

# **超导量子计算的基本原理**

**ChenZha**

**03, 11, 2023**



# 目 录

第 1 章 超导量子比特的基本原理 .....	1
1.1 超导量子计算的历史 .....	1
1.2 超导量子计算系统的结构 .....	3
1.3 超导量子处理器 .....	4
1.3.1 LC 谐振电路的量子化 .....	4
1.3.2 超导约瑟夫森结 .....	5
1.3.3 传输子超导量子比特 .....	7
1.3.4 超导量子比特间的相互耦合 .....	10
1.3.5 其他形式的超导量子比特 .....	11
1.4 测量与控制系统 .....	13
1.4.1 稀释制冷机系统 .....	14
1.4.2 控制与测量信号的产生与传输系统 .....	15
1.5 总结 .....	18
第 2 章 超导量子比特的控制与测量 .....	19
2.1 超导量子比特的初态制备 .....	19
2.1.1 被动重置 .....	19
2.1.2 主动重置 .....	19
2.2 超导量子比特的状态操控 .....	20
2.2.1 单比特 $R_X(\pi/2)$ 门 .....	21
2.2.2 两比特受控 Z 门 .....	22
2.3 超导量子比特的状态读取 .....	23
2.3.1 二能级量子比特与读取腔的色散读取 .....	23
2.3.2 读取信号的相位移动 .....	24
2.3.3 量子比特状态读取结果的校准 .....	26
参考文献 .....	29



## 第1章 超导量子比特的基本原理

### 1.1 超导量子计算的历史

半导体技术的快速发展深刻改变了人类生活的各个方面，引领人类进入信息时代。计算能力也由此成为基础设施的核心组成部分，成为衡量国家综合国力的标准之一。但当前半导体工艺的发展已经受到量子力学的限制，计算能力的提升也逐渐陷入瓶颈。如何进一步提高计算能力成为萦绕在人们心头的重要问题。量子计算作为一种遵循量子力学规律进行计算的新型计算模式，在某些特定问题上展现了远超经典计算机的计算能力，引起了学术界和工业界的极大关注<sup>[1-3]</sup>。

2000年，DiVincenzo提出了五条准则，只有满足这五条准则的物理体系，才能构建出可行的量子计算机。这五条准则分别为<sup>[4]</sup>：

1. 可拓展量子系统中具有可表征的量子比特；
2. 系统可以将状态初始化到一个基准态，例如  $|000 \cdots 0\rangle$ ；
3. 系统的退相干时间远大于量子门操作的时间；
4. 具有一套通用的量子门操作；
5. 具有量子比特的特定量子态读取能力；

满足这些准则的物理体系有许多种，包括超导电路<sup>[5,6]</sup>，离子阱<sup>[7,8]</sup>，光子<sup>[9,10]</sup>，中性原子<sup>[11,12]</sup>等体系。其中超导电路体系以其高拓展性，易操控性，以及对当前先进半导体工艺的高兼容性，成为了目前主流的量子计算机实现体系之一，获得科学界和工业界的高度关注<sup>[1-3]</sup>。总体来说，超导量子计算有以下几个优点：

1. 具有很高的设计自由度：可以设计成不同的电路结构以及不同的电路参数。
2. 可拓展性：当前超导量子处理器的制备工艺和当前先进半导体工艺是高度兼容的，有利于其制备和拓展。
3. 易耦合性：通过设计电容和电感等电路参数，可以简单地构成比特间的耦合。
4. 易操控性：超导量子比特的控制主要通过微波信号和射频信号，已经有成熟的商业设备对其进行支持。

1985 年, John Clark 首次观察到偏置电流约瑟夫森结的量子行为<sup>[13]</sup>。随后, 在 1998 年, Michel Devoret 证明了电荷量子比特的叠加态的存在<sup>[14]</sup>。1999 年日本研究小组 Nakamura 等人设计并制造出了第一个超导量子比特, 实现了对宏观量子态的相干控制<sup>[15]</sup>。最初的超导量子比特仅有几纳秒的相干时间, 这无法满足计算过程的需求<sup>[15]</sup>。

为了提高量子比特的性能和相干时间, 研究人员探索了各种不同类型的量子比特, 如电荷量子比特<sup>[16]</sup>、磁通量子比特<sup>[17]</sup>、相位量子比特<sup>[18]</sup>等。2007 年, Devoret 研究小组设计出传输子量子比特 (transmon)<sup>[19]</sup>, 这种新型结构的比特结合了多种不同设计方案的优点, 拥有相干性好、复杂度低、便于操控与读取等优点, 逐渐成为最主流的超导比特方案。近些年来, 传输子量子比特的退相干性能, 操控性能, 以及集成性能都得到了显著的提升<sup>[2,20]</sup>。经过微纳加工制备工艺和薄膜材料的改进, 单独的传输子量子比特的能量弛豫时间最高能达到  $500\ \mu\text{s}$ <sup>[21,22]</sup>。在多比特系统中, 平均的能量弛豫时间也能达到几十微秒<sup>[23-25]</sup>, 甚至百微秒<sup>[3]</sup>, 这些都大大降低了量子计算过程中的非相干错误。超导量子比特的单比特门操作, 双比特比特操作和状态读取的保真度也都已经超过了 99%<sup>[26-28]</sup>, 超过了量子纠错的错误率阈值, 并以此对表面码进行了一系列实验探索。此外, 超导量子计算处理器的集成度也大幅度增加, 从一维链的九比特结构<sup>[29]</sup>, 十二比特结构<sup>[30,31]</sup>, 发展到准二维的二十四比特结构<sup>[32]</sup>, 到二维网格状的六十六比特结构<sup>[20,23]</sup>, 一百二十七比特。最新的研究结果显示, 超导量子计算处理器的集成度已经高达四百三十三比特<sup>[33]</sup>, 处理器集成度的发展呈现出加速态势。为了在处理器上集成更多的量子比特, 在未来还可能会将倒装焊工艺和深硅通孔工艺相结合, 对量子处理器进行 3D 封装<sup>[34-36]</sup>, 以便于信号线的引出, 这也是未来超导量子处理器可能的发展方向。

随着超导传输子量子比特的退相干性能, 操控性能, 和集成性的快速发展, 超导量子计算机的计算能力也在大幅度提升。2019 年, 谷歌量子计算团队在一个五十四比特超导量子计算处理器上进行 20 层深度的随机线路采样实验<sup>[2]</sup>, 该实验的一次采样流程需要花费 200 s 的时间, 而同样的问题在最先进的经典超级计算机 Summit 上进行计算, 需要花费大约 10000 年的时间。此实验结果首次证明了量子计算机在某些特定问题上, 具有远超经典计算机的计算能力。虽然在随后几年, 随机线路采样问题的经典算法得到不断优化, 经典计算机的计算时间已经与谷歌五十四比特量子处理器的时间相当<sup>[37]</sup>。但是在 2021 年, 中科大潘建伟团队成功在六十六比特量子处理器上进行了同样的 24 层深度的随机线路采样实验, 其时间复杂度比谷歌团队的实验高出六个数量级。在量子处理器上进行的采样实验需要花费 4.2 小时, 而在经典超级计算机上使用最新的经典随机线路采样算法进行同样的采样实验, 需要花费 4.8 万年<sup>[23]</sup>。这一结果重新验证了量子计

算的优越性。

超导量子计算机在过去的二十多年里历经了快速的发展，已经从单个量子比特的构建、操控，发展到了四百三十三个高性能量子比特及其高精度操控，并且证明了量子计算相对于经典计算潜在的优越性能。虽然目前距离实用化的可容错通用量子计算机还有不小的距离，但是超导量子计算机的高速发展和巨大的潜在应用能力都吸引着科研人员前仆后继地踏上量子计算研究之路。

## 1.2 超导量子计算系统的结构

超导量子计算系统的结构如下图1.1所示，有两个组成部分，第一部分是系统的核心部分——超导量子处理器，其用于量子信息的处理，整个量子计算过程都在超导量子处理器上进行；另一部分是经典的测量与控制系统，这部分是量子处理器的支撑系统，用于维护量子处理器的量子状态，以及测量与控制信号的生成与传输。

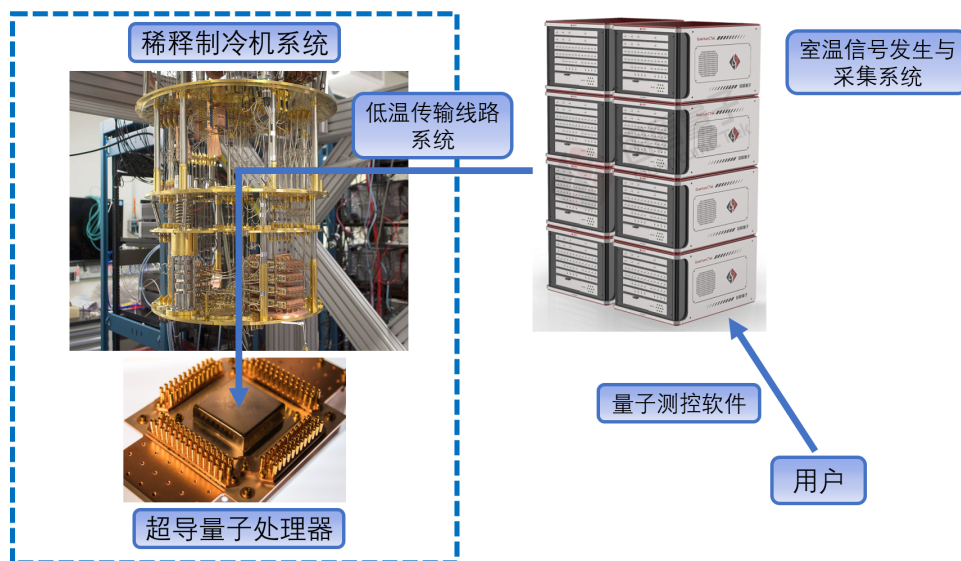


图 1.1 超导量子计算系统的结构

对于用户，会从上位机提交想要运行的量子线路，量子测控软件将量子线路编译成测量与控制系统中经典硬件部分可以理解的语言，将其传输给测控系统。测控系统生成并传输相应微波信号给超导量子处理器，处理器上的量子比特进行相应的量子状态变化，完成用户提交的量子线路对应的量子演化过程，获得最终的量子计算结果。

接下来，我们分别介绍超导量子计算系统的超导量子处理器部分和测量与控制系统部分。

### 1.3 超导量子处理器

比特是经典计算和经典信息论中的基本概念，是构成经典计算机的基本单元。量子比特是比特在量子计算和量子信息论中的对应，是量子处理器的基本单元。只有构建一个高性能的量子比特，才能在此基础上进行状态的初始化，操纵和读取，从而进行量子计算过程，这是量子计算的根源。在超导量子计算中，超导量子比特是超导量子处理器的基本单元，是由超导约瑟夫森结构成的谐振电路，因此我们将从 LC 谐振电路的量子化出发，通过引入超导量子比特的核心器件——约瑟夫森结，介绍超导量子比特的基本原理。

#### 1.3.1 LC 谐振电路的量子化

首先介绍 LC 谐振电路，一个 LC 谐振电路是由一个线性电感  $L_c$  和一个线性电容  $C_c$  并联构成，如下图1.2a 所示。根据电路的基尔霍夫定律：

$$\begin{aligned}\frac{Q}{C_c} - \frac{d\Phi}{dt} &= 0, \\ \frac{dQ}{dt} + \frac{\Phi}{L_c} &= 0,\end{aligned}\tag{1.1}$$

其中  $Q$  为电容极板上所带电荷量， $\Phi$  为电感的磁通量。将两个方程联立，得到  $C_c \frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{\Phi}{L_c} = 0$ 。这个方程类似于二维谐振子的运动方程，其中  $\Phi$  等价于运动方程中的坐标  $x$ 。根据这个运动方程，我们可以推导出系统的哈密顿量为：

$$H = P \times \dot{\Phi} - L = \frac{Q^2}{2C_c} + \frac{\Phi^2}{2L_c},\tag{1.2}$$

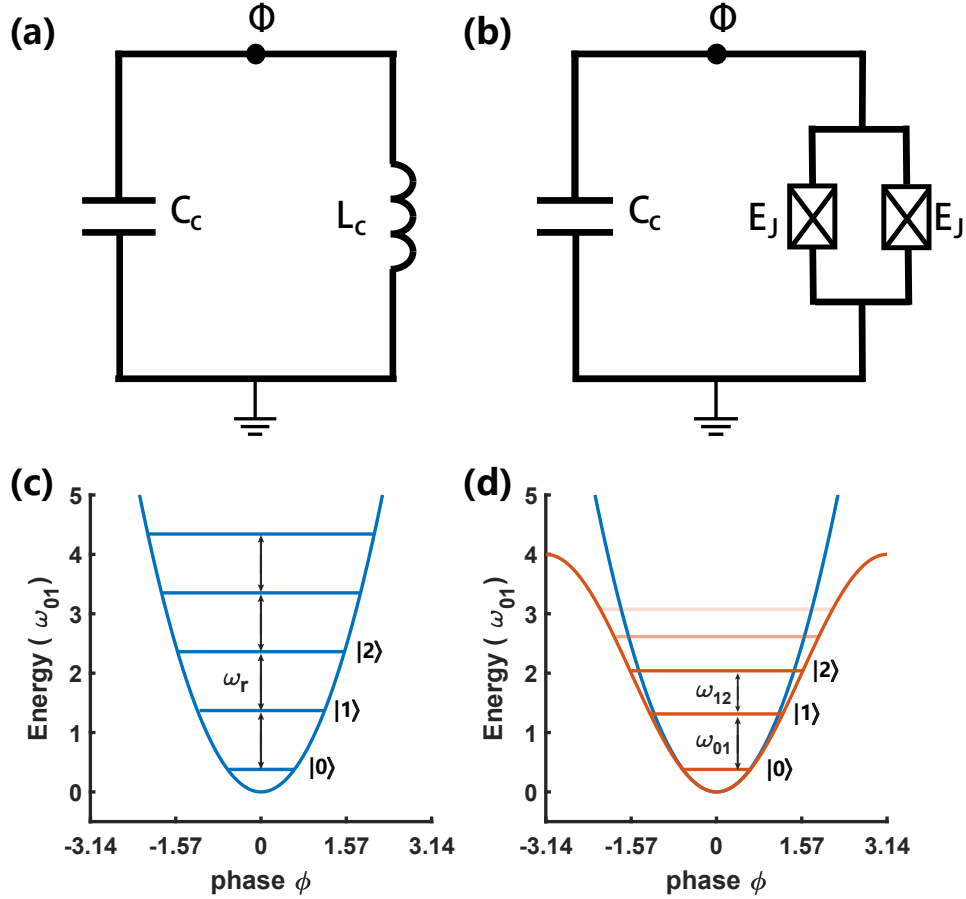
这是一个明显的谐振子哈密顿量，对其进行二次量子化。令

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\sqrt{2\hbar}}{2} \left(\frac{L_c}{C_c}\right)^{1/4} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \\ Q &= \frac{-\sqrt{2\hbar i}}{2} \left(\frac{C_c}{L_c}\right)^{1/4} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger),\end{aligned}\tag{1.3}$$

并将其带入1.2式中，得到 LC 谐振电路的二次量子化哈密顿量为  $H = \hbar\omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2})$ ，其中  $\omega = 2\pi/\sqrt{L_c C_c}$ ，是 LC 谐振电路的谐振角频率，LC 谐振电路能级结构如下图所示1.2c 所示。

LC 谐振电路的能级结构是等间隔的，将系统从  $|0\rangle$  能级驱动到  $|1\rangle$  能级和将系统从  $|1\rangle$  能级驱动到  $|2\rangle$  能级，所需要的微波频率是一致的。这就导致当用微波驱动 LC 谐振电路系统时，能量不是在  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$  能级间振荡，而是系统的  $|2\rangle$  能级，甚至更高能级都会被激发，最终整个系统形成一个相干态，这并不是量子计算过程所需要的结果。我们希望的是将  $|0\rangle$ ， $|1\rangle$  能级与其余能级分隔开，构成





**图 1.2** 谐振电路与传输子量子比特的电路结构和能级结构。(a) 谐振电路的集总电路结构示意图。谐振电路由线性电容和电感组成的。(b) 传输子量子比特的集总电路示意图。传输子量子比特由线性电容和非线性的约瑟夫森结组成。(c) 谐振子系统的能级结构示意图。各个能级之间是等间距的。(d) 传输子量子比特的能级结构。其能级之间是不等间距的， $|0\rangle$  能级和  $|1\rangle$  能级与其他能级分隔开，构成了计算空间。

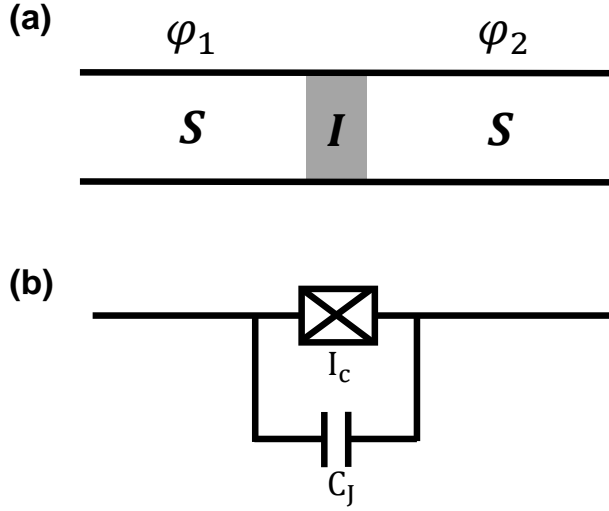
一个二能级系统，用  $|0\rangle$  态和  $|1\rangle$  态编码 0 和 1。在这个二能级系统中，所有的操作都局限在  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$  展开的计算子空间内，这就需要在哈密顿量中引入非线性的项，以此在量子比特中引入非简谐性。

### 1.3.2 超导约瑟夫森结

我们通过在 LC 谐振电路中添加超导约瑟夫森结来引入非线性项。超导约瑟夫森结是由两个超导体和中间的一个薄的非超导体组成的，如下图 1.3 所示，是约瑟夫森在 1962 年首次在理论上预言<sup>[38]</sup>，并于 1963 年被 P.W.Andetson 和 J.M.Rowell 在实验上证实<sup>[39]</sup>。

当导体进入超导态后，费米面附近的电子相互吸引，形成了大量的库伯对。这些库伯对彼此交叠渗透，保持相同的有序度，构成一个电子的整体行为。我们可以利用波函数  $\Psi(r) = \sqrt{\rho(r)}e^{i\varphi(r)}$  来描述这些电子的集体行为，其中  $\sqrt{\rho}$  是波函数的振幅， $\varphi$  是其相位。每个相互独立的超导体都有各自独立的波函数来描

述。当两个超导体通过一个薄的非超导体相连接，构成约瑟夫森结，两个超导体之间发生弱了耦合，两个波函数之间就不再相互独立，而是存在一定的线性关系。



**图 1.3** 超导约瑟夫森结结构。(a) 超导约瑟夫森结的物理结构。S 代表超导体，I 代表绝缘层， $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$  分别是两个超导体内部电子的相位。(b) 超导约瑟夫森结的实际电路结构，一般由完美的约瑟夫森结并联一个结电容组成，约瑟夫森结的特征电流为  $I_c$ ，一般结电容  $C_J = 9 \text{ fF}$ 。

根据这个线性关系，再利用薛定谔方程和微扰论的方法，我们可以求得约瑟夫森结所遵循的约瑟夫森方程，该方程描述的是约瑟夫森结两端的电压  $V$ ，隧穿电流  $I$  和约瑟夫森结两端超导体的相位差  $\varphi$  之间的关系<sup>[40]</sup>。

$$I = I_c \sin(\varphi), \quad (1.4)$$

$$V = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (1.5)$$

其中  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ ，是约瑟夫森结两端超导体的相位  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  的差， $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$  代表磁通量子，是一个常数。 $I_c$  是结的特征电流，用以表征约瑟夫森结的电流特性。通过在常温下测量结电阻，我们可以预估约瑟夫森结的特征电流  $I_c$ 。

当隧穿电流  $I$  穿过约瑟夫森结时，结内部储存的能量  $U_J$  为：

$$\begin{aligned} U_J &= \int_{-\infty}^t V I dt' = \int_0^\varphi I_c \sin(\varphi') \frac{\Phi_0}{2\pi} d\varphi', \\ &= \frac{I_c \Phi_0}{2\pi} (1 - \cos \varphi) = E_J (1 - \cos \varphi), \end{aligned} \quad (1.6)$$

其中  $E_J = \frac{I_c \Phi_0}{2\pi}$  被称为约瑟夫森能量。

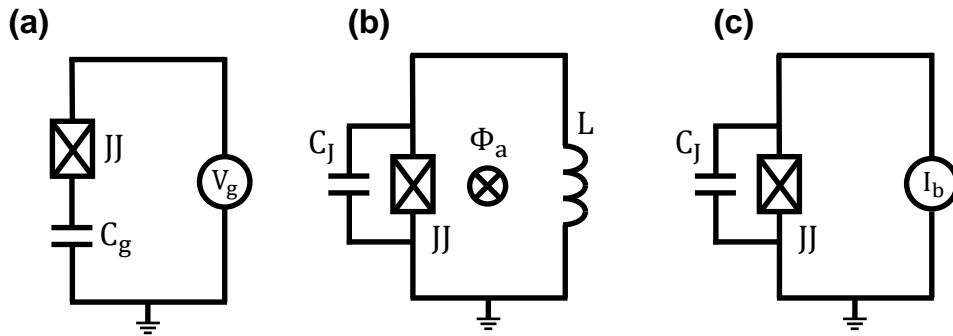
约瑟夫森结在超导量子比特中最重要的功能就是提供了一个非线性电感, 根据  $V = L \frac{dI}{dt}$  和方程1.4, 方程1.5, 可以推导出约瑟夫森结的电感

$$L_J = \frac{\Phi_0}{2\pi I_c \cos(\varphi)} = \frac{\Phi_0}{2\pi I_c \sqrt{1 - (I/I_c)^2}}, \quad (1.7)$$

由此可见, 约瑟夫森电感  $L_J$  不同于线性电感, 它是关于隧穿电流  $I$  的函数。这种电流依赖的电感为超导量子比特提供了非线性, 使得  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$  能级与其余能级相互分隔开, 整个系统可以被约化为一个二能级系统。以上就是超导量子比特中最核心的约瑟夫森结的基本原理。

### 1.3.3 传输子超导量子比特

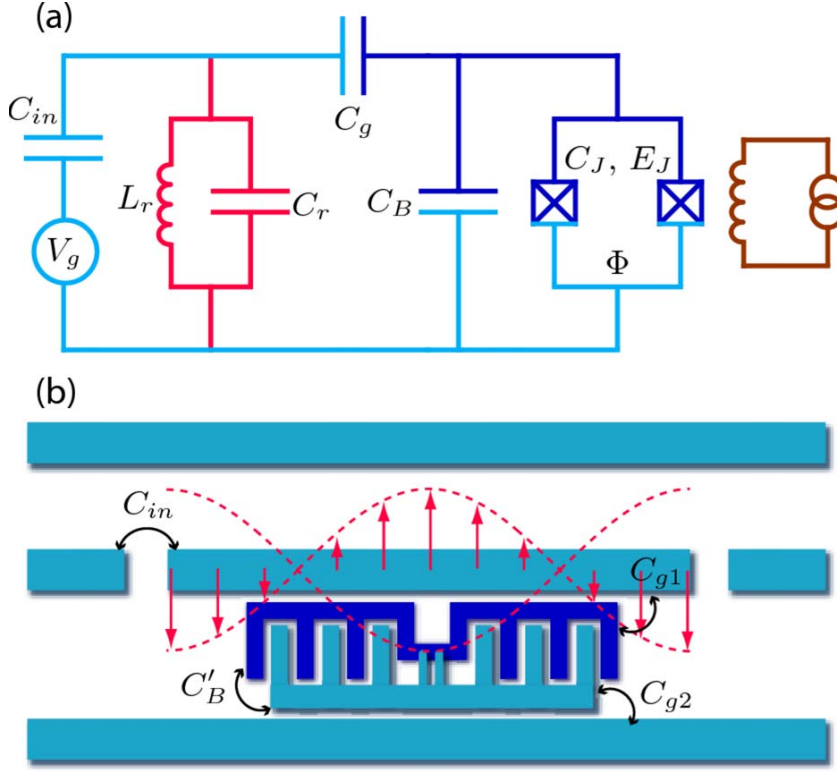
利用约瑟夫森结和线性电容就可以构建一个超导量子比特。超导量子比特中的能量分为磁场能和电场能, 分别储存在约瑟夫森结和电容中, 用约瑟夫森能量  $E_J$  和充电能量  $E_C = \frac{e^2}{2C_c}$  进行表征。根据  $E_J$  和  $E_C$  的比例, 可以将超导量子比特分为三种类型: 电荷量子比特, 磁通量子比特和相位量子比特, 其电路结构如图1.4b所示。不同的量子比特根据设计参数和电路结构的不同而各有优劣。其中电荷量子比特是最早被成功制备并操控的超导量子比特, 但是电荷量子比特的充电能量  $E_C$  远大于约瑟夫森能量  $E_J$ , 所以电荷量子比特对环境电荷噪声敏感程度相应的也就更高。比特的寿命也由此受到了电荷噪声的严重限制, 被限制在  $1 \mu s$  以内<sup>[16,41]</sup>。



**图 1.4** 电荷量子比特, 磁通量子比特和相位量子比特电路示意图。(a) 电荷量子比特: 由一个约瑟夫森结和一个电容组成, 调节偏置电压  $V_g$  可以调节库珀对数目, 进而调节比特频率。(b) 磁通量子比特: 由一个约瑟夫森结和一个环路电感组成, 约瑟夫森结自身的电容充当比特电容, 通过调节偏置磁通  $\Phi_a$  调节比特频率。(c) 相位量子比特: 由约瑟夫森结和自身结电容组成比特, 通过调节偏置电流调节比特频率。

为了减弱电荷噪声的影响, 科研人员发明了一种新型的超导量子比特——传输子量子比特 (transmon)<sup>[19]</sup>, 其示意图如图1.5a所示。传输子量子比特在电荷量子比特的基础上, 在约瑟夫森结两端并联了一个大的电容, 减小了  $E_C$ , 提高

了  $E_J/E_C$  的比例。相应地，传输子量子比特对环境中的电荷噪声的敏感程度也将以  $e^{-\sqrt{8E_J/E_C}}$  的关系式被指数级地抑制<sup>[19]</sup>，现在传输子量子比特的寿命最高能达到  $500 \mu\text{s}$ <sup>[22]</sup>。



**图 1.5** 传输子量子比特示意图<sup>[19]</sup>。(a) 传输子量子比特的等效电路图。两个约瑟夫森结组成的 dc-SQUID 被一个大电容  $C_B$  分流，以此减小充电能  $E_C$ ，提高了  $E_J/E_C$ ，减小了量子比特对电荷噪声的敏感程度。(b) 传输子量子比特设计示意图。传输子量子比特内置在一个  $\frac{\lambda}{2}$  传输线谐振腔内部，通过传输子量子比特与传输线谐振腔的耦合进行状态读取。

在此基础之上，去掉外接偏置电压源，并将约瑟夫森结另一端接地，构成接地传输子量子比特<sup>[42]</sup>。接地传输子量子比特以其相干时间长、拓展性强，制备工艺简单的优点，已经成为应用最为广泛的超导量子比特之一。在我们的超导量子计算处理器中，主要采用的就是接地传输子量子比特，接下来介绍量子比特的基本性质就以接地传输子量子比特为例。

想要了解量子比特的基本性质，首先要了解接地传输子量子比特的电路结构及其对应的哈密顿量。接地传输子量子比特电路结构如图所示1.2b。根据其电路结构，我们可以观察到接地传输子量子比特是由一对并联约瑟夫森结和一个大电容并联接地所构成的。其哈密顿量可以写为：

$$\hat{H} = 4E_C \hat{n}^2 - E_J \cos(\hat{\varphi}), \quad (1.8)$$

其中  $\hat{\varphi}$  是 dc-SQUID 两端的相位差， $\hat{n}$  是电容上存储的电荷对数目， $\hat{\varphi}$  和  $\hat{n}$  满足对

易关系  $[\hat{\varphi}, \hat{n}] = i$ 。  $E_C$  是表征电容存储能量的物理量，  $E_J = \frac{2I_0\Phi_0}{2\pi} |\cos(\pi \frac{\Phi_a}{\Phi_0})|$  为并联约瑟夫森结的总体约瑟夫森能，受到外界磁通  $\Phi_a$  的调制，这也是超导量子比特频率可调的根源。

利用数值方法计算此哈密顿量的本征值，即可获得量子比特系统的能级结构，如图1.2d所示。 $|1\rangle$  和  $|2\rangle$  能级之间的距离，明显不同于  $|0\rangle$  与  $|1\rangle$  能级之间的距离，这说明在约瑟夫森结的非线性作用下， $|0\rangle$  与  $|1\rangle$  能级和其他能级分隔开，整个系统约化成一个二能级的量子比特系统。

在具体的量子比特设计中， $E_J/E_C$  的比例一般选择在  $50 \sim 100$ 。在这个范围的设计参数下，接地传输子量子比特系统可以被看作一个小球在一个深度很深的余弦形的陷阱中运动，并且运动的速度相对较小。因此，粒子的运动范围主要局限在陷阱的最低点，即零点附近， $\varphi$  的取值接近于 0，小球所感受到的势能更接近于二次型的势能。以此为依据，我们可以将余弦势阱在零点附近进行泰勒展开，并截取势能的前三项  $1 - \varphi^2/2 + \varphi^4/24$ 。泰勒展开后的系统哈密顿量可以近似写为：

$$H = 4E_C \hat{n}^2 - \frac{E_J}{2} \hat{\varphi}^2 + \frac{E_J}{24} \hat{\varphi}^4, \quad (1.9)$$

此哈密顿量的前两项是 LC 谐振子哈密顿量，第三项就是引入的非线性势能项。非线性势能项也可以看作微扰项。对其进行二次量子化，得到系统的哈密顿量为：

$$H = \sqrt{8E_J E_C} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2) - \frac{E_C}{12} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^4, \quad (1.10)$$

第一项是谐振子哈密顿量，第二项是微扰项。微扰项为系统引入非简谐性。根据式1.10，利用微扰论的方法进行能级计算，可以近似得到能级  $|j\rangle$  和能级  $|j+1\rangle$  之间的能量差为：

$$\hbar\omega_{j+1,j} = \sqrt{8E_J E_C} - E_C (j+1), \quad (1.11)$$

因此，量子比特  $|0\rangle$ 、 $|1\rangle$  能级间的能量差为  $\hbar\omega_{01} = \sqrt{8E_J E_C} - E_C$ 。定义量子比特的非简谐性  $\eta$  为  $|1\rangle$ 、 $|2\rangle$  能级间的能量差和  $|0\rangle$ 、 $|1\rangle$  能级间能量差的差值，即  $\hbar\eta = \hbar\omega_{12} - \hbar\omega_{01} = -E_C$ 。

引入非简谐性后， $|0\rangle$  能级， $|1\rangle$  能级就与其他能级分隔开，形成一个由  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$  展开的计算子空间，这就构成了一个量子比特。在这个计算空间内，量子比特的哈密顿量可以用 Pauli 算符表示： $H = \frac{-\hbar\omega}{2} \hat{\sigma}^z$ 。

在量子计算的过程中，非简谐性影响信息脱离计算空间的困难程度，对于量子比特的精确操控具有重要意义。非简谐性越大，操控过程中信息泄露出计算空间就越困难，量子比特操控的精度也就越高。但是增大非简谐性需要增大  $E_C$ ，这会同时以指数形式  $e^{-\sqrt{8E_J/E_C}}$  增大量子比特对电荷噪声的敏感程度。所以要对两种影响做一个权衡，选择一个合适的  $E_C$ 、 $E_J$  比例。最终，在我们的量子比

特设计中, 选择  $E_C = 250 \text{ MHz}$ ,  $E_J = 14 \text{ GHz}$ , 对应  $|0\rangle$  能级、 $|1\rangle$  能级频率差  $\omega_{01}/2\pi = 5 \text{ GHz}$ , 非简谐性  $\eta/2\pi = -250 \text{ MHz}$ 。

### 1.3.4 超导量子比特间的相互耦合

对于一个量子计算过程, 仅仅拥有相互独立的多个单独比特是不够的, 还需要多个量子比特间的相互作用, 从而完成比特间信息的交换, 构成任意的一个多比特演化矩阵, 即完整的多量子比特计算过程。为了实现多比特间的相互作用, 需要将两个量子比特相互耦合。比特间的耦合方式有许多种: 电容直接耦合, 电感直接耦合, 谐振腔耦合, 耦合器耦合等。电容直接耦合的方式是其中最为简单的, 也是其他耦合方式的基础, 所以下面主要介绍比特间的电容直接耦合。

比特间的电容直接耦合形式如下图1.6a 所示。以此可以得到系统的哈密顿量为:

$$H = \frac{1}{2}Q^T C^{-1}Q - E_{J1} \cos(\varphi_1) - E_{J2} \cos(\varphi_2) \quad (1.12)$$

其中  $Q$  是电容上积累的电荷量, 以矢量的形式表示,  $C^{-1}$  是电容矩阵  $C$  的逆矩阵, 表此三者达式为:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

$$C = \begin{pmatrix} C_1 + C_g & -C_g \\ -C_g & C_2 + C_g \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} C^{-1} &= \frac{1}{C_1 C_2 + C_1 C_g + C_2 C_g} \begin{pmatrix} C_2 + C_g & C_g \\ C_g & C_1 + C_g \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} C_1'^{-1} & C_g'^{-1} \\ C_g'^{-1} & C_2'^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

将矩阵形式的哈密顿量展开后, 其表达式为:

$$\begin{aligned} H &= \frac{Q_1^2}{2C_1'} - E_{J1} \cos(\varphi_1) \\ &+ \frac{Q_2^2}{2C_2'} - E_{J2} \cos(\varphi_2) \\ &+ \frac{Q_1 Q_2}{C_g'}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

第一行和第二行的四项是两个比特的静态哈密顿量, 第三行的第五项就是比特间的耦合哈密顿量。对此系统哈密顿量进行二次量子化, 将整个系统转换到粒子

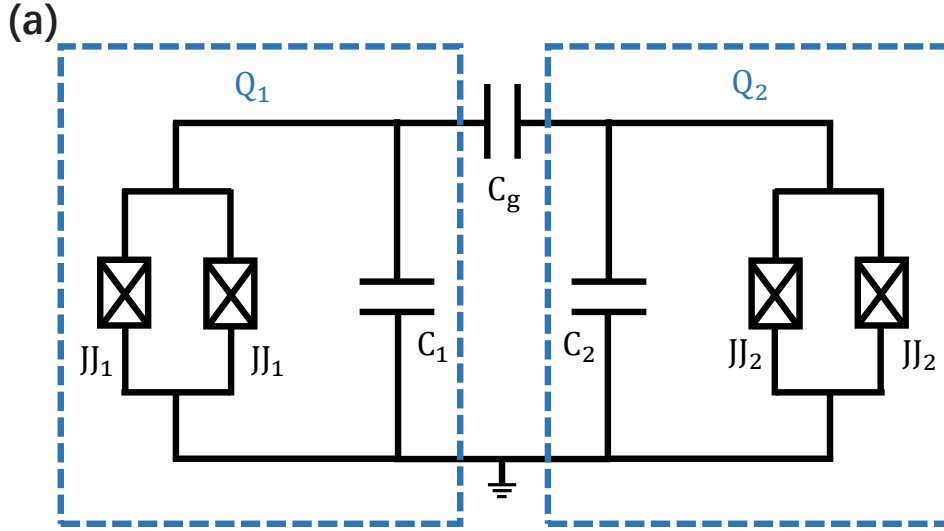


图 1.6 量子比特间耦合系统电路示意图。两个量子比特  $Q_1$  和  $Q_2$ ，通过耦合电容  $C_g$  进行耦合。

数表象，并且只考虑二能级的计算空间，则系统的哈密顿可以表示为：

$$H = -\frac{\hbar\omega_1}{2}\sigma_1^z - \frac{\hbar\omega_2}{2}\sigma_2^z + \left(\frac{E_{J1}E_{J2}}{4E_{C1}E_{C2}}\right)^{1/4} \frac{e^2}{C_g'} \sigma_1^y \sigma_2^y, \quad (1.17)$$

其中  $E_{Ci} = \frac{e^2}{2C_i'}$ ，是比特  $i$  的充电能量。前两项是两个比特各自的静态哈密顿量，比特  $i$  的频率  $\hbar\omega_i = \sqrt{8E_{Ci}E_{Ji}} - E_{Ci}$ 。第三项是两个比特间的耦合项，耦合强度可以定义为：

$$\begin{aligned} \hbar g &= \left(\frac{E_{J1}E_{J2}}{4E_{C1}E_{C2}}\right)^{1/4} \frac{e^2}{C_g'}, \\ &= \sqrt{\omega_1\omega_2} \frac{\sqrt{C_1'C_2'}}{2C_g'}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

简化后的哈密顿量可以表示为：

$$H/\hbar = -\frac{\omega_1}{2}\sigma_1^z - \frac{\omega_2}{2}\sigma_2^z + g\sigma_1^y\sigma_2^y, \quad (1.19)$$

在耦合项  $g\sigma_1^y\sigma_2^y$  的作用下，两个比特间的信息可以相互交换。利用这种方式，我们可以构成量子线路中的双比特门，从而构成一个完整的量子计算过程。双比特门的具体构成方式，会在后面介绍。

### 1.3.5 其他形式的超导量子比特

在本节中，我们将简要介绍除了 transmon 外，其余几种比较常用的超导量子比特。

### 1.3.5.1 Three-junction flux qubit

three-junction flux qubit 是 Mooij 在 1999 年提出的，由包含三个约瑟夫森结的小环路构成，如图 1.7 所示。量子比特的  $|0\rangle$  态和  $|1\rangle$  态分别由环路中的顺时针电流和逆时针电流所编码，且可以调节控制线中的电流信号，改变感应磁通，进而控制比特状态。通过减小环路的大小，还可以有效量子比特对磁通噪声的敏感程度。

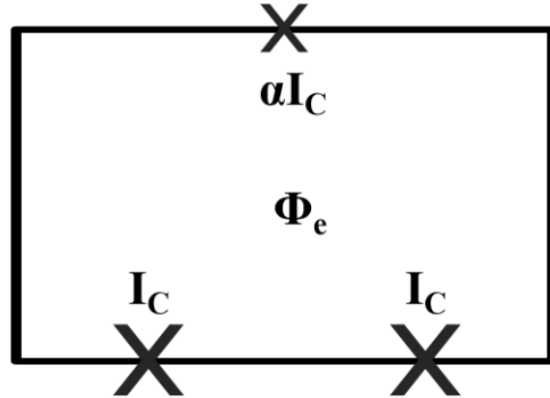


图 1.7 Three-junction flux qubit 的电路结构示意图。两个约瑟夫森结具有相同的约瑟夫森能量  $E_J$ ，第三个约瑟夫森结具有更小的约瑟夫森能量  $\alpha E_J$

### 1.3.5.2 C-shunt flux qubit

C-shunt flux qubit 是 You 在 2007 年所提出的，是对 three-junction flux qubit 的改进。在 three-junction flux qubit 中，磁通噪声被有效抑制，电荷噪声成为主要噪声源，因此在约瑟夫森结两端并联一个大电容，可以有效减小系统的充电能，降低系统对电荷噪声的敏感程度，提高量子比特的相干时间。具体结构如图 1.8 所示。

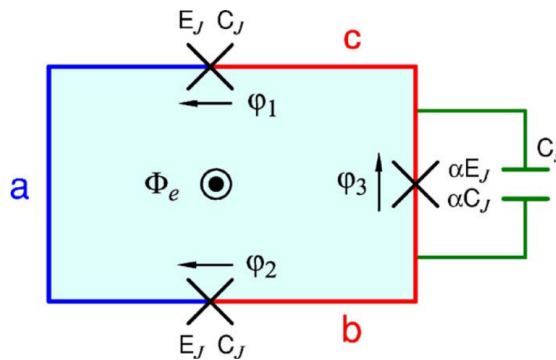


图 1.8 C-shunt flux qubit 的电路结构示意图。结构与 three-junction flux qubit 的电路结构类似，只是电容  $C_s$  并联在小的约瑟夫森结旁。



### 1.3.5.3 Fluxonium

Fluxonium 是 Manucharyan 在 2009 年提出的，目的是降低低频电荷噪声的影响。Fluxonium 的电路结构如图1.9所示，是一系列串联的大电容约瑟夫森结和一个小电容约瑟夫森结所构成。在比特工作频率，一系列串联的约瑟夫森结可以被看作一个接地大电感，相当于一个低通滤波器。通过这种方式，低频电路噪声被短路接地了，量子比特对低频电荷噪声的敏感程度也被降低了，其相干时间最高能提高到  $1ms$ 。

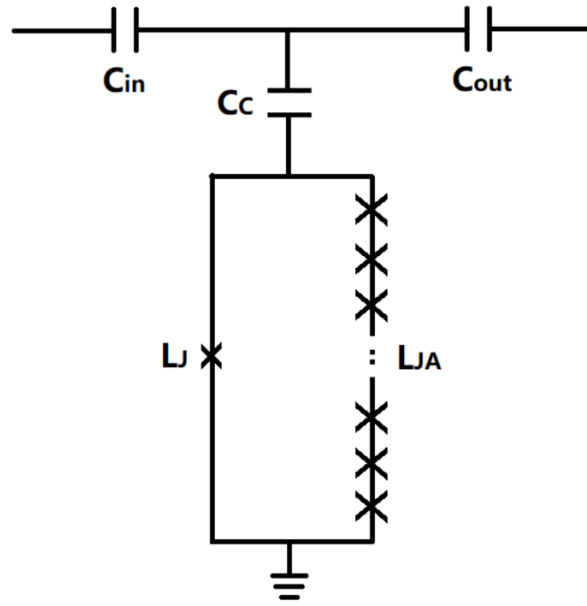


图 1.9 Fluxonium 的电路结构示意图

### 1.3.5.4 $0 - \pi$ qubit

$0 - \pi$  qubit 由 Kitaev, Brooks 和 Preskill 提出，并于 2019 年被 Gyenis 实验实现。其电路结构如下图1.10A 所示。此电路结构构成了一个双势阱系统，其势能结构如下图1.10B 所示。两个势阱的底部分别对应系统的  $|0\rangle$  态和  $|1\rangle$  态。两个势阱之间的势垒比较高，因此  $|0\rangle$  态和  $|1\rangle$  态之间的传输矩阵元也比较小，对磁通噪声和电荷噪声都不敏感，具有很强的相干性能。

## 1.4 测量与控制系统

测量与控制系统是整个超导量子计算系统正常运行的关键，其包含两部分：第一部分是稀释制冷机系统，其为超导量子计算处理器提供了一个低噪声的运行环境，避免了量子比特受到热，磁通等噪声的干扰<sup>[43,44]</sup>；第二部分是测控信号

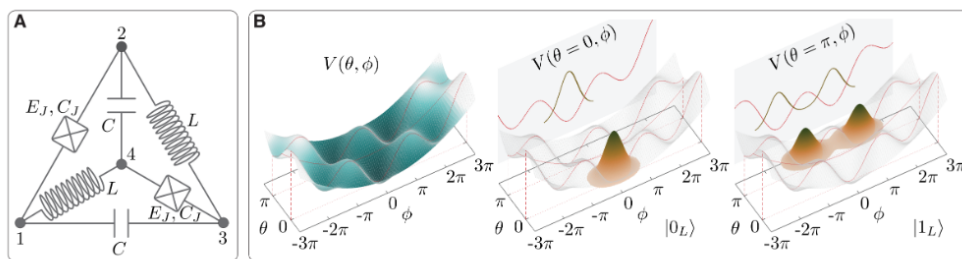


图 1.10 0- $\pi$  qubit 的结构示意图。A) 0- $\pi$  qubit 的电路结构示意图。B) 0- $\pi$  qubit 的势能结构示意图。

产生与传输系统，它根据具体的实验需求，在室温端生成所需的测控信号，通过低温传输线路系统和微波封装系统将测控信号传输到量子比特上，操控量子比特完成特定的演化过程。

### 1.4.1 稀释制冷机系统

在对超导量子计算处理器进行测量与控制时，需要为量子计算处理器维持一个极低温的环境，其主要原因有两点：第一点是金属铝膜需要进入超导状态。量子比特的核心部件是约瑟夫森结，只有铝金属膜进入超导状态，形成超导约瑟夫森结，才能让量子比特呈现正常的比特功能。此外，铝金属膜进入超导状态，也会有效减小量子比特的损耗，增大比特的退相干时间。第二点是热噪声对量子比特有显著影响。热噪声会影响比特的  $|1\rangle$  态激发与能量弛豫，设计的超导量子比特常见频率  $f_{01}$  为 5 GHz，对应的特征温度  $T_Q = hf_{01}/k_b = 240 \text{ mK}$ 。为了让周围环境的热噪声对量子比特的影响可以忽略，需要使得周围环境温度  $T_{env}$  满足，量子比特稳态热激发数  $P_{Thermal} = e^{-T_Q/T_{env}} \ll 1$  的条件。

因此，在考虑维持的低温温度时，需要同时对这两方面进行考虑。超导量子比特中常用的铝，铌，铟金属的超导转变温度  $T_c$  分别为 1.18 K, 9.25 K, 3.41 K，因此需要将环境温度降至转变温度  $T_c$  以下。此外，环境温度  $T_{env}$  还需要满足  $P_{Thermal} = e^{-T_Q/T_{env}} \ll 1$  的条件。综上考虑以上两点因素后，比特周围的环境温度至少要降低到 100 mK 以下，所以设计使用稀释制冷机系统对超导量子计算处理器进行冷却。稀释制冷机系统的构造如下图1.11所示，从上到下有五层法兰盘，分别是 50 K 层，4 K 层，still 层，cold plate 层和 Mixing chamber 层。超导量子计算处理器就被安装在 Mixing Chamber 层，该层的裸机温度能降低到 10 mK 以下。

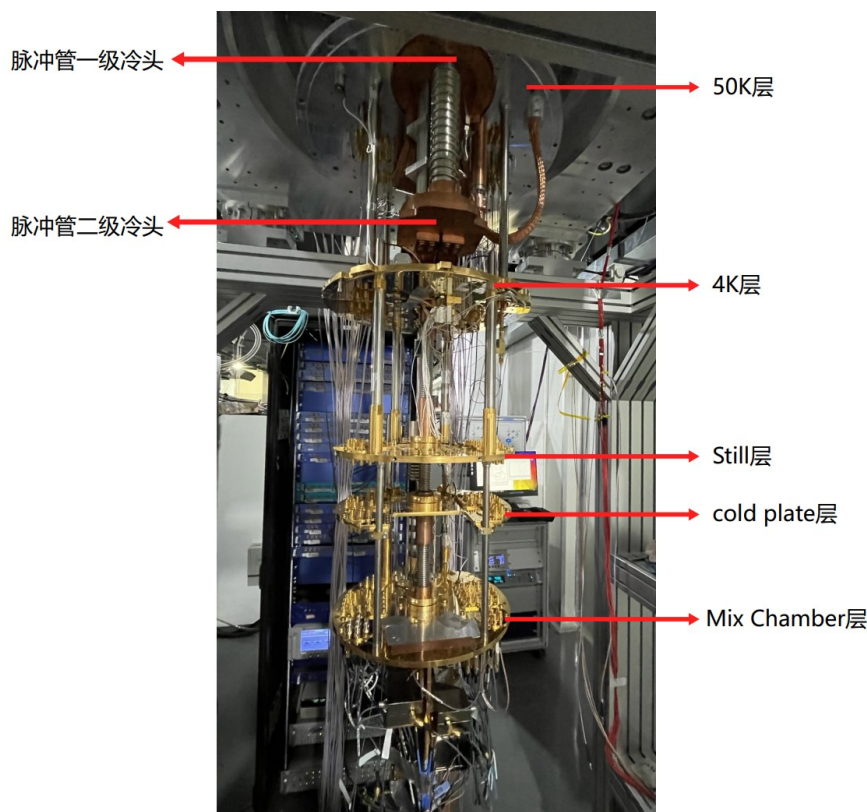


图 1.11 稀释制冷机结构示意图。

## 1.4.2 控制与测量信号的产生与传输系统

超导量子比特需要被外界施加信号才能进行特定动力学演化与比特状态测量。所以需要在室温产生控制与测量信号，并将其通过低温传输线路系统和微波封装系统传输到量子比特上，进而实现量子比特的控制与测量。

### 1.4.2.1 室温信号发生与采集系统

室温信号发生与采集系统由任意波发生器 (AWG)、微波源、直流源、室温放大器、时钟系统、数据采集系统 (DAQ) 等器件组成，具体结构如下图1.12所示。

对于量子比特的控制，需要产生两种控制信号：一种是 XY 控制信号，用以控制量子比特的状态；另一种是 Z 控制信号，用以控制量子比特的频率，Z 控制信号分为慢 Z 信号和快 Z 信号，慢 Z 信号将量子比特长时间稳定地偏置到 idle 频率；快 Z 信号将量子比特从 idle 频率快速偏置到工作频率。

关于 XY 控制信号的产生，我们使用 AWG 产生频率在 500MHz 以内的微波信号，再和微波源信号经过混频器上转换得到频率在 5GHz 左右的微波信号，以此作为 XY 控制信号。关于 Z 控制信号的产生，我们使用 AWG 产生脉冲信号作为快 Z 信号，使用直流源产生偏置电流作为慢 Z 信号，二者在制冷机内通过加法器合成最终的偏置 Z 信号。

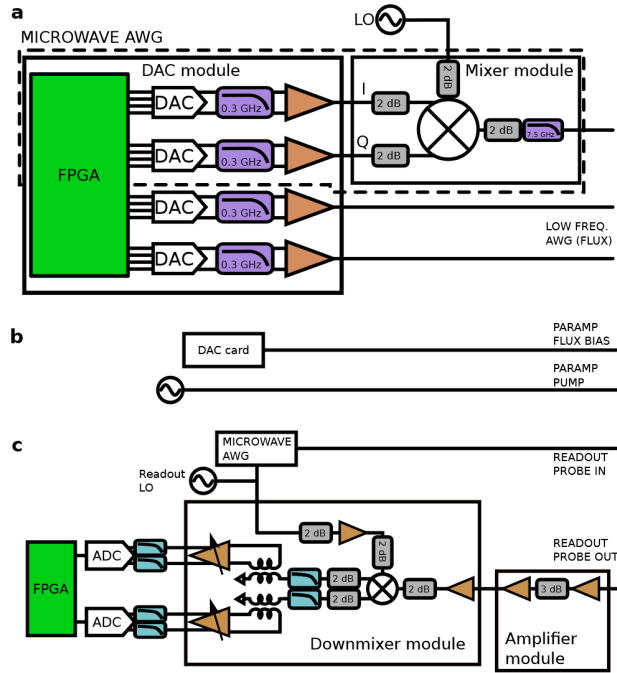


图 1.12 室温信号发生与采集系统示意图。a)XY 控制信号和快 Z 控制信号的室温发生系统。b) 控制放大器的 XY 控制信号和慢 Z 信号的室温发生系统。c) 读取信号的室温发生与采集系统。

对于量子比特的读取，系统中只有一种读取信号。读取信号的产生与 XY 控制信号类似，AWG 产生的微波信号和微波源信号经过混频器上转换得到最终的读取信号。读取信号被输入到读取线路中，与量子比特的读取腔发生相互作用。量子比特的状态信息包含在从制冷机输出的读取信号的幅度与相位信息中。输出的读取信号经过室温放大器放大后，被数据采集系统所采集，经过下转换，模数转换，数字解调，得到读取信号在 IQ 平面上的位置，即是量子比特的状态信息。

时钟系统产生其他所有器件所需的时钟信号，保证所有设备同步有序工作。

#### 1.4.2.2 低温传输线路系统

在室温产生量子比特的控制与测量信号后，测控信号需要通过低温传输线路系统在制冷机内部传播，最终传输到量子比特，与量子比特发生相互作用，完成量子比特状态的控制与读取。低温传输线路系统的具体结构如下图1.13所示，包含同轴线，衰减器，滤波器，加法器，循环器，放大器等微波器件。

衰减器和滤波器也是低温传输线路中广泛使用的微波器件。衰减器一般安装在各层法兰盘之上，主要有两个作用：一是衰减信号的强度。因为量子比特所需的信号强度很微弱，例如 XY 控制信号的电流强度仅是微安量级，如果在室温直接产生如此微弱的信号，室温热噪声的存在就会大大降低信号的信噪比。为了

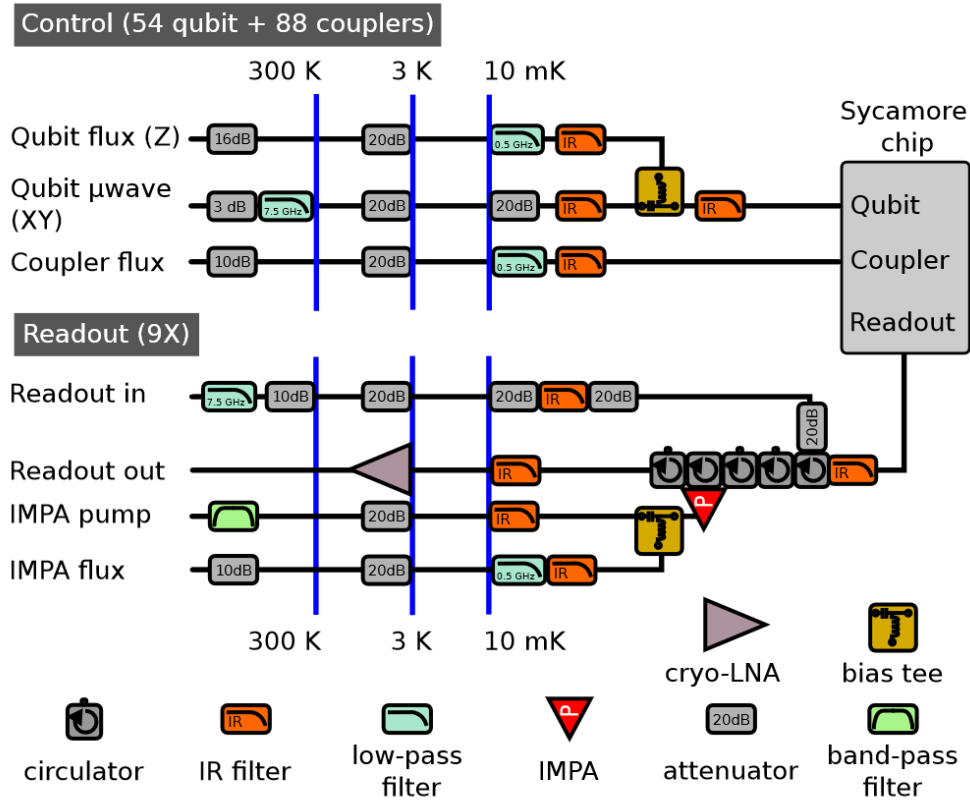


图 1.13 低温传输线路系统示意图。低温传输线路系统包含同轴线，衰减器，滤波器，加法器，循环器，放大器等微波器件，分别用于信号的传递，噪声的降低，以及信号的放大。

增大信噪比，在室温生成较强的信号，保证了比较高的信噪比，然后根据各级法兰盘的温度梯度，安装合适的衰减器，使得上一层的热噪声经过衰减后，与下一层的热噪声相当，以此保证通过测控信号经过衰减器逐级衰减，不会显著降低信噪比<sup>[45]</sup>。通过这种方式，量子比特获得了一个高信噪比的测控信号，可以以此完成精确的操控和读取；二是作为传输线的热沉，吸收电阻发热额外产生的热噪声，将每层传输线温度降低到对应层法兰盘的温度，避免额外热噪声的引入。

滤波器的主要功能是滤除不相关频段的噪声。对于 XY 控制信号和读取信号，主要应用信号频段为 4–8 GHz；对于快 Z 控制信号，主要应用频段在 500 MHz 以内；对于慢 Z 信号，主要应用频段为接近直流的频段。因此，需要在低温传输线路中安装合适频段的滤波器，将不相关的频率滤除。对于读取信号线路和 XY 信号线路，会在 Mixing Chamber 层安装 8 GHz 的低通滤波器，滤除 8 GHz 以上的噪声；对于快 Z 信号线路，会在 Mixing Chamber 层先安装 500 MHz 的低通滤波器，再安装 8 GHz 的低通滤波器。这是为了防止 500 MHz 的低通滤波器对于高频噪声的抑制效果不佳，所以增加一个 8 GHz 的低通滤波器滤除高频噪声；与之类似的，会在慢 Z 信号线路的 4K 层安装 RC 滤波器，将 KHz 级别以上的信号噪声滤除，又为了防止 Still 层热噪声的干扰，会在 Mixing Chamber 层先安装

80 MHz 的低通滤波器和 8 GHz 的低通滤波器。这些滤波器都是为了滤除传输线路中更高频率的噪声，对于防止其对量子比特的干扰<sup>[46]</sup>。

## 1.5 总结

在这一部分内容中，我们介绍了超导量子计算系统的结构，其主要分为超导量子处理器和信号产生与传输系统两部分。对于超导量子处理器，我们以传输量子比特为例，详细介绍如何利用约瑟夫森结在能级等间隔的谐振子系统中引入非线性，将超导电路的多能级系统约化成超导量子比特的二能级，并且介绍如何利用电容将多个量子比特耦合起来，形成比特间的信息交换。此外，我们也介绍了其余几种常见的量子比特。

对于信号产生与传输系统，我们首先介绍稀释制冷机系统，这是维持处理器量子状态的基础。然后介绍了室温信号产生与采集系统以及低温传输线路系统，这部分系统帮助我们能够在室温通过经典电子学器件控制低温下超导量子比特的状态，进而完成量子计算过程。



## 第2章 超导量子比特的控制与测量

前面已经介绍了超导量子计算系统的基本结构和基本原理，我们现在已经获得了多比特耦合的超导量子处理器以及支持计算过程的信号产生与传输系统。但是想要进行完整的超导量子计算过程，我们还需要对信号控制量子比特状态的过程有清晰的认知。接下来，我们将从整个量子计算过程的角度，介绍超导量子比特在计算前的初态制备过程，计算过程中的状态操控过程，以及最终对超导量子比特的状态读取。

### 2.1 超导量子比特的初态制备

进行超导量子计算的第一步就是将超导量子比特的状态制备到量子算法所需要的初态。我们一般是从系统的  $|0\rangle$  态出发，通过一系列单比特门操作和双比特门操作将系统制备到所需初态，量子门操作将在下一部分进行详细介绍，本节将主要介绍如何将系统制备到  $|0\rangle$  态。将系统制备到  $|0\rangle$  态主要依靠系统的能量弛豫，系统与周围环境进行耦合，当系统的能量全部耗散到环境中，系统就自然处于  $|0\rangle$  态。根据在耗散过程中是否施加加速耗散的操作，我们可以将初态  $|0\rangle$  态制备分为主动重置和被动重置两种。

#### 2.1.1 被动重置

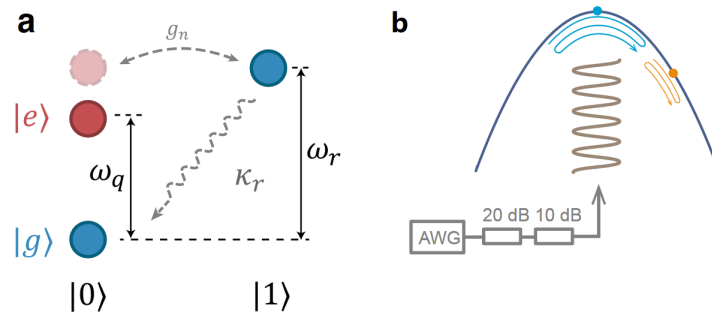
被动重置就是在系统弛豫到  $|0\rangle$  态的过程中不施加任何操作。超导量子比特与周围环境进行耦合，不断有能量流失到周围环境中，当大部分能量耗散到环境中，量子比特储存的信息也相应的丢失了，因此量子比特都会有一个能量弛豫时间  $T_1$ ，用以表征量子比特能量弛豫的快慢。一般在量子线路结束后，我们会将量子比特静置等待五倍的  $T_1$  时间，就可以系统绝大部分制备到  $|0\rangle$  态， $|1\rangle$  态的占据数小于 1%，接下来就可以开始下一轮的量子线路。一般而言，当前的  $T_1$  时间达到了百微秒量级，因此静置等待时间也要百微秒甚至毫秒量级，极大延缓了量子计算的速度。为了减少等待的时间，提高量子计算的速度，某些研究组研发了主动重置技术。

#### 2.1.2 主动重置

主动重置和被动重置的过程类似，只是会在能量弛豫过程中对量子比特施加操控，加速能量弛豫的速度。目前的主动重置过程一般都是增强量子比特与读

取腔的相互作用，因为读取腔与周围环境有极强的耦合，所以量子比特与环境的耦合也会显著增强，大大减少能量弛豫时间  $T_1$ ，可以在百纳秒的时间内将系统的  $|1\rangle$  态弛豫到 1%。

具体的操控方式有两种，一种是施加方波或者 MHz 量级的微波，将量子比特频率靠近读取腔频率，如下图 2.1b 所示。利用这种方式增大比特与读取腔的等效耦合强度，能量从比特传输到读取腔，进而快速耗散到环境中，如下图 2.1a 所示。施加方波的重置方式在操作上更简单，速度上也相对较快，但是在硬件上有限制，需要读取腔频率低于比特频率。施加 MHz 量级微波的方式没有硬件频率的限制，但是操作上更复杂一点，而且等效耦合强度较低，重置的速度也比较慢。



**图 2.1** 施加 MHz 量级的微波实现比特状态重置示意图<sup>[47]</sup>。a) 利用 MHz 量级的微波实现比特状态重置的物理过程，通过微波将比特频率与读取腔频率对齐，将能量从比特转移到读取腔中，实现能量的快速耗散。b) 所施加的 MHz 量级微波波形示意图，实现比特频率的周期振荡。

另一种方式是施加 GHz 量级微波驱动，如图 2.2 所示，将系统的  $|10\rangle$  态， $|20\rangle$  态和  $|01\rangle$  态通过微波驱动耦合起来，其中前一个数字代表比特状态，后一个数字代表读取腔状态，也就是将比特的  $|1\rangle$  态和  $|2\rangle$  态转移到读取腔的  $|1\rangle$  态。读取腔的  $|1\rangle$  态能量进而快速耗散到环境中，从而将整个量子比特系统弛豫到  $|0\rangle$  态。这种方案同样没有硬件频率的限制，重置速度也比 MHz 量级微波的方案更快，但是因为对比特有能量驱动，对操作精度的要求更高。

## 2.2 超导量子比特的状态操控

完成初态制备后，我们要对初态进行状态操控，以此构成一个算法所需的么正演化过程。利用单比特  $R_X(\pi/2)$  门和两比特 CZ 门就可以组成任意的么正演化过程，下面主要介绍这两种门的具体实现方式。



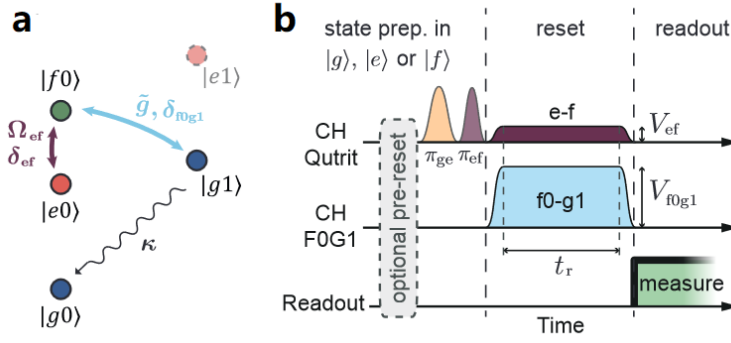


图 2.2 施加 GHz 量级的微波实现比特状态重置示意图<sup>[48]</sup>。a) 利用 GHz 量级的微波实现比特状态重置的物理过程，通过微波将  $|10\rangle$  态， $|20\rangle$  态和  $|01\rangle$  态进行耦合，实现能量的快速耗散。b) 所施加的 GHz 量级微波波形示意图，实现比特和读取腔之间的能量转换。

### 2.2.1 单比特 $R_X(\pi/2)$ 门

单比特  $R_X(\pi/2)$  门对应的矩阵形式为：

$$R_X(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

电容耦合驱动控制的电路示意图如下图 2.3 所示，据此可推导出系统的量子化哈密顿量为：

$$H = \frac{\hat{Q}^2}{2C_\Sigma} - E_J \cos(\hat{\varphi}) + \frac{C_d}{C_\Sigma} V_d(t) \hat{Q}, \quad (2.2)$$

其中  $C_d$  是驱动线与比特的耦合电容， $C_\Sigma = C + C_d$  是与比特耦合的所有电容的和。 $V_d(t)$  是驱动的交流电压，一般用余弦形式表示为  $V_d(t) = V_0 \cos(\omega_d t + \phi)$ ， $\omega_d$  是驱动交流电压的频率， $\phi$  是驱动交流电压的相位。利用二次量子化方法，将

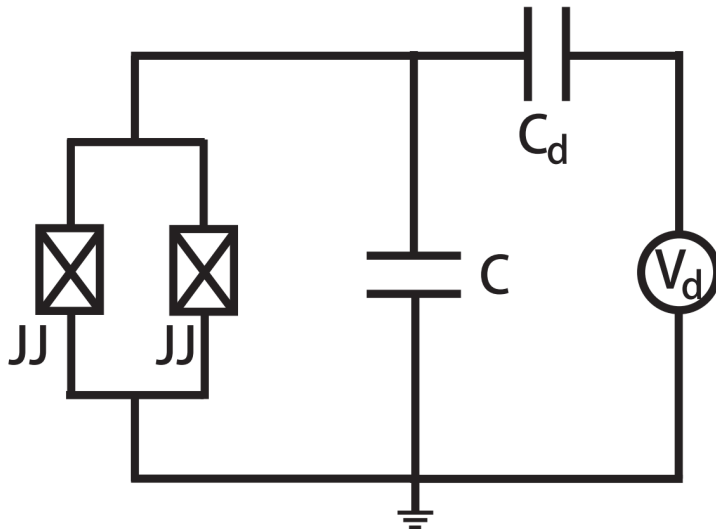


图 2.3 电容耦合驱动控制的电路示意图。

整个系统转换到粒子数表象，并把哈密顿量截断到  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$  展开的计算空间内，将产生、湮灭算符替换成对应的 Pauli 算符： $a \rightarrow \sigma^-$ ， $a^\dagger \rightarrow \sigma^+$ ，则系统哈密顿量的形式变为：

$$H = -\frac{\hbar\omega}{2}\sigma^z + \frac{C_d V_0}{C_\Sigma} e\left(\frac{E_J}{2E_C}\right)^{1/4} \cos(\omega_d t + \phi) \sigma^y, \quad (2.3)$$

其中  $\hbar\omega = \sqrt{8E_C E_J} - E_C$  为量子比特的自身频率， $E_C = \frac{e^2}{2C_\Sigma}$  是量子比特的充电能。可以观察到耦合电容  $C_d$  会影响量子比特的自身频率，但是实际量子比特设计中， $C_d \ll C$ ，所以这种影响几乎可以忽略。

哈密顿量中的第一项是量子比特自身的静态哈密顿量，第二项就是电容耦合驱动的动态哈密顿量。在此动态哈密顿量的作用下，量子比特的状态绕着布洛赫球中的 Y 轴进行旋转，驱动强度  $g_c$  定义为： $\hbar g_c = \frac{C_d V_0}{C_\Sigma} e\left(\frac{E_J}{2E_C}\right)^{1/4}$ 。经过替换后，系统哈密顿量可表示为： $H = -\frac{\hbar\omega}{2}\sigma^z + \hbar g_c \cos(\omega_d t + \phi) \sigma^y$ 。

当驱动频率  $\omega_d$  与比特频率  $\omega$  相等时，经过旋转坐标系变换<sup>[49]</sup>，系统的哈密顿量可以转化成：

$$H_r/\hbar = -\frac{g}{2}(\cos \varphi \sigma^x - \sin \varphi \sigma^y), \quad (2.4)$$

这是一个不含时哈密顿量，其演化矩阵  $U = e^{-iH_r t/\hbar} = e^{i\frac{gt}{2}(\cos \varphi \sigma^x - \sin \varphi \sigma^y)}$ ，这个演化矩阵是一个标准的旋转算符。从布洛赫球表象上观察，其具体作用就是单比特状态绕着 XY 平面上的射线  $(\cos \varphi, -\sin \varphi, 0)$  为轴，旋转了角度  $gt$ 。此操作的旋转轴可以由驱动微波的相位  $\phi$  调节，旋转角度可以由驱动微波的强度对时间的积分决定。当  $\varphi = 0$  时，实现了绕 X 轴正半轴旋转的操作；当  $\varphi = \pi/2$  时，实现了绕 Y 轴正半轴旋转的操作。因此，当选择  $\varphi = 0$ ，且驱动时间  $t = \frac{\pi}{2g}$ ，即可构成一个  $R_X(\pi/2)$  门。

### 2.2.2 两比特受控 Z 门

双比特受控 Z 门 (CZ 门) 的矩阵形式可以表示为：

$$CZ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

根据 CZ 门的矩阵形式，需要在  $|11\rangle$  能级积累一个额外的  $\pi$  相位。我们通过两个能级间的相互排斥实现这个额外的相位积累，如下图 2.4 所示。例如两个耦合比特的频率分别为 5.0GHz 和 4.875GHz，非简谐性的大小为 -250MHz，比特间耦合强度为 10MHz。在进行做门操作时，需要对第二个比特施加类方波形式

的快 Z 信号，以调节其比特频率，从而将系统的  $|11\rangle$  能级与  $|02\rangle$  能级相互靠近，二者之间的相互耦合使得  $|11\rangle$  能级与  $|02\rangle$  能级形成免交叉。通过这种方式，四个计算基矢只有  $|11\rangle$  被明显排斥，也因此其积累了额外的条件相位。当条件相位为  $\pi$  时，就构成了一个受控相位 Z 门。

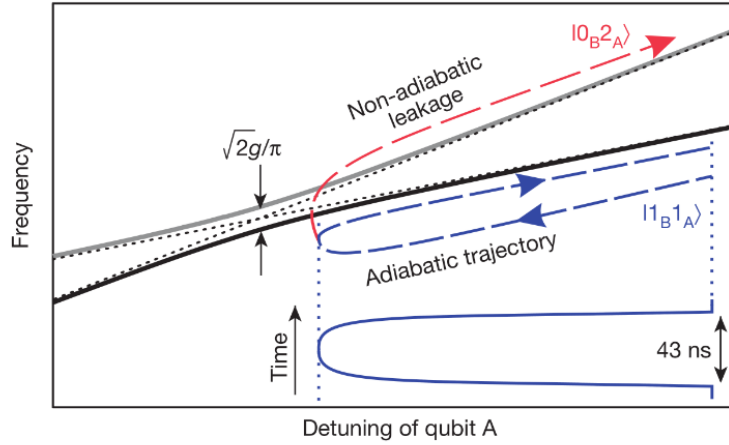


图 2.4 通过  $|11\rangle$  能级与  $|02\rangle$  能级免交叉实现 CZ 量子门的示意图。

## 2.3 超导量子比特的状态读取

经过初态制备和量子门操作的量子计算过程后，还需要将量子计算的结果提取成经典信息，也就是对量子比特的状态进行测量。量子比特的测量方法有很多种，现在应用最广泛的方法是色散读取方法，这里主要介绍色散读取方法。在色散读取中，量子比特与一个线性的谐振腔失谐耦合，二者的频率差远大于耦合强度。在这种条件下，量子比特的状态只会影响谐振腔的频率，比特  $|0\rangle$  态和  $|1\rangle$  态分别对应谐振腔的两个频率。根据耦合体系的这种性质，当读取信号注入谐振腔，激发谐振腔能级的时候，不同的比特状态会使得读取信号获得不同的相位移。读取信号离开谐振腔后，通过测量读取信号的相位，就可以获得量子比特的状态信息。

### 2.3.1 二能级量子比特与读取腔的色散读取

量子比特与谐振腔进行耦合，其电路模型如图2.5所示。系统哈密顿量可以写为：

$$H = -\frac{\hbar\omega_q}{2}\sigma^z + \hbar\omega_r a^\dagger a + \hbar g(\sigma^+ a + \sigma^- a^\dagger), \quad (2.6)$$

其中  $\omega_q$  和  $\omega_r$  分别是比特和谐振腔的频率，二者之间的频率差  $\Delta = \omega_q - \omega_r$ 。  $g$  是比特和谐振腔之间的耦合强度。在我们的设计中，耦合强度  $g$  远小于频率差  $\Delta$ ，

经过坐标系旋转后可以得到耦合系统哈密顿量的近似表达式为：

$$H' \approx H - \lambda[T, H] = -\frac{\hbar\omega_q}{2}\sigma^z + \hbar(\omega_r + \chi\sigma^z)a^\dagger a, \quad (2.7)$$

其中， $\chi = -\frac{g^2}{\Delta}$ ，即是所定义的色散位移。根据2.7式可以明显观察到，在  $g \ll \Delta$  条件下，与比特耦合后的谐振腔频率  $\omega'_r = \omega_r + \chi\sigma^z$ ，这是一个与比特状态相关的物理量。当比特处于  $|0\rangle$  态时，谐振腔频率  $\omega_r^{(0)} = \omega_r + \chi$ ；当比特处于  $|1\rangle$  态时，谐振腔频率  $\omega_r^{(1)} = \omega_r - \chi$ 。不同比特状态下，读取谐振腔的频率不同，因此当读取信号经过读取谐振腔时，获得的相位移动也不相同。所以通过探测输出的读取信号的相位移动，可以测量量子比特状态。

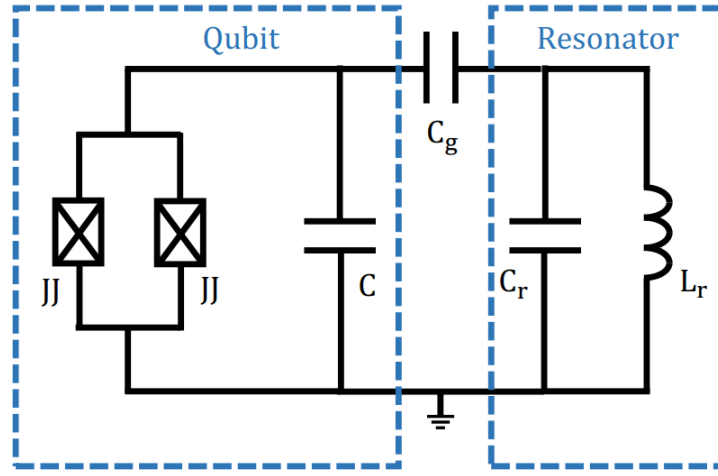


图 2.5 量子比特与读取腔电容耦合电路示意图。

以上是二能级的量子比特与谐振腔耦合的结果，但是实际的传输子量子比特并不是一个单纯的二能级，而是具有非简谐性  $\eta$  的多能级系统，所以第三能级同样也会影响读取腔的频率。如果考虑第三能级的影响，色散位移  $\chi$  需要被修正为<sup>[50]</sup>：

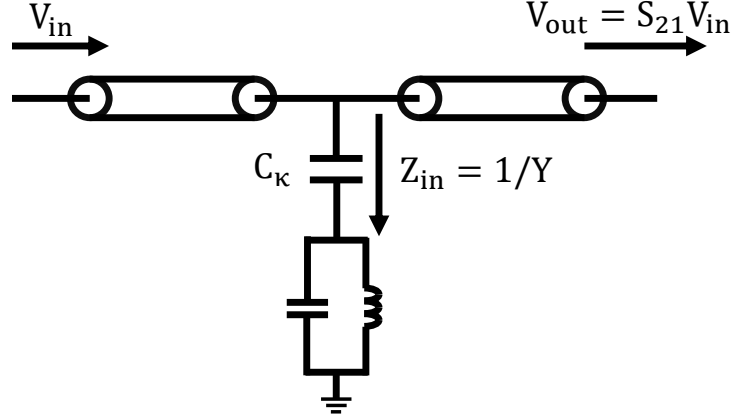
$$\chi = -\frac{g^2}{\Delta} \frac{1}{1 + \Delta/\eta}, \quad (2.8)$$

量子比特在  $|0\rangle$  态和  $|1\rangle$  态时，谐振腔频率依然分别是  $\omega_r + \chi$  和  $\omega_r - \chi$ 。

### 2.3.2 读取信号的相位移动

接下来介绍谐振腔色散位移对读取信号相位移动的具体影响。考虑到读取信号和谐振腔的相互作用只是经典力学框架下的相互作用，读取信号注入到谐振腔的物理过程可以由图2.6表示。当读取信号通过传输线传输到谐振腔与传输线的耦合位置时，由于读取腔与传输线的耦合，耦合部分的阻抗不再等于传输线的特征阻抗  $Z_0$ 。阻抗不匹配使得读取信号在耦合位置产生透射和反射，透射的

强度由散射参数  $S_{21}$  表征，即输出信号与输入信号强度的比值  $S_{21} = \frac{V_{out}}{V_{in}}$ ， $S_{21}$  是一个复数。读取谐振腔的频率会影响耦合位置的阻抗，进而影响读取信号的  $S_{21}$ 。所以通过测量整个读取线路的散射参数  $S_{21}$ ，可以表征出对应读取谐振腔的频率特性，进而测量量子比特的状态。



**图 2.6** 被读取谐振腔分流的读取信号传输线路示意图。输入的读取信号电压幅度为  $V_{in}$ ，当读取信号传输到读取谐振腔所在的位置时，由于读取腔与传输线路的耦合，这一耦合部分的阻抗不再等于传输线特征阻抗  $Z_0$ ，因此阻抗不匹配使得读取信号产生透射和反射。透射的强度由  $S_{21}$  表征。读取谐振腔的频率影响阻抗  $Z_{in}$ ，进而影响读取信号的  $S_{21}$ 。通过测量  $S_{21}$  表征读取谐振腔的频率，进而表征比特状态。

根据微波的传输特性，读取微波信号在耦合部分的散射参数  $S_{21} = \frac{2Z_{in}}{2Z_{in} + Z_0}$  [51]。其中  $Z_0 = 50 \Omega$  为传输线的特征阻抗， $Z_{in}$  是分流线路的阻抗，即谐振腔与耦合电容  $C_k$  构成系统的阻抗。据此公式，可以得到读取微波信号的散射参数  $S_{21}$ ，及其实部、虚部分别为 [52,53]：

$$S_{21} = \frac{S_{min} + 2iQ_l\delta y}{1 + 2iQ_l\delta y}, \quad (2.9)$$

$$ReS_{21} = \frac{S_{min} + (2iQ_l\delta y)^2}{1 + (2iQ_l\delta y)^2}, \quad (2.10)$$

$$ImS_{21} = \frac{2Q_l\delta y(1 - S_{min})}{1 + (2iQ_l\delta y)^2}, \quad (2.11)$$

其中  $Q_l^{-1} = Q_i^{-1} + Q_c^{-1}$ ， $Q_i$  是谐振腔内在品质因数，表征谐振腔通过自身损耗源损耗的能量大小， $Q_c$  是谐振腔耦合品质因数，表征谐振腔通过耦合的传输线泄露的能量大小， $S_{min} = Q_c/(Q_c + Q_i)$ ， $\delta y = (\omega - \omega_r)/\omega_r$ 。假设读取信号的频率为  $\omega = (\omega_r^{(0)} - \omega_r^{(1)})/2$ ，将其带入方程2.9，可以观察到  $S_{21}$  的实部是相同的，虚部互为相反数。从 IQ 复平面的角度分析， $|0\rangle$  态和  $|1\rangle$  态的读取信号分别位于 X 轴上下两侧，关于 X 轴对称。通过在复平面对读取信号散射参量  $S_{21}$  进行分析，可以明显区分  $|0\rangle$  态和  $|1\rangle$  态对应的读取信号，最终两个状态的读取信号分布如图2.7所示。

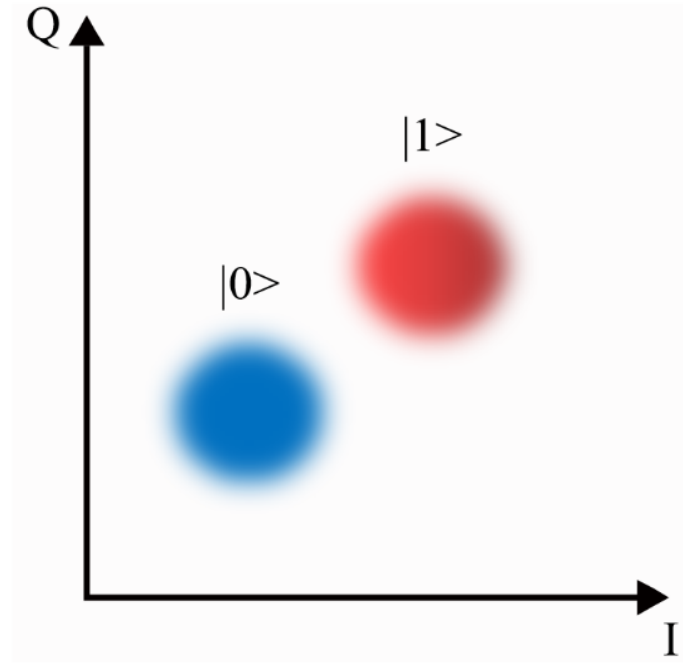


图 2.7  $|0\rangle$  态和  $|1\rangle$  态对应测量结果示意图。

### 2.3.3 量子比特状态读取结果的校准

在具体实验中，量子比特状态的读取分为单发测量和系综测量两种方式。单发测量是对量子比特状态进行单独地一次测量。根据测量结果在 IQ 复平面上的位置确定量子比特是处于  $|0\rangle$  态还是  $|1\rangle$  态；系综测量是针对物理观测量的测量，需要对量子比特状态进行多次测量。根据多次测量结果在 IQ 平面上的分布确定量子比特在  $|0\rangle$  态和  $|1\rangle$  态的概率  $P_{|0\rangle}$  和  $P_{|1\rangle}$ ，进而得到物理观测量的平均值。

单发测量获得的是单独的一个结果，很难进行结果的矫正，但是系综测量获得的是多次测量的一个统计平均结果，可以通过统计学的一些方式进行测量结果的校准。具体过程主要分为两步：

第一步是对读取的误差进行标定：先将量子比特制备到  $|0\rangle$  态，然后直接对其进行状态读取，获得初态在  $|0\rangle$  态时，测量结果为  $|0\rangle$  态和  $|1\rangle$  态的概率分别为  $F_{00}$  和  $F_{01}$ ；同样的，将量子比特初态制备到  $|1\rangle$  态，利用相同的方法可以标定出初态为  $|1\rangle$  态，测量结果为  $|0\rangle$  态和  $|1\rangle$  态的概率分别为  $F_{10}$  和  $F_{11}$ 。根据这四个标定参数，可以对原始读取结果进行校准；

第二步是对原始的读取结果进行校准：根据  $F_{00}$ 、 $F_{01}$ 、 $F_{10}$  和  $F_{11}$  四个标定参数，可以构建矩阵  $F_c$ ：

$$F_c = \begin{pmatrix} F_{00} & F_{01} \\ F_{10} & F_{11} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

整个矩阵的作用效果是将理想的  $|0\rangle$  态和  $|1\rangle$  态概率转化为实验测得的  $|0\rangle$  态和

$|1\rangle$  态概率。例如初态为  $|0\rangle$  态，则理想的测量结果应为  $P_{|0\rangle} = 1$ 、 $P_{|1\rangle} = 0$ ，但实际结果为  $F_{00}$  和  $F_{01}$ ，相当于  $P_{exp} = F_c P_{ideal}$ ，其中  $P_{ideal}$  和  $P_{exp}$  是由  $P_{|0\rangle}$  和  $P_{|1\rangle}$  组成的矢量。

$$P_{ideal} = \begin{pmatrix} P_{|0\rangle}^{ideal} \\ P_{|1\rangle}^{ideal} \end{pmatrix}, P_{exp} = \begin{pmatrix} P_{|0\rangle}^{exp} \\ P_{|1\rangle}^{exp} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

因此，当进行系统测量时，如果概率测量结果为  $P_{exp}$ ，可以通过  $P_{ideal} = F_c^{-1} P_{exp}$ ，得到理想的概率测量结果  $P_{ideal}$ 。这就是量子比特状态读取结果的校准方法。

## 2.4 总结

上一章介绍了超导量子计算系统的基本构成和基本原理。本章在此基础上，介绍如何对超导量子比特的状态进行操控和测量，例如量子比特的初态制备，单比特和双比特门操作以及量子状态的色散测量，以此构成一个完整的量子计算过程。





## 参考文献

- [1] Braumüller J, Karamlou A H, Yanay Y, et al. Probing quantum information propagation with out-of-time-ordered correlators[J]. *Nature Physics*. 2022, 18 (2): 172–178.
- [2] Arute F, Arya K, Babbush R, et al. Quantum supremacy using a programmable superconducting processor[J]. *Nature*. 2019, 574 (7779): 505–510.
- [3] Jurcevic P, Javadi-Abhari A, Bishop L S, et al. Demonstration of quantum volume 64 on a superconducting quantum computing system[J]. *Quantum Science and Technology*. 2021, 6 (2): 025020.
- [4] DiVincenzo D P. The physical implementation of quantum computation[J]. *Fortschritte der Physik: Progress of Physics*. 2000, 48 (9-11): 771–783.
- [5] Havlíček V, Córcoles A D, Temme K, et al. Supervised learning with quantum-enhanced feature spaces[J]. *Nature*. 2019, 567 (7747): 209–212.
- [6] Quantum G A, Collaborators\*†, Arute F, et al. Hartree-fock on a superconducting qubit quantum computer[J]. *Science*. 2020, 369 (6507): 1084–1089.
- [7] Erhard A, Wallman J J, Postler L, et al. Characterizing large-scale quantum computers via cycle benchmarking[J]. *Nature Communications*. 2019, 10 (1): 1–7.
- [8] Zhang J, Pagano G, Hess P W, et al. Observation of a many-body dynamical phase transition with a 53-qubit quantum simulator[J]. *Nature*. 2017, 551 (7682): 601–604.
- [9] Zhong H S, Wang H, Deng Y H, et al. Quantum computational advantage using photons[J]. *Science*. 2020, 370 (6523): 1460–1463.
- [10] Zhong H S, Deng Y H, Qin J, et al. Phase-programmable gaussian boson sampling using stimulated squeezed light[J]. *Physical Review Letters*. 2021, 127 (18): 180502.
- [11] Semeghini G, Levine H, Keesling A, et al. Probing topological spin liquids on a programmable quantum simulator[J]. *Science*. 2021, 374 (6572): 1242–1247.
- [12] Bernien H, Schwartz S, Keesling A, et al. Probing many-body dynamics on a 51-atom quantum simulator[J]. *Nature*. 2017, 551 (7682): 579–584.
- [13] Devoret M H, Martinis J M, Clarke J. Measurements of macroscopic quantum tunneling out of the zero-voltage state of a current-biased josephson junction[J]. *Physical Review Letters*. 1985, 55 (18): 1908.
- [14] Bouchiat V, Vion D, Joyez P, et al. Quantum coherence with a single cooper pair[J].

- Physica Scripta. 1998, 1998 (T76): 165.
- [15] Nakamura Y, Pashkin Y A, Tsai J. Coherent control of macroscopic quantum states in a single-cooper-pair box[J]. Nature. 1999, 398 (6730): 786–788.
  - [16] Vion D, Aassime A, Cottet A, et al. Manipulating the quantum state of an electrical circuit[J]. Science. 2002, 296 (5569): 886–889.
  - [17] Chiorescu I, Nakamura Y, Harmans C M, et al. Coherent quantum dynamics of a superconducting flux qubit[J]. Science. 2003, 299 (5614): 1869–1871.
  - [18] Simmonds R W, Lang K, Hite D A, et al. Decoherence in josephson phase qubits from junction resonators[J]. Physical Review Letters. 2004, 93 (7): 077003.
  - [19] Koch J, Terri M Y, Gambetta J, et al. Charge-insensitive qubit design derived from the cooper pair box[J]. Physical Review A. 2007, 76 (4): 042319.
  - [20] Wu Y, Bao W S, Cao S, et al. Strong quantum computational advantage using a superconducting quantum processor[J]. Physical Review Letters. 2021, 127 (18): 180501.
  - [21] Place A P, Rodgers L V, Mundada P, et al. New material platform for superconducting transmon qubits with coherence times exceeding 0.3 milliseconds[J]. Nature Communications. 2021, 12 (1): 1–6.
  - [22] Wang C, Li X, Xu H, et al. Transmon qubit with relaxation time exceeding 0.5 milliseconds[M]. [S.l.]: [s.n.], 2021.
  - [23] Zhu Q, Cao S, Chen F, et al. Quantum computational advantage via 60-qubit 24-cycle random circuit sampling[J]. Science Bulletin. 2022, 67 (3): 240–245.
  - [24] Krinner S, Lacroix N, Remm A, et al. Realizing repeated quantum error correction in a distance-three surface code[M]. [S.l.]: [s.n.], 2021.
  - [25] Guo Q, Cheng C, Li H, et al. Stark many-body localization on a superconducting quantum processor[J]. Physical Review Letters. 2021, 127 (24): 240502.
  - [26] Li S, Castellano A D, Wang S, et al. Realisation of high-fidelity nonadiabatic cz gates with superconducting qubits[J]. npj Quantum Information. 2019, 5 (1): 1–7.
  - [27] Walter T, Kurpiers P, Gasparinetti S, et al. Rapid high-fidelity single-shot dispersive readout of superconducting qubits[J]. Physical Review Applied. 2017, 7 (5): 054020.
  - [28] Sunada Y, Kono S, Ilves J, et al. Fast readout and reset of a superconducting qubit coupled to a resonator with an intrinsic purcell filter[M]. [S.l.]: [s.n.], 2022.
  - [29] Kelly J, Barends R, Fowler A G, et al. State preservation by repetitive error detection in a superconducting quantum circuit[J]. Nature. 2015, 519 (7541): 66–69.
  - [30] Yan Z, Zhang Y R, Gong M, et al. Strongly correlated quantum walks with a

- 12-qubit superconducting processor[J]. *Science*. 2019, 364 (6442): 753–756.
- [31] Zha C, Bastidas V, Gong M, et al. Ergodic-localized junctions in a periodically driven spin chain[J]. *Physical Review Letters*. 2020, 125 (17): 170503.
- [32] Chen F, Sun Z H, Gong M, et al. Observation of strong and weak thermalization in a superconducting quantum processor[J]. *Physical Review Letters*. 2021, 127 (2): 020602.
- [33] Chow J, Dial O, Gambetta J. Ibm quantum breaks the 100-qubit processor barrier[M]. [S.l.]: [s.n.], 2021.
- [34] Mallek J L, Yost D R W, Rosenberg D, et al. Fabrication of superconducting through-silicon vias[M]. [S.l.]: [s.n.], 2021.
- [35] Rosenberg D, Weber S, Conway D, et al. 3d integration and packaging for solid-state qubits[M]. [S.l.]: [s.n.], 2019.
- [36] Vahidpour M, O’Brien W, Whyland J T, et al. Superconducting through-silicon vias for quantum integrated circuits[M]. [S.l.]: [s.n.], 2017.
- [37] Guo C, Zhao Y, Huang H L. Verifying random quantum circuits with arbitrary geometry using tensor network states algorithm[J]. *Physical Review Letters*. 2021, 126 (7): 070502.
- [38] Josephson B D. Possible new effects in superconductive tunnelling[J]. *Physics Letters*. 1962, 1 (7): 251–253.
- [39] Anderson P W, Rowell J M. Probable observation of the josephson superconducting tunneling effect[J]. *Physical Review Letters*. 1963, 10 (6): 230.
- [40] Clarke J, Clarke J, Braginski A I. The SQUID Handbook: Fundamentals and Technology of SQUIDS and SQUID Systems: volume 1[M]. [S.l.]: Wiley-Vch, 2003.
- [41] Pashkin Y A, Yamamoto T, Astafiev O, et al. Quantum oscillations in two coupled charge qubits[J]. *Nature*. 2003, 421 (6925): 823–826.
- [42] Barends R, Kelly J, Megrant A, et al. Coherent josephson qubit suitable for scalable quantum integrated circuits[J]. *Physical Review Letters*. 2013, 111 (8): 080502.
- [43] Bertet P, Chiorescu I, Burkard G, et al. Dephasing of a superconducting qubit induced by photon noise[J]. *Physical Review Letters*. 2005, 95 (25): 257002.
- [44] Kumar P, Sendelbach S, Beck M, et al. Origin and reduction of  $1/f$  magnetic flux noise in superconducting devices[J]. *Physical Review Applied*. 2016, 6 (4): 041001.
- [45] Krinner S, Storz S, Kurpiers P, et al. Engineering cryogenic setups for 100-qubit

- scale superconducting circuit systems[J]. EPJ Quantum Technology. 2019, 6 (1): 2.
- [46] Martinis J M, Megrant A. Ucsb final report for the csq program: Review of decoherence and materials physics for superconducting qubits[M]. [S.l.]: [s.n.], 2014.
- [47] Zhou Y, Zhang Z, Yin Z, et al. Rapid and unconditional parametric reset protocol for tunable superconducting qubits[J]. Nature Communications. 2021, 12 (1): 5924.
- [48] Magnard P, Kurpiers P, Royer B, et al. Fast and unconditional all-microwave reset of a superconducting qubit[J]. Physical review letters. 2018, 121 (6): 060502.
- [49] Whaley K, Light J. Rotating-frame transformations: A new approximation for multiphoton absorption and dissociation in laser fields[J]. Physical Review A. 1984, 29 (3): 1188.
- [50] Sank D T. Fast, Accurate State Measurement in Superconducting Qubits[D]: [PhD]. [S.l.]: University of California, Santa Barbara, 2014.
- [51] Pozar D M. Microwave engineering[M]. [S.l.]: John wiley & sons, 2011.
- [52] Mazin B A. Microwave kinetic inductance detectors[M]. [S.l.]: California Institute of Technology, 2005.
- [53] Megrant A, Neill C, Barends R, et al. Planar superconducting resonators with internal quality factors above one million[J]. Applied Physics Letters. 2012, 100 (11): 113510.