计算机科学中的数学基础 Exercise15

陈昱衡 521021910939

2023 年 4 月 5 日

Warmup7

7 Is (5.34) true also when $k < 0$?

根据之前证明过的结论：

17 Show that the following formulas can be used to convert between rising and falling factorial powers, for all integers m:

$$x^{\overline{m}} = (-1)^m(-x)^{\underline{m}} = (x+m-1)^{\underline{m}} = 1/(x-1)^{\underline{-m}};$$
$$x^{\underline{m}} = (-1)^m(-x)^{\overline{m}} = (x-m+1)^{\overline{m}} = 1/(x+1)^{\overline{-m}}.$$

(The answer to exercise 9 defines $x^{\overline{-m}}$.)

可知，对于本题，将 k 换为 $-k$，有

$$r^{\underline{-k}}(r-\frac{1}{2})^{\underline{-k}} = \frac{1}{r^{\bar{k}}}\frac{1}{(r+\frac{1}{2})^{\bar{k}}} \tag{1}$$

同时也有，

$$r^{\bar{k}}(r+\frac{1}{2})^{\bar{k}} = \frac{(2r)^{\overline{2k}}}{2^{2k}} \tag{2}$$

Warmup8

8 Evaluate

$$\sum_k \binom{n}{k}(-1)^k(1-k/n)^n\,.$$

What is the approximate value of this sum, when n is very large? *Hint:* The sum is $\Delta^n f(0)$ for some function f.

由提示，取 $f(k) = (\frac{k}{n}-1)^n$，求 n 阶导，有其 0 次项系数为 n^{-n}.

再由 5.40 中的结论，这个合式为

$$\frac{n!}{n^n} \tag{3}$$

当 n 趋近于无穷时，由斯特林公式，

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}. \tag{4}$$

Basics14

14 Prove identity (5.25) by negating the upper index in Vandermonde's convolution (5.22). Then show that another negation yields (5.26).

首先观察求和下标，可以发现，题目中对 $k \le l$ 求和就相当于 5.25 中对所有 k 求和。因为 $\binom{m}{k}$ 当 $k < 0$ 是为 0. 故，有

$$\sum_{k\le l}\binom{l-k}{m}\binom{s}{k-n}(-1)^k = \sum_k(-1)^{l-k-m}\binom{-m-1}{l-k-m}\binom{s}{k-n} \tag{5}$$

$$= \binom{s-m-l}{l-m-n}(-1)^{l+m} \tag{6}$$

将 s 使用 $-1-n-q$ 替换即可得 5.26

Warmup15

15 What is $\sum_k \binom{n}{k}^3(-1)^k$? *Hint:* See (5.29).

根据式 (5.29), 观察结论，可以发现，可以令 $a = b = c = \frac{n}{2}$.
若 n 为奇数，显然，原式和为 0.
若 n 为偶数，将 $s = b = c = \frac{n}{2}$ 代入 5.29，即有

$$\sum_k\binom{n}{k}(-1)^k = (-1)^{\frac{n}{2}}(\frac{\frac{3n}{2}!}{\frac{m}{2}!}^3) \tag{7}$$