# 计算机科学中的数学基础-Exercise8

陈昱衡 521021910939

2023 年 3 月 10 日

## Warmup7

**7** Solve the recurrence

$$\begin{aligned} X_n &= n, && \text{for } 0 \leqslant n < m; \\ X_n &= X_{n-m} + 1, && \text{for } n \geqslant m. \end{aligned}$$

由递归式的定义，可知每 m 个数是一一对应的，一次加一，因此可以对 m 个数进行整体分析，将自然数分成连续 m 个数的一组，因此，n 属于第 $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ 组。

n 属于第几组就相对于第零组而言增加了几。

于是有，

$$X_n = \lfloor \frac{n}{m} \rfloor + nmodm \tag{1}$$

## Warmup8

**8** Prove the *Dirichlet box principle*: If $n$ objects are put into $m$ boxes, some box must contain $\geqslant \lceil n/m \rceil$ objects, and some box must contain $\leqslant \lfloor n/m \rfloor$.

此题可以运用反证法。

首先考虑 $\frac{n}{m}$ 整数的情况，此情形下显然成立。

假设，每个盒子的物品数量均小于 $\lceil \frac{n}{m} \rceil$, 因为物品数量不能为小数，因此，每个盒子的物品数量至多为 $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$，故总物品数量

$$N \leq m \times \lfloor \frac{n}{m} \rfloor \tag{2}$$

记 $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ 为 k，则

$$N \leq m \times k \tag{3}$$

而 $m \times k < n$, 因此推导出矛盾，定理前半部分成立。再假设每个盒子的物品数量均大于 $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$, 借用前面证明的标记，有每个盒子的物品数量一定至少为 k+1, 则

$$N \geq m \times (k+1) > n \tag{4}$$

与题干中论述产生矛盾，故定理后半部分成立。

定理成立。

# Warmup9

**9** Egyptian mathematicians in 1800 B.C. represented rational numbers between 0 and 1 as sums of unit fractions $1/x_1 + \cdots + 1/x_k$, where the $x$'s were distinct positive integers. For example, they wrote $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ instead of $\frac{2}{5}$. Prove that it is always possible to do this in a systematic way: If $0 < m/n < 1$, then

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{q} + \left\{\text{representation of } \frac{m}{n} - \frac{1}{q}\right\}, \qquad q = \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil.$$

(This is *Fibonacci's algorithm*, due to Leonardo Fibonacci, A.D. 1202.)

借用书中的定义 $x mumble y$ = y$\lfloor \frac{x}{y} \rfloor$ - x; 可以简化斐波那契算法:

$$\frac{n}{m} = \frac{1}{q} + \frac{n}{m} - \frac{1}{q} \tag{5}$$

$$= \frac{1}{q} + \frac{mq-n}{nq} \tag{6}$$

余项分式中的分母 $mq - n = n mumble m \leq m$ ，而且是严格小于 m。

因此，每次使用斐波那契算法转化一次，得到的数就会比上一次的分子小，且分母递增，，不相等。

故，m 一定会减小到 1, 即得到完整的表示。

# Basics10

**10** Show that the expression

$$\left\lceil \frac{2x+1}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{2x+1}{4} \right\rceil + \left\lfloor \frac{2x+1}{4} \right\rfloor$$

is always either $\lfloor x \rfloor$ or $\lceil x \rceil$. In what circumstances does each case arise?

我们首先将向下取整和向上取整函数中的部分取出观察。

$$x + \frac{1}{2} \tag{7}$$

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \tag{8}$$

可以观察出，$\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ 的小数部分一定不会溢出进一，而 $x + \frac{1}{2}$ 的小数分数有可能进一，以 $x = 0.5$ 为分界，因此，分两种情况讨论如下:

1 $\{x\} < 0.5$

$$\lfloor \frac{2x+1}{2} \rfloor - \lfloor \frac{2x+1}{4} \rfloor + \lfloor \frac{2x+1}{4} \rfloor = \lceil x \rceil - 1 \tag{9}$$

$$= \lfloor x \rfloor \tag{10}$$

2 $\{x\} > 0.5$

$$\lfloor \frac{2x+1}{2} \rfloor - \lfloor \frac{2x+1}{4} \rfloor + \lfloor \frac{2x+1}{4} \rfloor = \lceil x \rceil + 1 - 1 \tag{11}$$

$$= \lceil x \rceil \tag{12}$$

3 {x} == 0.5

$$\lfloor\frac{2x+1}{2}\rfloor - \lfloor\frac{2x+1}{4}\rfloor + \lfloor\frac{2x+1}{4}\rfloor = \lceil x\rceil + 1 - 1 \tag{13}$$

$$= \lceil x\rceil \tag{14}$$

$$= \lfloor x\rfloor \tag{15}$$