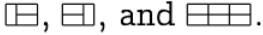


# 计算机科学中的数学基础 Exercise16

陈昱衡 521021910939

2023 年 4 月 8 日

## Warmup1

- 1 An eccentric collector of  $2 \times n$  domino tilings pays \$4 for each vertical domino and \$1 for each horizontal domino. How many tilings are worth exactly \$m by this criterion? For example, when  $m = 6$  there are three solutions: .

我们可以仿照课本解决多米诺牌的思路，使用  $z$  替换水平放置的牌，使用  $z^4$  替换垂直放置的牌。同时，因为将两个叠放的多米诺牌看做一个整体，所以有

$$T = 1 + z^4T + z^2T \quad (1)$$

$$T = \frac{1}{1 - z^2 - z^4} \quad (2)$$

这个式子类似于斐波那契数，只不过将  $z$  变为  $z^2$ ，故当  $m$  为奇数时，答案为零，当  $m$  为偶数时，有

$$T_{\frac{m}{2}} = F_{\frac{m}{2}+1} \quad (3)$$

$$(4)$$

## Warmup2

- 2 Give the generating function and the exponential generating function for the sequence  $\langle 2, 5, 13, 35, \dots \rangle = \langle 2^n + 3^n \rangle$  in closed form.

由课本中表 7-1 中的结论，由已知的求和式和生成函数的线性性，有

$$2^n + 3^n = \frac{1}{1 - 2z} + \frac{1}{1 - 3z} \quad (5)$$

$$G(z) = \frac{1}{1 - 2z} + \frac{1}{1 - 3z} \quad (6)$$

$$(7)$$

由指数生成函数及其封闭性的定义，等比数列  $\langle 1, p, p^2, \dots \rangle$  的指数生成函数是：

$$\sum_{n \geq 0} \frac{p^n x^n}{n!} = e^{px} \quad (8)$$

再结合线性性，有

$$\hat{G}(z) = e^{2z} + e^{3z} \quad (9)$$

$$(10)$$

## Basics6

6 Show that the recurrence (7.32) can be solved by the repertoire method, without using generating functions.

使用成套方法，发现递归式中有三个系数，故令

$$g_0 = \alpha \quad (11)$$

$$g_1 = \beta \quad (12)$$

$$g_n = g_{n-1} + g_{n-2} + (-1)^n \gamma \quad (13)$$

$$(14)$$

同时， $g_n$  可表示为

$$g_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma \quad (15)$$

观察这组式子，发现，使用  $n$  的多项式是无法配平的，因此，可以考虑  $2^n, (-1)^n, (-1)^n n$ ；将  $g_n = 2^n$  代入，有

$$\alpha = 1 \quad (16)$$

$$\beta = 2 \quad (17)$$

$$\gamma = 0 \quad (18)$$

$$2^n = A(n) + 2B(n) \quad (19)$$

$$(20)$$

将  $g_n = (-1)^n$  代入，有

$$\alpha = 1 \quad (21)$$

$$\beta = -1 \quad (22)$$

$$\gamma = 0 \quad (23)$$

$$(-1)^n = A(n) - B(n) \quad (24)$$

$$(25)$$

将  $g_n = (-1)^n n$  代入，有

$$\alpha = 0 \quad (26)$$

$$\beta = -1 \quad (27)$$

$$\gamma = 3 \quad (28)$$

$$(-1)^n n = -B(n) + 3C(n) \quad (29)$$

$$(30)$$

对上述三组关于  $A(n), B(n), C(n)$  的线性方程求解，有

$$A(n) = \frac{2^n + 2 \times (-1)^n}{3} \quad (31)$$

$$B(n) = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \quad (32)$$

$$C(n) = \frac{2^n + (3n - 1)(-1)^n}{9} \quad (33)$$

$$(34)$$

因此，

$$g_n = A(n) + B(n) + C(n) \quad (35)$$

$$= \frac{7}{9} 2^n + \left(\frac{1}{3}n + \frac{2}{9}\right)(-1)^n \quad (36)$$