# 计算机科学中的数学基础 W2-2

陈昱衡 521021910939

2023 年 2 月 25 日

## Warmup6

**6** What is the value of $\sum_k [1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n]$, as a function of j and n?

根据艾弗森约定，该合式是对所有满足 $1 \le j \le k \le n$ 的整数 k 的个数。
因此，由如下讨论：

$$sum = \begin{cases} 0 & \text{if } j < 1\ j > n, \\ n-j+1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

## Basics11

**11** The general rule (2.56) for summation by parts is equivalent to

$$\sum_{0 \leqslant k < n} (a_{k+1} - a_k) b_k = a_n b_n - a_0 b_0 - \sum_{0 \leqslant k < n} a_{k+1}(b_{k+1} - b_k), \quad \text{for } n \geqslant 0.$$

Prove this formula directly by using the distributive, associative, and commutative laws.

为了证明这个等式，等价于证明:

$$\sum_{0 \le k < n} (a_{k+1} - a_k) b_k + \sum_{0 \le k < n} a_{k+1}(b_{k+1} - b_k) = a_n b_n - a_0 b_0 \tag{1}$$

对等式左侧使用分配律:

$$\sum_{0 \le k < n} (a_{k+1} - a_k) b_k + \sum_{0 \le k < n} a_{k+1} b_{k+1} - \sum_{0 \le k < n} a_{k+1} b_k \tag{2}$$

继续使用结合律:

$$\sum_{0 \le k < n} (a_{k+1} - a_k - a_{k+1}) b_k + \sum_{0 \le k < n} a_{k+1} b_{k+1} \tag{3}$$

即:

$$\sum_{0 \le k < n} -a_k b_k + \sum_{0 \le k < n} a_{k+1} b_{k+1} \tag{4}$$

使用结合律:

$$\sum_{1 \le k \le n-1} (a_k b_k - a_k b_k) + a_n b_n - a_0 b_0 \tag{5}$$

即:

$$a_n b_n - a_0 b_0 \tag{6}$$

得到等式右侧，证毕。

# Basics12

**12** Show that the function $p(k) = k + (-1)^k c$ is a permutation of the set of all integers, whenever $c$ is an integer.

我们可以取一对整数 m,n，满足 $p(m) = p(n) - 1$。不是一般性，不妨约定 m 为奇数，n 为偶数, 得到 m 和 n 的关系式：m = n + 2c - 1，该等式刻画的 m，n 关系满足约定。

由此，取数列$\cdots$ ，m-2 , m, m+2,$\cdots$,$\cdots$,n-2,n,n+2,$\cdots$ ，因为 m,n 在函数 p 作用下映射为两个连续的数，因此，由以上两个数列产生的数字也相邻，由此得到了关于整数集的一一映射关系。

即可以得出结论：函数 p 是整数集的一个全排列。

# Basics13

**13** Use the repertoire method to find a closed form for $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2$.

由题意，我们可以设：

$$S_n = S_{n-1} + (-1)^n(\beta + n\gamma = n^2\eta) \tag{7}$$

$$S_0 = \alpha \tag{8}$$

由成套方法，我们可以令：

$$S_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma + D(n)\delta \tag{9}$$

$$S_0 = \alpha \tag{10}$$

$$\tag{11}$$

由成套方法的分析过程，我们首先令：

$$S_n = 1 \tag{12}$$

得到，

$$A(n) = 1 \tag{13}$$

再令：

$$S_n = (-1)^n \tag{14}$$

得到，

$$A(n) + 2B(n) = (-1)^n \tag{15}$$

再令：

$$S_n = (-1)^n n^2 \tag{16}$$

得到，

$$B(n) - 2C(n) + 2D(n) = (-1)^n n^2 \tag{17}$$

由以上三个方程，我们可以得到：

$$2D(n) = (-1)^n(n^2 + n) \tag{18}$$

由此，我们可以得到：

$$D(n) = \frac{(-1)^n(n^2 + n)}{2} \tag{19}$$