计算机科学中的数学基础 Exercise12

陈昱衡 521021910939

2023 年 3 月 25 日

Warmup10

10 Compute $\varphi(999)$.

由

$$\varphi(m_1m_2) = \varphi(m_1)\varphi(m_2) \quad \text{if } m_1 \perp m_2 \tag{1}$$

可知，

$$\begin{aligned}
\varphi(999) &= \varphi(27) \times \varphi(37) &(2)\\
&= 18 \times 36 &(3)\\
&= 648 &(4)
\end{aligned}$$

或者，也可以由公式 (4.53)

$$\begin{aligned}
\varphi(999) &= 999 \times (1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{37}) &(5)\\
&= 648 &(6)
\end{aligned}$$

Warmup11

11 Find a function $\sigma(n)$ with the property that

$$g(n) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} f(k) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(n) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \sigma(k)\, g(n-k)\,.$$

(This is analogous to the Möbius function; see (4.56).)

类比于莫比乌斯函数，我们可以得到 $\sigma(n)$ 的如下定义：

$$\begin{aligned}
\sigma(0) &= 1 &(7)\\
\sigma(1) &= -1 &(8)\\
& &(9)
\end{aligned}$$

代入验证：

$$\begin{aligned}
f(n) &= g(n) - g(n-1) &(10)\\
f(n) &= g(0) \quad \text{if n} = 0 &(11)\\
& &(12)
\end{aligned}$$

则,

$$g(n) = g(n) - g(n-1) + g(n-1) - g(n-2) + g(n-2) + \cdots + g(1) - g(0) + g(0) \tag{13}$$
$$= \sum_{0 \le k \le n} f(n) \tag{14}$$

Warmup12

12 Simplify the formula $\sum_{d \backslash m} \sum_{k \backslash d} \mu(k)\, g(d/k)$.

由 (4.56),

$$g(m) = \sum_{d \backslash m} f(d) \Leftrightarrow f(m) = \sum_{d \backslash m} \mu(d) g(\frac{m}{d}) \tag{15}$$

有:

$$\sum_{d \backslash m} \sum_{k \backslash d} \mu(k) g(d/k) = \sum_{d \backslash m} f(k) \tag{16}$$
$$= g(m) \tag{17}$$

Warmup13

13 A positive integer n is called *squarefree* if it is not divisible by m^2 for any $m > 1$. Find a necessary and sufficient condition that n is squarefree,

a in terms of the prime-exponent representation (4.11) of n;

b in terms of $\mu(n)$.

1. 由素数幂的定义：可知，若 n 不为任何一个 m^2 的整数倍，则其包含的任何一个质数的次数也都不超过两次，因此有：

$$m_p \le 1 \tag{18}$$

2. 由 (4.57),

$$\mu(m) = \prod \mu(p^{m_p}) \tag{19}$$
$$= \begin{cases} (-1)^r, m = p_1 p_2 \cdots p_r, \\ 0, p^2 \backslash m \end{cases} \tag{20}$$

故，可知，若用 $\mu(n)$ 表示，即为 $\mu(n) \neq 0$

Basics18

18 Show that if $2^n + 1$ is prime then n is a power of 2.

利用反证法，若 $(2^n + 1)$ 是素数且 n 不是 2^m，则，不妨令：

$$n = km \quad \text{(k is odd)} \tag{21}$$

则,

$$2^n = 2^{km} \tag{22}$$

可拆解为:

$$2^{km} = (2^m + 1)(2^{n-m} - 2^{n-2m} + \cdots - 2^m + 1) \tag{23}$$

则显然 2^n 不是素数。而若 $n = 2^m$, 则无法拆解为这种形式，因为

$$(2^{n-m} - 2^{n-2m} \cdots - 2^m + 1) \tag{24}$$

有奇数项。