计算机科学中的数学基础–Exercise10

陈昱衡 521021910939

2023 年 3 月 17 日

Warmup6

4 What would happen if the Stern–Brocot construction started with the five fractions $(\frac{0}{1}, \frac{1}{0}, \frac{0}{-1}, \frac{-1}{0}, \frac{0}{1})$ instead of with $(\frac{0}{1}, \frac{1}{0})$?

用 $(\frac{0}{1}, \frac{1}{0}, \frac{0}{-1}, \frac{-1}{0}, \frac{0}{1})$ 替代 $(\frac{0}{1}, \frac{1}{0})$, 我们发现，相邻的分数之间都会形成一棵类似于 $(\frac{0}{1}, \frac{1}{0})$ 所生成的树，只是分子和分母会有所差异.

$(\frac{0}{1}, \frac{1}{0})$ 之间形成的就是原先的树。

$(\frac{1}{0}, \frac{0}{-1})$ 之间形成的树的每一个节点上的分数的分母都会原先树的分母的相反数. 且关于树的中轴线旋转。

$(\frac{0}{-1}, \frac{-1}{0})$ 之间形成的树的每一个节点上的分数都与原先树相等，但是分子和分母都分别为相反数.

$(\frac{-1}{0}, \frac{0}{1})$ 之间形成的树的每一个节点的分数的分子都是原先树的相反数。

这样的话，生成的树中会有重复的数值，但是不会有重复的表示，可以刻画正有理数和负有理数。

Warmup7

5 Find simple formulas for L^k and R^k, when L and R are the 2×2 matrices of (4.33).

$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，我们进行矩阵分解，L=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 因此，

$$L^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \tag{1}$$

$$= L + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

因此，使用数学归纳法，可以证明，

$$L^k = L + \begin{pmatrix} 0 & k-1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

对矩阵 R 应用同样的过程，有

$$R^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

或者，借用书中 4.5 节的内容，可以得到，L 和 R 可以理解为在 Stern-Brocot 树中向右或者向左遍历，因此，L^k 可以理解为沿着根节点向左遍历 k 个节点，从 Stern-Brocot 树的图中可以读出，该节点表示的分数为 $\frac{1}{k}$，故，

$$M(\frac{1}{k}) = \begin{pmatrix} n & kn^{'}+n \\ m & km^{'}+m \end{pmatrix} \tag{6}$$

其中，由祖先分数 $\frac{1}{1}$ 和 $\frac{0}{1}$ 得到 n = 1，$n^{'}$=1，m=1,$m^{'}$=0. 故，

$$L^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

同理可得，

$$R^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Warmup8

6 What does ‘a ≡ b (mod 0)’ mean?

根据 mod 的含义，可知，$a \equiv b \pmod 0$ 的含义是 a 和 b 对 0 取模的结果相等。

而 a 和 b 除以 0 的结果是 inf, 余数分别为为 a，b

故，$a \equiv b \pmod 0$ 的含义就是 $a = b$, 即在模意义下，当模数为 0 时，a 和 b 总是同余的。这是因为在模 0 意义下，任何两个整数都是等价的，因为它们之间的差值可以被 0 整除。

由于在数学上没有定义“模 0”，因此这个等式在某些情况下可能没有意义。但是，在计算机科学中，这个等式可以用于说明两个整数在某些情况下是等价的。

Basics16

16 What is the sum of the reciprocals of the first n Euclid numbers?

首先，由前三项和，$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{41}{42}$，不妨猜想，欧拉数的前 n 项和为 $\frac{e_{n+1}-2}{e_{n+1}-1}$, 由此，我们可以从 k = 3 开始使用数学归纳法证明该结论.

$$\begin{aligned} \frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}+\frac{1}{e_3}+\frac{1}{e_4}+\cdots+\frac{1}{e_n} &= \frac{e_2\times e_3\times\cdots\times e_n+e_1\times e_3\times\cdots\times e_n+\cdots+e_2\cdots e_3\cdots\times e_{n-1}}{e_1\times e_2\times\cdots\times e_n} && (9)\\ &= \frac{e_2\times e_3\times\cdots\times e_n+e_1\times e_3\times\cdots\times e_n+\cdots+e_2\cdots e_3\cdots\times e_{n-1}}{e_{n+1}-1} && (10)\\ & && (11) \end{aligned}$$

观察式子，发现分子比较难求，因此，可以对分子使用数学归纳法.

假定对于分子，前 $k-1$ 项的和为 S_{k-1}，可知由递推式

$$\begin{aligned} S_k &= e_k \times S_{k-1} + e_1 \times e_2 \times \cdots e_{k-1} && (12)\\ &= e_k \times (e_k - 2) + e_k - 1 && (13)\\ &= e_k^2 - e_k - 1 && (14)\\ &= e_k(e_k-1) - 1 && (15)\\ &= e_k \times (e_1 \times e_2 \times \cdots \times e_{k-1}) - 1 && (16)\\ &= e_k - 2 && (17) \end{aligned}$$

得证.

因此，得到结论, 前 n 项欧拉数的和为

$$\frac{e_{n+1}-2}{e_{n+1}-1}=1-\frac{1}{e_{n+1}-1} \tag{18}$$