

拉格朗日乘数法

• 📅: 2022-03-31

拉格朗日乘数法

理论

例题

消去 λ

利用对称性(容易漏解)

利用齐次性解 λ (需要技巧)

转换为无条件极值

理论

$$f(x, y) \quad \varphi(x_0, y_0) = 0$$

$$\begin{cases} f_x + \lambda \varphi_x = 0 \\ f_y + \lambda \varphi_y = 0 \end{cases}$$

$z = f(x, y)$ 在 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值点

1. $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$
2. $L_x = L_y = L_\lambda = 0$
3. 解方程组所得 (x_0, y_0) 就是可能的极值点

推广到三元

$u = f(x, y, z)$ 在 $\varphi(x, y, z) = 0$ 下的极值

1. $L(x, y, z, \lambda) = f + \lambda \varphi$
2. $L_x = L_y = L_z = L_\lambda = 0$

推广到多条件

$$u = f(x, y, z) \text{ 在 } \begin{cases} \varphi(x, y, z) = 0 \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

1. $L(x, y, z, \lambda, \mu) = f + \lambda \varphi + \mu \psi$
2. $L_x = L_y = L_z = L_\lambda = L_\mu = 0$

例题

消去 λ

1. 求 $f(x, y, z) = xyz$ 在条件 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}$ ($x, y, z, a > 0$)条件下的最小值

设拉式函数

$$L(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{a}\right)$$

$$\begin{cases} L_x = yz - \frac{\lambda}{x^2} = 0 \\ L_y = yz - \frac{\lambda}{y^2} = 0 \\ L_z = yz - \frac{\lambda}{z^2} = 0 \\ L_\lambda = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{a} = 0 \end{cases}$$

$$x = y = z = 3a$$

2. 求 $u = xy + 2yz$ 在 $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 下的最大

作拉式函数

$$L(x, y, z, \lambda) = xy + 2yz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 10)$$

$$\begin{cases} L_x = y - 2\lambda x = 0 \\ L_y = x + 2z - 2\lambda y = 0 \\ L_z = 2y - 2\lambda z = 0 \\ L_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{y}{2x} = \frac{x + 2y}{2y} = \frac{y}{z}$$

解得:

$$\begin{aligned} & (1, \sqrt{5}, 2) \quad (-1, \sqrt{5}, -2) \quad (1, -\sqrt{5}, 2) \\ & (-1, -\sqrt{5}, -2) \quad (2\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) \quad (-2\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$u_{\max} = 5\sqrt{5}, u_{\min} = -5\sqrt{5}$$

3. 求 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在 $z = x^2 + y^2$ 和 $x + y + z = 4$ 下的最大值和最小值

作拉式函数:

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x^2 + y^2 - z) - \mu(x + y + z - 4)$$

$$\begin{cases} L_x = 2(1 - \lambda)x - \mu = 0 \\ L_y = 2(1 - \lambda)y - \mu = 0 \\ L_z = 2z + \lambda - \mu = 0 \\ L_\lambda = x^2 + y^2 - z = 0 \\ L_\mu = x + y + z - 4 \end{cases}$$

$$(x - y)(1 - \lambda) = 0$$

因为 $\lambda = -1$ 时 $\mu = 0$, 所以 $x = y$

所以解得: $(1, 1, 2)$ $(-2, -2, 8)$

利用对称性(容易漏解)

1. 求 $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$ 在条件 $x^2 + y^2 = 1$ 下的最值

作拉式函数:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - x - y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$L_x = 2(1 - \lambda)x - 1 = 0$$

$$L_y = 2(1 - \lambda)y - 1 = 0$$

$$L_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

观察并猜测 $x = y$

解得:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

利用齐次性解 λ (需要技巧)

• 如果**目标函数和约束条件**是关于 x 和 y 的**齐次函数**, 那么可以凑

$x \frac{\partial L}{\partial x} + y \frac{\partial L}{\partial y} + z \frac{\partial L}{\partial z}$ 得到目标函数与 λ 之间的关系

1. 求中心在坐标原点的椭圆 $x^2 - 4xy + 5y^2 = 1$ 的长半轴和短半轴

问题归结为求 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $x^2 - 4xy + 5y^2 = 1$ 下的最大值和最小值

作拉式函数:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x^2 - 4xy + 5y^2 - 1)$$

$$L_x = 2(1 - \lambda)x + 4\lambda y = 0 \quad (1)$$

$$L_y = 2(1 - 5\lambda)y - 4\lambda x = 0 \quad (2)$$

$$L_\lambda = x^2 - 4xy + 5y^2 - 1 = 0 \quad (3)$$

(1) $\times \frac{1}{2} + (2) \times \frac{y}{2}$ 得:

$$x^2 + y^2 - \lambda(x^2 - 4xy + 5y^2) = 0 \quad (4)$$

将(3)代入(4)中得:

$$x^2 + y^2 = \lambda$$

(1)(2)式得:

已知 x, y 有非零解, 即:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2\lambda \\ -2\lambda & 1 - 5\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

故:

$$a = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}, \quad b = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}$$

• **欧拉定理:**

设 $f(x, y)$ 是 k 次齐次函数, 即 $\forall \lambda \neq 0$, 总有 $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$,
且 $f(x, y)$ 有一阶偏导, 那么 $xf'_x + yf'_y = kf(x, y)$

转换为无条件极值

• 把条件代入目标函数当中, 降低维度, 减少未知数个数, 转化为无条件极值

1. 求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2$ 在条件 $x^2 + y^2 = 4$ 下的最大值和最小值

将 $y^2 = 4 - x^2$ 代入 $f(x, y)$ 中, 得:

$$\begin{aligned} h(x) &= x^2 + 2(4 - x^2) - x^2(4 - x^2) \\ &= x^4 - 5x^2 + 8 \end{aligned}$$

$$h'(x) = 4x^3 - 10x$$

驻点为:

$$(0, \pm 2) \quad \left(\pm \sqrt{\frac{5}{2}}, \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$