

高数下习题

高数下习题

线面积分的计算

无穷级数

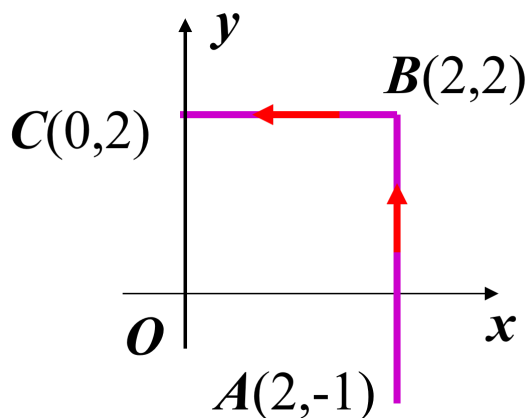
线面积分的计算

先判断是否与积分路径有关

- $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
 $I = \oint_L Pdx + Qdy = 0$
- $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$
 $I = \pm \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0$
- $A = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$

1. 计算 $\int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, L 从点 $A(2, -1)$ 到 $B(2, 2)$ 再到 $C(0, 2)$ 的折线

(最基本对曲线积分的算法)

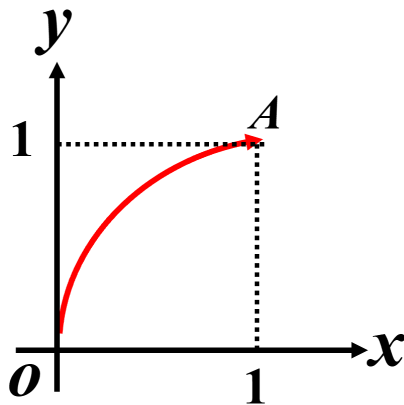


```

1  from sympy import *
2
3  init_printing(use_unicode=True, wrap_line=False)
4
5  x, y = symbols('x y')
6
7  eq1 = y**2 - 2 * x * y
8  eq2 = x**2 - 2 * x * y
9
10 res = integrate(eq1, (y, -1, 2)).subs(x, 2) +
    integrate(eq2, (x, 2, 0)).subs(y, 2)
11 pprint(res.simplify())
12
13 # 7/3

```

2. 计算 $I = \int_L (x^2 + 2xy)dx + (x^2 + y^4)dy$, 其中 L 为由点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的曲线 $y = \sin \frac{\pi}{2}x$
(与积分路径无关的条件使用)



```

1  from sympy import *
2
3  init_printing(use_unicode=True, wrap_line=False)
4
5  x, y = symbols('x y')
6
7  eq1 = x**2 + 2 * x * y
8  eq2 = x**2 + y**4
9
10 pprint(diff(eq1, y))
11 print()
12 pprint(diff(eq2, x))
13 print()
14

```

```

15 res = integrate(eq1, (x, 0, 1)).subs(y, 0) +
    integrate(eq2, (y, 0, 1)).subs(x, 1)
16
17 pprint(res)
18
19 # 2·x
20
21 # 2·x
22
23 # 23
24 # ———
25 # 15

```

3. 计算 $I = \int_L (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy$, 其中 L 为由点 $(a, 0)$ 到点 $(0, 0)$ 的上半圆周 $x^2 + y^2 = ax, y \geq 0$ (格林公式的应用)

```

1 from sympy import *
2
3 init_printing(use_unicode=True, wrap_line=False)
4
5 x, y, m, a = symbols('x y m a')
6
7 eq1 = E**x * sin(y) - m * y
8 eq2 = E**x * cos(y) - m
9
10 pprint(diff(eq1, y).simplify())
11 print()
12 pprint(diff(eq2, x))
13 print()
14
15 eq3 = eq2.diff(x) - eq1.diff(y)
16 pprint(eq3)
17 print()
18
19 res = eq3 * (a / 2)**2 * pi / 2
20 pprint(res)
21
22 #      x
23 # -m + e ·cos(y)
24
25 # x
26 # e ·cos(y)

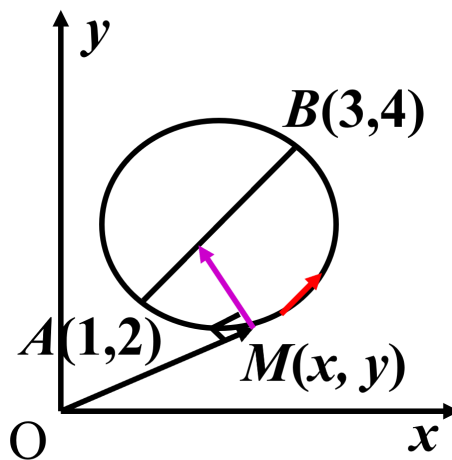
```

```

27
28 # m
29
30 # 2
31 #  $\pi \cdot a \cdot m$ 
32 # —————
33 # 8

```

4. 设平面力场的大小等于作用点到原点的距离，方向为作用点的向径方向按逆时针旋转 90° ，试求质点沿曲线 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2$ ，从点 $A(1,2)$ 按逆时针移动到点 $B(3,4)$ 时场力所作的功
(格林公式的应用)



$$\vec{F} = (-y, x)$$

$$W = \oint_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{BA} \vec{F} \cdot (dx, dy)$$

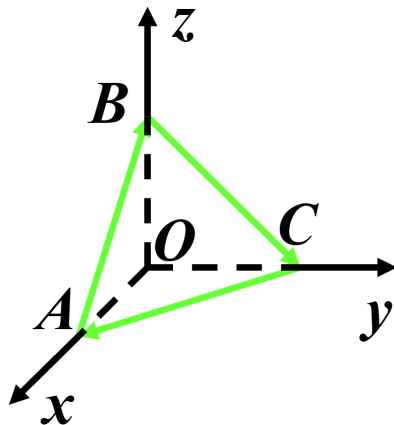
```

1 from sympy import *
2
3 init_printing(use_unicode=True, wrap_line=False)
4
5 x,y=symbols('x y')
6
7 res=2*sqrt(2)**2*pi/2+integrate(-(x+1)+x,(x,1,5))
8
9 pprint(res)
10
11 # -4 + 2*pi

```

$$A = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$$

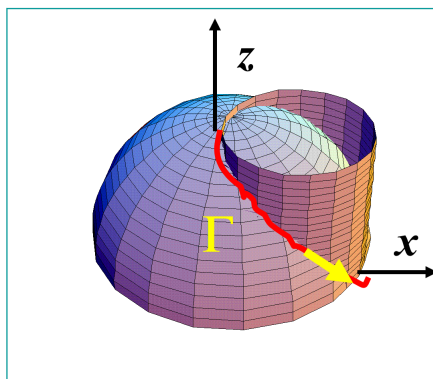
5. 求力 $\vec{F} = (y, z, x)$ 沿有向闭曲线 Γ 所作的功，其中 Γ 为平面 $x + y + z = 1$ 被三个坐标面所截成三角形的整个边界，从 z 轴正向看去沿顺时针（注意逆时针为正方向）方向
(斯托克斯公式的应用)



三角形区域设为: Σ , 方向向量 $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$

$$\begin{aligned} W &= \oint_{\Gamma} ydx + zdy + xdz \\ &= - \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (-3) dS \\ &= \sqrt{3} \iint_{D_{xy}} dxdy = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

6. 计算 $\oint_{\Gamma} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, 其中 Γ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 和柱面 $x^2 + y^2 = Rx$ 的交线 ($z \geq 0$), 从 z 轴正向看为逆时针方向
(换元法的应用)



令 $x = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} \cos t$, $y = \frac{R}{2} \sin t$, ($0 \leq t \leq 2\pi$)

代入球面方程可得: $z = R \sin \frac{t}{2}$

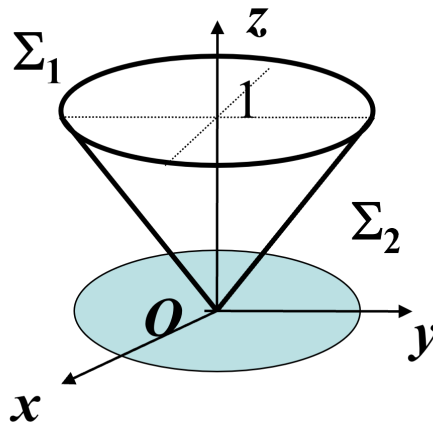
```
1 | from sympy import *
```

```

2
3 init_printing(use_unicode=True, wrap_line=False)
4
5 t, R = symbols('t R')
6
7 x = R / 2 + R / 2 * cos(t)
8 y = R / 2 * sin(t)
9 z = R * sin(t / 2)
10
11 eq = y**2 * x.diff(t) + z**2 * y.diff(t) + x**2 *
    z.diff(t)
12 res = integrate(eq, (t, 0, 2 * pi))
13
14 pprint(res.simplify())
15
16 #      3
17 # - π · R
18 # —————
19 #      4

```

7. 设有一物质曲面 Σ 是由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $z = 1$ 所围立体的边界曲面, 曲面的面密度函数为 $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, 求该曲面的质量 M (第一类曲面积分的算法)



```

1 from sympy import *
2
3 init_printing(use_unicode=True, wrap_line=False)
4
5 x, y, R, theta = symbols('x y R theta')
6
7 f = x**2 + y**2
8 z1 = sqrt(f)

```

```

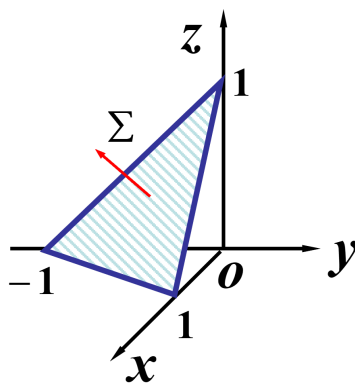
9  z2 = Symbol('1')
10
11  eq1 = f * sqrt(1 + z1.diff(x)**2 + z1.diff(y)**2)
12  eq2 = f * sqrt(1 + z2.diff(x)**2 + z2.diff(y)**2)
13
14  eq3 = eq1 + eq2
15  eq3 = eq3.subs(x, R * cos(theta)).subs(y, R * sin(theta))
    * Matrix(
16      [R * cos(theta), R *
        sin(theta)]).jacobian(Matrix([theta, R])).det()
17  res = integrate(eq3, (theta, 0, 2 * pi), (R, 0, 1))
18
19  pprint(res.simplify())
20
21  #  $\pi \cdot (-\sqrt{2} - 1)$ 
22  # _____
23  #      2

```

8. 计 算

$$I = \iint_{\Sigma} [f(x, y, z) + x] dydz + [2f(x, y, z) + y] dzdx + [f(x, y, z) + z] dxdy$$
, $f(x, y, z)$ 为连续函数, Σ 为平面 $x - y + z = 1$ 在第四象限部分的上侧

(归一法求解)



∴ Σ 的法向量: $\vec{n} = (1, -1, 1)$

∴ $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$I = \iint_{\Sigma} \left(P \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} + Q \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} + R \right) dxdy$$

```

1  from sympy import *
2
3  init_printing(use_unicode=True, wrap_line=False)
4
5  x, y = symbols('x y')

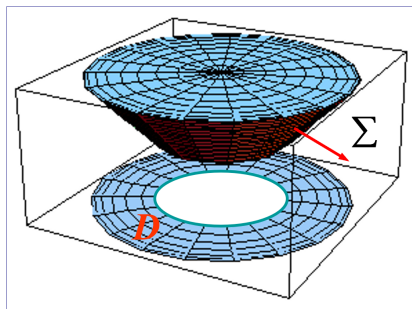
```

```

6  f = Function('f')
7
8  z = 1 - x + y
9
10 eq1 = f(x, y, z) + x
11 eq2 = 2 * f(x, y, z) + y
12 eq3 = f(x, y, z) + z
13
14 res = integrate(eq1 - eq2 + eq3, (y, -x - 1, 0), (x, 0,
15 1))
16 pprint(res)
17
18 # 3/2

```

9. 计算 $I = \iint_{\Sigma} ydydz - xdzdx + z^2dxdy$, 其中 Σ 为曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被平面 $z = 1, z = 2$ 所截部分的外侧 (归一法求解)



```

1  from sympy import *
2
3  init_printing(use_unicode=True, wrap_line=False)
4
5  x, y, R, theta = symbols('x y R theta')
6  z = sqrt(x**2 + y**2)
7
8  cos_alpha = z.diff(x) / sqrt(1 + z.diff(x)**2 +
9 z.diff(y)**2)
10 cos_beta = z.diff(y) / sqrt(1 + z.diff(x)**2 +
11 z.diff(y)**2)
12 cos_gamma = -1 / sqrt(1 + z.diff(x)**2 + z.diff(y)**2)
13
14 eq1 = y
15 eq2 = -x
16 eq3 = z**2

```

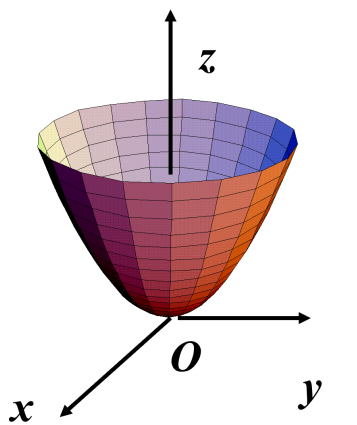


```

16 eq4 = eq1 * cos_alpha / cos_gamma + eq2 * cos_beta /
    cos_gamma + eq3
17
18 eq4 = eq4.subs(x, R * cos(theta)).subs(y, R * sin(theta))
    * Matrix(
19     [R * cos(theta), R *
    sin(theta)]) .jacobian(Matrix([theta, R])).det()
20
21 res = integrate(eq4, (theta, 0, 2 * pi), (R, 1, 2))
22
23 pprint(res)
24
25 # -15·π
26 # —————
27 # 2

```

10. 计算 $\iint_{\Sigma} x^2 y^2 z \, dx dy$, Σ : 曲面 $z = x^2 + y^2 (z \leq 1)$ 下侧
(高斯公式)



添加曲面 Σ' : $z = 1 (x^2 + y^2 \leq 1)$ 上侧

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{\Sigma+\Sigma'} - \iint_{\Sigma'} \\
 &= \iint_{\Sigma+\Sigma'} x^2 y^2 z \, dx dy - \iint_{\Sigma'} x^2 y^2 z \, dx dy \\
 &= \iiint_{\Omega} x^2 y^2 \, dV - \iint_D x^2 y^2 \, dx dy
 \end{aligned}$$

```

1 from sympy import *
2
3 init_printing(use_unicode=True, wrap_line=False)
4
5 x, y, z = symbols('x y z')
6
7 eq = x**2 * y**2

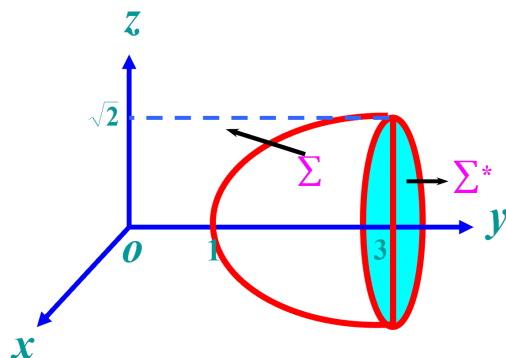
```

```

8
9 res = Integral(eq, (z, x**2 + y**2, 1), (x, -sqrt(1 -
10 y**2), sqrt(1 - y**2)),
11              (y, -1, 1)) - Integral(eq, (x, -sqrt(1 -
12 y**2), sqrt(1 - y**2)),
13              (y, -1, 1))
14 pprint(res)
15 print()
16 pprint(res.doit().simplify())
17 #
18 #          -----
19 #          /      2
20 #      1  \  1 - y
21 #      /      /
22 #      |      |
23 #      |      |      2 2
24 #      |      |      x *y  dx dy +
25 #      |      |      x *y  dz dx dy
26 #      |      |
27 #      /      /
28 #      -1      -----
29 #      2
30 #      /      2
31 #      -\  1 - y
32 #
33 #      /      2
34 #      -\  1 - y
35 #
36 #      -1      -----
37 #      2
38 #      /      2
39 #      -\  1 - y
40 #
41 #      /      2
42 #      -\  1 - y
43 #
44 #      -1      -----
45 #      2
46 #      /      2
47 #      -\  1 - y
48 #
49 #      /      2
50 #      -\  1 - y
51 #
52 #      -1      -----
53 #      2
54 #      /      2
55 #      -\  1 - y
56 #
57 #      /      2
58 #      -\  1 - y
59 #
60 #      -1      -----
61 #      2
62 #      /      2
63 #      -\  1 - y
64 #
65 #      /      2
66 #      -\  1 - y
67 #
68 #      -1      -----
69 #      2
70 #      /      2
71 #      -\  1 - y
72 #
73 #      /      2
74 #      -\  1 - y
75 #
76 #      -1      -----
77 #      2
78 #      /      2
79 #      -\  1 - y
80 #
81 #      /      2
82 #      -\  1 - y
83 #
84 #      -1      -----
85 #      2
86 #      /      2
87 #      -\  1 - y
88 #
89 #      /      2
90 #      -\  1 - y
91 #
92 #      -1      -----
93 #      2
94 #      /      2
95 #      -\  1 - y
96 #
97 #      /      2
98 #      -\  1 - y
99 #
100 #      -1      -----
101 #      2
102 #      /      2
103 #      -\  1 - y
104 #
105 #      /      2
106 #      -\  1 - y
107 #
108 #      -1      -----
109 #      2
110 #      /      2
111 #      -\  1 - y
112 #
113 #      /      2
114 #      -\  1 - y
115 #
116 #      -1      -----
117 #      2
118 #      /      2
119 #      -\  1 - y
120 #
121 #      /      2
122 #      -\  1 - y
123 #
124 #      -1      -----
125 #      2
126 #      /      2
127 #      -\  1 - y
128 #
129 #      /      2
130 #      -\  1 - y
131 #
132 #      -1      -----
133 #      2
134 #      /      2
135 #      -\  1 - y
136 #
137 #      /      2
138 #      -\  1 - y
139 #
140 #      -1      -----
141 #      2
142 #      /      2
143 #      -\  1 - y
144 #
145 #      /      2
146 #      -\  1 - y
147 #
148 #      -1      -----
149 #      2
150 #      /      2
151 #      -\  1 - y
152 #
153 #      /      2
154 #      -\  1 - y
155 #
156 #      -1      -----
157 #      2
158 #      /      2
159 #      -\  1 - y
160 #
161 #      /      2
162 #      -\  1 - y
163 #
164 #      -1      -----
165 #      2
166 #      /      2
167 #      -\  1 - y
168 #
169 #      /      2
170 #      -\  1 - y
171 #
172 #      -1      -----
173 #      2
174 #      /      2
175 #      -\  1 - y
176 #
177 #      /      2
178 #      -\  1 - y
179 #
180 #      -1      -----
181 #      2
182 #      /      2
183 #      -\  1 - y
184 #
185 #      /      2
186 #      -\  1 - y
187 #
188 #      -1      -----
189 #      2
190 #      /      2
191 #      -\  1 - y
192 #
193 #      /      2
194 #      -\  1 - y
195 #
196 #      -1      -----
197 #      2
198 #      /      2
199 #      -\  1 - y
200 #
201 #      /      2
202 #      -\  1 - y
203 #
204 #      -1      -----
205 #      2
206 #      /      2
207 #      -\  1 - y
208 #
209 #      /      2
210 #      -\  1 - y
211 #
212 #      -1      -----
213 #      2
214 #      /      2
215 #      -\  1 - y
216 #
217 #      /      2
218 #      -\  1 - y
219 #
220 #      -1      -----
221 #      2
222 #      /      2
223 #      -\  1 - y
224 #
225 #      /      2
226 #      -\  1 - y
227 #
228 #      -1      -----
229 #      2
230 #      /      2
231 #      -\  1 - y
232 #
233 #      /      2
234 #      -\  1 - y
235 #
236 #      -1      -----
237 #      2
238 #      /      2
239 #      -\  1 - y
240 #
241 #      /      2
242 #      -\  1 - y
243 #
244 #      -1      -----
245 #      2
246 #      /      2
247 #      -\  1 - y
248 #
249 #      /      2
250 #      -\  1 - y
251 #
252 #      -1      -----
253 #      2
254 #      /      2
255 #      -\  1 - y
256 #
257 #      /      2
258 #      -\  1 - y
259 #
260 #      -1      -----
261 #      2
262 #      /      2
263 #      -\  1 - y
264 #
265 #      /      2
266 #      -\  1 - y
267 #
268 #      -1      -----
269 #      2
270 #      /      2
271 #      -\  1 - y
272 #
273 #      /      2
274 #      -\  1 - y
275 #
276 #      -1      -----
277 #      2
278 #      /      2
279 #      -\  1 - y
280 #
281 #      /      2
282 #      -\  1 - y
283 #
284 #      -1      -----
285 #      2
286 #      /      2
287 #      -\  1 - y
288 #
289 #      /      2
290 #      -\  1 - y
291 #
292 #      -1      -----
293 #      2
294 #      /      2
295 #      -\  1 - y
296 #
297 #      /      2
298 #      -\  1 - y
299 #
300 #      -1      -----
301 #      2
302 #      /      2
303 #      -\  1 - y
304 #
305 #      /      2
306 #      -\  1 - y
307 #
308 #      -1      -----
309 #      2
310 #      /      2
311 #      -\  1 - y
312 #
313 #      /      2
314 #      -\  1 - y
315 #
316 #      -1      -----
317 #      2
318 #      /      2
319 #      -\  1 - y
320 #
321 #      /      2
322 #      -\  1 - y
323 #
324 #      -1      -----
325 #      2
326 #      /      2
327 #      -\  1 - y
328 #
329 #      /      2
330 #      -\  1 - y
331 #
332 #      -1      -----
333 #      2
334 #      /      2
335 #      -\  1 - y
336 #
337 #      /      2
338 #      -\  1 - y
339 #
340 #      -1      -----
341 #      2
342 #      /      2
343 #      -\  1 - y
344 #
345 #      /      2
346 #      -\  1 - y
347 #
348 #      -1      -----
349 #      2
350 #      /      2
351 #      -\  1 - y
352 #
353 #      /      2
354 #      -\  1 - y
355 #
356 #      -1      -----
357 #      2
358 #      /      2
359 #      -\  1 - y
360 #
361 #      /      2
362 #      -\  1 - y
363 #
364 #      -1      -----
365 #      2
366 #      /      2
367 #      -\  1 - y
368 #
369 #      /      2
370 #      -\  1 - y
371 #
372 #      -1      -----
373 #      2
374 #      /      2
375 #      -\  1 - y
376 #
377 #      /      2
378 #      -\  1 - y
379 #
380 #      -1      -----
381 #      2
382 #      /      2
383 #      -\  1 - y
384 #
385 #      /      2
386 #      -\  1 - y
387 #
388 #      -1      -----
389 #      2
390 #      /      2
391 #      -\  1 - y
392 #
393 #      /      2
394 #      -\  1 - y
395 #
396 #      -1      -----
397 #      2
398 #      /      2
399 #      -\  1 - y
400 #
401 #      /      2
402 #      -\  1 - y
403 #
404 #      -1      -----
405 #      2
406 #      /      2
407 #      -\  1 - y
408 #
409 #      /      2
410 #      -\  1 - y
411 #
412 #      -1      -----
413 #      2
414 #      /      2
415 #      -\  1 - y
416 #
417 #      /      2
418 #      -\  1 - y
419 #
420 #      -1      -----
421 #      2
422 #      /      2
423 #      -\  1 - y
424 #
425 #      /      2
426 #      -\  1 - y
427 #
428 #      -1      -----
429 #      2
430 #      /      2
431 #      -\  1 - y
432 #
433 #      /      2
434 #      -\  1 - y
435 #
436 #      -1      -----
437 #      2
438 #      /      2
439 #      -\  1 - y
440 #
441 #      /      2
442 #      -\  1 - y
443 #
444 #      -1      -----
445 #      2
446 #      /      2
447 #      -\  1 - y
448 #
449 #      /      2
450 #      -\  1 - y
451 #
452 #      -1      -----
453 #      2
454 #      /      2
455 #      -\  1 - y
456 #
457 #      /      2
458 #      -\  1 - y
459 #
460 #      -1      -----
461 #      2
462 #      /      2
463 #      -\  1 - y
464 #
465 #      /      2
466 #      -\  1 - y
467 #
468 #      -1      -----
469 #      2
470 #      /      2
471 #      -\  1 - y
472 #
473 #      /      2
474 #      -\  1 - y
475 #
476 #      -1      -----
477 #      2
478 #      /      2
479 #      -\  1 - y
480 #
481 #      /      2
482 #      -\  1 - y
483 #
484 #      -1      -----
485 #      2
486 #      /      2
487 #      -\  1 - y
488 #
489 #      /      2
490 #      -\  1 - y
491 #
492 #      -1      -----
493 #      2
494 #      /      2
495 #      -\  1 - y
496 #
497 #      /      2
498 #      -\  1 - y
499 #
500 #      -1      -----
501 #      2
502 #      /      2
503 #      -\  1 - y
504 #
505 #      /      2
506 #      -\  1 - y
507 #
508 #      -1      -----
509 #      2
510 #      /      2
511 #      -\  1 - y
512 #
513 #      /      2
514 #      -\  1 - y
515 #
516 #      -1      -----
517 #      2
518 #      /      2
519 #      -\  1 - y
520 #
521 #      /      2
522 #      -\  1 - y
523 #
524 #      -1      -----
525 #      2
526 #      /      2
527 #      -\  1 - y
528 #
529 #      /      2
530 #      -\  1 - y
531 #
532 #      -1      -----
533 #      2
534 #      /      2
535 #      -\  1 - y
536 #
537 #      /      2
538 #      -\  1 - y
539 #
540 #      -1      -----
541 #      2
542 #      /      2
543 #      -\  1 - y
544 #
545 #      /      2
546 #      -\  1 - y
547 #
548 #      -1      -----
549 #      2
550 #      /      2
551 #      -\  1 - y
552 #
553 #      /      2
554 #      -\  1 - y
555 #
556 #      -1      -----
557 #      2
558 #      /      2
559 #      -\  1 - y
560 #
561 #      /      2
562 #      -\  1 - y
563 #
564 #      -1      -----
565 #      2
566 #      /      2
567 #      -\  1 - y
568 #
569 #      /      2
570 #      -\  1 - y
571 #
572 #      -1      -----
573 #      2
574 #      /      2
575 #      -\  1 - y
576 #
577 #      /      2
578 #      -\  1 - y
579 #
580 #      -1      -----
581 #      2
582 #      /      2
583 #      -\  1 - y
584 #
585 #      /      2
586 #      -\  1 - y
587 #
588 #      -1      -----
589 #      2
590 #      /      2
591 #      -\  1 - y
592 #
593 #      /      2
594 #      -\  1 - y
595 #
596 #      -1      -----
597 #      2
598 #      /      2
599 #      -\  1 - y
600 #
601 #      /      2
602 #      -\  1 - y
603 #
604 #      -1      -----
605 #      2
606 #      /      2
607 #      -\  1 - y
608 #
609 #      /      2
610 #      -\  1 - y
611 #
612 #      -1      -----
613 #      2
614 #      /      2
615 #      -\  1 - y
616 #
617 #      /      2
618 #      -\  1 - y
619 #
620 #      -1      -----
621 #      2
622 #      /      2
623 #      -\  1 - y
624 #
625 #      /      2
626 #      -\  1 - y
627 #
628 #      -1      -----
629 #      2
630 #      /      2
631 #      -\  1 - y
632 #
633 #      /      2
634 #      -\  1 - y
635 #
636 #      -1      -----
637 #      2
638 #      /      2
639 #      -\  1 - y
640 #
641 #      /      2
642 #      -\  1 - y
643 #
644 #      -1      -----
645 #      2
646 #      /      2
647 #      -\  1 - y
648 #
649 #      /      2
650 #      -\  1 - y
651 #
652 #      -1      -----
653 #      2
654 #      /      2
655 #      -\  1 - y
656 #
657 #      /      2
658 #      -\  1 - y
659 #
660 #      -1      -----
661 #      2
662 #      /      2
663 #      -\  1 - y
664 #
665 #      /      2
666 #      -\  1 - y
667 #
668 #      -1      -----
669 #      2
670 #      /      2
671 #      -\  1 - y
672 #
673 #      /      2
674 #      -\  1 - y
675 #
676 #      -1      -----
677 #      2
678 #      /      2
679 #      -\  1 - y
680 #
681 #      /      2
682 #      -\  1 - y
683 #
684 #      -1      -----
685 #      2
686 #      /      2
687 #      -\  1 - y
688 #
689 #      /      2
690 #      -\  1 - y
691 #
692 #      -1      -----
693 #      2
694 #      /      2
695 #      -\  1 - y
696 #
697 #      /      2
698 #      -\  1 - y
699 #
700 #      -1      -----
701 #      2
702 #      /      2
703 #      -\  1 - y
704 #
705 #      /      2
706 #      -\  1 - y
707 #
708 #      -1      -----
709 #      2
710 #      /      2
711 #      -\  1 - y
712 #
713 #      /      2
714 #      -\  1 - y
715 #
716 #      -1      -----
717 #      2
718 #      /      2
719 #      -\  1 - y
720 #
721 #      /      2
722 #      -\  1 - y
723 #
724 #      -1      -----
725 #      2
726 #      /      2
727 #      -\  1 - y
728 #
729 #      /      2
730 #      -\  1 - y
731 #
732 #      -1      -----
733 #      2
734 #      /      2
735 #      -\  1 - y
736 #
737 #      /      2
738 #      -\  1 - y
739 #
740 #      -1      -----
741 #      2
742 #      /      2
743 #      -\  1 - y
744 #
745 #      /      2
746 #      -\  1 - y
747 #
748 #      -1      -----
749 #      2
750 #      /      2
751 #      -\  1 - y
752 #
753 #      /      2
754 #      -\  1 - y
755 #
756 #      -1      -----
757 #      2
758 #      /      2
759 #      -\  1 - y
760 #
761 #      /      2
762 #      -\  1 - y
763 #
764 #      -1      -----
765 #      2
766 #      /      2
767 #      -\  1 - y
768 #
769 #      /      2
770 #      -\  1 - y
771 #
772 #      -1      -----
773 #      2
774 #      /      2
775 #      -\  1 - y
776 #
777 #      /      2
778 #      -\  1 - y
779 #
780 #      -1      -----
781 #      2
782 #      /      2
783 #      -\  1 - y
784 #
785 #      /      2
786 #      -\  1 - y
787 #
788 #      -1      -----
789 #      2
790 #      /      2
791 #      -\  1 - y
792 #
793 #      /      2
794 #      -\  1 - y
795 #
796 #      -1      -----
797 #      2
798 #      /      2
799 #      -\  1 - y
800 #
801 #      /      2
802 #      -\  1 - y
803 #
804 #      -1      -----
805 #      2
806 #      /      2
807 #      -\  1 - y
808 #
809 #      /      2
810 #      -\  1 - y
811 #
812 #      -1      -----
813 #      2
814 #      /      2
815 #      -\  1 - y
816 #
817 #      /      2
818 #      -\  1 - y
819 #
820 #      -1      -----
821 #      2
822 #      /      2
823 #      -\  1 - y
824 #
825 #      /      2
826 #      -\  1 - y
827 #
828 #      -1      -----
829 #      2
830 #      /      2
831 #      -\  1 - y
832 #
833 #      /      2
834 #      -\  1 - y
835 #
836 #      -1      -----
837 #      2
838 #      /      2
839 #      -\  1 - y
840 #
841 #      /      2
842 #      -\  1 - y
843 #
844 #      -1      -----
845 #      2
846 #      /      2
847 #      -\  1 - y
848 #
849 #      /      2
850 #      -\  1 - y
851 #
852 #      -1      -----
853 #      2
854 #      /      2
855 #      -\  1 - y
856 #
857 #      /      2
858 #      -\  1 - y
859 #
860 #      -1      -----
861 #      2
862 #      /      2
863 #      -\  1 - y
864 #
865 #      /      2
866 #      -\  1 - y
867 #
868 #      -1      -----
869 #      2
870 #      /      2
871 #      -\  1 - y
872 #
873 #      /      2
874 #      -\  1 - y
875 #
876 #      -1      -----
877 #      2
878 #      /      2
879 #      -\  1 - y
880 #
881 #      /      2
882 #      -\  1 - y
883 #
884 #      -1      -----
885 #      2
886 #      /      2
887 #      -\  1 - y
888 #
889 #      /      2
890 #      -\  1 - y
891 #
892 #      -1      -----
893 #      2
894 #      /      2
895 #      -\  1 - y
896 #
897 #      /      2
898 #      -\  1 - y
899 #
900 #      -1      -----
901 #      2
902 #      /      2
903 #      -\  1 - y
904 #
905 #      /      2
906 #      -\  1 - y
907 #
908 #      -1      -----
909 #      2
910 #      /      2
911 #      -\  1 - y
912 #
913 #      /      2
914 #      -\  1 - y
915 #
916 #      -1      -----
917 #      2
918 #      /      2
919 #      -\  1 - y
920 #
921 #      /      2
922 #      -\  1 - y
923 #
924 #      -1      -----
925 #      2
926 #      /      2
927 #      -\  1 - y
928 #
929 #      /      2
930 #      -\  1 - y
931 #
932 #      -1      -----
933 #      2
934 #      /      2
935 #      -\  1 - y
936 #
937 #      /      2
938 #      -\  1 - y
939 #
940 #      -1      -----
941 #      2
942 #      /      2
943 #      -\  1 - y
944 #
945 #      /      2
946 #      -\  1 - y
947 #
948 #      -1      -----
949 #      2
950 #      /      2
951 #      -\  1 - y
952 #
953 #      /      2
954 #      -\  1 - y
955 #
956 #      -1      -----
957 #      2
958 #      /      2
959 #      -\  1 - y
960 #
961 #      /      2
962 #      -\  1 - y
963 #
964 #      -1      -----
965 #      2
966 #      /      2
967 #      -\  1 - y
968 #
969 #      /      2
970 #      -\  1 - y
971 #
972 #      -1      -----
973 #      2
974 #      /      2
975 #      -\  1 - y
976 #
977 #      /      2
978 #      -\  1 - y
979 #
980 #      -1      -----
981 #      2
982 #      /      2
983 #      -\  1 - y
984 #
985 #      /      2
986 #      -\  1 - y
987 #
988 #      -1      -----
989 #      2
990 #      /      2
991 #      -\  1 - y
992 #
993 #      /      2
994 #      -\  1 - y
995 #
996 #      -1      -----
997 #      2
998 #      /      2
999 #      -\  1 - y
1000 #

```

11. 计算 $I = \iint_{\Sigma} (8y + 1)x \, dydz + 2(1 - y^2) \, dzdx - 4yz \, dxdy$, 其中 Σ 是由曲线 $\begin{cases} z = \sqrt{y-1} \\ x = 1 \end{cases} (1 \leq y \leq 3)$ 绕 y 轴旋转一周所成的曲面, 它的法向量与 y 轴正向的夹角恒大于 $\frac{\pi}{2}$ (高斯公式)



添加曲面 Σ' : $y = 3(x^2 + z^2 \leq 2)$ 的外侧

$$I = \iint_{\Sigma + \Sigma'} - \iint_{\Sigma}'$$

$$= \iint_{\Sigma + \Sigma'} [(8y + 1)x \, dydz + 2(1 - y^2) \, dzdx - 4yz \, dxdy] - \iint_D 2(1 - 3^2) \, dzdx$$

```

1  from sympy import *
2
3  init_printing(use_unicode=False, wrap_line=False)
4
5  x, y, z = symbols('x y z')
6
7  eq1 = (8 * y + 1) * x
8  eq2 = 2 * (1 - y**2)
9  eq3 = -4 * y * z
10
11 eq_ = eq1.diff(x) + eq2.diff(y) + eq3.diff(z)
12
13 res = Integral(eq_, (y, 1 + x**2 + z**2, 3),
14               (x, -sqrt(2 - z**2), sqrt(2 - z**2)),
15               (z, -sqrt(2), sqrt(2))) + 32 * pi
16
17 pprint(res)
18 print()
19 pprint(res.doit().simplify())
20
21 #
22 #      ---      /      2
23 #      \ / 2    \ /  2 - z      3
24 #      /          /          /
25 #      |          |          |
26 #      |          |          |      1 dy dx dz + 32 * pi
27 #      |          |          |
28 #      /          /          /
29 #      ---      -----  2      2

```

```

30 # -\ / 2      /      2 x + z + 1
31 #      -\ / 2 - z
32
33 # 34 · π

```

无穷级数

性质:

- 收敛+收敛 \implies 收敛
- 收敛+发散 \implies 发散
- 发散+发散 \implies 未必发散
- 收敛级数 加括号后所成的级数仍收敛于原级数的和, 但收敛级数去括号后所成的级数不一定收敛

收敛级数的必要条件:

设收敛级数 $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

柯西审联原理 (用做证明题):

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 对 } \forall p \in \mathbb{N}_+, \text{ 有}$
 $|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon$

P 收敛级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}, \quad (P > 1)$$

调和级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

调和级数和 P 收敛级数是两个常用的比较级数

比较审敛法:

设两正向级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$, 则有

- 当 $0 < l < \infty$ 时, 两个级数同时收敛或发散
- 当 $l = 0$ 时, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛

- 当 $l = \infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散

比值审敛法:

设 $\sum u_n$ 为正向级数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 则:

- 当 $\rho < 1$ 时, 级数收敛
- 当 $\rho > 1$ 或 $\rho = \infty$ 时, 级数发散

注意: 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ 时, 级数可能收敛也可能发散

1. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n}$ 的值

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n} \\ &= \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(n+2) - n}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] \end{aligned}$$

```

1  from sympy import *
2
3  init_printing(use_unicode=False, wrap_line=False)
4
5  n = symbols("n")
6
7  eq = 1 / (n**3 + 3 * n**2 + 2 * n)
8
9  res = Sum(eq, (n, 1, oo))
10
11 pprint(res)
12 print()
13 pprint(res.doit().simplify())
14
15 #      oo
16 #  ----
17 # \      `
18 # \              1
19 # \  -----
20 # /      3      2
21 # /      n  + 3*n  + 2*n

```

```

22 # / ___,
23 # n = 1
24
25 # 1/4

```

2. 计算 $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$

$$\begin{aligned}
 & S_n - \frac{1}{2}S_n \\
 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \cdots + \frac{2n-1}{2^{n+1}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}
 \end{aligned}$$

```

1  from sympy import *
2
3  init_printing(use_unicode=False, wrap_line=False)
4
5  n = symbols("n")
6
7  eq = (2 * n - 1) / 2**n
8
9  res = Sum(eq, (n, 1, oo))
10
11 pprint(res.simplify())
12 print()
13 pprint(res.doit().simplify())
14
15 #   oo
16 #   ___
17 #   \  `
18 #   \   -n
19 #   /   2  *(2*n - 1)
20 #   / __,
21 # n = 1
22
23 # 3

```

3. 利用柯西审敛原理判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 敛散性

对 $\forall p \in N_+$, 有:

$$\begin{aligned}
& |u(n+1) + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| \\
&= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\
&< \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{n+p-1}{n+p} - \frac{n+p}{n+p+1}\right) \\
&= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

4. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ 的敛散性

(比较审敛法, 调和级数)

\because

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ 发散}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \text{ 发散}$$

5. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n^2})$ 的敛散性

(比较审敛法, P 收敛级数)

\because

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 收敛}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n^2}) \text{ 收敛}$$

6. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - n}$ 的敛散性

(比较收敛法, 等比级数)

\because

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3^n - n}}{\frac{1}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{n}{3^n}} = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \text{ 收敛}$$

$$\therefore \frac{1}{3^n - n} \text{ 收敛}$$

7. 判别 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n^3-2n^2+n}$ 收敛性

\because

$$\lim_{n=1} \frac{\frac{3n-2}{n^3-2n^2+n}}{\frac{1}{n^2}} = 3, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{收敛}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n^3-2n^2+n} \text{收敛}$$