计算机科学中的数学基础 Exercise19

陈昱衡 521021910939

2023 年 5 月 6 日

1 Basics10

10 Set r = s = −1/2 in identity (7.62) and then remove all occurrences of 1/2 by using tricks like (5.36). What amazing identity do you deduce?

7.62 中的等式：

$$\sum_k \binom{r+k}{k}\binom{s+n-k}{n-k}(H_{r+k}-H_r)=\binom{r+s+n+1}{n}(H_{r+s+n+1}-H_{r+s+1})\,. \tag{7.62}$$

令 $r=s=-\frac{1}{2}$, 有

$$\sum_k \binom{k-\frac{1}{2}}{k}\binom{n-k-\frac{1}{2}}{n-k}(H_{k-\frac{1}{2}}-H_{-\frac{1}{2}})=\binom{n}{n}(H_n-H_0) \tag{1}$$

利用 5.36 中的技巧，即

$$\binom{n-1/2}{n}=\binom{2n}{n}\Big/2^{2n}\,,\quad n\text{是整数}. \tag{5.36}$$

有，

$$\sum_k \binom{2k}{k}\frac{1}{2^{2k}}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{2^{2(n-k)}}(H_{k-\frac{1}{2}}-H_{-\frac{1}{2}})=H_n \tag{2}$$

$$\sum_k \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{2^{2n}}(H_{k-\frac{1}{2}}-H_{-\frac{1}{2}})=H_n \tag{3}$$

将 $H_{k-\frac{1}{2}}-H_{-\frac{1}{2}}$ 展开，有：

$$H_{k-\frac{1}{2}}-H_{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{k-\frac{1}{2}}+\frac{1}{k-\frac{3}{2}}+\frac{1}{k-\frac{5}{2}}+\cdots+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \tag{4}$$

$$=\frac{2}{2k-1}+\frac{2}{2k-3}+\frac{2}{2k-5}+\cdots+\frac{2}{1} \tag{5}$$

$$=2H_{2k}-H_k \tag{6}$$

所以，带入整理有

$$\sum_k \binom{2k}{n}\binom{2n-2k}{n-k}(2H_{2k}-H_k)=4^nH_n \tag{7}$$

2 Basics11

11 This problem, whose three parts are independent, gives practice in the manipulation of generating functions. We assume that $A(z) = \sum_n a_n z^n$, $B(z) = \sum_n b_n z^n$, $C(z) = \sum_n c_n z^n$, and that the coefficients are zero for negative n.

a If $c_n = \sum_{j+2k \leqslant n} a_j b_k$, express C in terms of A and B.

b If $nb_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k a_k/(n-k)!$, express A in terms of B.

c If r is a real number and if $a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} b_{n-k}$, express A in terms of B; then use your formula to find coefficients $f_k(r)$ such that $b_n = \sum_{k=0}^{n} f_k(r) a_{n-k}$.

本题中的三个小问，只要根据卷积的形式，根据系数的形式找到对应的生成函数，然后进行卷积即可.

a

观察系数，由于限制条件为 $j + 2k \le n$，而 k 对应的系数为 b_k，如果盲目进行平方，回导致系数不统一。因此，在 B 的生成函数中，可以带入 z^2。

于是有，

$$A(z)[z^j] = a_j z^j \tag{8}$$
$$B(z)[z^{2k}] = b_k z^{2k} \tag{9}$$
$$\tag{10}$$

因为

$$C(z)[z^n] = c_n z^n \tag{11}$$
$$= \sum_{0 \le m \le n} \sum_{j+2k \le m} a_j b_k z^n \tag{12}$$
$$\tag{13}$$

故还需要卷积一个生成函数 $\frac{1}{1-z}$。将三者进行卷积，有

$$A(z)B(z^2)\frac{1}{1-z}[z^n] = \sum_{j+2k \le n} a_j b_k z^n \tag{14}$$
$$= c_n z^n \tag{15}$$
$$\tag{16}$$

故，

$$C(z) = A(z)B(z^2)\frac{1}{1-z} \tag{17}$$
$$\tag{18}$$

b

观察题干中系数的关系等式，可以将 $\frac{2^k a_k}{(n-k)!}$ 拆分为 $2^k s_k$ 和 $\frac{1}{(n-k)!}$ 来进行处理。

对于 A 的生成函数，我们需要带入 $\frac{z}{2}$。

对于第二部分, 已有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z \tag{19}$$

对于 B 的系数 nb_n, 我们可以利用积分与求导的关系来处理多出来的系数 n。
即

$$B^{'}(z)[z^{n-1}] = nb_n z^{n-1} \tag{20}$$

$$\tag{21}$$

对 A 和 e^z 进行卷积，有

$$A(2z)e^z[z^n] = (\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(n-k)!}2^k)z^n \tag{22}$$

$$\tag{23}$$

带入 B，有

$$zB^{'}(z)[z^n] = nb_n z^n \tag{24}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k a_k}{(n-k)!} z^n \tag{25}$$

$$= A(2z)e^z[z^n] \tag{26}$$

$$\tag{27}$$

所以有

$$zB^{'}(z) = A(2z)e^z \tag{28}$$

所以有

$$A_(z) = \frac{\frac{z}{2}B^{'}(\frac{z}{2})}{e^{\frac{z}{2}}} \tag{29}$$

$$= \frac{zB^{'}(\frac{z}{2})}{2e^{\frac{z}{2}}} \tag{30}$$

c

题干中的系数 $\binom{r+k}{k}$ 对应的生成函数是 $\frac{1}{(1-z)^{r+1}}$.
因此，有

$$\frac{B(z)}{(1-z)^{r+1}}[z^n] = \sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} b_{n-k} z^n \tag{31}$$

$$= a_n z^n \tag{32}$$

$$= A(z)[z^n] \tag{33}$$

$$\tag{34}$$

所以有

$$A(z) = \frac{B(z)}{(1-z)^{r+1}} \tag{35}$$

所以，有

$$B(z) = A(z)(1-z)^{r+1} \tag{36}$$

$$A(z)(1-z)^{r+1}[z^n] = \sum_{k=0}^{n} \binom{r+1}{k} a_{n-k} z^{n-k} \tag{37}$$

$$= \sum_{k=0}^{0} (-1)^k \binom{r+1}{k} a_{n-k} z^n \tag{38}$$

$$\tag{39}$$

所以，有

$$f_k(r) = (-1)^k \binom{r+1}{k} \tag{40}$$

$$\binom{n-1/2}{n} = \binom{2n}{n} \Big/ 2^{2n}\text{，}n\text{是整数.} \tag{5.36}$$