计算机科学中的数学基础 Exercise16

陈昱衡 521021910939

2023 年 4 月 8 日

Warmup1

1 An eccentric collector of $2 \times n$ domino tilings pays \$4 for each vertical domino and \$1 for each horizontal domino. How many tilings are worth exactly \$m by this criterion? For example, when $m = 6$ there are three solutions: , , and .

我们可以仿照课本解决多米诺牌的思路，使用 z 替换水平放置的牌，使用 z^4 替换垂直放置的牌。同时，因为将两个叠放的多米诺牌看做一个整体，所以有

$$T = 1 + z^4T + z^2T \tag{1}$$

$$T = \frac{1}{1 - z^2 - z^4} \tag{2}$$

这个式子类似于斐波那契数，只不过将 z 变为 z^2, 故当 m 为奇数时，答案为零，当 m 为偶数时，有

$$T_{\frac{m}{2}} = F_{\frac{m}{2}+1} \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

Warmup2

2 Give the generating function and the exponential generating function for the sequence $\langle 2, 5, 13, 35, \ldots \rangle = \langle 2^n + 3^n \rangle$ in closed form.

由课本中表 7-1 中的结论，由已知的求和式和生成函数的线性性，有

$$2^n + 3^n = \frac{1}{1-2z} + \frac{1}{1-3z} \tag{5}$$

$$G(z) = \frac{1}{1-2z} + \frac{1}{1-3z} \tag{6}$$

$$\tag{7}$$

由指数生成函数及其封闭性的定义，等比数列 $< 1, p, p^2, \cdots >$ 的指数生成函数是:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{p^n x^n}{n!} = e^{px} \tag{8}$$

再结合线性性，有

$$G(\hat{z}) = e^{2z} + e^{3z} \tag{9}$$

$$\tag{10}$$

Basics6

6 Show that the recurrence (7.32) can be solved by the repertoire method, without using generating functions.

使用成套方法，发现递归式中有三个系数，故令

$$g_0 = \alpha \tag{11}$$
$$g_1 = \beta \tag{12}$$
$$g_n = g_{n-1} + g_{n-2} + (-1)^n\gamma \tag{13}$$
$$\tag{14}$$

同时，g_n 可表示为

$$g_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma \tag{15}$$

观察这组式子，发现，使用 n 的多项式是无法配平的，因此，可以考虑 2^n,$(-1)^n$,$(-1)^n n$; 将 $g_n = 2^n$ 代入，有

$$\alpha = 1 \tag{16}$$
$$\beta = 2 \tag{17}$$
$$\gamma = 0 \tag{18}$$
$$2^n = A(n) + 2B(n) \tag{19}$$
$$\tag{20}$$

将 $g_n = (-1)^n$ 代入，有

$$\alpha = 1 \tag{21}$$
$$\beta = -1 \tag{22}$$
$$\gamma = 0 \tag{23}$$
$$(-1)^n = A(n) - B(n) \tag{24}$$
$$\tag{25}$$

将 $g_n = (-1)^n n$ 代入，有

$$\alpha = 0 \tag{26}$$
$$\beta = -1 \tag{27}$$
$$\gamma = 3 \tag{28}$$
$$(-1)^n n = -B(n) + 3C(n) \tag{29}$$
$$\tag{30}$$

对上述三组关于 $A(n), B(n), C(n)$ 的线性方程求解，有

$$A(n) = \frac{2^n + 2\times(-1)^n}{3} \tag{31}$$
$$B(n) = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \tag{32}$$
$$C(n) = \frac{2^n + (3n-1)(-1)^n}{9} \tag{33}$$
$$\tag{34}$$

因此，

$$g_n = A(n) + B(n) + C(n) \tag{35}$$
$$= \frac{7}{9}2^n + (\frac{1}{3}n + \frac{2}{9})(-1)^n \tag{36}$$