when $n = 5$ is

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

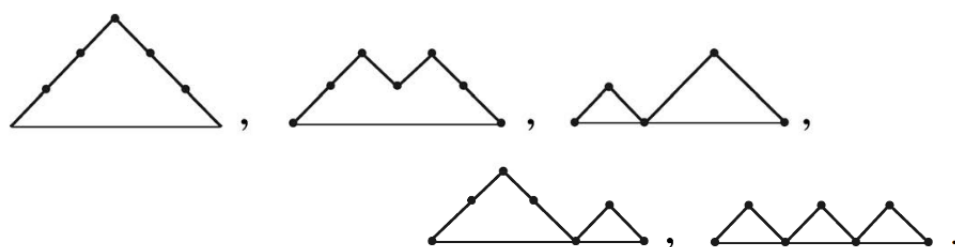
借鉴 7.5 节中例 4 的思想方法，我们可以将本题转换为有多少个由 $+1$ 和 -1 组成的数列 $\langle a_1, a_2, \dots, a_{2n} \rangle$ ，使得 $a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} = 0$ 。

其中， $a_i = 1$ 表明将数字 i 放在第一行， $a_i = -1$ 表明将数字 i 放在第二行。

根据题意，为了维持一行中相邻数字的大小关系以及上下相邻的两个数字的大小关系，我们可以得到以下的约束条件：

$$\sum_{i=1}^n k(k \leq n) a_i \geq 0 \quad (1)$$

所以，本题可以转换为教材中的图形表示，



所以，借鉴教材中的推到过程，不妨令结果为 C_n ，则有：

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \dots + C_{n-1} C_0 \quad (2)$$

$$C_n = \sum_k C_k C_{n-1-k} + [n=0] \quad (3)$$

$$C(z) = C(z) \cdot zC(z) \quad (4)$$

$$(5)$$

所以本题结果为卡特兰数 C_n 。