计算机科学中的数学基础-Exercise 17

陈昱衡 521021910939

2023 年 4 月 21 日

Warmup5

5 Find a generating function $S(z)$ such that

$$[z^n]\, S(z) = \sum_k \binom{r}{k}\binom{r}{n-2k}.$$

这道题可以通过 $[z^n]S(z)$ 的含义入手。
$[z^n]S(z)$ 的含义是生成函数 $S(z)$ 中 z^n 项前面的系数.
即,

$$S(z) = \sum_n \sum_k \binom{r}{k}\binom{r}{n-2k} z^n \tag{1}$$

通过观察所给系数 $\binom{r}{k}$ 和 $\binom{r}{n-2k}$, 可知, 可以通过二项式来凑出系数.
这两个二项式是 $(1+z)^n$ 和 $(1+z^2)^n$. 所以有

$$(1+z)^r(1+z^2)^r = \sum_n \sum_n \binom{r}{k}\binom{r}{n-2k} z^n \tag{2}$$

$$= S(z) \tag{3}$$

有因为

$$(1+z)^r(1+z^2)^r = (1+z+z^2+z^3)^r \tag{4}$$

所以

$$S(z) = (1+z+z^2+z^3)^r \tag{5}$$

Basics8

8 What is $[z^n]\,\big(\ln(1-z)\big)^2/(1-z)^{m+1}$?

看到题干中待求解式子, 第一个想法是卷积。
即, 将 $\frac{1}{(1-z)^{m+1}}$,$(ln(1-z))^2 = (-ln(\frac{1}{1-z}))^2$ 看成卷积的三个部分。
利用特定生成函数的封闭形式 $ln\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}z^n$, 以及 $\frac{1}{(1-z)^{m+1}} = \sum_{n\geq 0}\binom{m+n}{n}z^n$, 所以, 卷积形式为

$$\frac{(ln(1-z))^2}{(1-z)^{m+1}} = \sum_{i+j+k=n} \frac{1}{i}z^i\frac{1}{j}z^j\binom{m+k}{k}z^k \tag{6}$$

但是这种变换无法求解第 9 问.
考虑另外一种思路.

令 $f(x)=(1-z)^{-x-1}$, 利用生成函数进行转换，有

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(1-z)^{x+1}} && (7)\\ &= \sum_{n\geq 0}\binom{n+x}{n}z^n && (8)\\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{(n+x)(n+x-1)\cdots(x+1)}{n!}z^n && (9) \end{aligned}$$

因为需要 $ln(1-z)$ 项，所以需要对 $f(x)$ 求导，有

$$\begin{aligned} f\prime(x) &= -(1-z)^{-x-2}ln(1-z) && (10)\\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{d}{dx}\frac{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)}{n!}z^n && (11)\\ &= \sum_{n\geq 0}(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)(\frac{1}{x+n}+\cdots+\frac{1}{x+1}) && (12)\\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)}{n!}z^n(H_{x+n}-H_x) && (13) \end{aligned}$$

同理，再求一次导，有

$$\begin{aligned} f^{''}(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)}{n!}z^n((H^2_{x+n}-H_x)^2-(H^{(2)}_{x+n}-H^{(2)}_x)) && (14)\\ && (15) \end{aligned}$$

所以，有

$$\begin{aligned} S(z) &= (1-z)^{-m-1}(ln(1-z))^2 && (16)\\ &= f^{''}(x) && (17)\\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)}{n!}z^n((H^2_{x+n}-H_x)^2-(H^{(2)}_{x+n}-H^{(2)}_x)) && (18)\\ &= \sum_{n\geq 0}\binom{m+n}{n}z^n((H^2_{x+n}-H_x)^2-(H^{(2)}_{x+n}-H^{(2)}_x)) && (19)\\ && && (20) \end{aligned}$$

Basics9

9 Use the result of the previous exercise to evaluate $\sum_{k=0}^{n} H_k H_{n-k}$.

根据卷积，我们可以得到

$$\begin{aligned} \frac{(ln(1-z))^2}{(1-z)^2} = \sum_{n\geq 0}(\sum_{k\geq 0}H_kH_{n-k})z^n && (21)\\ && (22) \end{aligned}$$

所以，根据第八题的结论，只需令 $m=1$，就有

$$
\begin{aligned}
[z^n]S(z) &= \frac{(ln(1-z))^2}{(1-z)^2} && (23)\\
&= \sum_{k\geq 0} H_k H_{n-k} && (24)\\
&= \binom{n+1}{n}((H_{n+1}-H_1)^2-(H_{n+1}^{(2)}-H_1^{(2)})) && (25)\\
&= (n+1)(H_n^2-H_n^{(2)})-2n(H_n-1) && (26)\\
& && (27)
\end{aligned}
$$