

现根据 $a \cdot x = \frac{x_1 - \frac{u}{c} \tau_1}{k_u}$ 、 $\tau = \frac{\tau_1 - \frac{u}{c} x_1}{k_u}$ 以及 $\frac{x}{\tau} = \frac{w_x}{c}$ ，我们有 $\frac{w_x}{c} = \frac{x}{\tau} = \frac{x_1 - \frac{u}{c} \tau_1}{\tau_1 - \frac{u}{c} x_1} = \frac{\frac{x_1}{\tau_1} - \frac{u}{c}}{1 - \frac{u}{c} \frac{x_1}{\tau_1}} = \frac{\frac{x_1}{\tau_1} - \frac{x_0}{\tau_0}}{1 - \frac{x_0}{\tau_0} \frac{x_1}{\tau_1}}$ ，

即有 $\frac{x}{\tau} = \frac{\frac{x_1}{\tau_1} - \frac{x_0}{\tau_0}}{1 - \frac{x_0}{\tau_0} \frac{x_1}{\tau_1}}$ 。在时空图这节伊始，我们曾规定了 A 系的 x 轴对 B 系的 x_0 轴的逆时针旋转角 δ 和 A 系的 τ 轴对 B 系的 τ_0 轴的顺时针旋转角 δ 满足 $\tan \delta = \frac{u}{c}$ ，现在我们利用这一规则，进行如下表示 $\tan \delta_0 = \frac{u}{c} = \frac{x_0}{\tau_0}$ 、 $\tan \delta_1 = \frac{v_x}{c} = \frac{x_1}{\tau_1}$ 。

于是 $\frac{x}{\tau} = \frac{\frac{x_1}{\tau_1} - \frac{x_0}{\tau_0}}{1 - \frac{x_0}{\tau_0} \frac{x_1}{\tau_1}} = \frac{\tan \delta_1 - \tan \delta_0}{1 - \tan \delta_1 \cdot \tan \delta_0} = \frac{\sin \delta_1 \cdot \cos \delta_0 - \sin \delta_0 \cdot \cos \delta_1}{\cos \delta_1 \cdot \cos \delta_0 - \sin \delta_1 \cdot \sin \delta_0} = \frac{\sin(\delta_1 - \delta_0)}{\cos(\delta_1 + \delta_0)}$ ，这个狭义速度变

换式/速度相加定理(x 方向)的等效方程 $\frac{x}{\tau} = \frac{\sin(\delta_1 - \delta_0)}{\cos(\delta_1 + \delta_0)}$ 是如何在时空图中体现出来的呢？

下面我们来对此进行一番考察：在 C 系的黑箭头世界线上取一点 C，分别向 A 系的 τ 轴、 x 轴投影，所得的两个红色投影点 A_1 、 A_2 再分别向 B 系的 τ_0 轴、 x_0 轴投影，对应得到两个绿色投影点 B_1 、 B_2 ：此番操作之后，设 A_1 在 τ 轴上的读数为 τ ， A_2 在 x 轴上的读数为 x ，并设 B_1 在 τ_0 轴上的读数为 τ_b ， B_2 在 x_0 轴上的读数为 x_b 。

那么根据之前对刻度密度的介绍可知 $\tau_b = \frac{1}{k_u} \tau$ ， $x_b = \frac{1}{k_u} x$ 。

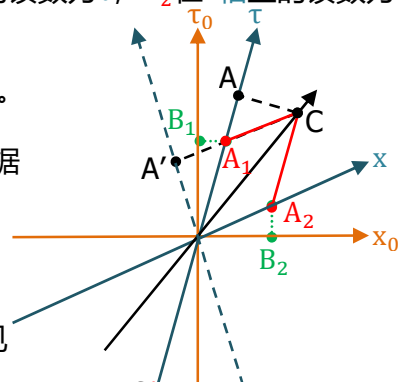
于是 $\frac{x}{\tau} = \frac{\frac{x_b}{\tau_b}}{\frac{\tau}{\tau_b}} = \frac{x_b}{\tau_b} \cdot \frac{\tau_b}{\tau} = \frac{OB_2}{OB_1}$ 。由于 $\angle B_1 O A_1 = \angle B_2 O A_2 = \delta_0$ ，则根据

两个 $Rt \triangle B_1 O A_1$ 与 $Rt \triangle B_2 O A_2$ 的相似关系可知 $\frac{OB_2}{OB_1} = \frac{OA_2}{OA_1}$ 。

又因平行四边形中 $CA_1 = OA_2$ ，于是 $\frac{OA_2}{OA_1} = \frac{CA_1}{OA_1}$ 。综上，我

们将这些式子一个个地写成连等式，便可以清楚地看见

整个推导过程及最终结果： $\frac{x}{\tau} = \frac{\frac{x_b}{\tau_b}}{\frac{\tau}{\tau_b}} = \frac{x_b}{\tau_b} \cdot \frac{\tau_b}{\tau} = \frac{OB_2}{OB_1} = \frac{OA_2}{OA_1} = \frac{CA_1}{OA_1}$ ，即最终的 $\frac{x}{\tau} = \frac{CA_1}{OA_1}$ 。至此我们还需要再做两条辅助线，帮助我们继续整个推理过程。



如图地，延长 CA_1 与 τ 轴关于 τ_0 轴的镜像(蓝色虚线)相交于点 A' ，则由于 $\angle \tau_0 - O - x_0 = \pi/2$ ，加上镜像所导致的 $\angle B_1 O A' = \angle B_1 O A_1$ (注：若指的是旋转角的话，则 $\angle B_1 O A' = -\delta_0$ ，不过这里 $\angle B_1 O A'$ 和 $\angle B_1 O A_1$ 仅仅是通常意义上的角度)，以及之前推导 $Rt \triangle$ 相似所用的 $\angle B_1 O A_1 = \angle B_2 O A_2$ ，于是我们有 $\angle B_1 O A' = \angle B_2 O A_2$ ，并且因此 τ 轴关于 τ_0 轴的镜像(蓝色虚线) $\perp x$ 轴，即 $CA' \perp \tau$ 轴镜像；现在我们再过 C 点作 $CA \perp \tau$ 轴于 A，可知现在的 O、C、A、 A' 四点共圆，于是非常容易地有 $Rt \triangle CA_1 A$ 相似于 $Rt \triangle O A_1 A'$ ，于是 $\frac{CA_1}{OA_1} = \frac{CA}{OA'}$ ，

又因 $\frac{CA}{OA'} = \frac{\frac{CA}{OC}}{\frac{OA'}{OC}} = \frac{\sin(\delta_1 - \delta_0)}{\cos(\delta_1 - (-\delta_0))} = \frac{\sin(\delta_1 - \delta_0)}{\cos(\delta_1 + \delta_0)}$ ，于是根据之前的 $\frac{x}{\tau} = \frac{CA_1}{OA_1}$ ，有现在的最终表达式：

$\frac{x}{\tau} = \frac{CA_1}{OA_1} = \frac{CA}{OA'} = \frac{\sin(\delta_1 - \delta_0)}{\cos(\delta_1 + \delta_0)}$ ，即我们不通过代数手段，仅仅利用时空图中的几何关系信息，