计算机科学中的数学基础–Exercise13

陈昱衡 521021910939

2023 年 4 月 1 日

Warmup5

5 Let p be prime. Show that $\binom{p}{k} \bmod p = 0$ for $0 < k < p$. What does this imply about the binomial coefficients $\binom{p-1}{k}$?

将 $(\binom{p}{k})$ 展开，有：

$$\binom{p}{k} = \frac{p \times (p-1) \times \cdots \times (p-k+1)}{1 \times 2 \times \cdots \times (k-1) \times k} \tag{1}$$

以为 p 为素数，所以 p 无法与分母中的任何一项消去公因式，所以，最后相当于 mp，故 $(\binom{p}{k}) \bmod p = 0$. 而由式 5.8,$(\binom{p}{k})$ 可以拆开为：$(\binom{p-1}{k}) + \left(\binom{p-1}{k-1}\right)$。由 $\binom{p}{k} \bmod p = 0$, 故有

$\binom{p-1}{k} + \binom{p-1}{k-1} \bmod p = 0$;

对于 $k = 0$, 有 $\binom{p-1}{k} \bmod p = 1$, 因此，由于相邻两个二项式 $(\binom{p-1}{k-1} + \binom{p-1}{k}) \bmod p = 0$, 因此根据 $k = 0$ 的情况，可以推出 $k = 1$ 的情况，因此，可以依次推导。最终由结论 $\binom{p-1}{k} \bmod p = (-1)^k$.

Warmup6

6 Fix up the text's derivation in Problem 6, Section 5.2, by correctly applying symmetry.

观察题目，我们发现，求和式的求和范围由 $k \geq 0$ 变为了 k, 因此，我们需要额外考虑这两个范围的差异.

因为二项式系数 $\binom{n}{k}$ 中，n 无范围限制,k 必须为非负数，因此，可以得到，我们还需考虑 $k = -1$ 时产生的影响.

$k = -1$ 时的项为

$$\frac{1}{n+1}\binom{n-1}{n}\binom{n+1}{0}(-1)^{-1} \tag{2}$$
$$= \frac{(-1)^{-1}}{n+1}\binom{n-1}{n} \tag{3}$$
$$= \frac{(-1)^{-1}}{n+1}\frac{(n-1) \times (n-1) \times \cdots \times (n-1-n+1)}{n \times (n-1) \times \cdots \times 1} \tag{4}$$
$$\tag{5}$$

故，当 $n = 0$ 时，为 1，其余情况，为 0.

Basics13

13 Find relations between the superfactorial function $P_n = \prod_{k=1}^{n} k!$ of exercise 4.55, the hyperfactorial function $Q_n = \prod_{k=1}^{n} k^k$, and the product $R_n = \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

写开上面三个式子，有

$$\begin{align}
P_n &= \prod_{k=1}^{n} k! \tag{6}\\
&= 1! \times 1 \times 2 \times \cdots \times n! \tag{7}\\
&= 1^n \times 2^{n-1} \times 3^{n-2} \times \cdots \times (n-1)^2 \times n \tag{8}\\
Q_n &= \prod_{k=1}^{n} k^k \tag{9}\\
&= 1^1 \times 2^2 \times \cdots \times (n-1)^{n-1} \times n^n \tag{10}\\
R_n &= \prod_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \tag{11}\\
&= \frac{n}{1} \times \frac{n \times (n-1)}{1 \times 2} \times \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{1 \times 2 \times 3} \times \cdots \times \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{1 \times 2 \times \cdots \times k} \tag{12}\\
&= \frac{n^n \times (n-1)^{n-1} \times \cdots \times 1}{1^n \times 2^{n-1} \times \cdots \times n} \tag{13}\\
&= \frac{Q_n}{P_n} \tag{14}
\end{align}$$

故，有 $R_n = \frac{Q_n}{P_n}$.